ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 2 (8), стр. 502–508 © 2004

СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АНОМАЛЬНО-ДИФФУЗИОННОЙ АСИМПТОТИКОЙ

А. И. Саичев, С. Г. Уткин [*]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 12 марта 2004 г.

Рассматриваются процессы «квазианомальных» случайных блужданий, имеющие линейно-диффузионную асимптотику на больших временах и подчиняющиеся аномально-диффузионным закономерностям на промежуточных (также достаточно больших относительно микроскопических масштабов) временах. Вводится обобщенное дробно-экспоненциальное распределение с ограниченными моментами. Показано, что случайные блуждания с подобным распределением времени ожидания скачков демонстрируют как нормальную, так и аномальную диффузионные асимптотики. С помощью численного счета подтверждена справедливость аналитических расчетов.

PACS: 02.70.Rr, 05.30.Pr, 05.40.Fb

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появилось множество работ, посвященных анализу аномальной диффузии (см., к примеру, обзор [1], а также работы [2, 3]). В отличие от линейной диффузии, она характеризуется нелинейным ростом среднего квадрата диффузионного процесса со временем. Чаще всего рост подчиняется степенному закону:

$$\langle X^2(t)\rangle \propto t^{\gamma},$$

возникающему из-за нарушения закона больших чисел и (или) центральной предельной теоремы. Явления аномальной диффузии затрагивают широкий спектр физических проблем, таких как перенос заряда в аморфных полупроводниках [4–9], геометрия фракталов [10], квантовая оптика [11, 12], турбулентная диффузия Ричардсона [13–15], хаотическая динамика гамильтоновых систем [16] и т. д. Адекватным аппаратом описания асимптотического (на больших временах и в больших пространственных масштабах) поведения подобных стохастических процессов служат кинетические уравнения в дробных частных производных. Поэтому одна из целей данной работы состоит в конструировании модельных случайных процессов, адекватно описывающих физические процессы аномальной диффузии, вероятностные распределения которых являются точными решениями упомянутых уравнений в частных дробных производных.

Кроме чисто аномально-диффузионных процессов, для многочисленных приложений представляют интерес до сих пор практически неизученные «квазианомальные» случайные процессы, подчиняющиеся на очень больших временах закону больших чисел и центральной предельной теореме, а на больших промежуточных временах демонстрирующие универсальные асимптотики, характерные для аномально-диффузионных процессов. В данной работе исследуются подобные «квазианомальные» процессы случайных блужданий, проявляющие промежуточный аномально-диффузионный характер и подчиняющиеся линейному закону диффузии при $t \to \infty$.

2. МОДЕЛЬ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Рассмотрим типичный процесс случайных блужданий $X(t)$, подчиняющийся простейшему стохастическому уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_k h_k \delta(t - t_k).$$

[*] E-mail: sergei_utkin@mail.ru

Будем интерпретировать процесс $X(t)$ как координату частицы, совершающей скачки h_k в случайные моменты времени t_k. Допустим, что случайные величины h_k и $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ взаимно независимы, причем h_k имеют одинаковое распределение $w(x)$, а интервалы между скачками τ_k распределены по закону $f(\tau)$. Очевидно, что

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} h_k,$$

где $N(t)$ — число скачков к моменту t. Функция $N(t)$ является функцией, обратной времени n-го скачка $T(n)$,

$$t = T(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{N} \tau_k, & n \geq 1. \end{cases}$$

Иными словами, $N(t)$ и $T(n)$ связаны соотношением эквивалентности:

$$N(t) \geq n \quad \leftrightarrow \quad T(n) < t\,. \tag{1}$$

Выведем уравнение для плотности вероятностей $W(x;t)$ процесса $X(t)$. Начнем вывод с обсуждения характеристической функции

$$\Theta(u;t) = \langle \exp(iuX(t))\rangle = \left\langle \exp\left(iu\sum_{k=1}^{N(t)} h_k\right)\right\rangle .$$

Вычисление последнего среднего затруднено тем, что усредняемая сумма содержит случайное число $N(t)$ слагаемых. Поэтому удобно перейти от функции $n = N(t)$ к более изученной обратной случайной функции $t = T(n)$. Для этого используем следующее разбиение единицы:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\chi(z-n) - \chi(z-n-1)\right], \quad z > 0,$$

где $\chi(z)$ — единичная функция Хевисайда. Соответственно, искомая характеристическая функция принимает вид

$$\Theta(u;t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \exp\left(iu\sum_{k=1}^{n} h_k\right) \Pi_n(N(t))\right\rangle .$$

Выразив с помощью соотношения (1) функции $\Pi_n(N(t))$ через случайные времена $T(n)$, будем иметь

$$\Theta(u;t) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \exp\left(iu\sum_{k=1}^{n} h_k\right) \left[\chi(t-T(n)) - \chi(t-T(n+1))\right]\right\rangle .$$

Применив к обеим частям равенства преобразование Лапласа и просуммировав полученную геометрическую прогрессию, для лаплас-образа $\hat{\Theta}(u;s)$ характеристической функции имеем так называемое уравнение Монтролла–Вейсса [17]:

$$\hat{\Theta}(u;s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s\left[1 - \tilde{w}(u)\hat{f}(s)\right]}\,. \tag{2}$$

Здесь $\hat{f}(s)$ — лаплас-образ распределения времени между скачками, $\tilde{w}(u)$ — характеристическая функция величины скачков. Из последнего равенства видно, что $\hat{\Theta}(u;s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\hat{f}(s)}\,\hat{\Theta}(u;s) - \tilde{w}(u)\hat{\Theta}(u;s) = \frac{1 - \hat{f}(s)}{s\hat{f}(s)}\,. \tag{3}$$

Ниже это уравнение при разных видах распределений $f(\tau)$ и $w(x)$ используется для вывода как классического уравнения Колмогорова–Феллера, так и кинетических уравнений аномальной диффузии. Кроме того, на основе данного уравнения прослеживается трансформация аномальной диффузии в линейную для квазианомальных случайных блужданий.

3. ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

При моделировании аномальных блужданий полезным оказывается дробно-экспоненциальное распределение $\varphi_\beta(\tau)$ интервалов τ_k, интегральное представление которого будет приведено далее. Его лаплас-образ имеет вид

$$\hat{\varphi}_\beta(s) = \frac{1}{1 + s^\beta}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{4}$$

Соответствующее распределение выражается через функцию Миттаг–Леффлера:

$$E_\beta(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int\limits_{\mathcal{H}} \frac{e^y y^{\beta-1}}{y^\beta - z}dy\,,$$

где интегрирование ведется по петле Ганкеля $\mathcal{H}$, охватывающей отрицательную часть действительной оси [18, 19], а именно

$$\varphi_\beta(\tau) = -\frac{1}{\tau}D(-\tau^\beta)\chi(\tau), \quad D_\beta(z) = \beta z\frac{dE_\beta(z)}{dz}\,.$$

Нетрудно получить следующее интегральное представление данного распределения:

$$\varphi_\beta(\tau) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\tau^{\beta-1}\int\limits_0^\infty \frac{x^\beta e^{-x}dx}{x^{2\beta} + \tau^{2\beta} + 2x^\beta\tau^\beta\cos(\pi\beta)},$$

$$0 < \beta < 1,$$

имеющего асимптотики $\tau^{\beta-1}$ при $\tau \to 0$ и $\tau^{-\beta-1}$ при $\tau \to \infty$ [19]. Последняя степенная асимптотика дробно-экспоненциального распределения приводит к тому, что его среднее бесконечно ($\langle\tau\rangle = \infty$). В свою очередь, нарушаются условия закона больших чисел для случайной функции $T(N)$, а вероятностное распределение процесса $X(t)$ подчиняется уравнению в частных дробных производных. Действительно, подставив (4) в (3), приходим к обобщенному уравнению Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial^\beta W(x;t)}{\partial t^\beta} + [W(x;t) - W(x;t) * w(x)] = \\ = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\chi(t)\delta(x),$$

содержащему производную дробного порядка по времени. Заметим еще, что на больших временах интегральный оператор по x можно заменить на дифференциальный, а уравнение Колмогорова–Феллера превращается в уравнение дробной диффузии [17, 19]:

$$\frac{\partial^\beta W(x;t)}{\partial t^\beta} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\chi(t)\delta(x).$$

Здесь

$$\sigma^2 = \langle h^2 \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 w(x) dx$$

— дисперсия величины скачков.

4. ОБОБЩЕННОЕ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

С точки зрения физиков, упомянутая выше бесконечность среднего времени ожидания между скачками процесса $X(t)$ снижает ценность дробно-экспоненциального распределения, поскольку наблюдаемые случайные интервалы τ_k, как правило, обладают конечным средним. С другой стороны, именно бесконечность среднего ведет к нарушению закона больших чисел и возникновению аномальной диффузии. Ниже мы покажем, что и в случае ограниченного среднего физические системы могут проявлять аномально-диффузионный характер. При этом будем опираться на распределение $\varphi(\tau)$ с лаплас-образом

$$\hat{\varphi}_{\beta,\delta}(s) = \frac{1+\delta^\beta}{1+(s+\delta)^\beta}\,. \qquad (5)$$

Легко показать, что распределение с лаплас-образом (5) выражается через дробно-экспоненциальное соотношением

$$\varphi_{\beta,\delta}(\tau) = (1+\delta^\beta)e^{-\delta\tau}\varphi_\beta(\tau).$$

Все его (в дальнейшем $\varphi(\tau)$) моменты ограничены, а при $\delta \to 0$ оно переходит в дробно-экспоненциальное распределение (4). Отметим, что такие распределения до сих пор не встречались в работах по аномальной диффузии. Хотя, например, Чукбар и др. [2, 3], рассматривая случай расходящихся моментов смещения и времени ожидания, оговаривают, что « ... в случае их конечности эффективное уравнение переноса асимптотически (т. е. на макроскопических временах $t \gg \langle t \rangle$ и пространственных масштабах $|x| \gg \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) переходит в классическое уравнение диффузии».

Заметим, что (5) — это лаплас-образ

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{w^\beta + \delta^\beta}{w^\beta + (s+\delta)^\beta},$$

приведенный к безразмерному виду, в котором параметры $1/w$ и $1/\delta$ имеют размерность времени. Поведение системы на временах, меньших $1/w$, зависит от тонкой структуры распределений $\varphi(\tau)$ и $w(x)$ и не отражает универсальных законов диффузии. С другой стороны, если величина δ мала настолько, что интервал между $1/w$ и $1/\delta$ достаточно велик, становятся возможными два варианта асимптотического поведения случайного процесса.

В дальнейшем мы подробно обсудим случай $s \ll w$, когда при анализе следствий общего уравнения (3) можно применить разложение в ряд Тейлора по s. При этом из-за малости параметра δ либо $s \ll \delta \ll w$, либо $\delta \ll s \ll w$. Оба эти случая соответствуют относительно большим — макроскопическим — временам наблюдения, много большим «микроскопического» времени $1/w$.

5. УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Чтобы получить уравнения для плотности вероятностей процесса $X(t)$, подставим лаплас-образ $\hat{\varphi}(s)$ в форме (5) в уравнение (3). Рассмотрим асимптотическое поведение при $s \to 0$, что соответствует асимптотике на больших временах, при этом можно разложить лаплас-образы распределений в ряд Тейлора. Подробно обсудим наиболее важный для теории аномальной диффузии случай $\delta \ll 1$, когда случайное блуждание $X(t)$ демонстрирует как аномально-диффузионные, так и линейно-диффузионные свойства.

При этом применительно к распределению $\varphi(\tau)$ и его лаплас-образу (5) выделим два случая: $s \ll \delta \ll 1$, что соответствует поведению при $t \to \infty$, и $\delta \ll s \ll 1$, когда $1 \ll t \ll 1/\delta$, т. е. «промежуточному» режиму. В первом случае $\hat{\varphi}(s) \sim 1 - Ds$, где $D = \beta\delta^{\beta-1}/(1+\delta^\beta)$, и (3) примет вид

$$s\hat{\Theta}(u;s) + \frac{1}{D}[1 - \tilde{w}(u)]\hat{\Theta}(u;s) = 1,$$

а во втором $\hat{\varphi}(s) \sim 1 - D's^\beta$, где $D' = (1+\delta^\beta)^{-1}$, тогда

$$s^\beta\hat{\Theta}(u;s) + \frac{1}{D'}[1 - \hat{w}(u)]\hat{\Theta}(u;s) = s^{\beta-1}.$$

Применяя к полученным равенствам обратное преобразование Фурье и Лапласа, придем к уравнению Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial W(x;t)}{\partial t} + \frac{1}{D}[W(x;t) - W(x;t) * w(x)] = \delta(t)\delta(x), \quad t \to \infty,$$

или к обобщенному уравнению Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial^\beta W(x;t)}{\partial t^\beta} + \frac{1}{D'}[W(x;t) - W(x;t) * w(x)] = \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\chi(t)\delta(x), \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}.$$

Подставим для определенности в данные уравнения распределение величины скачков $w(x)$ с асимптотикой фурье-образа вида

$$\tilde{w}(u) \sim 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2}, \quad u \to 0,$$

характерного, например, для гауссова распределения. При этом из приведенных выше уравнений вытекают, соответственно, уравнения линейной и аномальной диффузии для разных временных асимптотик:

$$\frac{\partial W(x;t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2D}\frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial x^2} + \delta(t)\delta(x), \quad t \to \infty,$$

$$\frac{\partial^\beta W(x;t)}{\partial t^\beta} = \frac{\sigma^2}{2D'}\frac{\partial^2 W(x;t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\chi(t)\delta(x), \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}.$$

Решение первого уравнения хорошо известно:

$$W(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t/D}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t/D}\right).$$

Решение же второго уравнения можно получить с помощью модельного процесса «дробного сноса», описанного в работе [19]. В этом случае

$$W(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 t^\beta/D'}} Q_{\beta/2}\left(\frac{2|x|}{\sqrt{2\sigma^2 t^\beta/D'}}\right),$$

где функция $Q_\gamma(\tau)$ находится обратным преобразованием Фурье от функции Миттаг–Леффлера $E_\gamma(iu)$.

6. СРАВНЕНИЕ ТОЧНОГО И АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МОНТРОЛЛА–ВЕЙССА

Выше были получены асимптотические распределения процесса квазианомальных случайных блужданий $X(t)$ на разных временных промежутках. Интересно выяснить, насколько асимптотическое решение описывает реальное поведение процесса и на каких временах можно пользоваться полученными выше аналитическими зависимостями. Для этого полезно исследовать точное численное решение уравнения Монтролла–Вейсса (2).

Подставив в уравнение (2) лаплас-образ обобщенного дробно-экспоненциального распределения (5), получим явный вид лаплас-образа характеристической функции:

$$\hat{\Theta}(u;s) = \frac{1}{s}\,\frac{1}{1 + \dfrac{1+\delta^\beta}{(s+\delta)^\beta - \delta^\beta}\,\dfrac{\sigma^2 u^2}{2}}. \tag{6}$$

С его помощью найдем явную формулу вычисления плотности вероятностей $W(x;t)$ процесса $X(t)$. Для этого вначале найдем обратное фурье-преобразование функции $\hat{\Theta}(u;s)$:

$$\hat{W}(x;s) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma s}\sqrt{\frac{(s+\delta)^\beta - \delta^\beta}{1+\delta^\beta}} \times \exp\left(-\left|\frac{x\sqrt{2}}{\sigma}\sqrt{\frac{(s+\delta)^\beta - \delta^\beta}{1+\delta^\beta}}\right|\right),$$

а затем обратное преобразование Лапласа по s. Интеграл Меллина в данном случае можно свести к интегралу по отрицательной ветви действительной оси. Таким образом, имеем

$$W(x;t) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2(1+\delta^\beta)}} \times \\ \times \operatorname{Im}\left\{ e^{-i\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{(ye^{i\pi}+\delta)^\beta - \delta^\beta}}{y} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-yt - \frac{x\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}}\sqrt{(ye^{i\pi}+\delta)^\beta-\delta^\beta}\right) dy \right\}.$$

Эта формула справедлива при любых временах и является точной. Аналогичным путем или используя интегральное представление функции Миттаг–Леффлера, удается получить асимптотический интегральный вид функции $W(x;t)$ на «промежуточных» временах $1 \ll t \ll 1/\delta$:

$$W(x;t) = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2(1+\delta^\beta)}} \times \\ \times \operatorname{Im}\left\{ \exp\left(\frac{i\pi\beta}{2}\right) \int\limits_0^\infty \exp\left(-yt - \frac{x\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{1+\delta^\beta}} y^{\frac{\beta}{2}} \times \right.\right. \\ \left.\left. \times \exp\left(\frac{i\pi\beta}{2}\right)\right) \frac{dy}{y^{1-\beta/2}} \right\}.$$

По указанным выше формулам построены асимптотические и точные плотности вероятностей $W(x;t)$ на больших ($t \to \infty$, рис. 1) и промежуточных ($1 \ll t \ll 1/\delta$, рис. 2) временах для одинаковых значений параметров β, δ и σ. Видно, что при уменьшении времени в случае промежуточной аномально-диффузионной асимптотики (рис. 1) кривая точного решения стремится к асимптотическому аномально-диффузионному распределению. Аналогичное поведение наблюдается и на больших временах (рис. 2): с ростом времени график точного решения приближается к асимптотическому гауссову распределению.

Кроме того, интересно проследить асимптотики поведения среднего квадрата рассматриваемых случайных блужданий $\langle X^2(t)\rangle$. Найдем вначале асимптотики его лаплас-образа:

$$g(s) = \int \langle X^2(t)\rangle e^{st} dt = \left.\frac{\partial^2 \hat{\Theta}(u;s)}{\partial u^2}\right|_{u=0}. \quad (7)$$

Подставим сюда $\hat{\Theta}(u;s)$ из уравнения Монтролла–Вейсса (2) с асимптотиками функций $\tilde{w}(u) \sim \sim 1 - \sigma^2 u^2/2$ и $\hat{f}(s) \sim 1 - Ds$ для $s \ll \delta \ll 1$ либо $\hat{f}(s) \sim 1 - D's^\beta$ в случае $\delta \ll s \ll 1$, описанных выше. Тогда для лаплас-образа $g(s)$ получим

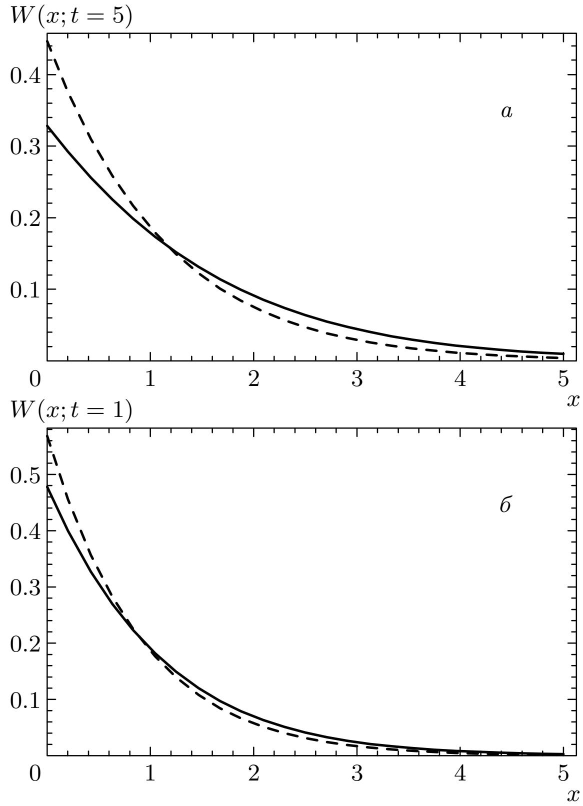

Рис. 1. Графики распределений для значений параметров $t = 5$ (a), 1 ($б$) $\ll 1/\delta$, $\delta = 0.01$, $\beta = 0.3$, $\sigma = 1$. Штриховая линия — асимптотическое решение уравнения, выражающееся через функции Миттаг–Леффлера, сплошная — точное численное решение этого уравнения

$$g(s) \sim \frac{\sigma^2}{Ds^2}, \quad s \ll \delta \ll 1,$$

$$g(s) \sim \frac{\sigma^2}{D's^{1+\beta}}, \quad \delta \ll s \ll 1.$$

Соответствующее поведение среднего квадрата на больших и промежуточных временах будет выглядеть следующим образом:

$$\langle X^2(t)\rangle \sim \frac{\sigma^2}{D}t, \quad t \to \infty,$$

$$\langle X^2(t)\rangle \sim \frac{\sigma^2}{D'\Gamma(1+\beta)} t^\beta, \quad 1 \ll t \ll \frac{1}{\delta}.$$

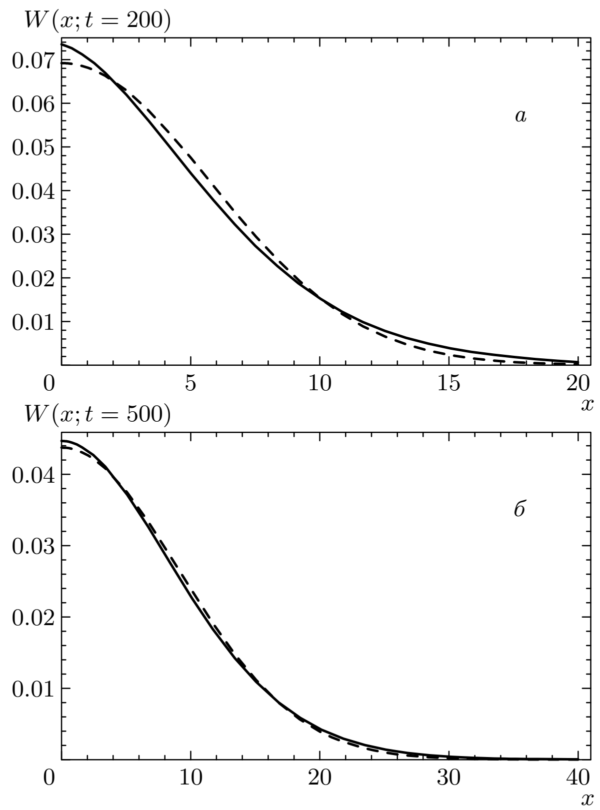

Рис. 2. Графики точного и асимптотического распределений для значений параметров $t = 200$ (a), 500 ($б$) $\gg 1/\delta$, $\delta = 0.01$, $\beta = 0.3$, $\sigma = 1$. Штриховая линия — асимптотическое решение уравнения, выражающееся через функции Миттаг–Леффлера, сплошная — точное численное решение этого уравнения

Обсудим теперь точное поведение $\left\langle X^2(t)\right\rangle$, для чего подставим в (7) $\hat{\Theta}(u;s)$ из (6):

$$g(s) = \frac{\sigma^2(1+\delta^\beta)}{s[(s+\delta)^\beta - \delta^\beta]}.$$

При $\beta = 1/2$ удается найти точное выражение для среднего квадрата блужданий:

$$\left\langle X^2(t)\right\rangle = \frac{1+\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \times \\ \times \left[\sqrt{\frac{\delta t}{\pi}}\, e^{-\delta t} + \delta t + \left(\delta t + \frac{1}{2}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\delta t}\right)\right].$$

Построим эту зависимость и ее асимптотики на промежуточных ($\sim \sqrt{t}$) и больших ($\sim t$) временах (рис. 3). Видно, что график точного решения при больших и промежуточных временах совпадает с графиками асимптотик.

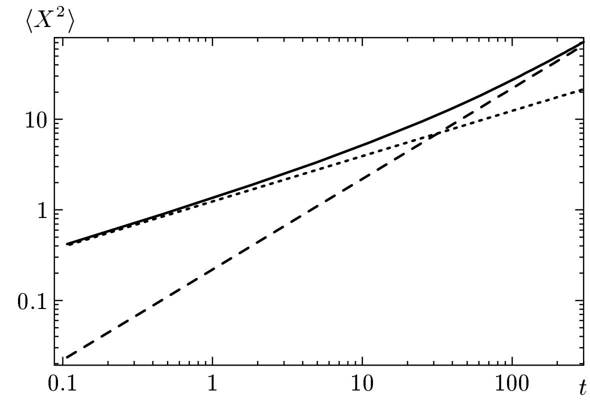

Рис. 3. Асимптотическое поведение среднего квадрата «квазианомального» диффузионного процесса на больших (штриховая линия) и промежуточных (пунктирная) временах, а также точный вид графика $\langle X^2(t)\rangle$ для значения параметра $\beta = 1/2$ (сплошная)

Таким образом, в данной статье показано, что аномальная диффузия может иметь место и в случае конечного среднего времени $\langle\tau_k\rangle$ интервалов между скачками. Только в этом случае аномальная диффузия возникает как промежуточная асимптотика, сменяясь затем нормальной линейной диффузией.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-838.2003.2), РФФИ (грант № 03-02-16680) и Министерства образования РФ (грант № Е02-3.5-232).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
2. К. В. Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
3. В. Ю. Забурдаев, К. В. Чукбар, ЖЭТФ **121**, 299 (2002).
4. В. В. Учайкин, ЖТФ **68**, 138 (1998).
5. В. В. Учайкин, ТМФ **115**, 154 (1998).
6. В. В. Учайкин, В. В. Саенко, ЖТФ **71**, 8 (2001).
7. P. W. M. Blom and M. C. J. M. Vissenberg, Phys. Rev. Lett. **80**, 3819 (1998).
8. Q. Gu, E. A. Schiff, and S. Grebner, Phys. Rev. Lett. **76**, 3196 (1996).

9. M. Porto, A. Bunde, and S. Havlin, Phys. Rev. E **56**, 1667 (1997).

10. B. Rinn, W. Dieterich, and P. Maass, Phil. Mag. B **77**, 1283 (1998).

11. S. Schaufler, W. P. Schleich, and V. P. Yakovlev, Phys. Rev. Lett. **83**, 3162 (1999).

12. S. Schaufler, W. P. Schleich, and V. P. Yakovlev, Europhys. Lett. **39**, 383 (1997).

13. M. F. Shlesinger, B. J. West, and J. Klafter, Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).

14. I. M. Sokolov, A. Blumen, and J. Klafter, Europhys. Lett. **47**, 152 (1999).

15. G. M. Zaslavsky and S. Benkadda, *Chaos, Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas*, Springer, Berlin (1998).

16. G. M. Zaslavsky, M. Edelman, and B. Niyazov, Chaos **7**, 159 (1997).

17. A. I. Saichev and G. M. Zaslavsky, Chaos **7**, 753 (1997).

18. A. I. Saichev and W. A. Woyczyński, *Distributions in the Physical and Engineering Sciences*, Birkhäuser, Boston (1997), Vol. 1, p. 336.

19. А. И. Саичев, С. Г. Уткин, Актуальные проблемы стат. радиофизики **1**, 5 (2002).