

ПАРЦИАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧЕ О ПРОВОДИМОСТИ БИНАРНЫХ КОМПОЗИТОВ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ НА ПЛОСКОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ РЕШЕТКЕ

*Б. Я. Балагуров**, *В. А. Кашин*

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 февраля 2004 г.

В рамках линейной задачи об электропроводности бинарных композитов исследованы парциальные (вычисленные по объему отдельных компонент) моменты напряженности электрического поля различных порядков. Численный эксперимент проводился на квадратной решетке размером 401×401 узлов со случайно распределенными связями. Вычислены моменты (порядка $n = 2, 3, \dots, 6$) как функции концентрации при ряде фиксированных значений параметра h — отношения проводимостей компонент. Изучено поведение парциальных моментов в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик и определены соответствующие критические индексы.

PACS: 73.90.+f, 81.05.Zx

1. ВВЕДЕНИЕ

Как отмечено в ряде работ [1–5], разнообразие эффективные характеристики двухкомпонентных сред (в частности, бинарных композитов) выражаются через парциальные — вычисленные по объему отдельных компонент — моменты напряженности электрического поля разных порядков. Так, например, эффективная проводимость σ_e может быть выражена через моменты как первого порядка, так и второго. Знание моментов второго порядка позволяет найти также производные от σ_e по ее аргументам — проводимостям компонент [2]. При этом одновременное определение эффективной проводимости и ее производных позволяет достаточно подробно исследовать критическое поведение σ_e в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик (см. [6, 7]). Производные от σ_e входят также в выражения для низкочастотной диэлектрической проницаемости, магнитосопротивления в слабом магнитном поле [2] и, при определенном соотношении параметров, в формулу для термоэдс. Через парциальные моменты второго порядка выражаются структурные

флуктуации поля и тока [1, 2], а также джоулево тепло, выделяемое в каждой из компонент.

При изучении нелинейных явлений возникает необходимость в определении моментов более высоких порядков. Согласно [3, 4], для вычисления первой нелинейной поправки к эффективной проводимости требуется знать парциальные моменты четвертого порядка. В следующих по нелинейности приближениях возникают моменты шестого, восьмого и т. д. порядков — см. [5]. Моменты четвертого порядка появляются и в задаче о низкочастотном спектре шумов [3, 4]. Отметим, наконец, что в некоторых случаях возникает необходимость в изучении парциальных моментов нечетного порядка.

Таким образом, парциальные моменты напряженности электрического поля играют важную роль в теории явлений переноса в бинарных композитах. Эти величины, определяемые в линейной задаче об электропроводности, являются функциями двух аргументов — концентрации p и отношения проводимостей компонент $h = \sigma_2/\sigma_1$. Тем самым исходно многопараметрические эффективные характеристики бинарной среды, будучи выражены через соответствующие моменты, редуцируются до уровня двухпараметрических функций. Для систем с фазовым

*E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

переходом металл–диэлектрик критическое поведение двухпараметрических функций может быть описано в рамках стандартной гипотезы подобия аналогично электропроводности [8] и некоторым другим величинам [2]. Для парциальных моментов эта процедура проведена в работе [5], где введены соответствующие критические индексы и найдены соотношения между ними. В [5] показано, что каждый парциальный момент выше второго порядка характеризуется одним новым (по сравнению с индексами эффективной проводимости) критическим индексом. Согласно [5], в двумерном случае независимых критических индексов вдвое меньше, чем в трехмерном.

В настоящей работе в рамках линейной задачи о проводимости исследован ряд парциальных моментов напряженности электрического поля для двумерной двухкомпонентной системы. Численный эксперимент проводился на квадратной решетке размером 401×401 узлов со случайно распределенными связями во всем интервале изменения концентрации p при шести значениях параметра h : $h = 10^{-m}$, где $m = 1, \dots, 6$. При конкретной «реализации» (т. е. при заданной концентрации связей) численными методами решалась соответствующая система уравнений Кирхгофа и во всех узлах находились потенциалы $V_{\mathbf{r}}$. Параллельно решалась аналогичная задача о нахождении потенциалов $\tilde{V}_{\mathbf{r}}$ в узлах дуальной решетки.

С помощью $V_{\mathbf{r}}$ и $\tilde{V}_{\mathbf{r}}$ вычислялись решеточные аналоги парциальных моментов напряженности электрического поля. Соответствующие величины определялись как средние по шести реализациям. В наиболее сложной для исследования критической области, где результаты заметно флуктуируют при переходе от одной реализации к другой, их количество доведено до десяти. Для каждого из моментов изучено его поведение в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик и даны оценки как для критических индексов, так и для коэффициентов соответствующих разложений.

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ

Задача о проводимости неоднородной среды ставится следующим образом. Имеется система уравнений постоянного тока:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ — плотность тока. В линейной по полю

постановке задачи величины \mathbf{j} и \mathbf{E} связаны законом Ома (изотропная среда):

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad (2)$$

где $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ — зависящая от координат локальная проводимость образца. Система уравнений (1), (2) решается при условии, что в среде имеется однородное поле напряженности $\langle \mathbf{E} \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по объему V образца.

Эффективная проводимость среды σ_e определяется как коэффициент пропорциональности между средней плотностью тока $\langle \mathbf{j} \rangle$ и величиной $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma_e \langle \mathbf{E} \rangle \quad (3)$$

при условии $V \rightarrow \infty$. В случае двухкомпонентных систем удобно ввести безразмерную эффективную проводимость f :

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) \equiv \sigma_1 f(p, h), \quad h = \sigma_2 / \sigma_1, \quad (4)$$

где p — концентрация (доля занимаемого объема) первой компоненты.

Определим парциальные моменты напряженности электрического поля порядка $2n$ следующим образом:

$$\psi_i^{(2n)} = \langle \mathbf{e}^{2n} \rangle^{(i)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{|\langle \mathbf{E} \rangle|}, \quad (6)$$

$$\langle (\dots) \rangle^{(i)} = \frac{1}{V} \int_{V_i} (\dots) dV. \quad (7)$$

В формуле (7) интегрирование ведется по объему i -й компоненты V_i . Функции $\psi_i^{(2n)}$, как и проводимость σ_e из (3), являются эффективными (самоусредняющимися при $V \rightarrow \infty$) характеристиками среды и не зависят ни от величины, ни (в изотропном случае) от направления приложенного поля $\langle \mathbf{E} \rangle$. Величины $\psi_i^{(2n)}$ определяются только свойствами среды и для двухкомпонентных систем зависят от тех же аргументов, что и функция f из (4):

$$\psi_i^{(2n)} = \psi_i^{(2n)}(p, h). \quad (8)$$

Согласно [1], эффективная проводимость σ_e может быть выражена и через квадратичные характеристики поля:

$$\sigma_e = \langle \sigma \mathbf{e}^2 \rangle \quad (9)$$

с $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{r})$ из (6). Для бинарных сред из (9) с учетом (4) следует

$$f = \psi_1^{(2)} + h \psi_2^{(2)}, \quad (10)$$

где $\psi_i^{(2n)}$ — парциальные моменты второго порядка. Через моменты $\psi_i^{(2)}$ выражаются также квадратичные структурные флуктуации поля и тока (см. [5]).

Как показано в работах [3–5], при изучении нелинейных свойств неоднородных сред возникает необходимость в вычислении и более высоких моментов напряженности электрического поля. Для слабонелинейной изотропной среды вместо (2) имеем

$$\mathbf{j} = \left\{ \sigma(\mathbf{r}) + \chi^{(3)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^2 + \chi^{(5)}(\mathbf{r})\mathbf{E}^4 + \dots \right\} \mathbf{E}. \quad (11)$$

Аналогичным по форме соотношением связаны средние значения $\langle \mathbf{j} \rangle$ и $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \left\{ \sigma_e + \chi_e^{(3)} (\langle \mathbf{E} \rangle)^2 + \chi_e^{(5)} (\langle \mathbf{E} \rangle)^4 + \dots \right\} \langle \mathbf{E} \rangle, \quad (12)$$

где $\chi_e^{(3)}, \chi_e^{(5)}, \dots$ — эффективные коэффициенты нелинейности. Согласно [3, 4], величина $\chi_e^{(3)}$ может быть выражена через напряженность электрического поля линейной задачи:

$$\chi_e^{(3)} = \langle \chi^{(3)} \mathbf{e}^4 \rangle, \quad (13)$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{r})$ — то же, что и в (6). Для двухкомпонентной среды из (13) следует, что

$$\chi_e^{(3)} = \chi_1^{(3)} \psi_1^{(4)} + \chi_2^{(3)} \psi_2^{(4)}. \quad (14)$$

Здесь $\chi_i^{(3)}$ — значение коэффициента нелинейности $\chi_i^{(3)}$ в i -й компоненте, $\psi_i^{(4)}$ — парциальные моменты четвертого порядка. Согласно [5], в выражения для $\chi_e^{(5)}, \chi_e^{(7)}, \dots$ входят моменты соответственно шестого, восьмого, ... порядков. Отметим, что величины $\psi_i^{(4)}$ возникают и в задаче о низкочастотном спектре шумов [3, 4].

Парциальные моменты нечетного порядка $\psi_i^{(2n+1)}$ определяются с помощью соотношения

$$\langle \mathbf{e}^{2n+1} \rangle^{(i)} = \psi_i^{(2n+1)} \langle \mathbf{e} \rangle. \quad (15)$$

Здесь учтено, что для изотропной среды векторная величина $\langle \mathbf{e}^{2n} \mathbf{e} \rangle^{(i)}$ может быть направлена только вдоль орта $\langle \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle / |\langle \mathbf{E} \rangle|$. Из (15) следует, что

$$\psi_i^{(2n+1)} = \langle \mathbf{e}^{2n} e_{\parallel} \rangle^{(i)}, \quad (16)$$

где $e_{\parallel}(\mathbf{r})$ — составляющая вектора $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, параллельная $\langle \mathbf{E} \rangle$. Нечетные моменты также являются функциями аргументов p и h . Отметим, что, как следует из (3),

$$f = \psi_1^{(1)} + h\psi_2^{(1)}. \quad (17)$$

Для бинарной случайно-неоднородной системы одновременная замена $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ и $p \rightarrow 1 - p$ не меняет макроскопических свойств среды (см. [1]), так что [5]

$$f(p, h) = hf \left(1 - p, \frac{1}{h} \right), \quad (18)$$

$$\psi_1^{(n)}(p, h) = \psi_2^{(n)} \left(1 - p, \frac{1}{h} \right), \quad (19)$$

$$\psi_2^{(n)}(p, h) = \psi_1^{(n)} \left(1 - p, \frac{1}{h} \right). \quad (20)$$

Равенства (18)–(20) позволяют находить функции $f(p, h)$ и $\psi_i^{(n)}(p, h)$ при $h > 1$, если они известны при $h < 1$ во всем интервале изменения концентрации p .

В двумерном случае для величин f и $\psi_i^{(n)}$ имеют место так называемые соотношения взаимности [1, 5]:

$$f(p, h)f \left(p, \frac{1}{h} \right) = 1, \quad (21)$$

$$\psi_1^{(n)} \left(p, \frac{1}{h} \right) = \frac{1}{[f(p, h)]^n} \psi_1^{(n)}(p, h), \quad (22)$$

$$\psi_2^{(n)} \left(p, \frac{1}{h} \right) = \left[\frac{h}{f(p, h)} \right]^n \psi_2^{(n)}(p, h). \quad (23)$$

Соотношения (21)–(23) справедливы для изотропных двумерных двухкомпонентных систем произвольной структуры — как периодических, так и неупорядоченных.

Для случайно-неоднородной среды равенства (21)–(23) с учетом (18)–(20) принимают вид

$$f(p, h)f(1 - p, h) = h, \quad (24)$$

$$\psi_1^{(n)}(1 - p, h) = \left[\frac{h}{f(p, h)} \right]^n \psi_2^{(n)}(p, h), \quad (25)$$

$$\psi_2^{(n)}(1 - p, h) = \frac{1}{[f(p, h)]^n} \psi_1^{(n)}(p, h). \quad (26)$$

При $p = 1/2$ из (24) следует известный результат $f(1/2, h) = \sqrt{h}$ [1]. Соотношения (25), (26) позволяют связать величину $\psi_1^{(n)}$ при $p > p_c$ с величиной $\psi_2^{(n)}$ при $p < p_c$ (и наоборот), где $p_c = 1/2$ — критическая концентрация.

Для бинарной изотропной системы моменты первого и второго порядков могут быть выражены через функцию f и ее производную [2]:

$$\psi_1^{(1)} = \frac{f - h}{1 - h}, \quad \psi_2^{(1)} = \frac{1 - f}{1 - h}, \quad (27)$$

$$\psi_1^{(2)} = f - hf', \quad \psi_2^{(2)} = f', \quad f' \equiv \frac{\partial f(p, h)}{\partial h}. \quad (28)$$

Нетрудно убедиться, что величины $\psi_i^{(1)}$ и $\psi_i^{(2)}$ тождественно удовлетворяют всем приведенным выше соотношениям.

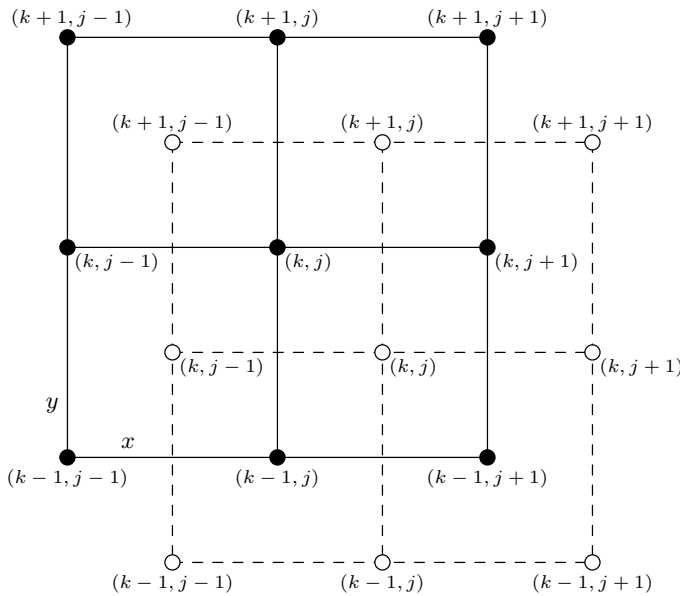


Рис. 1. Основная (сплошные линии) и дуальная к ней (штриховые) решетки

3. ОРГАНИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Парциальные моменты напряженности электрического поля для двумерной двухкомпонентной системы вычислялись в рамках стандартной линейной задачи о проводимости плоской неупорядоченной решетки [9] (см. также [6]). В настоящей работе численный эксперимент проводился на квадратной решетке размера $N \times N = 401 \times 401$ узлов во всем диапазоне изменения концентрации при шести значениях параметра h : $h = 10^{-m}$, $m = 1, \dots, 6$. Каждому узлу $\mathbf{r} = (k, j)$, где k нумерует строки, а j — столбцы ($k = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$), приписывался потенциал $V_{\mathbf{r}} = V_{k,j}$. Для всех узлов, кроме некоторых граничных, эти потенциалы подчиняются системе уравнений Кирхгофа:

$$\sum_{\Delta} \sigma_{\mathbf{r},\mathbf{r}+\Delta} (V_{\mathbf{r}} - V_{\mathbf{r}+\Delta}) = 0, \quad (29)$$

где суммирование ведется по четырем векторам $\Delta = \pm\Delta_x = \pm(1, 0)$ и $\Delta = \pm\Delta_y = \pm(0, 1)$. В рассматриваемой «задаче связей» в формуле (29) $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{r}+\Delta}$ — проводимость связи между узлами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \Delta$, принимающая значения $\sigma_1 = 1$ с вероятностью p («чистые» связи) и $\sigma_2 = h$ с вероятностью $1 - p$ («дефектные» связи). На двух противоположных сторонах решетки, перпендикулярных оси x , задаются граничные значения потенциала, соответственно, 0 и 1. В направлении оси y задаются перио-

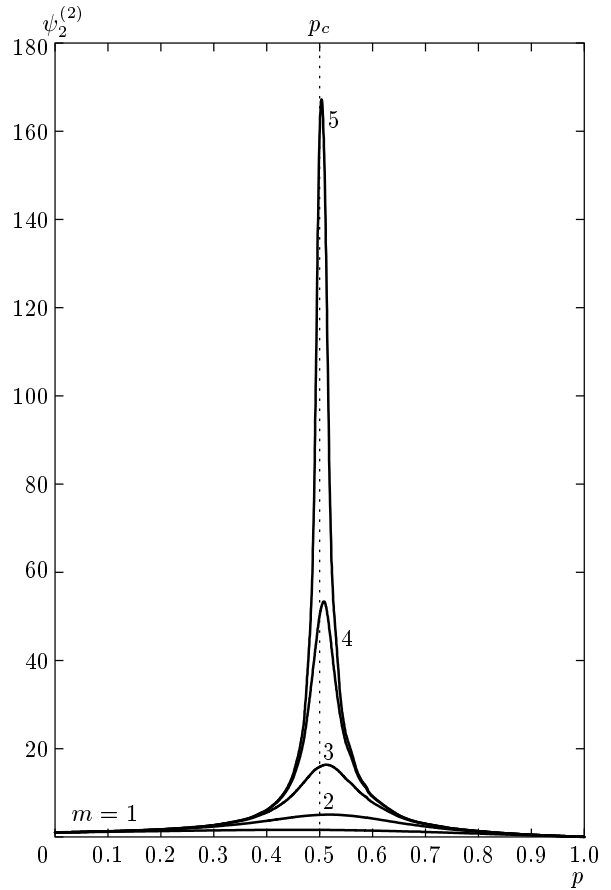


Рис. 2. Величина $\psi_2^{(2)}$ как функция p при $h = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots, 5$

дические граничные условия, так что узлы с $k = 1$ и $k = N$ отождествляются.

Численный эксперимент проводился следующим образом. При некоторой фиксированной концентрации p осуществлялась «реализация», при которой соответствующая доля $1 - p$ связей в исходно чистой решетке случайным образом заменялась на дефектные. Затем при сформулированных выше граничных условиях решалась система уравнений (29) с заданными значениями величин $\sigma_{\mathbf{r},\mathbf{r}+\Delta}$ и во всех узлах решетки находились потенциалы $V_{\mathbf{r}}$. Параллельно решалась аналогичная задача о нахождении потенциалов $\tilde{V}_{\mathbf{r}}$ в узлах так называемой дуальной решетки (см. рис. 1) с теми же граничными условиями.

Принято считать, что в задаче связей на квадратной решетке при случайном распределении «дефектов» макроскопические свойства — проводимость и другие эффективные характеристики — основной и дуальной решеток совпадают. Проведенный в на-

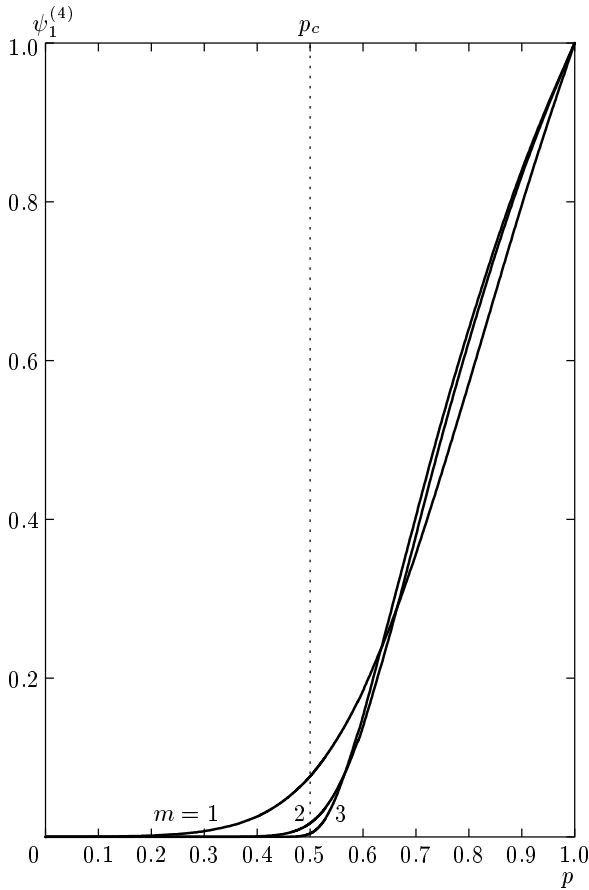


Рис. 3. Величина $\psi_1^{(4)}$ как функция p при $h = 10^{-m}$, $m = 1, 2, 3$

стоящей работе расчет в пределах погрешности вычислений подтверждает это утверждение в отношении эффективной проводимости. Однако основной целью рассмотрения задачи о проводимости дуальной решетки является использование потенциалов $\tilde{V}_{\mathbf{r}}$ (наряду с $V_{\mathbf{r}}$) для вычисления дискретных аналогов парциальных моментов напряженности электрического поля.

В решеточной задаче в качестве $E_x(\mathbf{r})$ следует брать разность потенциалов в соседних (вдоль оси x) узлах:

$$E_x(\mathbf{r}) \rightarrow V_{k,j} - V_{k,j+1}. \quad (30)$$

Для соответствующей y -составляющей напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ возьмем $\tilde{V}_{k,j} - \tilde{V}_{k+1,j}$, так что

$$E^2(r) \rightarrow (V_{k,j} - V_{k,j+1})^2 + (\tilde{V}_{k,j} - \tilde{V}_{k+1,j})^2. \quad (31)$$

Выражение (31) относится к горизонтальной связи $(k, j; k, j + 1)$ основной решетки. Для вертикальной

связи $(k, j; k + 1, j)$ этой решетки соответственно имеем

$$E^2(r) \rightarrow (\tilde{V}_{k+1,j-1} - \tilde{V}_{k+1,j})^2 + (\tilde{V}_{k,j} - \tilde{V}_{k+1,j})^2. \quad (32)$$

Таким образом, для величины $\psi_i^{(2n)}$ в дискретной задаче имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(2n)} = & \frac{1}{2} L^{2n-2} \times \\ & \times \sum_{\{i\}} \left\{ \left[(V_{k,j} - V_{k,j+1})^2 + (\tilde{V}_{k,j} - \tilde{V}_{k+1,j})^2 \right]^n + \right. \\ & \left. + \left[(\tilde{V}_{k+1,j-1} - \tilde{V}_{k+1,j})^2 + (V_{k,j} - V_{k+1,j})^2 \right]^n \right\}, \quad (33) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем связям с проводимостью σ_i и $L = N - 1$. В (33) учтено, что при заданной разности потенциалов $U = 1$ имеем $\langle E_x \rangle = 1/L$. Суммирование в (33) идет по удвоенному количеству связей (на основной и на дуальной решетках), что компенсируется множителем $1/2$. Для нечетного парциального момента $\psi_i^{(2n+1)}$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} \psi_i^{(2n+1)} = & \frac{1}{2} L^{2n-1} \times \\ & \times \sum_{\{i\}} \left\{ \left[(V_{k,j} - V_{k,j+1})^2 + (\tilde{V}_{k,j} - \tilde{V}_{k+1,j})^2 \right]^n \times \right. \\ & \times (V_{k,j} - V_{k,j+1}) + \\ & + \left[(\tilde{V}_{k+1,j-1} - \tilde{V}_{k+1,j})^2 + (V_{k,j} - V_{k+1,j})^2 \right]^n \times \\ & \left. \times (\tilde{V}_{k+1,j-1} - \tilde{V}_{k+1,j}) \right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

В настоящей работе с помощью формул (33) и (34) вычислены парциальные моменты $\psi_1^{(n)}$ и $\psi_2^{(n)}$ для $n = 2, 3, \dots, 6$ (см. табл. 1, 2). Усредненные по шести реализациям результаты представлены на рис. 2–9, а логарифм безразмерной эффективной проводимости в зависимости от концентрации — на рис. 10.

4. КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\psi_i^{(n)}(p, h)$

Критическое поведение эффективной проводимости случайно-неоднородной двухкомпонентной среды в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик описывается в рамках гипотезы подобия [8]. Согласно [8] (см. также, например, [2]),

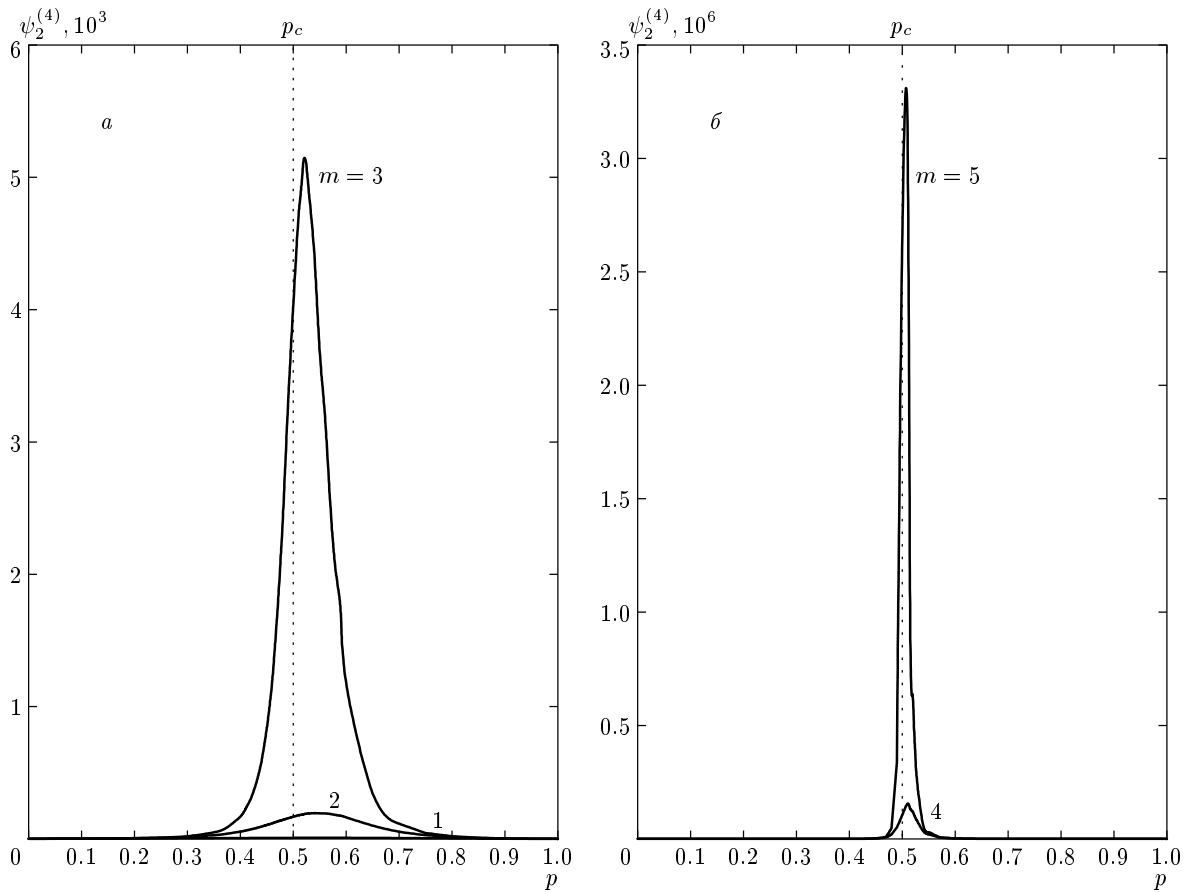


Рис. 4. Величина $\psi_2^{(4)}$ как функция p при $h = 10^{-m}$, $m = 1, 2, 3$ (а), 4, 5 (б)

Таблица 1. Значения критических индексов парциальных моментов $\psi_1^{(n)}$ и $\psi_2^{(n)}$

n	t_n	s_n	q_n	μ_n	λ_n
2	1.30 ± 0.01	0.500 ± 0.004	3.90 ± 0.08	1.30 ± 0.05	0.500 ± 0.001
3	1.67 ± 0.03	0.666 ± 0.005	6.2 ± 0.2	2.13 ± 0.03	0.823 ± 0.002
4	1.42 ± 0.06	0.641 ± 0.006	8.8 ± 0.2	3.56 ± 0.06	1.349 ± 0.004
5	1.64 ± 0.05	0.734 ± 0.008	11.1 ± 0.3	4.55 ± 0.08	1.749 ± 0.006
6	1.5 ± 0.2	0.68 ± 0.01	13.6 ± 0.4	6.0 ± 0.1	2.307 ± 0.009

Таблица 2. Значения численных коэффициентов для $\psi_1^{(n)}$ и $\psi_2^{(n)}$

n	$A_1^{(n)}$	$a_1^{(n)}$	$B_1^{(n)}$	$A_2^{(n)}$	$a_2^{(n)}$	$B_2^{(n)}$
2	1.4 ± 0.6	0.500 ± 0.005	0.6 ± 0.1	1.1 ± 0.1	0.500 ± 0.001	0.7 ± 0.1
3	1.4 ± 0.1	0.450 ± 0.006	1.0 ± 0.3	2.0 ± 0.3	0.460 ± 0.003	0.8 ± 0.1
4	1.6 ± 0.3	0.340 ± 0.005	3.4 ± 1.6	4.8 ± 1.1	0.340 ± 0.003	0.7 ± 0.1
5	2.2 ± 0.2	0.300 ± 0.007	11.4 ± 7.5	13.3 ± 4.5	0.310 ± 0.005	0.9 ± 0.1
6	3.7 ± 0.8	0.230 ± 0.006	$(0.8 \pm 0.5) \cdot 10^2$	$(0.5 \pm 0.2) \cdot 10^2$	0.240 ± 0.005	1.1 ± 0.2

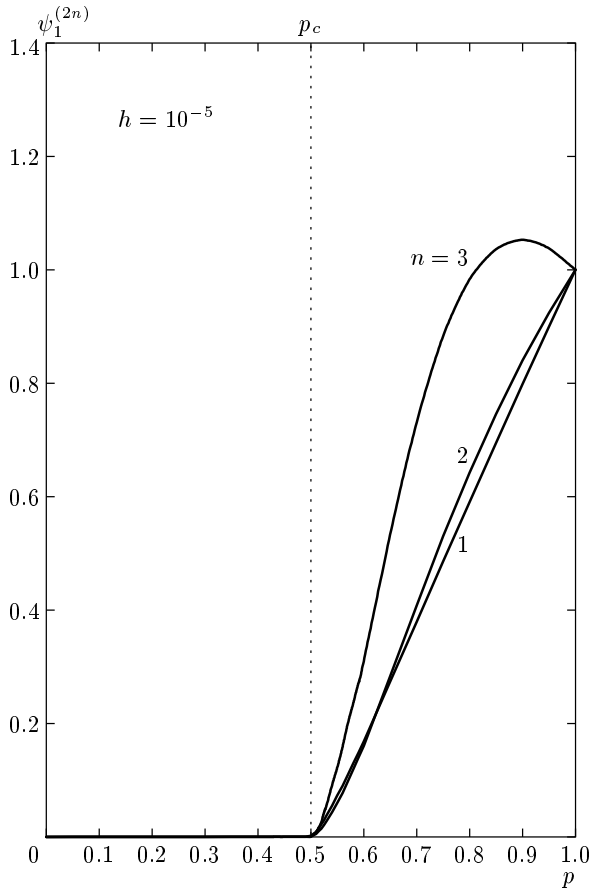


Рис. 5. Четные парциальные моменты $\psi_1^{(2n)}$, $n = 1, 2, 3$, как функции p при $h = 10^{-5}$

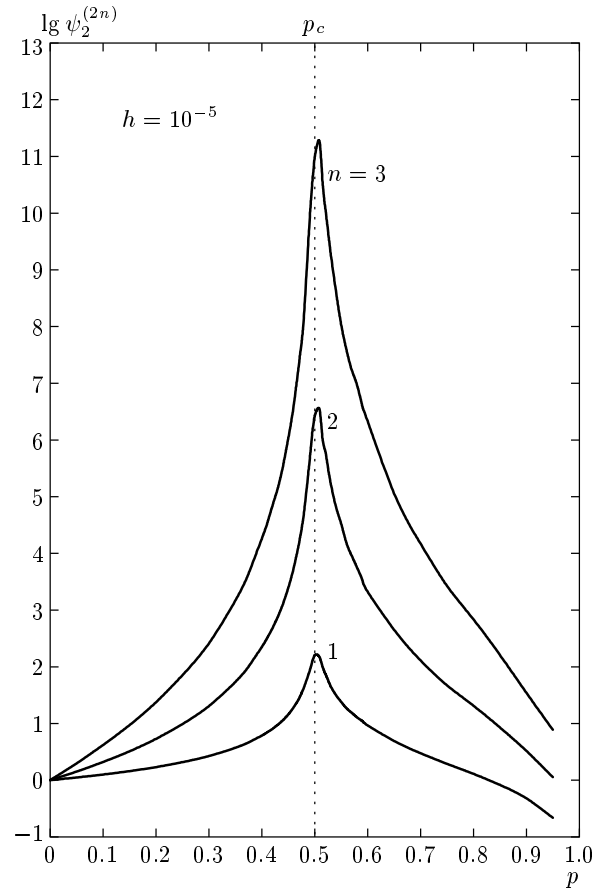


Рис. 6. Десятичные логарифмы парциальных моментов $\psi_2^{(2n)}$, $n = 1, 2, 3$, как функции p при $h = 10^{-5}$

функция f в критической области ($h \ll 1$, $|\tau| \ll 1$, где $\tau = (p - p_c)/p_c$, p_c — критическая концентрация) меняется следующим образом:

при $\tau > 0$, $\Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$f = \tau^t \left\{ A_0 + A_1 \frac{h}{\tau^{t/s}} + \dots \right\}, \quad (35)$$

при $|\tau| \ll \Delta_0$

$$f = h^s \left\{ a_0 + a_1 \frac{\tau}{h^{s/t}} + \dots \right\}, \quad (36)$$

при $\tau < 0$, $\Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$f = \frac{h}{(-\tau)^q} \left\{ B_1 + B_2 \frac{h}{(-\tau)^{t/s}} + \dots \right\}. \quad (37)$$

Здесь

$$\Delta_0 = h^{s/t} \quad (38)$$

— размер «области размазки» [8]. Критические индексы t , s и q связаны между собой соотношением [8]

$$q = \frac{t}{s} - t. \quad (39)$$

В рассматриваемом двумерном случае [1, 8]

$$s = 1/2, \quad q = t. \quad (40)$$

Естественно ожидать, что представления гипотезы подобия, в том числе и выражения (35)–(40), применимы и к мелкодисперсным бинарным композитам.

Критическое поведение функций $\psi_i^{(2)}$ выясняется с помощью соотношений (28) после подстановки в них формул (35)–(37). При этом все критические индексы величин $\psi_i^{(2)}$ выражаются через индексы проводимости, см. (53). В то же время для функций $\psi_i^{(n)}$ с $n > 2$ неизвестны соотношения типа (28). Поэтому поведение величин $\psi_i^{(n)}(p, h)$ с $n > 2$ в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик следует устанавливать, исходя из их общих свойств. Подобная процедура проводилась, например, в работах [2, 6, 7] для двухпараметрических функций, возникающих в задаче о гальваномагнитных свойствах бинарных систем в слабом магнитном поле.

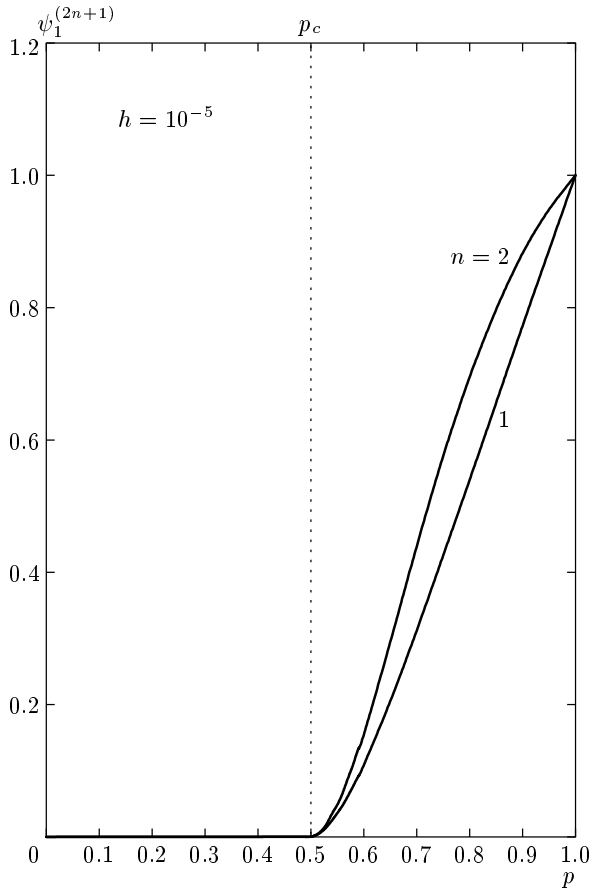


Рис. 7. Нечетные парциальные моменты $\psi_1^{(2n+1)}$, $n = 1, 2$, как функции p при $h = 10^{-5}$

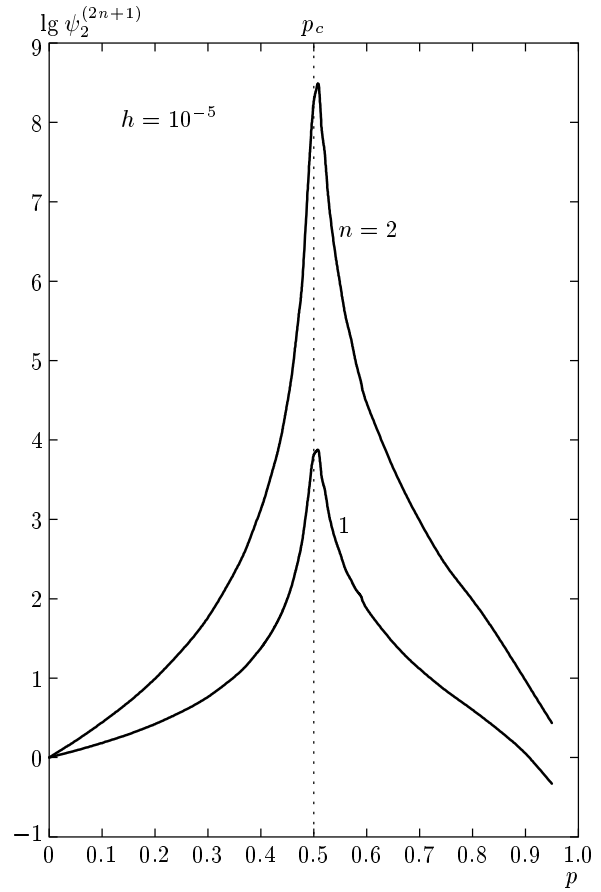


Рис. 8. Десятичные логарифмы парциальных моментов $\psi_2^{(2n+1)}$, $n = 1, 2$, как функции p при $h = 10^{-5}$

Ограничиваясь главными членами соответствующих разложений, для функций $\psi_i^{(n)}(p, h)$ с $n \geq 2$ в критической области находим [5]:

при $\tau > 0, \Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$\psi_1^{(n)} \approx A_1^{(n)} \tau^{t_n}, \quad \psi_2^{(n)} \approx A_2^{(n)} \tau^{-\mu_n}, \quad (41)$$

при $|\tau| \ll \Delta_0$

$$\psi_1^{(n)} \approx a_1^{(n)} h^{s_n}, \quad \psi_2^{(n)} \approx a_2^{(n)} h^{-\lambda_n}, \quad (42)$$

при $\tau < 0, \Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$\psi_1^{(n)} \approx B_1^{(n)} \frac{h^n}{(-\tau)^{q_n}}, \quad \psi_2^{(n)} \approx B_2^{(n)} \frac{h^n}{(-\tau)^{\mu_n}}. \quad (43)$$

Здесь

$$q_n = n \frac{t}{s} - t_n, \quad s_n = \frac{s}{t} t_n, \quad \lambda_n = \frac{s}{t} \mu_n. \quad (44)$$

В рассматриваемом двумерном случае с учетом (40) имеем

$$q_n = 2nt - t_n, \quad s_n = \frac{1}{2t} t_n, \quad \lambda_n = \frac{1}{2t} \mu_n. \quad (45)$$

Соображения, приводящие к выражениям (41)–(45), приведены в работе [5].

Численный эксперимент в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик наталкивается на известные трудности — при $h = 10^{-5}$ и особенно при $h = 10^{-6}$ результаты начинают сильно флуктуировать при переходе от одной реализации к другой. Поэтому в соответствующем интервале концентраций число реализаций было доведено до десяти. Результаты обработки данных численного эксперимента для функций $\psi_1^{(n)}$ и $\psi_2^{(n)}$ в критической области по формулам (41)–(43) представлены в табл. 1, 2.

Для рассматриваемых двумерных случайно-неоднородных систем соотношение взаимности (25) (или (26)) при $p = 1/2$ с учетом равенства $f(1/2, h) = \sqrt{h}$ принимает вид

$$\psi_1^{(n)} \left(\frac{1}{2}, h \right) = h^{n/2} \psi_2^{(n)} \left(\frac{1}{2}, h \right). \quad (46)$$

Подстановка выражений (42) в (46) дает еще одно

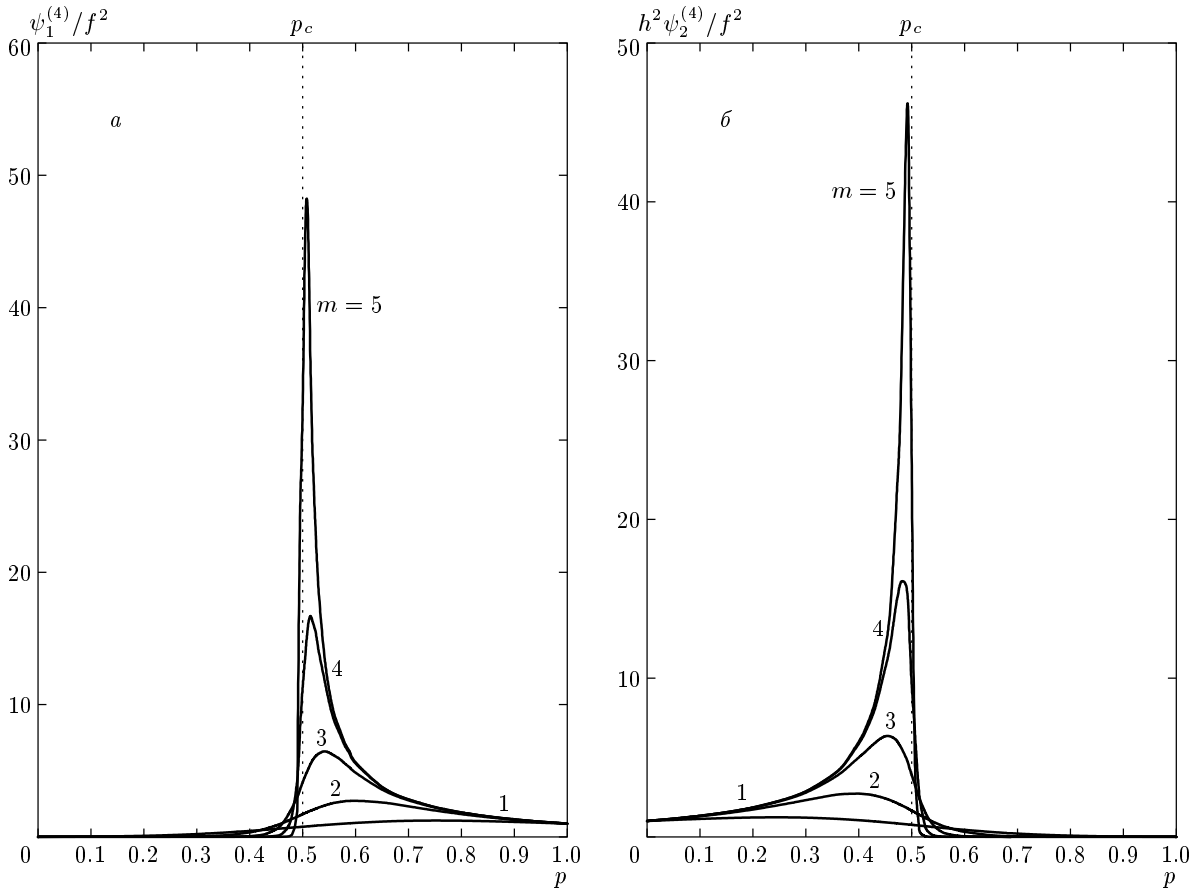


Рис. 9. Отношения $\psi_1^{(4)}/f^2$ (а) и $h^2 \psi_2^{(4)}/f^2$ (б) как функции p при $h = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots, 5$

соотношение между критическими индексами:

$$s_n = \frac{n}{2} - \lambda_n, \tag{47}$$

причем

$$a_1^{(n)} = a_2^{(n)}. \tag{48}$$

В силу соотношений (45), (47) в двумерном случае из пяти (при фиксированном n) новых критических индексов для функций $\psi_1^{(n)}$ и $\psi_2^{(n)}$ независимым является только один, например t_n , через который выражаются остальные:

$$\begin{aligned} q_n &= 2nt - t_n, & s_n &= \frac{1}{2t}t_n, \\ \lambda_n &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2t}t_n, & \mu_n &= nt - t_n. \end{aligned} \tag{49}$$

Соотношения взаимности (25), (26) вне области размазки новых связей между индексами не дают. Однако при этом возникают соотношения между коэффициентами:

$$A_1^{(n)} = (A_0)^n B_2^{(n)}, \quad A_2^{(n)} = (A_0)^n B_1^{(n)}, \tag{50}$$

$$A_0 B_1 = 1, \quad A_0 B_2 + A_1 B_1 = 0. \tag{51}$$

В формулах (51) приведены соотношения между A_0 , A_1 , B_1 и B_2 , следующие из (24). Согласно (50),

$$\frac{A_1^{(n)}}{B_2^{(n)}} = \frac{A_2^{(n)}}{B_1^{(n)}} = (A_0)^n. \tag{52}$$

Равенства (52) могут быть использованы как для проверки правильности вычислений, так и для независимого способа определения коэффициента A_0 .

Для моментов второго порядка $\psi_i^{(2)}$ подстановка (35)–(37) в (28) дает

$$\begin{aligned} t_2 &= t, & \mu_2 &= q, & s_2 &= s, \\ \lambda_2 &= 1 - s, & q_2 &= \frac{t}{s} + q, \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= A_0, & A_2^{(2)} &= A_1, & a_1^{(2)} &= (1 - s)a_0, \\ a_2^{(2)} &= sa_0, & B_1^{(2)} &= -B_2, & B_2^{(2)} &= B_1. \end{aligned} \tag{54}$$

Индекс λ_2 положителен в силу неравенства $s < 1$ и $B_1^{(2)} > 0$, так как $B_2 < 0$ [2]. Для двумерной системы ($s = 1/2$)

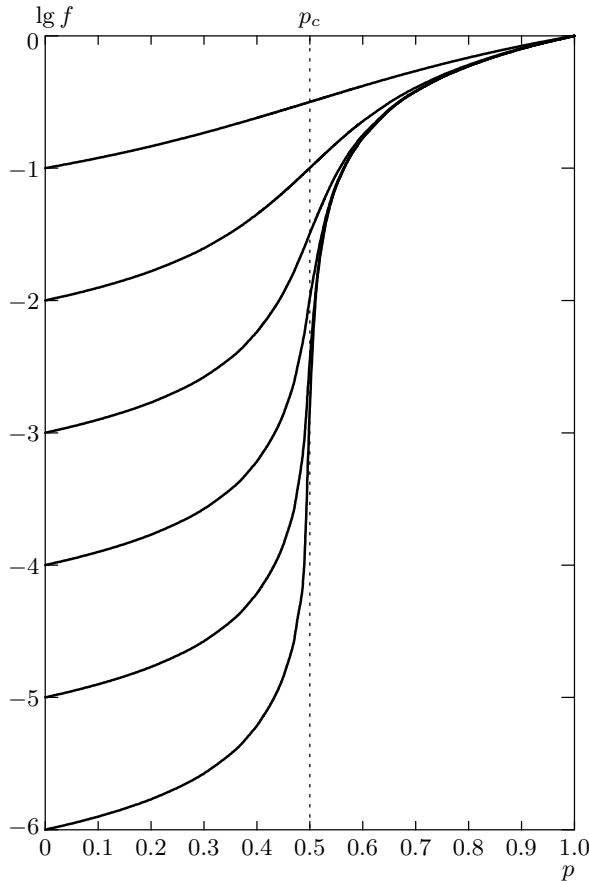


Рис. 10. Десятичный логарифм безразмерной эффективной проводимости f как функция концентрации p при значениях параметра $h = 10^{-m}$, $m = 1, 2, \dots, 6$

$$t_2 = \mu_2 = t, \quad s_2 = \lambda_2 = 1/2, \quad q_2 = 3t. \quad (55)$$

Обработка данных численного эксперимента для эффективной проводимости дает

$$t = 1.30 \pm 0.06, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= 1.4 \pm 0.6, & A_1 &= 1.1 \pm 0.1, \\ B_1 &= 0.7 \pm 0.1, & B_2 &= -0.6 \pm 0.1. \end{aligned} \quad (57)$$

Сравнение с данными из табл. 1, 2 показывает, что соотношения (55) и (54) (при $s = 1/2$) выполняются в пределах погрешности вычислений. Отметим, что величина t из (56) согласуется с результатами, полученными в работах [3, 6].

В случае моментов четвертого порядка критические индексы обычно вводятся для величины $\chi_e^{(3)}/\sigma_e^2$ (см. [3, 4]). В обозначениях настоящей работы соответствующим выражениям из [3, 4] отвечают следующие:

при $\tau > 0, \Delta_0 \ll \tau \ll 1$

$$\frac{\psi_1^{(4)}}{f^2} \approx \frac{1}{\tau^k}, \quad (58)$$

при $\tau < 0, \Delta_0 \ll |\tau| \ll 1$

$$\frac{h^2 \psi_2^{(4)}}{f^2} \approx \frac{1}{(-\tau)^{k'}}. \quad (59)$$

Подстановка в (58), (59) выражений из (35), (41) и (37), (43) дает

$$k = 2t - t_4, \quad k' = \mu_4 - 2q. \quad (60)$$

При $n = 4$ последнее соотношение из (49) может быть записано в виде $2t - t_4 = \mu_4 - 2t$. В двумерном случае ($q = t$), сравнивая это равенство с формулой (60), находим

$$k = k'. \quad (61)$$

Вычисление величин k и k' по формулам (58), (59) с помощью данных численного эксперимента дает

$$k = 1.02 \pm 0.02, \quad k' = 1.01 \pm 0.03, \quad (62)$$

так что равенство (61) в пределах погрешности вычислений выполняется.

Нетрудно убедиться, что с той же точностью выполняются (при $n = 2, 3, \dots, 6$) соотношения (49) для критических индексов и (48), (50), (52) для коэффициентов. Отметим также, что величина индекса λ_4 из табл. 1 фактически совпадает с найденным в работе [10] значением $\lambda_4 = 1.33 \pm 0.05$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
2. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **93**, 1888 (1987).
3. D. Stroud and P. M. Hui, Phys. Rev. B **37**, 8719 (1988).
4. D. J. Bergman, Phys. Rev. B **39**, 4598 (1989).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **120**, 945 (2001).
6. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **106**, 811 (1994).
7. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **110**, 1001 (1996).
8. A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
9. S. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **45**, 574 (1973).
10. А. М. Сатанин, С. В. Хорьков, А. Ю. Угольников, Письма в ЖЭТФ **62**, 301 (1995).