

КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

*М. Х. Хоконов**

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
360004, Нальчик, Россия*

Поступила в редакцию 26 марта 2004 г.

Методом каскадных уравнений изучается динамика процесса потерь энергии (страгглинг) при прохождении частиц через вещество. Особое внимание уделено многофотонным процессам излучения релятивистских электронов в аморфных средах и в ориентированных кристаллах. Найдены новые аналитические решения каскадных уравнений и развит метод их решения, позволяющий выразить результат через быстросходящиеся интегралы. Показано, что относительно простое уравнение Ландау для функции распределения по потерям энергии может быть полезным для анализа процессов, при которых теряются энергии, соизмеримые с первоначальной энергией частиц. Детально анализируются экспериментальные результаты для электронов с энергией 150 ГэВ в ориентированных кристаллах.

PACS: 41.60.-m, 41.60.Ar, 78.70.-g

1. ВВЕДЕНИЕ

Ультрарелятивистский электрон, попадая в среду или во внешнее поле, может излучать фотоны, энергия которых ω соизмерима с первоначальной энергией электрона E_0 . В этом случае такие величины как средние потери на излучение $\langle \Delta E \rangle$ или даже среднеквадратичная флуктуация $\langle (\Delta E)^2 \rangle$ не дают адекватной картины характера энергетических потерь из-за сильного разброса (страгглинга) электронов по энергиям на выходе. В этих условиях требуется знать функцию распределения по потерям энергии $p(y, t)$, где y — потери энергии, t — время. В такой постановке задача была сформулирована Бете и Гайтлером уже в их пионерской работе [1], где были даны простые, но весьма приближенные выражения для $p(y, t)$. Другой важный случай касается ионизационных потерь энергии в относительно тонких мишенях, когда потери энергии много меньше энергии пучка. При этом, как показано Ландау [2], распределение $p(y, t)$ может быть найдено из интегрального уравнения, приводящего к функции распределения стандартного типа. Задача при этом ставится так: зная дифференциальную вероятность взаимодействия на бесконечно малом отрезке времени (пу-

ти) $\nu(y) dt$, найти вероятность $p(y, t)$, отнесенную к конечному временному интервалу. Решение Ландау соответствует резерфордскому дифференциальному сечению потерь энергии на единице длины, когда $\nu(y) \sim 1/y^2$. При этом вводилось ограничение со стороны малых потерь энергии, когда $y \rightarrow 0$.

В приложениях к задачам об излучении $\nu(y)$ представляет собой вероятность излучения за единицу времени. В случае тормозного излучения в аморфной среде такой величиной является $\nu = \sigma_{BH} N c$, где σ_{BH} — сечение Бете–Гайтлера [1], N — число атомов среды в единице объема, c — скорость света. Однако не всегда величину ν для процессов излучения можно определить таким образом. Классические формулы, представляющие спектрально-угловые характеристики излучения, являются функционалами от траектории электрона и определяют характеристики излучения за все время взаимодействия, а не на единице пути. Швингером [3] выведены вероятности излучения за единицу времени, однако соответствующие выражения для каждого момента времени зависят от прошлой и будущей истории электрона, так что в обсуждаемом контексте такой подход адекватен только в приближении постоянного поля (ППП), когда формулы для излучения сводятся к известным выражениям для синхротронного излучения

*E-mail: khokon6@mail.ru

(или их квазиклассическим обобщениям). В связи с этим обещающим является подход [4], позволяющий выразить характеристики излучения в неоднородном внешнем поле через локальные параметры взаимодействия (т.е. через потенциал поля и его производные), а не через траекторию. В данной работе, тем не менее, при анализе многофотонных процессов потери энергии на излучение в ориентированных кристаллах мы ограничимся ППП, предполагая, что длина свободного пробега между последовательными актами излучения $l \approx v/\nu$ превышает длину формирования излучения (v — скорость электрона, приблизительно совпадающая со скоростью света).

Линдхардом и Нельсоном [5, 6] подробно изучены основные свойства интегральных уравнений для функции распределения $p(y, t)$ и даны аналитические решения для ряда важных случаев. В частности, рассмотрены некоторые типы степенных сечений с экранировкой. В работе [7] развит метод приближенного решения уравнений Ландау и Вавилова [8] с точностью не ниже 2% во втором приближении. В настоящей работе приводится ряд новых аналитических решений для $p(y, t)$, рассматриваются приложения к задачам излучения электронов с энергиями 150–240 ГэВ в ориентированных кристаллах и проводится сравнение с экспериментами [9–12]. Показано, что относительно простое уравнение Ландау может быть полезным для случая, когда оно, казалось бы, неприменимо, т.е. когда $y \sim E_0$.

Другая сторона проблемы заключается в исследовании многофотонного характера излучения. Поскольку все фотоны, излученные одним электроном, приходят в детектор почти одновременно и оказываются неразличимыми, информация об исходных однофотонных сечениях излучения не может быть получена путем прямого измерения. Тем не менее, как показано в данной работе, возможно рассчитать вероятности процессов и функции распределения величин, которые поддаются измерениям.

Многофотонный характер излучения и его влияние на измеряемые спектры недавно подробно изучались Байером и Катковым [13], в частности, подробно рассмотрен важный случай тормозного излучения в аморфной среде. Многофотонные процессы, сопровождающие прохождение электронов через ориентированные кристаллы, подробно исследовались методом численного моделирования [14–19]. Некоторые вопросы страгглинга энергетических потерь освещены в [20]. В работе [21] изучался эффект искажения измеряемых спектров излучения при канализации для фотонов с энергиями, много мень-

шими энергии электрона. Нами, однако, предлагается подход, основанный на уравнениях каскадного типа. Полученные результаты применимы как к исследованию процессов излучения жестких фотонов, так и к ионизационным потерям энергии. Некоторые важные вероятностно-математические аспекты рассматриваемых ниже вопросов изложены в работе [22]. В настоящей статье приведены не встречающиеся в литературе удобные представления некоторых специальных функций, играющих важную роль в задачах подобного типа.

2. ПУАССОНОВСКИЙ ПРОЦЕСС ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ

Под процессами пуассоновского типа будем понимать процессы, при которых статистика отдельных актов взаимодействия с потерей энергии электрона при его прохождении через среду, подчиняется распределению Пуассона. Наш анализ основан на решении интегральных уравнений движения, определяющих эволюцию во времени функции распределения по потерям энергии $p(y, t)$, где пространственная переменная y соответствует величине потерь энергии. Это не обязательно теряемая энергия, но величина, однозначно связанная с ней. В общем виде указанная проблема сформулирована в работах [5, 6], где выведены аналитические решения для ряда важных случаев. Ниже показано, что возможно построить эффективную процедуру нахождения обширного класса решений интегральных уравнений движения, и представлены новые аналитические решения для важного на практике случая степенного типа дифференциальных сечений взаимодействия с экранировкой.

2.1. Основное уравнение движения

Интегральное уравнение, определяющее эволюцию функции распределения по потерям энергии, было введено Ландау [2] и имеет вид

$$\frac{\partial p(y, t)}{\partial t} = \int_0^{\infty} [p(y - \mu, t) - p(y, t)] \nu(\mu) d\mu, \quad (2.1)$$

где $p(y - \mu, t) = 0$ для $\mu > y$, а ядро $\nu(\mu) d\mu$ не зависит от y и времени t и представляет собой сечение взаимодействия за единицу времени, приводящее к уменьшению энергии частицы. Это означает, что величину $\nu(y) dy dt$ можно рассматривать как дифференциальную вероятность взаимодействия с заданным изменением параметра y , отнесенную к

бесконечно малому интервалу времени dt , тогда как функция распределения $p(y, t)$ есть плотность вероятности, относящаяся к конечному временному интервалу. В уравнении (2.1) предполагается, что потери энергии много меньше, чем первоначальная энергия частицы. Это обстоятельство, однако, не будет иметь значения для дальнейшего анализа. Распределение $p(y, t)$ нормировано,

$$\int_0^\infty p(y, t) dy = 1, \tag{2.2}$$

и удовлетворяет начальному условию $p(y, t = 0) = \delta(y)$, причем

$$\nu(y) = \begin{cases} \nu(y), & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Этому условию удовлетворяют дифференциальные сечения уравнений, описывающих деградацию энергии, в отличие от уравнений, описывающих, например, процессы типа многократного рассеяния.

Как будет видно из дальнейшего, относительно простое уравнение (2.1) допускает обобщения, позволяющие рассмотреть широкий класс уравнений гораздо более сложного типа. Будем различать дифференциальные сечения $\nu(y)$ двух типов: с конечным и расходящимся значениями полного сечения. Первый тип сечений больше соответствует процессам потерь энергии на излучение жестких фотонов, тогда как второй имеет место для ионизационных потерь в веществе.

Пусть полное сечение взаимодействия конечно,

$$\int_0^\infty \nu(y) dy = \nu_0. \tag{2.4}$$

Тогда можно ввести функцию $g(y)$, такую что $\nu(y) = \nu_0 g(y)$ и нормированную на единицу,

$$\int_0^\infty g(y) dy = 1. \tag{2.5}$$

Уравнение (2.1) тогда можно записать как

$$\frac{\partial p(y, \xi)}{\partial \xi} = -p(y, \xi) + \int_0^\infty p(y - \mu, \xi) g(\mu) d\mu, \tag{2.6}$$

где введена временная переменная $\xi = \nu_0 t$.

В рассматриваемом случае полное сечение ν_0 для отдельного акта взаимодействия есть константа, не

зависящая от времени. Поэтому предположим, что распределение по числу отдельных актов взаимодействия есть распределение Пуассона, т.е. будем считать, что вероятность того, что произошло ровно m взаимодействий в пределах конечного временного интервала t , определяется распределением Пуассона $P_m(\xi)$. Тогда величина $\xi = \nu_0 t$ будет иметь смысл среднего числа взаимодействий за время t , приводящих к дискретным актам потери энергии. После того как произойдет m событий, значение переменной y равно $y = y_1 + y_2 + \dots + y_m$. Введем плотность вероятности $g^{(m)}(y)$ того, что после m взаимодействий конечное значение величины y окажется в интервале $(y, y + dy)$. Очевидно при этом, что $g^{(1)}(y) = g(y)$.

Прямой подстановкой можно проверить, что решение уравнения (2.6) при указанном начальном условии имеет вид

$$p(y, \xi) = \sum_{m=0}^\infty P_m(\xi) g^{(m)}(y), \tag{2.7}$$

где $P_m(\xi)$ — распределение Пуассона:

$$P_m(\xi) = \frac{\xi^m}{m!} \exp(-\xi). \tag{2.8}$$

Таким образом, для пуассоновских процессов временная (зависящая от ξ) и спектральная (зависящая от y) части в (2.7) описываются независимым образом.

Функции $g^{(m)}(y)$ в (2.7) нормированы на единицу и удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$g^{(m)}(y) = \int_0^y g^{(m-n)}(y - \mu) g^{(n)}(\mu) d\mu, \tag{2.9}$$

$$n \leq m,$$

где $g^{(0)}(y) = \delta(y)$ и $g^{(1)}(y) = g(y)$.

Парциальные распределения вероятностей типа (2.9) вычисляются с помощью фурье-преобразования:

$$g^{(m)}(y) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^\infty (g_k)^m \exp(iky) dk, \tag{2.10}$$

где

$$g_k = \int_0^\infty g(\mu) \exp(-ik\mu) d\mu. \tag{2.11}$$

Подстановка (2.10) и (2.8) в (2.7) приводит по-

сле суммирования к известному представлению решения уравнений (2.1) и (2.6) в виде [5]

$$p(y, \xi) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iky - \xi\lambda(k)) dk, \quad (2.12)$$

где

$$\lambda(k) = 2i \int_0^{\infty} \sin \frac{k\mu}{2} \exp\left(-\frac{ik\mu}{2}\right) g(\mu) d\mu. \quad (2.13)$$

Мы, следовательно, убедились, что (2.7) действительно удовлетворяет уравнению (2.1), а известные выражения (2.12) и (2.13) соответствуют процессам пуассоновского типа, что непосредственно не видно из (2.12) и (2.13). В отличие от выражения (2.7), решение в виде (2.12) и (2.13) справедливо и в том случае, когда интеграл (2.4) расходится и распределение Пуассона (2.8) не имеет смысла. Тем не менее процессы, удовлетворяющие уравнению (2.1), также будем считать процессами пуассоновского типа.

Уравнение (2.1) описывает процессы потерь энергии (случай Ландау) только в случае асимметричных дифференциальных сечений (2.3). Если дифференциальное сечение симметрично, т. е. если $\nu(-y) = \nu(y)$, то уравнение (2.1) имеет вид уравнения Мольера [23], описывающего процессы многократного рассеяния быстрых заряженных частиц в веществе. В этом случае $p(y, t)$ представляет собой угловое распределение в момент t . Заметим, что формулы, похожие на (2.7)–(2.9), имеют место и для многократного рассеяния [24]. Практически они оказываются полезными для изучения кратного рассеяния на относительно большие углы, когда число отдельных актов рассеяния не превышает 5–10. Подробный анализ случая симметричных ядер приводится в работе [5].

2.2. Конечное сечение степенного типа с экранировкой

Широкий класс дифференциальных сечений, приводящих к аналитическим решениям и важных для практических приложений, описывается степенной функцией с экспоненциальным параметром обрезания (экранировкой):

$$g(y) = Cy^{\alpha-1} \exp(-\lambda y), \quad (2.14)$$

где константа нормировки $C = \lambda^\alpha / \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Тогда из выражений (2.10) и (2.11) получаем

$$g^{(m)}(y) = \frac{\lambda^{\alpha m}}{\Gamma(\alpha m)} y^{\alpha m - 1} \exp(-\lambda y). \quad (2.15)$$

Тогда решение уравнения (2.1) имеет вид

$$p(y, \xi) = y^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m! \Gamma(\alpha m)} \exp(-\lambda y - \xi), \quad (2.16)$$

где $x = (\lambda y)^\alpha \xi$.

В частности, для $\alpha = 1$ (экспоненциальное дифференциальное сечение) выражение (2.16) приводит к известному результату (см. [22], гл. 10):

$$p(y, \xi) = y^{-1} (\xi \lambda y)^{1/2} I_1 \left[2(\xi \lambda y)^{1/2} \right] \times \exp(-\lambda y - \xi), \quad (2.17)$$

где I_1 — модифицированная функция Бесселя.

Формулы (2.15) и (2.16) приводят к следующим полезным соотношениям для среднего значения величины $\exp(-ky)$:

$$\int_0^{\infty} \exp(-ky) g^{(m)}(y) dy = \left(\frac{\lambda}{\lambda + k} \right)^{m\alpha}. \quad (2.18)$$

Тогда для значения $\exp(-ky)$, усредненного по функции распределения (2.16), получаем

$$\langle \exp(-ky) \rangle = \exp \left[-\xi + \xi \left(\frac{\lambda}{\lambda + k} \right)^\alpha \right]. \quad (2.19)$$

2.3. Метод седловой точки

Метод седловой точки будет применяться нами не в обычно понимаемом смысле, как метод приближенного вычисления или исследования асимптотического поведения величин, а как метод точного расчета, позволяющего избежать появления быстроосциллирующих интегралов в конечных выражениях. Для задач расчета спектрально-угловых характеристик излучения релятивистскими электронами такой метод был развит в работе [25]. Мы покажем эффективность аналогичного подхода к решению интегральных уравнений типа (2.1).

Формулы (2.12) и (2.13) содержат быстроосциллирующие выражения под интегралами, что делает их неприменимыми для практических расчетов. В ряде важных случаев, однако, эту трудность можно обойти, выбрав подходящий контур интегрирования. Для этой цели перепишем решение (2.12), (2.13) уравнения (2.1) в виде преобразования Лапласа (см. также [2]):

$$p(y, \xi) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp[zy - \xi\lambda(z)] \frac{dz}{2\pi i}, \quad (2.20)$$

где

$$\lambda(z) = \int_0^\infty g(\mu) [1 - \exp(-z\mu)] d\mu. \quad (2.21)$$

Здесь $z = r + iw$ — комплексная переменная.

Для дальнейшего важным является то обстоятельство, что аргумент экспоненты в (2.20),

$$f(z) = zy - \xi \int_0^\infty g(\mu) [1 - \exp(-z\mu)] d\mu, \quad (2.22)$$

имеет седловую точку, лежащую на вещественной оси комплексной переменной z при произвольном типе дифференциального сечения $g(\mu)$. Действительно, седловая точка z_0 определяется условием $f'(z_0) = 0$. Это приводит к трансцендентному уравнению для седловой точки z_0 :

$$y = \xi \int_0^\infty \mu g(\mu) \exp(-z_0\mu) d\mu. \quad (2.23)$$

Поскольку $g(\mu)$ является вещественной функцией, все величины в уравнении (2.23) вещественны, и седловая точка также находится на вещественной оси $z_0 = r_0$.

Вместо традиционного для преобразования Лапласа контура интегрирование в (2.20) целесообразно проводить вдоль линии наискорейшего спуска (ЛНС). Представим функцию (2.22) через вещественную и мнимую части, $f = u + iv$. Поскольку седловая точка вещественна, путь интегрирования вдоль ЛНС в (2.20) определяется условием $v(r, w) = \text{Im } f(z) = 0$, что дает следующее уравнение, определяющее ЛНС для интеграла (2.20):

$$w = \frac{\xi}{y} \int_0^\infty g(\mu) \exp(-r\mu) \sin(\mu w) d\mu. \quad (2.24)$$

Видно, что ЛНС (2.24) проходит через седловую точку z_0 , определяемую формулой (2.23).

В качестве примера рассмотрим дифференциальное сечение (2.14). Формулы (2.20) и (2.21) дают для этого случая

$$p(y, \xi) = \lambda \exp(-\xi - \lambda y) \int_C \exp[f(z)] \frac{dz}{2\pi i}, \quad (2.25)$$

$$f(z) = \lambda y z + \xi z^{-\alpha} \quad (2.26)$$

В соответствии с выражением (2.23) седловая точка на вещественной оси есть

$$r_0 = \left(\frac{\alpha \xi}{\lambda y} \right)^{1/(\alpha+1)}. \quad (2.27)$$

Уравнение ЛНС имеет тогда вид

$$\rho(\theta) = \left[\frac{\xi \sin(\alpha\theta)}{\lambda y \sin \theta} \right]^{1/(\alpha+1)}, \quad (2.28)$$

где введены полярные координаты ρ и θ в комплексной плоскости.

Решение уравнения (2.1) с дифференциальным сечением (2.14) выражается теперь через быстроходящийся интеграл

$$p(y, \xi) = (\pi y)^{-1} \exp(-\xi - \lambda y) \left(\frac{\alpha}{\alpha + 1} \right) \times \int_0^\pi u(\theta) \exp[u(\theta)] d\theta, \quad (2.29)$$

где

$$u(\theta) = \xi \rho^{-\alpha} \frac{\sin[\theta(1 + \alpha)]}{\sin \theta}. \quad (2.30)$$

Здесь $\rho = \rho(\theta)$ определяется из (2.28), величина $u(\theta)$ в (2.30) представляет собой вещественную часть функции (2.26), т. е. $u = \text{Re}[f(z)]$.

Таким образом, широкий класс решений задач для случая конечного полного сечения может быть представлен двумя эквивалентными способами — в виде бесконечного ряда (2.7) или в виде быстроходящегося интеграла типа (2.25). Решения типа (2.7) удобны, когда процесс характеризуется относительно небольшим количеством взаимодействий $k \leq 10-20$ (например, случай электронов с энергиями свыше 100 ГэВ в ориентированных кристаллах). Если же число взаимодействий велико (например, в случае ионизационных потерь энергии), гораздо удобнее пользоваться интегральными представлениями решений типа (2.25), (2.29). Кроме того, интегральное представление позволяет описать процессы с расходящимся полным сечением (тормозное излучение), а также случаи, допускающие только численное интегрирование с реалистическими выражениями для дифференциальных сечений. В последнем случае исходные быстроосциллирующие выражения (2.12), (2.13) практически непригодны и адекватный результат можно получить интегрированием вдоль ЛНС.

2.4. Расходящееся степенное сечение с экранировкой

Если дифференциальное сечение приводит к расходящемуся выражению для полного сечения, то решение уравнения (2.1) не может быть представлено в виде (2.6) и формулы (2.7) — (2.11) не имеют смысла.

Применим метод седловой точки к решению уравнения движения (2.1) с расходящимся сечением вида

$$\nu(y) = C y^{-1-\beta} \exp(-\lambda y), \quad 0 < \beta < 1. \quad (2.31)$$

Результат имеет вид, аналогичный (2.29) и (2.30), где следует сделать замену $\alpha \rightarrow -\beta$, $\xi \rightarrow -\alpha c$

$$\alpha = \frac{\pi \xi \lambda^\beta}{\beta \sin(\pi\beta)\Gamma(\beta)}, \quad (2.32)$$

где теперь $\xi = Ct$.

Решение уравнения (2.1) примет вид

$$p(y, \xi) = (\pi y)^{-1} \exp(\alpha - \lambda y) \frac{\beta}{\beta - 1} \times \int_0^\pi u(\theta) \exp[u(\theta)] d\theta, \quad (2.33)$$

$$u(\theta) = -\alpha \frac{\sin[\theta(1 - \beta)]}{\sin \theta} \left[\frac{\alpha \sin(\beta\theta)}{\lambda y \sin \theta} \right]^{\beta/(1-\beta)}. \quad (2.34)$$

В отличие от (2.29), решение с расходящимся сечением (2.33) обладает следующим свойством. Пусть нам известно решение $p_0(y, \xi)$ для степенного дифференциального сечения без экранировки, т.е. определяемое формулой (2.31) с $\lambda = 0$. Тогда решение для сечения (2.31) можно найти по формуле

$$p(y, \xi) = \exp(\alpha - \lambda y) p_0(y, \xi). \quad (2.35)$$

Заметим, что $u(\theta)$ в (2.34) не зависит от λ .

Приведем несколько относительно простых аналитических решений для различных значений параметра β .

1. $\beta = 1/3$, $\alpha = 3\xi\lambda^{1/3}\Gamma(2/3)$. В этом случае решение имеет вид

$$p(y, \xi) = y^{-1} \exp(\alpha - \lambda y) \frac{\alpha}{(3\lambda y)^{1/3}} \times \text{Ai} \left[\frac{\alpha}{(3\lambda y)^{1/3}} \right], \quad (2.36)$$

где $\text{Ai}(x)$ — функция Эйри. В частности, при $\lambda = 0$ получаем результат работы [5] для степенного потенциала с $\beta = 1/3$.

2. $\beta = 1/2$, $\alpha = 2\xi(\pi\lambda)^{1/2}$. В этом случае выражения (2.33) и (2.34) сводятся к результату работы [5]:

$$p(y, \xi) = \xi y^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\pi^{1/2}\xi - \lambda^{1/2}y)^2}{y} \right]. \quad (2.37)$$

3. $\beta = 2/3$, $\alpha = (3/2)\xi\lambda^{2/3}\Gamma(1/3)$. Решение выражается через функции Эйри и ее производные. Приведем решение только для степенного дифференциального сечения $p_0(y, \xi)$ (т.е. для $\lambda = 0$) с $\beta = 2/3$:

$$p_0(y, \xi) = 2y^{-1} a^{1/2} \exp \left(-\frac{2}{3} a^{3/2} \right) \times \left[a^{1/2} \text{Ai}(a) - \text{Ai}'(a) \right], \quad (2.38)$$

где $a = 3^{1/3}(\xi/2)y^{-2/3}\Gamma(1/3)$. Решение для случая с экранировкой $p(y, \xi)$ можно получить по формуле (2.35).

4. $\beta = 0$. В пределе $\beta \rightarrow 0$ (см. Приложение 1) из формулы (2.33) получаем известное распределение (гамма-плотность) [22]:

$$p(y, \xi) = \lambda \frac{\exp(-\lambda y)}{\Gamma(\xi)} (\lambda y)^{\xi-1}. \quad (2.39)$$

Среднее значение величины $\exp(-ky)$, усредненное по распределению (2.39), будет

$$\langle \exp(-ky) \rangle = \left(\frac{\lambda}{k + \lambda} \right)^\xi. \quad (2.40)$$

В частном случае $\lambda = 1$ гамма-распределение (2.39) переходит в распределение Бете–Гайтлера [1]

$$p(y, \xi) = \frac{\exp(-y)}{\Gamma(\xi)} y^{\xi-1}. \quad (2.41)$$

Как показано далее, распределение (2.39) имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с (2.41) в приложении к задачам об излучении ультрарелятивистских электронов в аморфной среде.

Заметим, что решения уравнения (2.1) $p(y, t)$ удовлетворяют условию

$$p(y, t) = \int_0^y p(y - \mu, t_1) p(\mu, t_2) d\mu, \quad (2.42)$$

где $t = t_1 + t_2$.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЖЕСТКИХ ФОТОНОВ

Каскадный процесс последовательного излучения электроном множества фотонов полностью

определяется заданием дифференциальной вероятности излучения фотона с энергией в пределах $(\omega, \omega + d\omega)$ электроном с энергией E за бесконечно малый промежуток времени $\nu_\omega(E) d\omega dt$. Эту величину будем называть дифференциальным сечением излучения за единицу времени. Тогда распределение электронов к моменту времени t будем характеризовать функцией $W_\omega(E_0, t) d\omega$, которая дает плотность вероятности того, что потери энергии электрона с начальной энергией E_0 окажутся в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$ после прохождения пути $z = vt$ (в рассматриваемом случае скорость электрона можно считать совпадающей со скоростью света $v \approx c$).

Функция распределения $W_\omega(E_0, t)$ нормирована,

$$\int_0^{E_0} W_\omega(E_0, t) d\omega = 1, \quad (3.1)$$

и удовлетворяет начальному условию $W_\omega(E_0, 0) = \delta(\omega)$. В экспериментах непосредственно измеряется интенсивность излучения (см., например, [9, 10]):

$$I_\omega(E_0, t) = \omega W_\omega(E_0, t). \quad (3.2)$$

Полные потери энергии на излучение тогда равны

$$\Delta E(t) = \int_0^{E_0} I_\omega(E_0, t) d\omega. \quad (3.3)$$

3.1. Каскадное уравнение для многофотонного процесса

Эволюция функции распределения по потерям энергии со временем, $W_\omega(E_0, t)$, определяется уравнением каскадного типа:

$$\frac{\partial W_\omega(E_0, t)}{\partial t} = \int_0^\omega W_{\omega-\mu}(E_0, t) \nu_\mu(E_0 - \omega + \mu, t) d\mu - \int_0^{E_0 - \omega} W_\omega(E_0, t) \nu_\mu(E_0 - \omega, t) d\mu, \quad (3.4)$$

при этом рассматривается общий случай зависящего от времени дифференциального сечения $\nu_\omega(E, t)$.

Решение уравнения (3.3) можно выразить через вклады от отдельных актов излучения. Предположим, что полное сечение излучения имеет конечное значение:

$$\nu(E, t) = \int_0^E \nu_\omega(E, t) d\omega. \quad (3.5)$$

Пусть $W_\omega^{(k)}(E_0, t) d\omega$ есть вероятность того, что суммарная энергия k излученных фотонов лежит в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Т.е. ω здесь есть сумма, $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k$. Распределение по потерям энергии будет тогда определяться суммой парциальных вкладов:

$$W_\omega(E_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_\omega^{(k)}(E_0, t), \quad (3.6)$$

где $W_\omega^{(0)}(E_0, t)$ имеет смысл вероятности того, что в пределах временного интервала $(0, t)$ не произойдет ни одного акта излучения.

Величины $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$ найдем из следующих соображений. Вероятность того, что в пределах временного интервала $(0, t + dt)$ электрон излучит ровно k фотонов есть сумма двух слагаемых. Первое слагаемое отвечает процессу, при котором за время $(0, t)$ происходит ровно k актов излучения, тогда как за бесконечно малое время dt не происходит ни одного акта излучения. Второе слагаемое соответствует случаю, когда излучается $k - 1$ фотон за время $(0, t)$ и один фотон за время dt :

$$W_\omega^{(k)}(t + dt) = W_\omega^{(k)}(t) [1 - \nu(E_0 - \omega, t) dt] + \int_0^\omega W_{\omega-\mu}^{k-1}(t) \nu_\mu(E_0 - \omega + \mu, t) d\mu dt. \quad (3.7)$$

Здесь $\nu(E, t)$ есть полное сечение излучения за единицу времени, определяемое выражением (3.5).

Решая уравнение (3.7), получаем рекуррентное соотношение для парциальных вероятностей в (3.6):

$$W_\omega^{(k)}(E_0, t) = \exp\left[-\int_0^t \nu(E_0 - \omega, \tau) d\tau\right] \times \int_0^t d\tau \exp\left[\int_0^\tau \nu(E_0 - \omega, \tau') d\tau'\right] \times \int_0^\omega W_{\omega-\mu}^{k-1}(E_0, \tau) \nu_\mu(E_0 - \omega + \mu, \tau) d\mu, \quad (3.8)$$

где

$$W_\omega^{(0)}(E_0, t) = \delta(\omega) \exp\left[-\int_0^t \nu(E_0 - \omega, \tau) d\tau\right]. \quad (3.9)$$

Выражения (3.6)–(3.9) определяют решение уравнения движения общего вида (3.4).

Поскольку полное сечение излучения в приведенных выражениях зависит от времени и энергии $\nu = \nu(E, t)$, статистика индивидуальных актов излучения в (3.6), (3.8) не выражается уже простым соотношением типа (2.8). В частности, в случае, когда полное сечение не зависит от E , т.е. $\nu = \nu(t)$, вероятность $P_k(t)$ получить ровно k фотонов за время $(0, t)$ определяется выражением

$$P_k(t) = \exp \left[- \int_0^t \nu(\tau) d\tau \right] \times \int_0^t d\tau \exp \left[+ \int_0^\tau \nu(\tau') d\tau' \right] \nu(\tau) P_{k-1}(\tau), \quad (3.10)$$

где

$$P_0(t) = \exp \left[- \int_0^t \nu(\tau) d\tau \right]. \quad (3.11)$$

Формулы (3.7)–(3.11) определяют обобщенный пуассоновский процесс. Если сечение излучения есть константа $\nu = \nu_0$, то выражение (3.10) переходит в распределение Пуассона (2.8) с $\xi = \nu_0 t$. Примером зависящего от времени дифференциального сечения является движение электрона в поле атомных цепочек и плоскостей кристалла [26].

3.2. Многофотонный процесс пуассоновского типа

Результаты предыдущего параграфа существенно упрощаются в случае не зависящего от времени дифференциального сечения излучения $\nu_\omega(E)$. Будем считать также, что полное сечение ν_0 не зависит от энергии электрона E . Уравнение движения (3.4) примет тогда вид

$$\frac{\partial W_\omega(E_0, t)}{\partial t} = \int_0^\omega W_{\omega-\mu}(E_0, t) \nu_\mu(E_0 - \omega + \mu) d\mu - \int_0^{E_0 - \omega} W_\omega(E_0, t) \nu_\mu(E_0 - \omega) d\mu. \quad (3.12)$$

Пусть $g_\omega^{(1)}(E)$ — дифференциальная плотность вероятности того, что энергия уже излученного фотона равна ω :

$$g_\omega^{(1)}(E) = \nu_\omega(E) / \nu_0. \quad (3.13)$$

Введем вероятности $g_\omega^{(k)}(E_0) d\omega$ того, что суммарная энергия k излученных электроном фотонов с начальной энергией E_0 находится в интервале между ω и $\omega + d\omega$. Эти величины нормированы на единицу,

$$\int_0^E g_\omega^{(k)}(E) d\omega = 1, \quad (3.14)$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$g_\omega^{(k)}(E_0) = \int_0^\omega g_{\omega-\mu}^{(k-m)}(E_0 - \mu) g_\mu^{(m)}(E_0) d\mu, \quad (3.15)$$

$$m < k.$$

Вероятность $P_k(t)$ излучить ровно k фотонов за временной интервал $[0, t]$ задается теперь распределением Пуассона (2.8) с $\xi_0 = \nu_0 t$. Функции $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$, определенные в (3.6), сводятся теперь просто к произведениям вида $P_k(t) g_\omega^{(k)}(E_0)$. Для распределения по энергетическим потерям имеем:

$$W_\omega(E_0, t) = \sum_{k=0}^\infty P_k(t) g_\omega^{(k)}(E_0). \quad (3.16)$$

Выражение (3.16), представляющее решение уравнения (3.12) с не зависящим от времени дифференциальным сечением и не зависящим от энергии полным сечением, удовлетворяет условию

$$W_\omega(E_0, t_1 + t_2) = \int_0^\omega W_{\omega-\mu}(E_0 - \mu, t_1) W_\mu(E_0, t_2) d\mu, \quad (3.17)$$

где $t = t_1 + t_2$.

Если полное сечение излучения зависит от энергии электрона, но не зависит от времени, то формулы (3.6)–(3.9) дают решение более общего, чем (3.16), вида, которое мы здесь приводить не будем.

3.3. Кратность излучения

Некоторые величины, характеризующие многофотонный характер излучения, можно выразить через функции распределения $W_\omega^{(k)}(E_0, t)$. Так, среднее число излученных фотонов как функция их суммарной энергии ω равно

$$\langle k(\omega, t) \rangle = \sum_{k=1}^\infty k W_\omega^{(k)}(E_0, t), \quad (3.18)$$

где ω — суммарная энергия k излученных фотонов. Другими словами, если экспериментатор видит, что

полная энергия всех излученных одним электроном фотонов равна ω , то величина (3.18) показывает их среднее число.

Вероятность излучения ровно k фотонов за время t равна

$$W^{(k)}(t) = \int_0^{E_0} W_{\omega}^{(k)}(E_0, t) d\omega, \quad (3.19)$$

а среднее число излученных фотонов —

$$\langle k(t) \rangle = \int_0^{E_0} d\omega \sum_{k=1}^{\infty} kW_{\omega}^{(k)}(E_0, t). \quad (3.20)$$

Величины (3.18)–(3.20) возможно непосредственно измерить в экспериментах (см., например, [9]). Важной, но непосредственно не измеряемой, величиной является число одиночных фотонов $n_{\omega}(E_0, t) d\omega$, приходящихся на заданный интервал их энергий $(\omega, \omega + d\omega)$, излученных к моменту времени t электроном с начальной энергией E_0 . Знание именно такого, неискаженного многофотонным характером излучения, спектра представляет практический интерес для приложений и дает наиболее полную экспериментальную информацию о характере излучения. Если процесс имеет пуассоновский характер и разбивается в соответствии с уравнением (3.12), то для однофотонного спектра получаем выражение:

$$n_{\omega}(E_0, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \sum_{m=0}^k n_{\omega}^{(m)}(E_0), \quad (3.21)$$

где $P_k(t)$ — распределение Пуассона. Парциальные вклады в (3.21) определяются рекуррентным соотношением другого, нежели (3.15), вида:

$$n_{\omega}^{(m)}(E_0) = \int_0^{E_0 - \omega} n_{\omega}^{(m-1)}(E_0 - \mu) n_{\mu}^{(1)}(E_0) d\mu. \quad (3.22)$$

Каждая из парциальных величин $n_{\omega}^{(m)}(E_0)$ определяет вероятность того, что энергия m -го излученного фотона лежит в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Здесь величина $n_{\omega}^{(1)}(E) = g_{\omega}^{(1)}(E)$ определяется уравнением (3.13), $n_{\omega}^{(0)}(E) = \delta(\omega)$.

Функции (3.22) удовлетворяют условиям нормировки:

$$\int_0^{E_0} n_{\omega}^{(m)}(E_0) d\omega = 1.$$

Интеграл от $n_{\omega}(E_0, t)$ дает ту же величину, что и (3.20), т. е. среднее число излученных фотонов к моменту времени t равно

$$\langle k(t) \rangle = \int_0^{E_0} d\omega n_{\omega}(E_0, t). \quad (3.23)$$

Для процесса пуассоновского типа, выражаемого формулами (3.21) и (3.22), имеем $\langle k(t) \rangle = \nu_0 t$. Таким образом, в то время как величина ω в (3.21)–(3.23) представляет собой энергию отдельного фотона, величина ω в формулах (3.1)–(3.20) есть суммарная энергия всех излученных фотонов. Однофотонные спектры типа (3.21) изучались методом компьютерного моделирования в работе [27].

Предположим, что процесс прохождения электронов через вещество сопровождается наличием двух не связанных между собой механизмов излучения. Тогда для заданной ω интенсивность (3.2), как и функция распределения $W_{\omega}(E_0, t)$, не будет аддитивной суммой вкладов соответствующих типов излучения, в то время как полные потери на излучение (3.3), полное число излученных фотонов (3.18) и спектр одиночных фотонов (3.21) являются аддитивными величинами. Например, прохождение электронов через ориентированный кристалл сопровождается наличием некогерентного излучения на отдельных атомах, ν_{ω}^{BH} [1], и когерентным излучением на непрерывном потенциале атомных цепочек и плоскостей, ν_{ω}^C [28]. Тогда $I_{\omega} \neq I_{\omega}^{BH} + I_{\omega}^C$, в то время как $n_{\omega} = n_{\omega}^{BH} + n_{\omega}^C$.

3.4. Аналитические решения

Рассмотрим важный частный случай, когда энергии электрона E и излученного фотона ω входят в дифференциальную вероятность излучения в виде определенной комбинации, так что

$$\nu_{\omega}(E) d\omega = \nu(y) dy = \nu(y) \frac{d\omega}{E - \omega}, \quad (3.24)$$

где

$$y = \ln \frac{E}{E - \omega}, \quad (3.25)$$

т. е. в знаменателе (3.25) под логарифмом стоит энергия электрона после излучения.

Пусть последовательно излучаются два фотона с энергиями ω_1 и ω_2 , которым соответствуют $y_1 = \ln(E/E_1)$ и $y_2 = \ln(E_1/E_2)$, где $E_1 = E - \omega_1$ и $E_2 = E_1 - \omega_2$. Тогда суммарное значение $y = y_1 + y_2$ преобразуется в соответствии с тем же законом

(3.25), что и составляющие y_1 и y_2 , т. е. $y = \ln(E/E_2)$, $E_2 = E - \omega$, где $\omega = \omega_1 + \omega_2$ — общая потеря энергии в двух актах излучения. Таким образом, важным свойством преобразования (3.25) является то, что при последовательном излучении нескольких фотонов сумма соответствующих y_k удовлетворяет преобразованию того же типа (3.25), что и каждое y_k в отдельности. Преобразование (3.25) позволяет тогда привести уравнение (3.12) к уравнению гораздо более простого типа (2.1) или (2.6) в случае, если соответствующее дифференциальное сечение имеет вид (3.24). Действительно, перейдем в первом интеграле (3.12) от переменных ω и μ к переменным y и η по формулам $y = \ln(E_0/E')$, $\eta = \ln(E''/E')$, где $E' = E_0 - \omega$, $E'' = E' + \mu$. Тогда функция распределения в новых переменных $p(y, t)$ будет связана с исходной соотношением

$$p(y, t) = W_\omega(E_0, t) E_0 \exp(-y).$$

Величина $\omega - \mu$ выразится через разность $y - \eta$, и первый интеграл в (3.12) выразится через интеграл по η от 0 до y от произведения $p(y - \eta, t)\nu(\eta)$. Поступая аналогично со вторым интегралом, приводим (3.12) к уравнению типа (2.1). Все сказанное имеет место в случае, если дифференциальное сечение не зависит от времени, а полное сечение (если соответствующий интеграл сходится) не зависит от энергии электрона, т. е., если имеет место пуассоновский процесс. Таким образом, результаты, полученные в разд. 2 для уравнения (2.1), переносятся на уравнение (3.12), большой класс решений которого для функции распределения $W_\omega(E_0, t)$ может быть получен заменой (3.25) в формулах, полученных для уравнения (2.1).

Простейший случай соответствует равномерному распределению

$$g_\omega^{(1)}(E) = E^{-1}, \quad \omega \leq E. \quad (3.26)$$

Тогда соотношение (3.15) дает для k -фотонной вероятности

$$g_\omega^{(k)}(E) = \frac{1}{(k-1)!E} \left(\ln \frac{E}{E-\omega} \right)^{k-1}. \quad (3.27)$$

Подстановка (3.27) в (3.16) приводит к решению

$$W_\omega(E_0, t) = \frac{1}{E_0} \exp(-\xi) \xi^{1/2} \left(\ln \frac{E_0}{E_0 - \omega} \right)^{-1/2} \times \\ \times I_1 \left[2\xi^{1/2} \left(\ln \frac{E_0}{E_0 - \omega} \right)^{1/2} \right], \quad (3.28)$$

где $\xi = \nu_0 t$, что соответствует формуле (2.17) при $\lambda = 1$ с y , определенным в (3.25).

Для изучения разброса энергетических потерь релятивистских электронов в среде Бете и Гайтлер [1] ввели следующее приближенное выражение для дифференциального сечения за единицу времени:

$$\nu_\omega(E) d\omega = \frac{\nu_0 d\omega}{E \ln \frac{E}{E-\omega}}, \quad (3.29)$$

где $\nu_0 \approx (4/3)c/L_0$, L_0 — радиационная длина в аморфном веществе. Формуле (3.29) отвечает выражение

$$\nu(y) dy = \nu_0 \exp(-y) dy/y. \quad (3.30)$$

Решение Бете–Гайтлера [1] для сечения (3.29) есть

$$W_\omega(E_0, t) d\omega = \frac{1}{E_0 \Gamma(\xi)} \left(\ln \frac{E_0}{E_0 - \omega} \right)^{\xi-1} d\omega, \quad (3.31)$$

где $\xi = \nu_0 t$, $\Gamma(\xi)$ — гамма функция.

Результат (3.31) неудобен при больших значениях потерь энергии, когда $\omega \sim E_0$, т. е. для больших y (для $\xi > 1$ имеется расходимость при $\omega = E_0$). Этот недостаток может быть устранен заменой (3.30) выражением

$$\nu(y) dy = C \exp(-\lambda y) dy/y, \quad (3.32)$$

где $\lambda > 1$.

Сечение (3.32) имеет вид (2.14) с $\alpha = 0$, и решение соответствующего уравнения движения имеет, следовательно, вид (2.39). Это дает распределение Линдхарда [29]:

$$W_\omega(E_0, t) d\omega = \frac{\lambda}{E_0 \Gamma(\xi)} \left(\frac{E_0 - \omega}{E_0} \right)^{\lambda-1} \times \\ \times \left(\lambda \ln \frac{E_0}{E_0 - \omega} \right)^{\xi-1} d\omega, \quad (3.33)$$

где $\xi = Ct$.

Широкий класс однофотонных дифференциальных сечений излучения с правильным асимптотическим поведением для малых частот $\omega \rightarrow 0$ можно описать выражением более общим, чем рассмотренные выше:

$$g_\omega^{(1)}(E_0) = \frac{\lambda^\alpha}{E_0 \Gamma(\alpha)} \left(\frac{E_0 - \omega}{E_0} \right)^{\lambda-1} \times \\ \times \left(\ln \frac{E_0}{E_0 - \omega} \right)^{\alpha-1}, \quad (3.34)$$

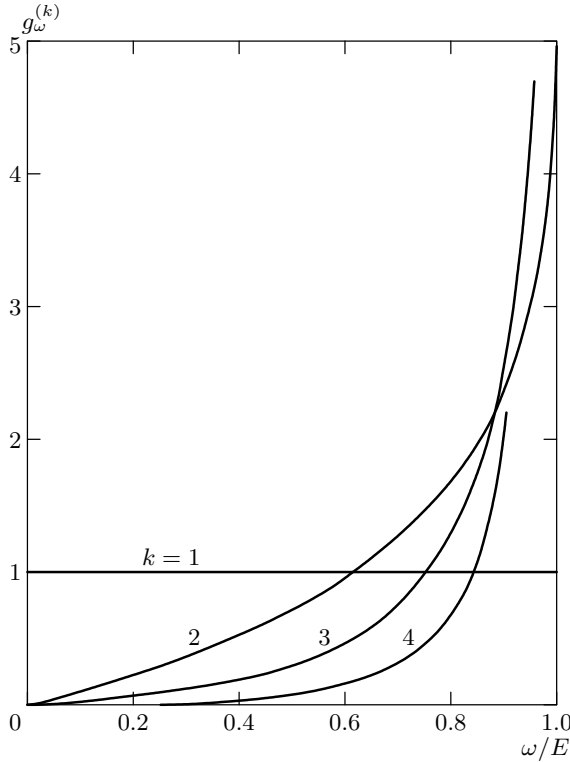


Рис. 1. Парциальные вклады $g_\omega^{(k)}(E)$ (3.27) для равномерного начального распределения (3.26) при различных k

где $\alpha > 0$. Это выражение соответствует формуле (2.14).

Распределение по потерям энергии связано с распределением частиц по энергиям соотношением $W_\omega(E_0, t) = F(E = E_0 - \omega, t)$, где функция $F(E, t)$ удовлетворяет начальному условию $F(E, t = 0) = \delta(E - E_0)$.

Функция распределения электронов по энергиям, отвечающая дифференциальному сечению (3.34), имеет вид, согласно (3.16),

$$F(E, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\xi) \frac{\lambda^{k\alpha}}{E_0 \Gamma(k\alpha)} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{\lambda-1} \times \left(\ln \frac{E_0}{E}\right)^{k\alpha-1}. \quad (3.35)$$

Среднее значение величины $(E/E_0)^m$ равно

$$\left\langle \left(\frac{E}{E_0}\right)^m \right\rangle = \int_0^{E_0} \left(\frac{E}{E_0}\right)^m F(E, t) dE. \quad (3.36)$$

Для распределения (3.35) получаем, согласно (2.19),

$$\left\langle \left(\frac{E}{E_0}\right)^m \right\rangle = \exp \left[-\xi + \xi \left(\frac{\lambda}{\lambda + m} \right)^\alpha \right]. \quad (3.37)$$

В частности, для случая Бете–Гайтлера (3.31) имеем $\langle E/E_0 \rangle = 2^{-\xi}$.

На рис. 1 показаны парциальные вклады $g_\omega^{(k)}(E)$ (3.27) для равномерного исходного распределения (3.26). Видно, что с ростом числа излученных фотонов k парциальные распределения как функции ω быстро смещаются в сторону более жестких частот, имея логарифмическую расходимость при $\omega \sim E$. Гораздо более близкими к реальности свойствами обладает ступенчатое распределение

$$g_\omega^{(1)}(E) = \begin{cases} (\alpha E)^{-1}, & 0 < \omega < \alpha E, \\ 0, & \alpha E < \omega < E, \end{cases} \quad (3.38)$$

где $0 < \alpha < 1$. Распределение (3.38) также допускает аналитическое решение в виде совокупности кусочно-непрерывных функций простого вида, которые мы не будем выписывать в силу их громоздкости. Рисунок 2 иллюстрирует двухфотонное $g_\omega^{(2)}$ (рис. 2б) и пятифотонное $g_\omega^{(5)}$ (рис. 2в) распределения для различных начальных ступенчатых распределений (рис. 2а), задаваемых выражением (3.38). В этом случае все $g_\omega^{(k)}$ обращаются в нуль при $\omega \rightarrow E$. Из рис. 2 видно, что форма распределений $g_\omega^{(k)}$ существенно определяется начальными условиями.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ В ОРИЕНТИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Траектория релятивистского электрона, проходящего через кристалл под некоторым достаточно малым углом $\theta \sim \theta_L$ относительно основных кристаллографических направлений, определяется скоррелированным действием на него атомов, образующих данное направление [26]. Здесь $\theta_L = (4Ze^2/dE)^{1/2}$ — критический угол Линдхарда, Z — атомный номер вещества, d — расстояние между соседними атомами вдоль данного направления. Такое скоррелированное действие атомов цепочки характеризуется непрерывным потенциалом $U(r)$ [26], действующим на электрон и зависящим только от расстояния до цепочки. Действующая на электрон сила $F = |\nabla U(r)|$ имеет порядок $F \sim Ze^2/(da_F) \sim 10^2\text{--}10^3$ эВ/Å, и приводит к интенсивному излучению (эффект Кумахова) [28, 30]. Здесь a_F — параметр экранирования Томаса–Ферми. При энергиях электронов свыше 50–100 ГэВ можно считать, что действующее на

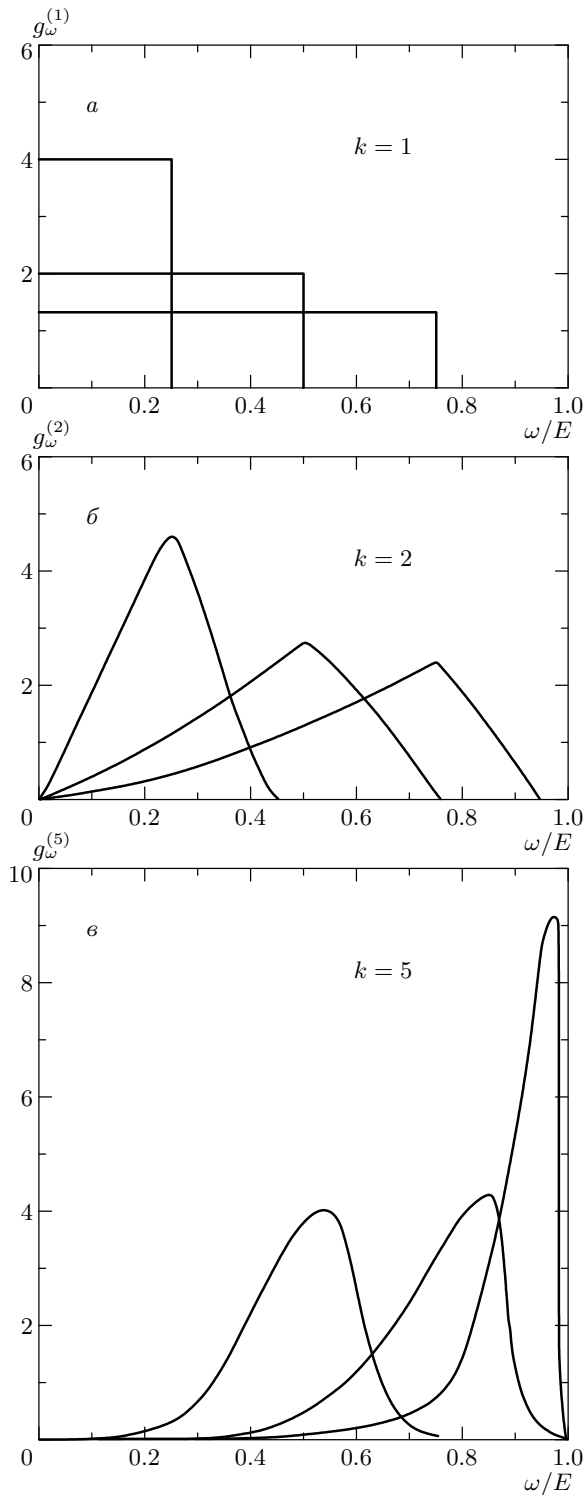


Рис. 2. а — Ступенчатое однофотонное распределение $g_{\omega}^{(1)}$ (3.38) для $\alpha = 0.25, 0.5$ и 0.75 ; б, в — соответствующие двухфотонное $g_{\omega}^{(2)}$ и пятифотонное $g_{\omega}^{(5)}$ распределения

электрон поле не меняется на длине формирования излучения и характеристики излучения можно описывать в приближении постоянного поля [31]. Соответствующие сечения сводятся при этом к известным формулам синхротронного излучения с учетом квантовых эффектов отдачи при излучении и спина [32, 33]. С точки зрения каскадных уравнений типа (3.4) важно, что сечения излучения в ППП определяются только локальными характеристиками поля (именно, силой, действующей в данной точке) и, следовательно, могут непосредственно использоваться в качестве дифференциальных сечений $\nu_{\omega}(E)$, фигурирующих в формулах (3.4), (3.12). Более последовательная теория, учитывающая неоднородность поля в пределах длины формирования излучения и в то же самое время носящая локальный характер, развита недавно в работе [4]. Мы, тем не менее, ограничимся ППП, так как этого достаточно для анализа характерных свойств каскадных процессов множественного излучения фотонов, сопровождающих прохождение электронов с энергиями выше 100 ГэВ через ориентированные кристаллы.

4.1. Приближение постоянного поля

Дифференциальное сечение излучения фотона с энергией ω электроном с энергией E за единицу времени определяется в приближении постоянного поля квантовой синхротронной формулой [32]:

$$\nu_{\omega}(E) = \frac{\alpha}{\pi\sqrt{3}\hbar\gamma^2} \left[2K_{2/3}(\xi) - \int_{\xi}^{\infty} K_{1/3}(\eta) d\eta + \frac{u^2}{1-u} K_{2/3}(\xi) \right] = \tag{4.1}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi\hbar\gamma^2} \int_0^{\infty} \left[\frac{9 + 36x^2 + 16x^4}{9 + 12x^2} + \frac{u^2}{1-u} \left(1 + \frac{2x^2}{3} \right) \right] \exp R \frac{dx}{Y(x)}, \tag{4.2}$$

где аргумент экспоненты

$$R(x) = -\xi \left(1 + \frac{4x^2}{3} \right) Y(x). \tag{4.3}$$

Здесь $\alpha = 1/137$, $u = \omega/E$, $\gamma = E/mc^2$ — лоренц-фактор,

$$\xi = \frac{2}{3} \frac{u}{1-u} \frac{1}{\chi},$$

$\chi = \hbar F \gamma / m^2 c^3$ — лоренц-инвариантный параметр поля, F — сила, действующая на электрон, m — мас-

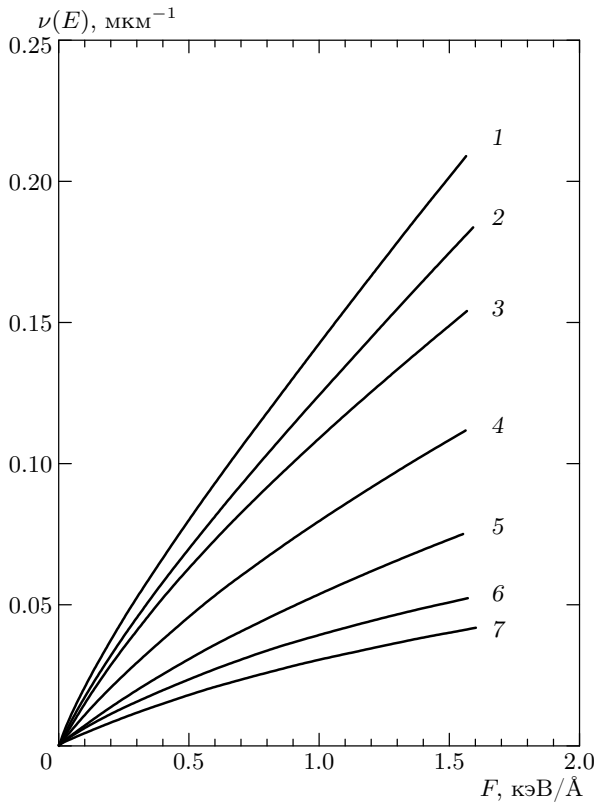


Рис. 3. Вероятность излучения фотона на единице длины как функция силы F , вычисленная в ППП согласно (4.1)–(4.3) для различных энергий электрона (в ТэВ): 0.075 (1), 0.150 (2), 0.3 (3), 1 (4), 4 (5), 10 (6), 20 (7)

са покоя электрона. Функция $Y(x) = (1 + x^2/3)^{1/2}$ представляет собой ЛНС для функций Макдональда $K_{1/3}(\xi)$ и $K_{2/3}(\xi)$ (см. Приложение В). Наше представление (4.2) гораздо удобнее для конкретных приложений стандартной формулы (4.1), так как оно не содержит специальных функций и представляет собой быстросходящийся интеграл, где аргумент ξ входит только в экспоненциальный фактор. Формула (4.2) получена методом седловой точки [25] (см. Приложение В). Формулы (4.1) – (4.3) переходят в классические формулы для синхротронного излучения при малых значениях параметра поля $\chi < 0.1$.

На рис. 3 показана зависимость полного сечения излучения в ППП на единице длины (в $\mu\text{м}^{-1}$) от действующей на электрон силы F , заданной в $\text{кэВ}/\text{Å}$, вычисленная на основе (4.1)–(4.3) для различных энергий E , т. е. по оси ординат отложена интегральная величина (3.5) (деленная на скорость света), которую можно трактовать как число излу-

чаемых на единице длины фотонов. Показаны значения силы F , типичные для ориентированных кристаллов. Видно, что для заданного значения силы полное сечение излучения в ППП медленно уменьшается с ростом E . Например, при уменьшении энергии электрона со 150 ТэВ вдвое для $F \approx 500 \text{ эВ}/\text{Å}$ полное сечение излучения увеличивается только на 10 %. Таким образом, в рассматриваемом случае полное сечение излучения можно приблизительно считать не зависящим от энергии электрона. Дифференциальное сечение в ППП (4.1)–(4.3) имеет интегрируемую особенность $\nu_\omega \sim \omega^{-2/3}$ при $\omega \rightarrow 0$. Это приводит к наличию в спектре излучения большого числа фотонов с относительно малыми энергиями. Так, доля фотонов с энергиями, меньшими 0.01 части от энергии электрона, составляет от 50 (для $E \sim 100 \text{ ТэВ}$) до 25 (для $E \sim 20 \text{ ТэВ}$) процентов от всех излучаемых фотонов. Отметим, однако, что такой характер зависимости для $\omega \rightarrow 0$ является типичным именно для спектров синхротронного типа. Более точные расчеты с учетом неоднородности поля указывают на сильное подавление излучения в мягкой части спектра по сравнению с ППП [4].

Нормированные на единицу однофотонные вероятности излучения (спектры) (3.13), рассчитанные в ППП для различных значений параметра поля χ , показаны на рис. 4. При больших значениях $\chi > 40\text{--}50$ в спектре фотонов появляется максимум при $\omega/E \sim \chi/(1+\chi) \sim 1$. Появление максимума связано с увеличением вклада спинового слагаемого в спектр при увеличении χ . Вклад спина в излучение определяется слагаемыми $u^2/(1-u)$ в выражениях (4.1)–(4.2). При $E \approx 150\text{--}300 \text{ ТэВ}$ в различных кристаллах $\chi \approx 1\text{--}10$. Влияние спина на излучение изучалось недавно экспериментально в работе [34]. Представляет интерес средняя энергия излученного фотона $\langle \omega \rangle$, т. е. величина ω , усредненная по однофотонным распределениям $g_\omega^{(1)}$ (3.13). При $\chi \approx 1\text{--}2$ эта величина равна $\langle \omega \rangle \approx 0.1\text{--}0.12$ и стремится к пределу $\langle \omega \rangle \rightarrow 0.25$ при $\chi \rightarrow \infty$.

Парциальные вероятности $g_\omega^{(k)}$ (3.15) для электронов с энергией 150 ТэВ при двух различных значениях силы показаны на рис. 5. Начальные распределения $g_\omega^{(1)}$, соответствующие ППП (4.1)–(4.3), показаны штриховыми кривыми. Численный метод расчета величин $g_\omega^{(k)}$ для произвольного начального распределения приводится в Приложении С. По оси абсцисс на рис. 5 отложена суммарная энергия k излученных фотонов. Рисунок 5 иллюстрирует сильную зависимость формы k -фотонного распределения вероятностей $g_\omega^{(k)}$ от начального распределения

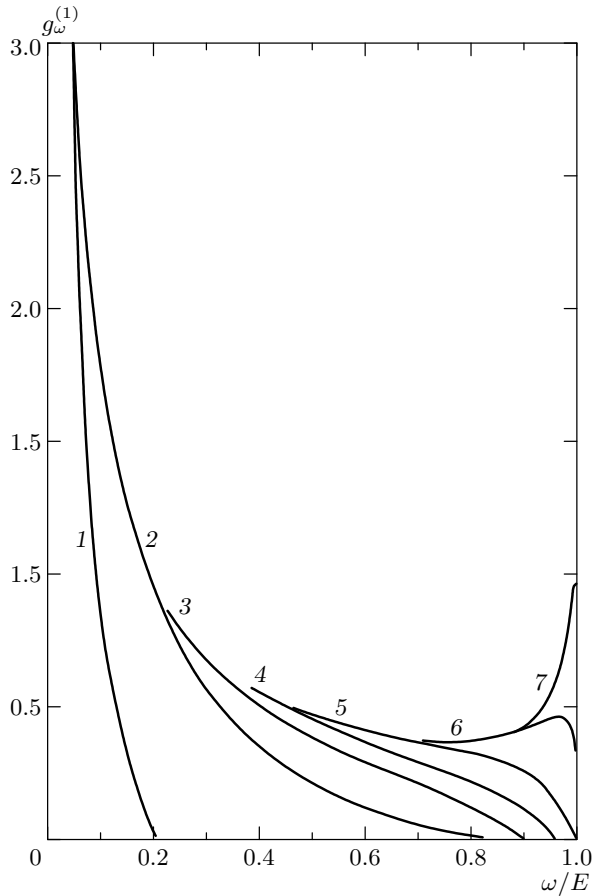


Рис. 4. Однофотонные вероятности излучения $g_{\omega}^{(1)}$ (3.13), вычисленные в ППП (4.1)–(4.3) для различных значений параметра поля $\chi = 0.05$ (1), 0.5 (2), 1.45 (3), 3 (4), 9 (5), 45 (6), 208 (7)

при одном и том же значении k (ср. кривые 5 и 2 на рис. 5а и б для $k = 20$).

Решения каскадного уравнения (3.16) для электронов с энергией 150 ГэВ для трех значений силы в мишени толщиной 185 мкм представлены на рис. 6. Сплошные кривые — расчет в ППП, штриховые — распределение Линдхарда (3.33). Видно, что относительно простое распределение Линдхарда при правильно подобранных параметрах ξ и λ может хорошо аппроксимировать результаты более точного расчета. Поскольку рассматриваемый процесс пуассоновский, среднее число излученных фотонов в данном случае равно $\langle k \rangle = \nu_0 z$, где значения ν_0 можно найти из рис. 3.

4.2. Анализ экспериментальных результатов

Применим полученные результаты к излучению электронов с энергиями в сотни ГэВ при их движе-

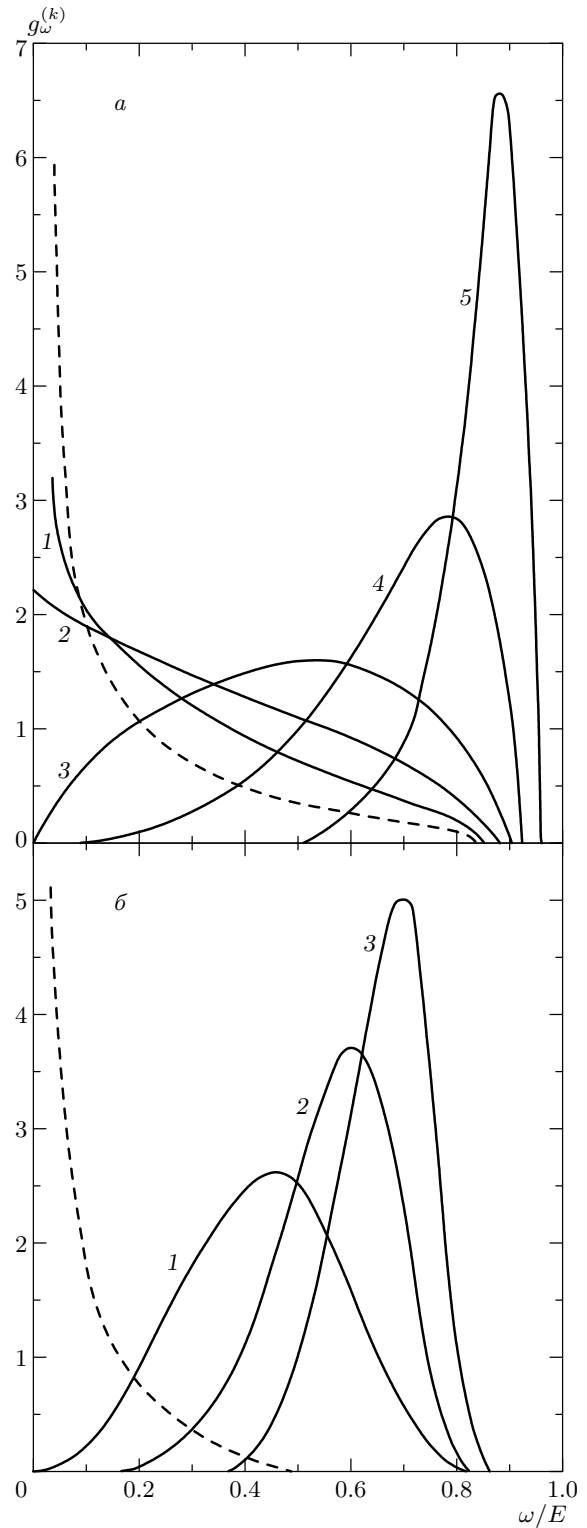


Рис. 5. Парциальные вероятности $g_{\omega}^{(k)}$ (3.15) для электронов с энергией 150 ГэВ в ППП для $F = 500$ (а), 100 (б) эВ/А. Начальные распределения показаны штриховыми кривыми. а — $k = 2$ (1), 3 (2), 5 (3), 10 (4), 20 (5); б — $k = 10$ (1), 20 (2), 30 (3)

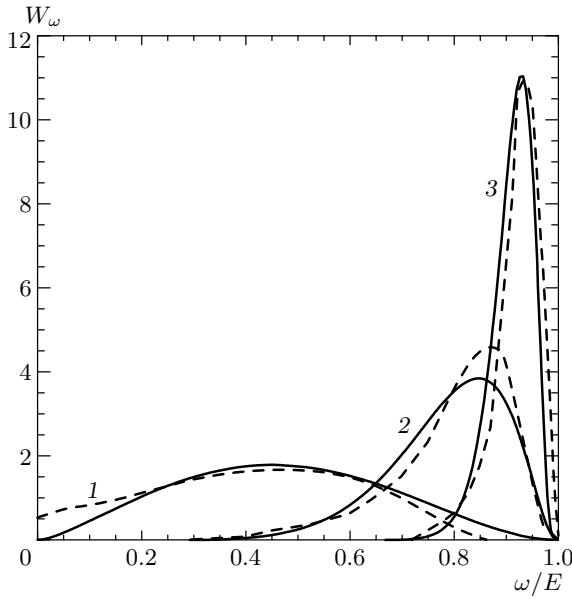


Рис. 6. Решения каскадного уравнения (3.16) для электронов с энергией 150 ГэВ в мишени толщиной 185 мкм. Сплошные кривые — расчет в ППП, штриховые — распределение Линдхарда (3.33): 1 — $F = 200$ эВ/Å, $\chi = 0.44$, $\langle k \rangle = 3.4$, $\lambda = 3$, $\xi = 2.3$; 2 — $F = 500$ эВ/Å, $\chi = 1.1$, $\langle k \rangle = 14$, $\lambda = 5$, $\xi = 8.6$; 3 — $F = 1000$ эВ/Å, $\chi = 2.22$, $\langle k \rangle = 24$, $\lambda = 12$, $\xi = 30.3$. Здесь $\langle k \rangle$ — среднее число излученных фотонов (3.20), λ и ξ — параметры распределения Линдхарда

нии под малыми углами $\theta \sim \theta_L$ к атомной цепочке кристалла (аксиальное каналирование и квазиканалирование [35–37]). Регулярный характер движения в непрерывном потенциале $U(r)$ (r — расстояние до атомной цепочки) будет возмущаться некогерентным многократным рассеянием на отдельных атомах кристалла, что приводит к стохастическому увеличению поперечной энергии электрона ε .

В наших расчетах пренебрежем многократным рассеянием и конкурирующим эффектом уменьшения поперечной энергии из-за излучения фотонов (демпинг поперечной энергии). Тогда движение электрона в аксиально-симметричном потенциале $U(r)$ будет характеризоваться двумя интегралами движения — поперечной энергией ε и угловым моментом электрона относительно атомной цепочки μ , а картина аксиального каналирования будет выглядеть следующим образом. Попадая в кристалл под углом θ_{in} к атомной цепочке на расстоянии r_{in} от нее, электрон приобретает поперечную энергию

$$\varepsilon = \frac{E\theta_{in}^2}{2} + U(r_{in})$$

и угловой момент

$$\mu = \frac{E}{c}\theta_{in}r_{in}\cos\varphi_{in},$$

где φ_{in} — азимутальный угол влета относительно цепочки. Далее электрон движется по траектории с постоянными ε и μ и излучает фотоны, спектр которых можно рассчитать по формулам (3.13)–(3.16). Результирующий спектр получится усреднением по точкам влета r_{in} и углам влета θ_{in} , что эквивалентно усреднению по функции распределения электронов по поперечным энергиям и угловым моментам в кристалле [35, 36]. Таким образом учитываются начальные условия эксперимента (угловая расходимость пучка электронов на входе и т. д.).

Для расчета по формулам (3.13)–(3.16) требуется задать начальную однофотонную функцию распределения $g_{\omega}^{(1)}$. В ППП эта величина будет зависеть в каждый момент времени от текущего расстояния до атомной цепочки r . Поэтому в качестве однофотонной функции в формуле (3.16) следует брать распределение $g_{\omega}^{(1)}$, вычисленное в ППП (4.1)–(4.3) и усредненное по равновесной функции распределения электронов с заданными ε и μ по поперечной координате r . Для электронов, попавших в состояние с финитным поперечным движением (т. е. с $\varepsilon < 0$), равновесное распределение по поперечной координате имеет вид

$$dw(\varepsilon, \mu, r) = \frac{dr}{T(\varepsilon, \mu)} \left(\frac{2m\gamma}{\varepsilon - U(r) - \mu^2/2m\gamma r^2} \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

где $T(\varepsilon, \mu)$ — период поперечных радиальных колебаний электрона в канале, $r_{min} < r < r_{max}$, величины r_{min} и r_{max} определяются из условия равенства нулю знаменателя подкоренного выражения в (4.4).

Квазиканализированные электроны с инфинитным поперечным движением ($\varepsilon > 0$) распределены равномерно в поперечной плоскости. При этом доступная электронам поперечная область не зависит от ε (и равна поперечной площади, приходящейся на одну цепочку $S_0 = 1/Nd$, N — число атомов кристалла в единице объема), поэтому в ППП сечение излучения квазиканализированных электронов не будет зависеть от их поперечной энергии. Для каналированных электронов с $\varepsilon < 0$ сечения излучения будут сильно зависеть от поперечной энергии, из-за того что доступная электронам поперечная область $S(\varepsilon)$ сильно зависит от ε и электроны с большими по модулю поперечными энергиями излучают сильнее, так как они движутся на меньших расстояниях от атомной цепочки.

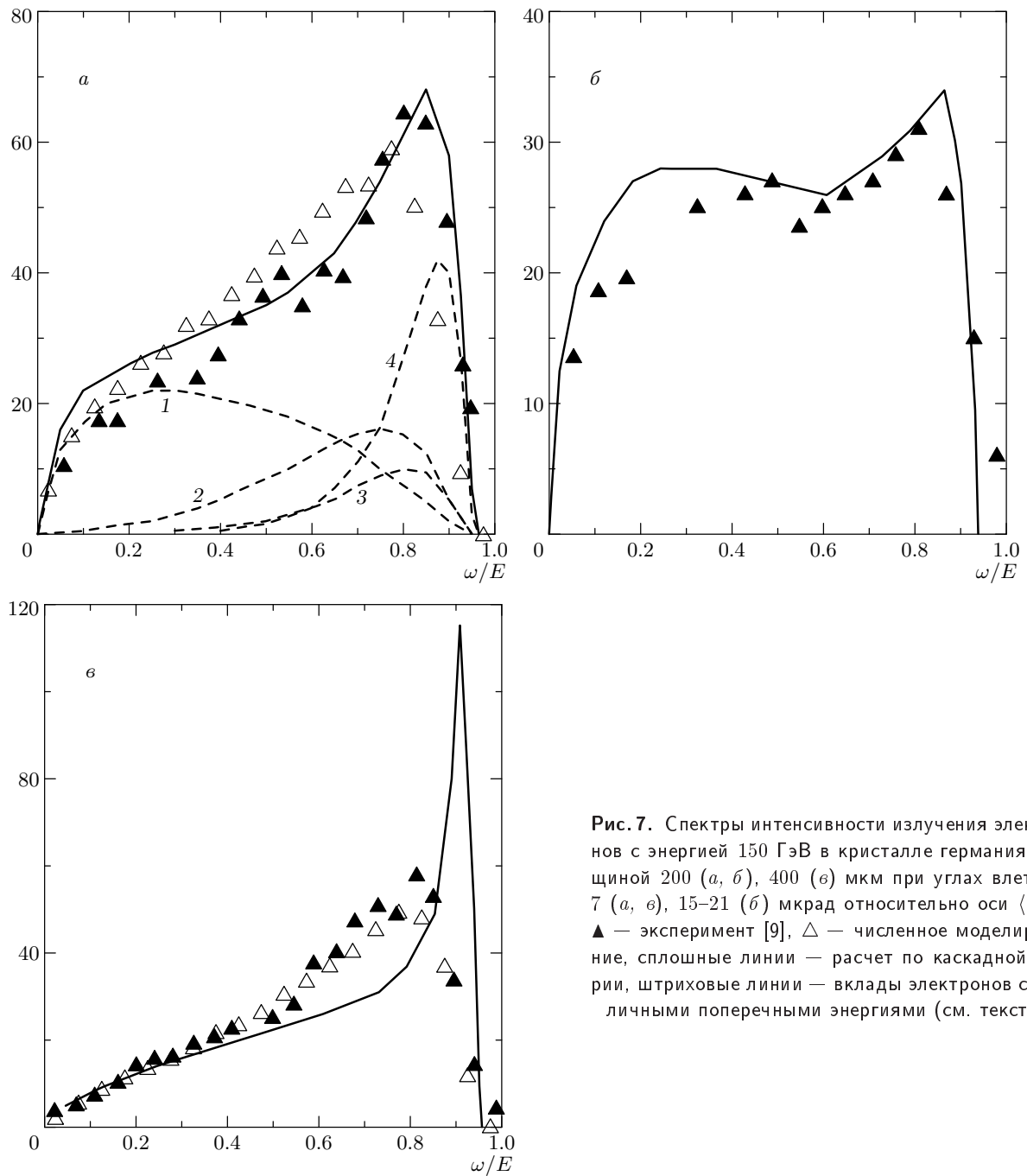


Рис. 7. Спектры интенсивности излучения электронов с энергией 150 ГэВ в кристалле германия толщиной 200 (а, б), 400 (в) мкм при углах влета 0–7 (а, в), 15–21 (б) мкрад относительно оси $\langle 110 \rangle$, ▲ — эксперимент [9], △ — численное моделирование, сплошные линии — расчет по каскадной теории, штриховые линии — вклады электронов с различными поперечными энергиями (см. текст)

Непрерывный потенциал атомной цепочки $U(r)$ рассчитывался нами на основе атомного потенциала Дойла и Тернера [38] с усреднением по тепловым колебаниям атомов кристалла. При этом считалось, что в области $r_1 < r < r_0$ потенциал равен нулю, $U(r) = 0$, где r_1 — половина кратчайшего расстояния между атомными цепочками вдоль заданного направления, $r_0 = (\pi Nd)^{-1/2}$ — радиус канала,

т. е. максимальная доля электронов, которая может быть захвачена в канал, равна $N_{ch} = (r_1/r_0)^2$ (при $\theta_{in} = 0$), что, например, для оси $\langle 110 \rangle$ кристалла германия составляет около 30 % пучка.

Результаты расчета спектра интенсивности излучения (3.2) показаны на рис. 7а, б, где приводятся данные для электронов с энергией 150 ГэВ, падающих под углами в интервалах 0–7 (рис. 7а) и

15–21 (рис. 7б) мкрад относительно направления (110) кристалла германия толщиной 200 мкм (в данном примере $\theta_L = 55$ мкрад). Экспериментальные результаты взяты из работы [9]. Спектры показаны в единицах интенсивности для аморфной среды: Ez/L_{rad} , где z — толщина кристалла, L_{rad} — радиационная длина (для германия $L_{rad} = 2.36$ см). Таким образом, по оси ординат на рис. 7а, б показано превышение интенсивности излучения в ориентированном кристалле по сравнению со случаем аморфной мишени той же толщины. Сплошная кривая на рис. 7а соответствует расчету по каскадной теории согласно (3.2), (3.16). Теоретические значения на рис. 7а и на остальных рисунках вычислялись в отдельных точках, которые соединены прямыми линиями. Видно, что для условий, представленных на рис. 7а, б, развиваемая теория с высокой степенью точности воспроизводит экспериментальные данные.

Доля электронов, захваченных в режим каналирования в условиях, показанных на рис. 7а, равна $N_{ch} = 0.25$ (углы влета 0–7 мкрад). Штриховые линии показывают расчетные вклады в спектр излучения от электронов с различными поперечными энергиями: 1 — $\varepsilon > 0$; 2 — $\varepsilon \in [-10, 0]$ эВ, (0.113); 3 — $\varepsilon \in [-20, -10]$ эВ, (0.044); 4 — $\varepsilon \in [-U_m, -20]$ эВ, (0.094). В круглых скобках показана доля электронов с соответствующими поперечными энергиями. Глубина потенциальной ямы в данном случае $U_m = 202$ эВ (температура кристалла 293 К, средняя амплитуда тепловых колебаний бралась равной $u_{\perp} = 0.12 \text{ \AA}$). Из рис. 7а следует, что основной вклад в экспериментально наблюдаемый максимум при $\omega \approx 0.8E$ вносит относительно небольшое число электронов, находящихся в глубокосвязанных состояниях поперечного движения (в нашем примере число таких электронов не превышает 10%). Оказывается при этом, что основной вклад в максимум вносят парциальные функции $g_{\omega}^{(k)}$ с $k \sim 10$. Результаты численного моделирования представлены на рис. 7а светлыми символами. При этом учитывалось многократное некогерентное рассеяние налетающих электронов на отдельных атомах кристалла, а также демпинг поперечной энергии из-за излучения: $\delta\varepsilon = -(\omega/E)[\varepsilon - U(r)]$. Метод численного моделирования описан в работе [19]. В отличие от [19], однако, в данном случае отдельно моделировалась точка, в которой происходит акт излучения (см. также [16]).

Рисунки 7а, б иллюстрируют сильную ориентационную зависимость спектральных характеристик излучения (доля электронов в канале в условиях рис. 7б составляет 0.09), которая хорошо объясняет-

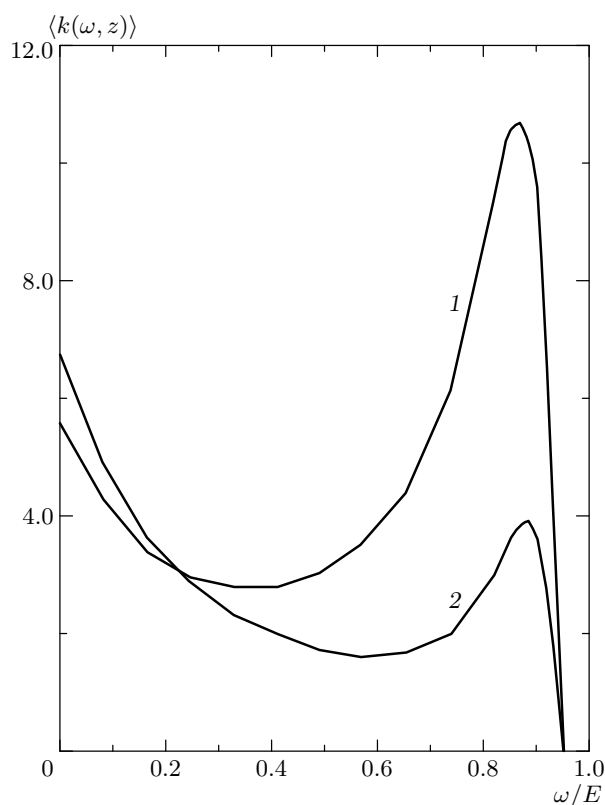


Рис. 8. Зависимость среднего числа излученных фотонов $\langle k(\omega, z) \rangle$ от их суммарной энергии ω для условий, показанных на рис. 7а. Углы влета 0–7 (1), 21–27 (2) мкрад

ся в рамках каскадной теории. Заметим, что развиваемая теория не содержит подгоночных параметров и дает правильные количественные результаты.

Соответствие каскадной теории и эксперимента, однако, ухудшается в более толстых кристаллах (см. рис. 7в). Отсутствие учета многократного рассеяния в каскадной теории приводит к тому, что она предсказывает для толстых кристаллов ненаблюдаемый острый пик. Тем не менее и в этом случае теория дает согласующиеся с экспериментом значения интенсивности в мягкой части спектра и верно предсказывает полные потери на излучение. Полные потери энергии на излучение пропорциональны площади под кривыми на рис. 7. Для условий, представленных на рис. 7а, в, полные потери энергии составляют, соответственно, 27% и 44% от первоначальной энергии электронов, что близко к экспериментальным результатам.

Величиной, которая может быть измерена в экспериментах, является среднее число излученных фотонов как функция их суммарной энергии $\langle k(\omega, z) \rangle$,

определяемое по формуле (3.18). Эта величина для электронов с энергией 150 ГэВ показана на рис. 8 при различных условиях их влета в кристалл германия толщиной 200 мкм относительно направления $\langle 110 \rangle$. Площадь под кривыми на рис. 8 равна полному среднему числу излученных фотонов $\langle k(z) \rangle$ на данной толщине z . Рисунок 8 иллюстрирует сильную ориентационную зависимость числа излученных фотонов, если углы влета меняются в пределах критического угла Линдхарда θ_L . Наличие на представленных на рис. 8 спектрах $\langle k(\omega, z) \rangle$ максимума при $\omega \rightarrow 0$ связано с поведением однофотонных вероятностей в ППП, $g_\omega^{(1)} \sim \omega^{-2/3}$, что существенно завывает число мягких фотонов в спектре излучения по сравнению с более точным рассмотрением [4].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процессы, приводящие к разбросу потерь энергии, можно разделить на два типа: процессы, при которых потери энергии в одном акте взаимодействия относительно малы, и окончательное распределение определяется большим количеством взаимодействий, большим 10^2-10^3 (ионизационные потери); и процессы, когда потери энергии в одном акте взаимодействия соизмеримы с энергией частицы, в то время как результирующее распределение определяется вкладом относительно небольшого числа актов взаимодействия $< 10 - 20$ (тормозное излучение, излучение электронов с энергиями свыше сотни ГэВ в ориентированных кристаллах). В последнем случае адекватное описание разброса энергетических потерь, соответствующего конкретным экспериментальным условиям, можно получить как сумму парциальных вкладов вероятностей излучения различного числа фотонов (3.6). Выражения для функции распределения по потерям энергии имеют особенно простой вид, когда полное сечение взаимодействия не зависит от времени и от энергии, так что имеет место пуассоновский процесс. В обоих случаях большой класс явлений, соответствующих степенным дифференциальным сечениям взаимодействия с экранировкой, может быть описан точными решениями сравнительно простого вида, выражающимися через быстросходящиеся интегралы от элементарных функций.

Автор благодарен покойному профессору Й. Линдхарду, который обратил внимание автора на полезные свойства распределения (3.33), за возможность работать в университете г. Орхуса в

первой половине 1990-х годов и за многочисленные полезные обсуждения. Автор также благодарен коллегам Й. У. Андерсону, Ю. В. Кононцу, Х. Нитте, Э. Уггерхою и А. Х. Хоконову за дискуссии, способствовавшие прояснению важных аспектов выполненной работы. Работа выполнена при поддержке гранта «Интеграция» (Э0203).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формулы (2.33), (2.34) приводят к гамма-распределению (2.39) с помощью соотношения

$$\Gamma^{-1}(\xi) = \pi^{-1} \xi^{1-\xi} \int_0^\pi \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^\xi \exp \left(\frac{\xi \theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) d\theta. \quad (\text{A.1})$$

Эта формула следует из стандартного представления (см., например, [39], 8.315):

$$\Gamma^{-1}(\xi) = i(2\pi)^{-1} \int_C (-z)^{-\xi} \exp(-z) dz, \quad (\text{A.2})$$

где контур C идет из $+\infty$ вдоль действительной оси, обходит начало координат против часовой стрелки и возвращается в $+\infty$. Формула (A.1) получается из (A.2) интегрированием вдоль линии наискорейшего спуска, как это было описано в тексте.

В отличие от стандартных представлений [39–41] формула (A.1) удобна быстросходящимся подынтегральным выражением, что делает ее весьма полезной также в силу того, что фактор $\Gamma^{-1}(\xi)$ часто встречается в функциях распределения, рассматриваемых в данной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Стандартные представления для функций Макдональда в (4.1) имеют вид (см. [39], 8.433)

$$K_{1/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^\infty \cos \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx, \quad (\text{B.1})$$

$$K_{2/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^\infty x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \right] dx. \quad (\text{B.2})$$

Заменяя переменную интегрирования в формулах (B.1) и (B.2) комплексной переменной $z = x + iy$ находим, что аргумент тригонометрических функций в (B.1) и (B.2) имеет седловую точку $z_0 = i$, лежащую на мнимой оси, а уравнение ЛНС имеет вид

$Y(x) = (1 + x^2/3)^{1/2}$. Интегрируя вдоль этой линии, получаем

$$K_{1/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^\infty \exp \left[-\xi \left(1 + \frac{4x^2}{3} \right) Y(x) \right] dx, \quad (B.3)$$

$$K_{2/3}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\infty (3 + 2x^2) \times \exp \left[-\xi \left(1 + \frac{4x^2}{3} \right) Y(x) \right] \frac{dx}{Y(x)}. \quad (B.4)$$

Наше представление (B.3) и (B.4) не встречается в литературе. Оно удобно тем, что параметр ξ входит в аргумент экспоненты быстроходящегося подынтегрального выражения, что дает преимущества при операциях дифференцирования и интегрирования по аргументу, а также при численных расчетах. Функция Эйри и ее производная в (2.36) и (2.38) однозначно связаны с $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$, а значит, могут также быть представлены формулами типа (B.3) и (B.4) [40].

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Задача заключается в численном определении интегралов вида

$$F(e, u) = \int_0^u f(e - x, u - x)w(e, x) dx, \quad (C.1)$$

где e и u — безразмерные переменные, меняющиеся от нуля до единицы и соответствующие энергии электрона и частоте (энергии) излучаемых фотонов. Предполагается, что подынтегральные функции в выражении (C.1) определены для всех $e > u$.

Интеграл (C.1) вычислялся на треугольной сетке (см. рис. 9) с одинаковым числом разбиений и равным шагом δ по обоим переменным:

$$\delta \equiv \Delta e = \Delta u = \frac{1 - 2u_{min}}{N - 1}.$$

Здесь N — максимальное число точек, в которых вычисляются e и u (на рисунке $N = 6$), $u_{min} = 1 - u_{max}$, u_{min} и u_{max} — максимальная и минимальная частоты фотонов, для которых вычисляются интегралы (C.1). В нашем случае $u_{min} = 0.0051529$. Такой выбор величины u_{min} обусловлен алгоритмом численного интегрирования функций с особенностью типа $u^{-2/3}$ на левом пределе интегрирования. Значения

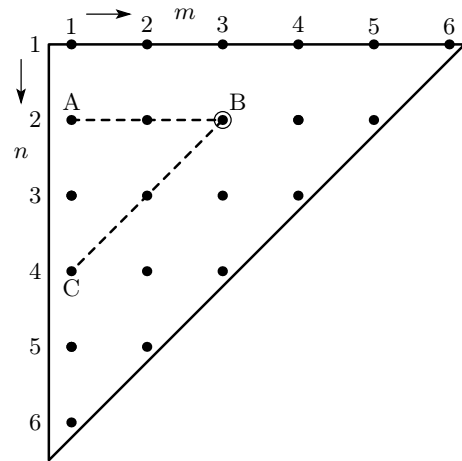


Рис. 9. Сетка в переменных $u = \omega/E_0$ и $e = E/E_0$ для численного расчета парциальных вероятностей (3.15)

частотной переменной m возрастают вдоль оси абсцисс, тогда как переменная n возрастает против оси ординат.

Функциям, входящим в подынтегральное выражение в (C.1), сопоставляем сеточные функции f_{nm} и w_{nm} , причем первый индекс соответствует энергии электрона e_n , а второй — частоте фотона u_m . Тогда n -му значению энергии на сетке соответствует $N - n + 1$ значений частотной переменной m . По определению $e_1 = 1$, $e_N = 1 - 2u_{min}$, $u_1 = u_{min}$, $u_N = 1 - u_{min}$.

На указанной сетке интеграл (C.1) вычисляется по формуле (метод трапеции)

$$F_{nm} = \delta \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{1k} - \frac{1}{2}\delta_{mk} \right) \times f_{n+k-1, m-k+1} w_{nk}, \quad (C.2)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Согласно формуле (C.2), значения f_{ij} в указанной сумме на сетке представленного на рис. 9 вида для заданных e_n и u_m (выделенная точка на рисунке) берутся на диагонали, соединяющей точки (n, m) и $(n+m-1, 1)$ (штриховая линия BC на рис. 9, $n = 2$ и $m = 3$). Значения же w_{ij} в (C.2) берутся на линии $n = const$ (линия AB). Значения интеграла (C.1) от нуля до $u = u_1 = u_{min}$ вычислялись аналитически с учетом малости $u_{min} \ll 1$, т. е. интеграл (C.1) по формуле (C.2) вычислялся в пределах $[u_{min}, u]$. На каждом этапе вычислений точность корректировалась с помощью условия нормировки, а результаты проверялись путем сравнения с аналитическими решениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bethe and W. Heitler, Proc. Roy. Soc. (London) A **146**, 83 (1934).
2. L. Landau, J. Phys. USSR **8**, 201 (1944); Л. Д. Ландау, *Собрание трудов*, Наука, Москва (1969), т. 1, с. 482.
3. J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).
4. M. Kh. Khokonov and H. Nitta, Phys. Rev. Lett. **89**, 094801 (2002).
5. J. Lindhard and V. Nielsen, Kgl. Dan. Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **38**, № 9 (1971).
6. J. Lindhard and V. Nielsen, Kgl. Dan. Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. **39**, № 1 (1974).
7. J. Lindhard, Phys. Scripta **32**, 72 (1985).
8. П. В. Вавилов, ЖЭТФ **32**, 920 (1957).
9. R. R. Medenwaldt, S. P. Moller, S. Tang-Peterson et al., Phys. Lett. B **242**, 517 (1990); R. Medenwaldt, S. P. Moller, A. H. Sorensen et al., CERN/SPSC 90-31 SPSC/P234 Add. 3 (1990).
10. K. Kirsebom, R. Medenwaldt, U. Mikkelsen et al., Nucl. Instr. Meth. B **119**, 79 (1996).
11. A. Baurichter, K. Kirsebom, Yu. V. Kononets et al., Phys. Rev. Lett. **79** 3415 (1997).
12. K. Kirsebom, U. Mikkelsen, E. Uggerhoj et al., Nucl. Instr. Meth. B **174**, 274 (2001).
13. V. N. Baier and V. M. Katkov, Phys. Rev. D **59**, 056003 (1999).
14. X. Artru, Phys. Lett. A **128**, 302 (1998); Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **48**, 278 (1990).
15. Yu. V. Kononets and V. A. Ryabov, Nucl. Instr. Meth. B **48**, 269 (1990); Nucl. Instr. Meth. B **48**, 274 (1990).
16. Yu. V. Kononets, J. Moscow Phys. Soc. **2**, 71 (1992).
17. V. V. Beloshitsky, M. A. Kumakhov, and A. Kh. Khokonov, Nucl. Instr. Meth. B **62**, 207 (1991).
18. М. Х. Хоконов, Письма в ЖЭТФ **56**, 349 (1992).
19. М. Х. Хоконов, ЖЭТФ **103**, 1723 (1993).
20. А. И. Ахиезер, Н. Ф. Шульга, *Электродинамика высоких энергий в веществе*, Наука, Москва (1993), гл. 9.
21. G. V. Dedkov and R. I. Tegaev, Radiat. Effects **91**, 265 (1986).
22. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир, Москва (1984).
23. H. Bethe, Phys. Rev. **89**, 1256 (1952).
24. L. Meyer, Phys. Stat. Sol. (b), **44**, 253 (1971).
25. М. Kh. Khokonov, Phys. Scripta **55**, 513 (1997).
26. J. Lindhard, Kgl. Dan. Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **34**, № 14 (1964).
27. А. Х. Хоконов, М. Х. Хоконов, А. А. Киздермишов, ЖТФ **72**, 69 (2002).
28. М. А. Кумakhov, Phys. Lett. A **57**, 17 (1976).
29. J. Lindhard, private communication (1990).
30. V. V. Beloshitsky and F. F. Komarov, Phys. Rep. **93**, 117 (1982).
31. I. C. Kimball and N. Cue, Phys. Rep. **125**, 68 (1985).
32. Н. П. Клепиков, ЖЭТФ **26**, 19 (1954).
33. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, УФН **159**, 455 (1989).
34. K. Kirsebom, U. Mikkelsen, E. Uggerhoj et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 054801 (2001).
35. В. В. Белошицкий, М. А. Кумахов, ЖЭТФ **82**, 462 (1982).
36. В. И. Телегин, М. Х. Хоконов, ЖЭТФ **83**, 260 (1982).
37. Ф. Ф. Комаров, А. Ф. Комаров, М. Х. Хоконов, ЖЭТФ **93**, 41 (1987).
38. P. A. Doyle and P. S. Turner, Acta Cryst. A **24**, 390 (1968).
39. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
40. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).
41. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва (1968).