ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 5 (11), стр. 1133–1145

ГЕНЕРАЦИЯ СПИРАЛЬНОСТИ В ОДНОРОДНО-ВИНТОВЫХ ВИХРЕВЫХ ПОТОКАХ

С. Г. Чефранов *

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия

Институт теоретической и экспериментальной биофизики Российской академии наук
142292, Пущино, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 14 июля 2003 г.

Получены условия генерации спиральности для однородно-винтовых потоков типа потоков Жуковского при учете эффектов вязкости, плавучести, температурной неоднородности и вращения системы как целого. Определены пороговые ограничения сверху и снизу для частоты вращения, в пределах которых возможна генерация спиральности за счет сил вязкости, что может отвечать и условиям наблюдения режима изолированных торнадоподобных вихрей. Получено точное решение стационарных уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, обобщающее однородный вихрь Гельмгольца в виде локализованного цилиндрического вихря с нетривиальной устойчивой топологической структурой вихревого ядра, определяемой конечной величиной спиральности. Для бегущих инерционных линейных волн, которые, как особо отмечается, всегда имеют спиральную однородно-винтовую структуру, указано общее представление, характерное для спиральных структур различной природы.

PACS: 47.20.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что возникающая вблизи препятствий завихренность может затем переноситься в основное течение, и этот процесс характеризуется тензором потока вихря [1], т. е. средним значением от произведения компонент поля скорости $\mathbf{u}$ и поля вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$. При этом след такого тензора (свертка диагональных элементов), или спиральность $H = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}/2$, играет важную роль в теории вихревой турбулентности [2, 3] и в теории магнитного динамо [4, 5].

Среди всего многообразия наблюдаемых атмосферных вихрей относительно большие величины спиральности (до 10 м/с^2) отмечаются для вихрей торнадо, а также для торнадоподобных вихрей типа «пыльных дьяволов» и водных смерчей [6], имеющих существенно трехмерную структуру вихревого течения. При этом для влажно-конвективных спиральных вихрей торнадо оказывается характерной возможность реализации (см. [7] и приведенные там ссылки) относительно упорядоченных однородно-винтовых структур течения, несмотря на гигантские числа Рейнольдса, отвечающие скорости ветра в торнадо, достигающей 500 км/ч. Действительно, при заданном уровне кинетической энергии именно такие течения — типа течения Громеки – Бельтрами (при $|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}| = 0$)[1] или течения Жуковского (при $[(\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{u}] = 0$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — частота вращения системы как целого) — отвечают, согласно теореме Гельмгольца и ее обобщениям, минимальной скорости диссипации энергии [8–11]. В то же время эти течения являются точными стационарными решениями уравнений Гельмгольца для поля вихря идеальной несжимаемой жидкости [8, 9], топологически отличаясь от других стационарных режимов [12, 13].

В лабораторных экспериментах по моделированию торнадоподобных вихрей на достаточном уда-

*E-mail: schefranov@mail.ru

[1] Это соотношение удовлетворяется, если векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{u}$ коллинеарны, т. е. при $\boldsymbol{\omega} = k\mathbf{u}$, где k в общем случае может являться функцией координат. Однако в настоящей работе везде $k = \text{const}$, что отвечает именно однородно-винтовым структурам.

лении от вращающейся подстилающей поверхности наблюдают также спиральные вихревые структуры, близкие к однородно-винтовым течениям [14].

В настоящей работе на основе уравнения баланса спиральности, в частности, на примере однородно-винтовых потоков типа потока Жуковского, рассматривается возможность генерации спиральности при учете эффектов плавучести, вязкой диссипации и вращения среды как целого с частотой $\mathbf{\Omega}(t)$.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе получено общее представление для уравнения баланса интегральной спиральности

$$\overline{H} = \int d^3x\, H$$

и на его основе дан качественный анализ режимов, допускающих генерацию $\overline{H}$ за счет эффекта спин-даун при $d\Omega/dt < 0$, эффекта тепловыделения (выхолаживания) при наличии циклонических (антициклонических) вихревых возмущений, а также за счет существования горизонтальных компонент вихревых возмущений при конечном наклоне подстилающей поверхности и вязкой диссипации.

В третьем разделе получено общее однородно-винтовое вихревое линейное решение уравнений гидродинамики, описывающее, в частности, бегущие инерционные волны во вращающейся как целое жидкости. Затем получено точное стационарное решение нелинейных уравнений гидродинамики в виде локализованного цилиндрического спирального вихря радиуса R, который в пределе $R \to 0$ отвечает обобщению однородной вихревой нити Гельмгольца, обладая уже структурной устойчивостью (характерной для торнадоподобных вихрей) из-за наличия топологического инварианта спиральности. Установлен интервал значений Ω, для которых возможно немонотонное изменение тангенциальной скорости u_φ такого вихря, допускающее эффекты локализации примеси в зоне, где u_φ достигает минимальных значений по модулю.

В четвертом разделе показана возможность генерации локальной спиральности H за счет вязкой диссипации при надпороговых по Ω режимах вращения системы и отмечается соответствие этого вывода данным наблюдений торнадоподобных вихрей. Затем получено условие (17) генерации интегральной спиральности однородно-винтового потока типа потока Жуковского за счет сочетания эффектов горизонтальной температурной неоднородности и вращения системы с $\Omega_z \neq 0$. Кроме того, указана возможность существования двух качественно разных режимов эволюции спиральности однородно-винтового потока типа потока Жуковского при наличии горизонтальной температурной неоднородности и вращения с $\mathbf{\Omega} \neq 0$, когда один из режимов (отвечающий $H \to 0$ при $t \to \infty$) может точно соответствовать известному решению для неравномерного твердотельного вращения жидкого эллипсоида [15], а другой уже определяет новый стационарный режим с конечной величиной H в пределе больших времен $t \to \infty$.

2. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА СПИРАЛЬНОСТИ

Рассмотрим уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, записанные во вращающейся с частотой $\mathbf{\Omega}(t)$ системе координат (см. Приложение, формула (П.1)). Использование такой неинерциальной системы координат естественно отвечает начальной фазе формирования торнадо, когда торнадо-циклон может вращаться как целое под материнским грозовым облаком. При этом исследуемая в настоящей работе генерация локализованных спиральных вихревых возмущений происходит на фоне соответствующего твердотельного (однородного) вращения среды.

В Приложении (см. также [16]) получено следующее уравнение баланса интегральной спиральности

$$\overline{H} = \int\limits_V d^3x\, H$$

(область V ограничивает зону локализации вихревого поля):

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = -2(\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{u}) + \\ + \beta g \left(\overline{T\omega_z} \cos\alpha + \overline{T\omega_y} \sin\alpha\right) + \nu \Delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где черта обозначает интегрирование по области V; $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$; α — угол между направлением вектора ускорения силы тяжести g и осью, направленной по нормали к поверхности Земли (оси y и x ориентированы соответственно на север и восток); T — возмущение поля температуры; β — коэффициент теплового расширения; $\rho = \rho_0(1 - \beta T)$ — плотность среды, $\rho_0 = \text{const}$; ν — коэффициент кинематической вязкости.

При $\alpha = 0$ уравнение (1) использовалось в [16] для определения критерия подобия, обосновывающего возможность адекватного моделирования в лабораторных масштабах наблюдаемых в атмосфере торнадоподобных вихрей. Из уравнения (1) при

$\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$ в частности следует известный факт инвариантности $\overline{H}$ для идеальной однородной жидкости, так как при этом обращаются в нуль все четыре члена в правой части уравнения (1). В то же время при $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$ и $\dot{\mathbf{\Omega}} \cdot \overline{\mathbf{u}} < 0$ уже возможна генерация $\tilde{H}$ во времени за счет эффекта спин-даун, реализуемого, например, при замедлении твердотельного вращения жидкости, если $\dot{\mathbf{\Omega}} < 0$, когда величина $|\dot{\mathbf{\Omega}}|$ может определяться, в частности, эффектами линейного по скорости придонного трения (см. Приложение), не нарушающего твердотельную однородность вращения жидкости как целого. Отметим, с другой стороны, что сам факт сохранения твердотельной пространственной однородности вращения жидкости как целого при неравномерном вращении с $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$ отмечается и для бездиссипативного точного решения уравнений Гельмгольца, описывающего «жидкий» (см. также заключительную часть работы) эллиптический гироскоп [15].

Генерация $\overline{H}$ возможна при таких вариациях поля температуры и поля вихря, при которых второй и третий члены в правой части формулы (1) положительны. Например, при выделении тепла с $T > 0$ за счет конденсации влажного воздуха в восходящих потоках с циклонической циркуляцией $\omega_z > 0$ (в северном полушарии это соответствует вращению против часовой стрелки) генерация $\overline{H}$ оказывается возможной за счет второго члена в правой части (1). Из наблюдений известно, что более 90 % вихрей торнадо действительно имеют циклоническое направление циркуляции. В то же время, согласно (1), генерация $\overline{H}$ возможна и при реализации нисходящих антициклонических вихревых течений с $\omega_z < 0$ при соответствующих $T < 0$ процессах выхолаживания воздушных масс.

Отметим, что наклон подстилающей поверхности с $\alpha \neq 0$ также может являться фактором, приводящим к генерации $\overline{H}$ даже при отсутствии вертикальной компоненты завихренности $\omega_z = 0$, но при $\overline{\omega_y T} > 0$. Это возможно при наличии горизонтально ориентированных вихрей в конвективных валах.

Завершая качественный анализ уравнения баланса интегральной спиральности (1), обратим внимание и на допустимость переменности знака последнего члена в (1), передающего влияние вязкой диссипации на эволюцию $\overline{H}$. Действительно, при некоторых начальных условиях в [17] была показана допустимость начального возрастания $\overline{H}$ с $d\overline{H}/dt|_{t=0} > 0$ для соответствующего турбулентного режима именно за счет наличия этого диссипативного члена. Условия осуществимости такой возможности для эволюции локальной спиральности применительно однородно-винтовому течению типа течения Жуковского будут уточнены ниже. Но перед этим уточним некоторые свойства однородно-винтовых спиральных вихревых структур.

3. ОДНОРОДНО-ВИНТОВЫЕ СПИРАЛЬНЫЕ ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ

Несмотря на указания существования в природе и воспроизведения в экспериментах однородно-винтовых вихревых структур типа структур Громеки – Бельтрами и Жуковского, в работах по классической и геофизической гидродинамике их упоминают редко, видимо, считая маловероятными (см. [21, стр. 210]). Заметим, однако, что даже инерционные волны во вращающейся жидкости относятся к таким структурам. Это отмечается в работе [4], но совсем не упоминается в работах [18–21]. В то же время использование этого факта, как показано ниже, позволяет получить более общее представление для спиральных инерционных волн, которое может быть полезно и для описания сходных спиральных структур в других областях физики.

1. Действительно, для неограниченной вращающейся однородной жидкости в связанной с ней системе координат линейное уравнение для инерционных волн имеет следующий вид [18, 20] (см. уравнение (П.2)):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) = 2\Omega_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \nu\Delta(\operatorname{rot}\mathbf{u}), \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \qquad (2)$$

(Здесь для простоты $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$.) При $\nu = 0$ в работе [18] решение уравнения (2) представлялось в виде бегущей плоской волны:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \operatorname{Re}\mathbf{A}\exp\left[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)\right], \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{A} = 0,\\ \omega = 2\Omega_z k_z/k,\end{gathered} \qquad (3)$$

где

$$k = |\mathbf{k}|, \quad \mathbf{A} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0,$$
$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2.$$

При $\nu \neq 0$ в решение (3) необходимо лишь добавить множитель $\exp(-\nu k^2 t)$ [20, стр. 177].

Нетрудно убедиться в том, что (см. также [4]) для волн типа (3) выполняется соотношение

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \pm k\mathbf{u},$$

характерное именно для однородно-винтовых спиральных течений типа течений Громеки – Бельтрами, так как из (3) следуют соотношения

$$\mathbf{b} = \pm\frac{1}{k}[\mathbf{k}\times\mathbf{a}], \quad \mathbf{a} = \mp\frac{1}{k}[\mathbf{k}\times\mathbf{b}].$$

При этом, например, знак минус при k отвечает отрицательной величине спиральности

$$H = -k\mathbf{u}^2/2,$$

что соответствует вращению вектора скорости в направлении правого винта при изменении соответствующей координаты [4]. Положительной спиральности

$$H = k\mathbf{u}^2/2,$$

наоборот, отвечает левовинтовое вращение вектора скорости, имеющего постоянную длину. В работе [4] отмечается также, что такие движения представляют интерес для теории магнитного динамо. При $\omega = 0$ решение (3) совпадает с точным решением стационарных уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости [8].

Решение уравнения (2), отвечающее условию

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = \pm k\mathbf{u},$$

может быть представлено в более общем виде:

$$\mathbf{u} = \exp(-\nu k^2 t)\operatorname{Re}\mathbf{A}f(\tilde{z}, x, y), \quad \tilde{z} = z \pm \frac{2\Omega_z t}{k}, \tag{4}$$

$$f = \tilde{f}(\xi)\exp\left[-\frac{k}{A_y}(A_x\tilde{z} - A_z x)\right],$$

$$\xi = y + \frac{A_z\tilde{z} + A_x x}{A_y},$$

где $\tilde{f}$ — произвольная функция. В частности, при

$$f = \exp\left[\pm i(k_z\tilde{z} + k_x x + k_y y)\right]$$

решение (4) совпадает с (3). Отметим также, что аргумент функции $\tilde{f}$ при $t = 0$ точно совпадает с аргументом произвольной функции

$$\Omega_0\left(k_1(x+iy) + k_2(x-iy) + k_3 z\right),$$

описывающей в работах [22, 23] стационарные спиральные вихревые структуры в ферромагнетике, так как предполагается выполнение соотношения

$$4k_1k_2 + k_3^2 = 0.$$

Таким образом, решение (4) дает обобщенное представление для инерционных волн, которые всегда являются однородно-винтовыми спиральными вихревыми структурам типа Громеки–Бельтрами. При этом формула (4) описывает и общий вид спиральных структур, которые могут реализоваться в различных природных системах и явлениях. Отметим также, что при произвольном знаке спиральности надо (в отличие от работы [18] и формулы (3)) представлять дисперсионное уравнение для частоты ω в виде

$$\omega = \pm\frac{2k_z\Omega_z}{k},$$

где, в частности, знак плюс (как в (3), так и в [18]) отвечает отрицательной спиральности. В работе [20] приведено сходное представление для ω в решении типа (3), но без учета наличия корреляции между знаком ω и знаком спиральности (см. также [4]).

2. Приведенные в предыдущем пункте представления для однородно-винтовых линейных спиральных волн допускают применение принципа суперпозиции. Это становится невозможным для рассматриваемых далее точных решений нелинейных уравнений Гельмгольца в виде однородно-винтовых течений типа течения Жуковского с

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} = k\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\Omega} \neq 0.$$

Точное решение стационарных уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, отвечающее течению типа течения Жуковского, можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \frac{2\boldsymbol{\Omega}}{k} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{u}} = \operatorname{rot}\mathbf{u} = k\tilde{\mathbf{u}}, \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi} + k\operatorname{rot}\boldsymbol{\varphi}, \quad \Delta\boldsymbol{\varphi} + k^2\boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{6}$$

При $\boldsymbol{\Omega} = 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{x}\phi(\mathbf{x})$ решения вида (5), (6) рассматривались в работе [24] для случая локализованного сферического вихря, обладающего (в отличие от сферического вихря Хилла [21]) структурной устойчивостью из-за наличия у него конечной спиральности и соответствующего топологического инварианта. В работе [24] отмечалось, что такие спиральные вихревые структуры могут представлять интерес в связи с проблемой магнитного удержания плазмы. Вне зоны своей локализации эти сферические спиральные вихри создают поле скорости такое же, как у точечных вихревых диполей [25]. Поэтому они могут применяться для регуляризации таких трехмерных точечных вихрей, например, при численном моделировании процессов «взрыва» завихренности в турбулентном пограничном слое. Последнее может быть осуществлено с учетом доказанного в работе [25] факта существования точного слабого решения уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости в виде конечномерной гамильтоновой динамической системы уравнений для трехмерных точечных вихревых диполей (предельно малых вихревых колец или отмеченных топологически нетривиальных сферических вихрей, обобщающих вихрь Хилла при ненулевой спиральности).

Получим аналогичное точное решение уравнений гидродинамики, отвечающее спиральному, но уже цилиндрически-симметричному вихрю конечного радиуса R, обладающему также нетривиальной топологически инвариантной структурой при конечной величине спиральности H. В пределе $R \to 0$ такой вихревой объект именно при $H \neq 0$ обобщает известную сингулярную вихревую нить Гельмгольца [21] и может точно совпадать с ней только при $H = 0$. Такие решения в виде цилиндрических спиральных вихрей могут быть поэтому более приемлемы, чем вихри Гельмгольца, при моделировании спиральных торнадоподобных вихрей, для которых наблюдаются сложные и устойчивые структуры вихревого ядра [26].

В аксиально-симметричном случае выражение (5) представляет собою следующее точное стационарное решение уравнений Гельмгольца для спирального вихря, локализованного внутри цилиндрической области с радиусом R:

$$\begin{aligned} u_z(r) &= \left[\frac{2\Omega_z}{k} + BJ_0(kr)\right]\Theta(R-r) + \\ &\qquad + v_{0z}\Theta(r-R), \\ \tilde{u}_\varphi(r) &= BJ_1(kr)\Theta(R-r) + \\ &\qquad + \left(\frac{\chi}{r} - \Omega_z r\right)\Theta(r-R), \\ \tilde{u}_r(r) &= 0, \quad \Theta(p) = \begin{cases} 1, & p \geq 0, \\ 0, & p < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{2\Omega_z}{k} + BJ_0(kR) = v_{z0}, \\ &BJ_1(kR) = \frac{\chi}{R} - \Omega_z R, \end{aligned} \tag{8}$$

где J_0 и J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядков, а условие (8) обеспечивает непрерывность сшивки распределений поля скорости внутри и вне цилиндра. Решение (7), (8) получено аналогично тому, как это было сделано в работе [24] для определения структуры сферического спирального вихря. В отличие от вихря, рассматриваемого в работе [24], решению (7) в лабораторной (неподвижной) системе координат соответствует неподвижный вихрь без наличия какой-либо самоиндуцируемой скорости, как это имеет место и для точечных вихрей Гельмгольца или прямолинейных вихревых нитей. При этом поле скорости u_φ вне зоны локализации завихренности ($r > R$) совпадает с полем скорости такого точечного вихря с интенсивностью (циркуляцией) χ, определяемой соотношением (8). Последнее сохраняет свой вид и в лабораторной системе координат, в которой рассматриваемый спиральный цилиндрический вихрь совершает еще и вращение как целое вокруг своей оси симметрии с частотой Ω_z. В то же время точечные вихри Гельмгольца рассматривают на основе предельного перехода от прямолинейного цилиндрического вихря при $R \to 0$, предполагая отсутствие продольной (вдоль оси вихря) скорости v_{z0} и однородное распределение завихренности

$$\omega_z = 2\Omega_z = \frac{\tilde{\chi}}{\pi R^2}$$

внутри вихревого ядра радиуса R при $\tilde{\chi} = \text{const}$ и $\omega_z \to \infty$. Спиральность такого вихря равна нулю. Для полученного решения спиральность не равна нулю, а распределение завихренности внутри вихревого ядра не является однородным, так как для поля $\mathbf{u}$ из (7) компоненты поля вихря имеют вид

$$\omega_z + 2\Omega_z = k u_z, \quad \omega_\varphi = k\tilde{u}_\varphi, \quad \omega_r = 0.$$

Рассмотрим некоторые характерные особенности решения (7) при различных условиях реализации (8).

Из выражений (8) при $k = \gamma_{1n}/R$ (где γ_{1n} — нули функции Бесселя J_1) следует, что циркуляция имеет вид

$$\chi = \Omega_z R^2,$$

отличающийся только множителем 2π от величины $\tilde{\chi}$, получаемой из однородной вихревой нити в пределе $R \to 0$, $\Omega_z \to \infty$ с отмеченной выше циркуляцией точечного вихря Гельмгольца. При этом коэффициент B также приобретает конкретное представление:

$$B = B_n = \frac{v_{z0} - 2\Omega_z R/\gamma_{1n}}{J_0(\gamma_{1n})},$$

следующее из выражений (8). Соответствующий спиральный цилиндрический вихрь, обладая при $r > R$ полем скорости вихревой нити Гельмгольца, имеет устойчивую топологическую структуру, определяемую величиной спиральности. При $n > 1$ структура вихревого ядра ($r < R$) может быть достаточно сложно устроенной, так как допускает внутри себя наличие как восходящих, так и нисходящих потоков с противоположными направлениями циркуляции, подобно структуре наблюдаемых вихрей торнадо и «пыльных дьяволов» [26].

Отметим, что в ограниченном вращающемся сосуде радиуса R решение, следующее из выражений (7), при $r \leq R$ рассматривалось, например, в работе [27] для описания движения жидкости, вытекающей из дна такого сосуда.

С другой стороны, еще в работе [8] в неограниченном пространстве для всех $r \geq 0$ и любых величин k указывалось совпадающее с (7) при $r \leq R$ и $\Omega = 0$ решение, которое, однако, в отличие от (7), (8), не отвечает случаю локализации завихренности только при $r \leq R$, что как раз соответствует описываемому выражениями (7), (8) неоднородному по сечению цилиндрическому вихрю, обобщающему известный классический вихрь Гельмгольца [21]. В отличие от [8, 27], решения (7), (8) получаются сшивкой вихревого течения, локализованного при $r \leq R$, с потенциальным течением при $r > R$. Поэтому решение (7), (8) является новым точным гидродинамическим решением, описывающим локализованный цилиндрический вихрь с нетривиальной топологической структурой, устойчивость которой, как и для сферического вихря [24], определяется соответствующим топологическим инвариантом спиральности [2, 3].

Для случая, когда в (8) $kR \neq \gamma_{1n}$ и $B \neq 0$, величина циркуляции χ, определяющая поле скорости спирального цилиндрического вихря при $r > R$, уже может иметь знак, не совпадающий со знаком Ω_z, как это имело место при $kR = \gamma_{1n}$, поскольку

$$\chi = \frac{R^2 J_2(kR)}{J_0(kR)} \left(\frac{v_{0z} J_z(kR)}{R J_2(kR)} - \Omega_z \right).$$

Действительно, при фиксированном значении kR знак χ изменяется при сверхкритических частотах вращения

$$\Omega_z > \Omega_{cr}^0 = \frac{v_{0z} J_1(kR)}{R J_2(kR)}, \quad J_2(p) = \frac{2J_1(p)}{p} - J_0(p). \quad (9)$$

Соответственно, при выполненном условии (9) для $\Omega_{cr}^0 > 0$ и $r > R$ возможно немонотонное поведение величины азимутальной скорости

$$\tilde{u}_\varphi = -\Omega_z r - \frac{(\Omega_z - \Omega_{cr}^0) R^2 J_2(kR)}{r J_0(kR)}$$

в зависимости от расстояния r до центра вихря, когда абсолютное значение $\tilde{u}_\varphi$ достигает минимального значения

$$|\tilde{u}_\varphi| = 2 \left(|\chi| \Omega_z \right)^{1/2}$$

при

$$r = r_m = \left(\frac{|\chi|}{\Omega_z} \right)^{1/2}.$$

В свою очередь, необходимое условие $r_m > R$ приводит к дополнительному ограничению сверху на величину Ω_z:

$$\Omega_z < \Omega_{cr}^1 = \frac{\Omega_{cr}^0}{1 - J_0(kR)/J_2(kR)}, \quad (10)$$

где предполагается, что

$$0 < \frac{J_0(kR)}{J_2(kR)} < 1 \quad \text{при} \quad \Omega_{cr}^0 > 0.$$

Отметим, что наличие экстремума (минимума модуля) в зависимости $\tilde{u}_\varphi$ от r при $r = r_m$ во вращающейся вместе с жидкостью системе координат может приводить к накоплению пассивной примеси вблизи $r = r_m$ в соответствующих процессах переноса примеси в вихревых полях. Действительно, подобное кольцевое распределение наблюдалось в работе [28] для суспензий во вращающихся сосудах именно в узком диапазоне частот Ω_z качественно аналогично условиям (9), (10).

Таким образом, полученное спиральное обобщение вихря Гельмгольца в зависимости от величины k и скорости вращения Ω_z может описывать качественно различное изменение поля азимутальной скорости $\tilde{u}_\varphi$ вне ядра вихря при $r > R$. При $k = \gamma_{1n}/R$ или при $k \neq \gamma_{1n}/R$, но для частоты $\Omega < \Omega_{cr}^0$ либо $\Omega > \Omega_{cr}^1$ режим изменения u_φ при возрастании r от $r = R$ совпадает с зависимостью $\tilde{u}_\varphi$ от r для вихря Гельмгольца (во вращающейся с частотой Ω_z системе координат). В случае $k \neq \gamma_{1n}/R$ и только при $\Omega_{cr}^1 < \Omega < \Omega_{cr}^0$ уже может иметь отмеченное немонотонное изменение $\tilde{u}_\varphi(r)$, приводящее и к допустимости эффектов локализации пассивной примеси вблизи величины $r = r_m$, отвечающей $\min |\tilde{u}_\varphi(r)|$.

4. ЭВОЛЮЦИЯ СПИРАЛЬНОСТИ ОДНОРОДНО-ВИНТОВЫХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

Представление поля скорости в виде (7) для $r < R$ может быть получено с учетом решения (5) элементарным усреднением по азимутальному углу при записи в полярных координатах поля скорости известного стационарного ABC-течения в неограниченном пространстве [8, 9, 12, 13]:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x &= A \sin kz + C \cos ky, \\ \tilde{u}_y &= B \sin kx + A \cos kz, \\ \tilde{u}_z &= C \sin ky + B \cos kx. \end{aligned} \quad (11)$$

Нестационарное обобщение решения (11) рассмотрено ниже в связи с анализом возможности генерации спиральности при учете эффектов, приводящих к необходимости введения для коэффициентов A, B и C зависимости от времени, отражающей соответствующую эволюцию однородно-винтового спирального вихревого режима типа режима Жуковского.

Поскольку при этом для произвольных A, B и C в азимутально-симметричном случае в (11) сохраняется только зависимость от B, в дальнейшем для простоты будет рассматриваться в основном именно случай, когда $A = C = 0$, а величина B эволюционирует во времени, согласно уравнению баланса спиральности при $\nu \neq 0$, $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$, $T \neq 0$.

4.1. Вязкая диссипация и генерация локальной спиральности

Рассмотрим эволюцию во времени спиральности

$$H = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}}{2}$$

для течения типа (5), (11) на основе уравнения (П.2) для поля вихря при $\nu \neq 0$, $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$, $T \neq 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^2 - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}}) - \nu k^2 \left(\tilde{\mathbf{u}}^2 k + \mathbf{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\right) + \\ + \frac{\beta g}{k}(\varepsilon_{ij3}\cos\alpha + \varepsilon_{ij2}\sin\alpha)(\Omega_i + k\tilde{u}_i)\frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (12)$$

$$H = \frac{k\tilde{\mathbf{u}}^2}{2} + \mathbf{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (13)$$

где поле скорости $\tilde{\mathbf{u}}$ отвечает однородно-винтовому течению типа (11). Для вывода уравнения (12) не использовалось каких-либо дополнительных предположений (кроме лежащих в основе исходных уравнений (П.1)), так как достаточно лишь учета нестационарного обобщения представления (5) для поля скоростей и соответствующего поля вихрей. Из уравнений (12), (13), в частности, следует, что даже при $T = 0$ и $\dot{\mathbf{\Omega}} = 0$ для $\mathbf{\Omega} \neq 0$ и $\nu \neq 0$ возможна генерация локальной спиральности (13) за счет члена, описывающего вязкую диссипацию в (12). Действительно, при $k < 0$ рост H (согласно (12)) может иметь место при выполнении следующих неравенств, обеспечивающих положительность $H > 0$ и отрицательность суммы

$$\tilde{\mathbf{u}}^2 k + \mathbf{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{u}},$$

а именно,

$$\frac{|k|\tilde{u}}{\Omega} > \cos\Psi > \frac{|k|\tilde{u}}{2\Omega}, \quad (14)$$

где

$$\Omega = |\mathbf{\Omega}|, \quad \tilde{u} = |\tilde{\mathbf{u}}|, \quad \cos\Psi = \frac{\mathbf{\Omega} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{\Omega u}.$$

Неравенство (14) для действительных величин Ψ может иметь место только при достаточно быстром, сверхкритическом вращении системы как целое с частотой

$$\Omega > \Omega_{cr} = \frac{|k|\tilde{u}}{2}. \quad (15)$$

Неравенство (15) сходно с критерием диссипативно-центробежной неустойчивости [29] (о реализации которой, в частности, для верхних слоев атмосферы см. [30]).

Из неравенства (14) следует, что при $2\Omega_{cr} > \Omega > \Omega_{cr}$ величина $\cos\Psi$ ограничена физическими параметрами системы только снизу (сверху при этом действует только неравенство $\cos\Psi < 1$). Это обеспечивает более вероятную реализацию отмеченного эффекта, чем при $\Omega > 2\Omega_{cr}$, когда левая часть неравенства (14) сужает область допустимых величин Ψ. Отметим, что такое условие, определяющее диапазон изменений Ω в интервале, для которого нижняя пороговая частота отличается от верхней пороговой частоты в два раза, находится в соответствии с критерием образования режима изолированных торнадоподобных вихрей в эксперименте [31]. Действительно, такому режиму, согласно [31], отвечает следующий диапазон вращательных чисел Пекле:

$$3 < \mathrm{Pe}_\Omega < 20, \quad \mathrm{Pe}_\Omega \approx 0.63\left(\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Ta}}\right)^2,$$

где Ra — число Рэлея, а

$$\mathrm{Ta} = \frac{4\Omega^2 D^4}{\nu^2}$$

— безразмерный параметр, характеризующий величину частоты вращения системы Ω (D — диаметр изолированного источника плавучести). Отмеченному интервалу чисел Пекле при этом соответствует ограничение на диапазон изменений частоты вращения в виде

$$\Omega_1 < \Omega < \Omega_2, \quad \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \approx 1.6.$$

Таким образом, пороговые условия на частоту вращения системы, при которых в эксперименте [31] реализуется именно режим интенсивных изолированных спиральных вихрей, с неплохой точностью отвечают и полученному выше критерию генерации локальной спиральности за счет диссипативной неустойчивости, так как при этом

$$\frac{\Omega_{max}}{\Omega_{min}} = 2.$$

Сравним величины пороговых частот $\Omega_{min} = \Omega_{cr}$, определяемых выражениями (14), (15), и величины $\Omega_1 \approx 0.21(\varepsilon/\nu)^{1/2}$ из работы [31], где

$$\varepsilon \approx \frac{\nu}{2}\left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right)$$

— скорость диссипации кинетической энергии турбулентной конвекции. При этом из равенства $\Omega_{cr} = \Omega_1$ получаем для k следующую оценку:

$$k \approx \frac{0.41}{\tilde{u}} \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{1/2}.$$

Учитывая определение ε, при $\tilde{u} \approx |\mathbf{u}|$ получаем оценку

$$k \approx \frac{0.82|\nabla_x \tilde{\mathbf{u}}|}{\tilde{u}},$$

которая характерна для поля скоростей вида (11). Это устанавливает не только соответствие между отношением $\Omega_{max}/\Omega_{min}$, определяемым выражением (14), и отношением Ω_2/Ω_1 из работы [31], но и самих нижних пороговых величин Ω_{cr} и Ω_1. Отмеченное соответствие позволяет при интерпретации результатов наблюдений [31] режима изолированных спиральных вихрей обратить внимание на возможность доминирования взаимодействия эффектов вращения как целого и вязкой диссипации.

Очевидно, что для случая $A = C = 0$ величина $\tilde{u}$ в (14), (15) не зависит от координат, так как согласно (11) $\tilde{u} = B$. При ненулевых A, C и B можно получить оценку

$$\max_{\mathbf{x}} \tilde{u} \le |A| + |B| + |C| = \tilde{u}_m,$$

при этом для величины Ω_{cr} имеем оценку сверху

$$\overline{\Omega}_{cr} = \frac{|k|\tilde{u}_m}{2}.$$

4.2. Температурная неоднородность и генерация интегральной спиральности

Рассмотрим теперь уравнение баланса спиральности (12) в случае, когда флуктуации поля температуры T могут определять эволюцию интегральной величины спиральности

$$\overline{H} \equiv \left(\frac{2\pi}{k}\right)^3 \int\limits_0^{2\pi/k} dx \int\limits_0^{2\pi/k} dy \int\limits_0^{2\pi/k} dz\, H.$$

Ограничимся для простоты учетом только постоянных градиентов температуры

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = A_j.$$

При этом из выражения (12) можно получить следующее уравнение баланса интегральной спиральности:

$$\frac{d\overline{H}}{dt} = -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}\mathbf{\Omega}^2 - \nu k^3 \bar{\tilde{u}}^2 + \frac{\beta g}{k}(\varepsilon_{ij3}\cos\alpha + \varepsilon_{ij2}\sin\alpha)\Omega_i A_j, \quad (16)$$

где

$$\overline{H} = \frac{k\bar{\tilde{u}}^2}{2} = \frac{k(A^2+B^2+C^2)}{2}$$

для любых A, B и C. Из формулы (16) видно, что при $k < 0$ уже невозможна генерация интегральной спиральности, как это отмечалось выше для случая локальной спиральности, поскольку величина $\overline{H}$ в этом случае является отрицательной и ее модуль уменьшается со временем из-за действия вязкости.

Согласно (16), генерация $\overline{H}$, однако, допустима за счет эффектов плавучести при $\mathbf{\Omega} \ne 0$ даже при постоянной во времени частоте вращения. Так, из формулы (16) следует, что при $\mathbf{\Omega} \ne 0$ в начальный момент времени производная $d\overline{H}/dt$ является положительной, если выполнено следующее неравенство (при $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$):

$$\frac{\Omega_z \beta g A_x \sin\alpha}{\nu k^4 (A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)} > 1, \quad (17)$$

где A_0, B_0 и C_0 — начальные значения A, B и C при $t = 0$. Таким образом, из (17) следует, что при наличии склона с $\alpha > 0$ и при фиксированном значении частоты вращения существует пороговое значение величины горизонтального градиента температуры

$$A_{cr} = \frac{\nu k^4 (A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)}{\beta g \Omega_z \sin\alpha},$$

при превышении которого, $A_x > A_{cr}$, возможно возрастание интегральной спиральности во времени на начальном этапе эволюции $\overline{H}$. Действительно, в работе [26] отмечалась необходимость существования достаточно больших горизонтальных температурных контрастов для возможности реализации торнадоподобных спиральных вихрей типа «пыльных дьяволов». Из выражений (16) и (17) также следует, что при отсутствии склона (когда $\alpha \to 0$) для возможности генерации интегральной спиральности требуется либо наличие заметной неравномерности вращения с переменной во времени частотой вращения (см. выше в первом разделе), либо существование горизонтальных компонент у вектора скорости вращения как целого. Последняя ситуация может быть характерна для вращения горизонтально ориентированных конвективных валов.

4.3. Температурная неоднородность и режимы эволюции локальной спиральности

Рассмотрим уравнение баланса локальной спиральности (12) в частном случае, когда $A = C = 0$.

Пусть также для простоты из всех компонент постоянного градиента температуры отлична от нуля только величина A_x, а

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Это отвечает и точному стационарному решению уравнения теплопроводности без источников, так как при $A = C = 0$ имеем $\tilde{u}_x = 0$.

В Приложении приведен вывод уравнений, описывающих эволюцию величин $B(t)$, $\Omega_z(t)$ и $\Omega_y(t)$. При этом $\dot{\Omega}_x = 0$, поскольку

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

и в дальнейшем, для простоты, положим $\Omega_x = 0$. В Приложении показано, что в зависимости от того, выполнено или нет равенство

$$\Omega_z^2 + \Omega_y^2 = k^2 B^2 \tag{18}$$

для отмеченных параметров B, Ω_z, Ω_y однородно-винтового спирального вихревого течения, возможно существование двух качественно различных типов эволюционных систем уравнений.

В случае, когда равенство (18) не может быть выполнено для параметров Ω_z, Ω_y, B, имеем

$$\dot{B} = -\nu k^2 B, \quad \dot{\Omega}_y = -\beta g \frac{A_x}{2}\cos\alpha, \quad \dot{\Omega}_z = \frac{\beta g A_x \sin\alpha}{2}. \tag{19}$$

Эта система уравнений элементарно интегрируется и с учетом формулы (13) получаем $H \to 0$ в пределе $t \gg 1/\nu k^2$. Уравнения для Ω_y и Ω_z вида (19) точно совпадают с уравнениями (приведенными в работе [15] также в приближении Буссинеска) для угловых скоростей твердотельного вращения жидкого эллипсоида в поле силы тяжести для постоянных градиентов температур в случае, когда эллипсоид вырождается в сфероид. В то же время в (19) величина A_x может рассматриваться как постоянная для любых моментов времени при $A_y = A_z = 0$, а в работе [15] это возможно только в начальный момент времени, так как при $t > 0$ сами величины A_y, A_z в уравнениях становятся неравными нулю при $\Omega_z \neq 0$, $\Omega_y \neq 0$ и $A_x \neq 0$. Рассмотрим теперь случай, когда с необходимостью должно выполняться соотношение (18).

В Приложении дан вывод следующей нелинейной динамической системы, описывающей эволюцию $B^2 = q$, Ω_z и Ω_y:

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= -\frac{2}{3}\nu k^2 q + \frac{2\beta g A_x}{3k^2}(\Omega_z \sin\alpha - \Omega_y \cos\alpha),\\
\dot{\Omega}_z &= -\frac{\nu k^2 \Omega_z}{3} - \frac{\beta g A_x \Omega_z}{6k^2 q}(\Omega_z \sin\alpha - \Omega_y \cos\alpha) + \\
&\qquad + \frac{\beta g A_x \sin\alpha}{2},\\
\dot{\Omega}_y &= -\frac{\nu k^2 \Omega_y}{3} - \frac{\beta g A_x \Omega_y}{6k^2 q}(\Omega_z \sin\alpha - \Omega_y \cos\alpha) - \\
&\qquad - \frac{\beta g A_x \cos\alpha}{2}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Система (20) при условии выполнения соотношения (18) допускает общее решение вида (П.9), выраженное через эллиптические интегралы, благодаря наличию следующего инварианта:

$$h_0 = \exp(\nu k^2 t)\left(\frac{q}{q_0}\right)^{1/2} \times \left[\frac{q}{\nu^2 k^2} - \frac{(\Omega_z \sin\alpha - \Omega_y \cos\alpha)^2}{\nu^2 k^4}\right]. \tag{21}$$

В частности, при $h_0 = 0$ решение системы (20) имеет следующий простой вид:

$$\begin{aligned}
B(t) &= \exp\left(-\frac{\nu k^2 t}{3}\right) \times \left(B(0) + \frac{\beta g A_x}{\nu k^3}\left(\exp\left(\frac{\nu k^2 t}{3}\right) - 1\right)\right),\\
\Omega(t) &= \Omega_z \sin\alpha - \Omega_y \cos\alpha = \exp\left(-\frac{\nu k^2 t}{3}\right) \times \left(\Omega(0) + \frac{\beta g A_x}{\nu k^3}\left(\exp\left(\frac{\nu k^2 t}{3}\right) - 1\right)\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

При $t \to \infty$ решение (22) отвечает следующему устойчивому стационарному режиму системы (20) (получаемому при $t \to \infty$ из полного решения (П.9)):

$$B_0 = \frac{\beta g A_x}{\nu k^3}, \quad \Omega_{y0} = -\frac{\beta g A_x}{\nu k^2}\cos\alpha, \quad \Omega_{z0} = \frac{\beta g A_x \sin\alpha}{\nu k^2}. \tag{23}$$

Соответствующее (23) представление для стационарного режима интегральной спиральности

$$\overline{H} = \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi/k} dx\, H$$

(поскольку H имеет вид (П.4) при $A = C = 0$) можно записать как

$$\overline{H}_0 = \frac{(\beta g A_x)^2}{2\nu^2 k^5}. \tag{24}$$

Таким образом, стационарный режим (24) может отвечать достаточно большой предельной величине интегральной спиральности при наличии конечного постоянного градиента температуры, поперечного к направлению силы тяжести.

Рассмотренные нелинейные уравнения (20) для Ω_z и Ω_y уже существенно отличаются от уравнений, полученных в работе [15] для угловых скоростей твердотельного вращения жидкого эллипсоида, хотя решения (П.9) тоже в общем случае выражается через эллиптические интегралы.

Представляет интерес построение аналога систем гидродинамического типа на основании рассмотрения не только твердотельного вращения жидкости, как это было сделано в работе [15], но и с учетом спиральной структуры однородно-винтовых течений типа течений Жуковского, которым в настоящей работе было уделено особое внимание.

5. ВЫВОДЫ

Таким образом, в настоящей работе приведены конкретные примеры энергетически выгодной реализации однородно-винтовых спиральных вихревых режимов при осуществлении рассмотренных выше относительно простых механизмов их локальной генерации на фоне твердотельного (однородного) вращения жидкости как целого. В частности, получено новое точное представление для однородно-винтовых вихревых полей, обобщающее известное гидродинамическое решение в виде бегущих инерционных волн (во вращающейся как целое жидкости) [18] и полученное в работах [22, 23] стационарное спиральное вихревое решение, используемое для описания структур в ферромагнетиках. Кроме того, показано, что не только исследованные в работе [15] чисто твердотельные, но и однородно-винтовые режимы вращения жидкости могут приводить к относительно простым динамическим системам (20), описывающим эволюцию таких спиральных вихревых возмущений, в том числе и в пределе $t \to \infty$ (см. (23), (24)). Для того чтобы получить такую динамическую систему, в настоящей работе рассматриваются нестационарные однородно-винтовые вихревые режимы, в отличие от обычно применяемых стационарных однородно-винтовых вихревых полей [8, 9, 12]. Именно такое нестационарное обобщение позволяет учесть влияние диссипативных и термодинамических факторов (отраженных в исходных уравнениях (П.1)) на эволюцию локальных и интегральных спиральных вихревых возмущений.

В работе получено новое точное решение (7), (8), описывающее локализованный цилиндрический вихрь с нетривиальной устойчивой топологической структурой, определяемой величиной спиральности. Это решение качественно отлично от сходного сферического вихревого решения [24] и обобщает известное классическое решение, отвечающее однородной по сечению вихревой нити Гельмгольца. Такой вихревой объект уже может быть использован для моделирования наблюдаемых в природе торнадоподобных вихрей, имеющих действительно неоднородную вихревую структуру.

Полученные выводы можно использовать и при решении задач магнитного динамо, для которых однородно-винтовые спиральные вихревые потоки рассматриваются относительно редко [32, 33]: авторы как работы [33], так и работы [21] выражают сомнение в возможности их существования в геофизических условиях, не учитывая, по-видимому, отмеченного выше факта реализации таких структур даже в известных инерционных волнах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 01-05-64300, 01-07-90211).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Уравнения для поля скоростей $\mathbf{u}$ в приближении Буссинеска, приведенные во вращающейся с частотой $\mathbf{\Omega}$ системе координат, имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \varepsilon_{ijl}(2\Omega_j u_l + \dot{\Omega}_j x_l) = \\ = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + \beta g T(\delta_{i3}\cos\alpha + \delta_{i2}\sin\alpha), \quad (\text{П.1})$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad P' = P - \frac{\rho_0}{2}\left(\mathbf{\Omega}^2\mathbf{x}^2 - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{x})^2\right).$$

Соответствующее уравнение для поля вихрей $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{u}$ имеет вид

$$\frac{\partial\left(\omega_i + (n-1)\Omega_i\right)}{\partial t} + u_l\frac{\partial \omega_i}{\partial x_l} = (\omega_l + 2\Omega_l)\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \\ + \nu\Delta\omega_i + \beta g(\varepsilon_{ij3}\cos\alpha + \varepsilon_{ij2}\sin\alpha)\frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (\text{П.2})$$

В выражениях (П.1), (П.2) по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n, ε_{ijl} — абсолютно антисимметричный псевдотензор третьего ранга:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = 1 \quad \text{и т. д.},$$

n — размерность пространства, $n = 2, 3$.

Уравнение для поля спиральности

$$H = \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u}}{2},$$

отвечающее формулам (П.1), (П.2), при $n = 3$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&2\frac{\partial H}{\partial t} + \omega_i u_l \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + u_i u_l \frac{\partial \omega_i}{\partial x_l} + \\
&\quad + \omega_i \varepsilon_{ijl}(\dot\Omega_j x_l + 2\Omega_j u_l) + 2u_i\dot\Omega_i = \\
&= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}\omega_i + (\omega_l + 2\Omega_l)u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \nu(\omega_i\Delta u_i + u_i\Delta\omega_i) + \\
&\quad + \beta g(\omega_3\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha)T + \\
&\quad + (\varepsilon_{ij3}\cos\alpha + \varepsilon_{ij2}\sin\alpha)u_i\frac{\partial T}{\partial x_j}\beta g. \qquad (\text{П.3})
\end{aligned}$$

Поскольку предполагается, что на границе объема V вихревое поле $\boldsymbol{\omega}$ (и $\mathbf{u}$) исчезает, из (П.3) для интегральной спиральности

$$\overline{H} = \int d^3x\, H$$

получаем уравнение баланса (1), которое приведено в основном тексте с использованием обозначений

$$\omega_z = \omega_3, \quad \omega_y = \omega_2, \quad \omega_x = \omega_1.$$

При учете эффектов придонного трения в правую часть формул (П.1) надо добавить член

$$-2\alpha(u_i - \delta_{i3}u_3),$$

а в правую часть (П.2) — член

$$-2\alpha\left(\omega_i - \varepsilon_{ij3}\frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right).$$

При этом в правой части (П.3) добавляется член

$$-2\alpha\left(2H - \omega_3 u_3 - \varepsilon_{ij3}u_i\frac{\partial u_3}{\partial x_j}\right),$$

а в выражение (1) — соответственно, член

$$-2\alpha\left(\overline{H} - \overline{\omega_3 u_3}\right).$$

При $\Omega_z \equiv \Omega_3 \neq 0$ имеем

$$\alpha = \sqrt{\frac{\nu\Omega_z}{h}},$$

а при $\Omega = 0$ имеем

$$\alpha = \frac{\nu}{h^2},$$

где h — толщина слоя жидкости. Эффекты, соответствующие случаю $\alpha \neq 0$, в настоящей работе не рассматриваются.

2. При

$$A = C = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

выражение (13) для H имеет вид

$$H = \frac{kB^2}{2} + (\Omega_z\cos kx + \Omega_y\sin kx)B. \qquad (\text{П.4})$$

Подставив (П.4) в (12), получаем из уравнения баланса (12) соотношение, для удовлетворения которого при $A = C = 0$ необходимо приравнять нулю свободный от тригонометрических функций член, а также сгруппированные при $\sin kx$ и $\cos kx$ члены. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&kB\dot B = -\frac{2\Omega_z\dot\Omega_z}{k} - \frac{2\Omega_y\dot\Omega_y}{k} - \nu k^3B^2 + \\
&\qquad + \frac{\beta g}{k}\frac{\partial T}{\partial x}(\Omega_z\sin\alpha - \Omega_y\cos\alpha), \\
&\Omega_z\dot B + \dot\Omega_z B = -\dot\Omega_z B - \nu k^2\Omega_z B + \beta g B\frac{\partial T}{\partial x}\sin\alpha, \\
&\Omega_y\dot B + \dot\Omega_y B = -\dot\Omega_y B - \nu k^2\Omega_y B - \beta g B\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha.
\end{aligned} \qquad (\text{П.5})$$

Из системы (П.5), вводя обозначения

$$\frac{\partial T}{\partial x} = A_x, \quad B^2 = q,$$

можно получить для $\dot\Omega_z$ и $\dot\Omega_y$ систему

$$\begin{aligned}
&a_1\dot\Omega_z + b_1\dot\Omega_y = C_1(\Omega_z, \Omega_y) = \\
&= \frac{2\beta g A_x}{k^2}\left(\Omega_z\sin\alpha - \Omega_y\cos\alpha - \frac{k^2q}{\Omega_z}\sin\alpha\right), \\
&a_2\dot\Omega_z + b_2\dot\Omega_y = C_2(\Omega_z, \Omega_y) = \\
&= \frac{2\beta g A_x}{k^2}\left(\Omega_z\sin\alpha - \Omega_y\cos\alpha + \frac{k^2q}{\Omega_z}\cos\alpha\right),
\end{aligned} \qquad (\text{П.6})$$

где

$$a_1 = \frac{4(\Omega_z^2 - qk^2)}{\Omega_z k^2}, \quad a_2 = \frac{4\Omega_z}{k^2},$$

$$b_1 = \frac{4\Omega_y}{k^2}, \quad b_2 = \frac{4(\Omega_y^2 - k^2q)}{\Omega_y k^2}.$$

Из (П.6) имеем

$$\dot\Omega_y = \frac{c_1 - a_1\dot\Omega_z}{b_1},$$

а также уравнение

$$\dot\Omega_z(a_2b_1 - a_1b_2) = c_2b_1 - b_2c_1, \qquad (\text{П.7})$$

где

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 16q\left(\frac{\Omega_z^2 + \Omega_y^2 - k^2q}{k^2\Omega_z\Omega_y}\right),$$

$$c_2b_1 - b_2c_1 = \frac{\beta g A_x}{2}(a_2b_1 - a_1b_2)\sin\alpha.$$

При выполнении соотношения (18) система (П.6) является вырожденной и уравнение (П.7) удовлетворяется тождественно для любых величин $\dot{\Omega}_z$, удовлетворяющих (18). Если же соотношение (18) не выполняется, то из (П.6), (П.7) может быть получена система (19).

В случае, когда тождество (18) выполняется, из (П.5) нетрудно получить систему (20), которую также удобно представить в безразмерном виде:

$$\frac{d\overline{v}}{d\tau_1} = \gamma\overline{u}, \quad \frac{d\overline{u}}{d\tau_1} = \frac{3}{4}\gamma_1 - \frac{\gamma\overline{u}^2}{4\overline{v}},$$
$$\tau_1 = 2(e^{\tau/2} - 1), \quad \tau = \frac{2}{3}t\nu k^2, \tag{П.8}$$

где

$$u = \overline{u}e^{-\tau/2}, \quad v = \overline{v}e^{-\tau}, \quad u = \frac{\Omega}{\nu k^2},$$

$$v = \frac{q}{q(0)}, \quad \Omega = \Omega_z\sin\alpha - \Omega_y\cos\alpha,$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta g A_x}{(\nu k^2)^2}, \quad \gamma = \frac{\beta g A_x}{k^2 q(0)}.$$

Система (П.8) имеет инвариант (21), который также можно представить в виде

$$h_0 = \overline{v}^{3/2}\frac{\gamma_1}{\gamma} - \overline{u}^2\overline{v}^{1/2}.$$

Благодаря этому инварианту система (П.8) допускает интегрирование в квадратурах и соответствующее решение имеет вид

$$\gamma\tau_1 + C = \frac{2}{h_0^{1/2}}\left(\frac{h_0}{p}\right)^{5/6}\left[\frac{(\sqrt{3}+1)\,(p^4-p)^{1/2}}{(\sqrt{3}+1)\,p-1} + \right.$$
$$\left. +3^{1/4}E(\varphi,m) - \frac{\sqrt{3}-1}{2}3^{-1/4}F(\varphi,m)\right],$$
$$\varphi = \arccos\left(-\frac{p\,(\sqrt{3}-1)+1}{p\,(\sqrt{3}+1)-1}\right),$$
$$m = \sin\frac{5\pi}{12}, \tag{П.9}$$

где C — постоянная интегрирования, а F и E — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода, так что

$$E = \int_0^\varphi d\varphi\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}, \quad F = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}},$$

$$p = \overline{v}^{1/2}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma h_0}\right)^{1/3},$$

$$h_0 = \frac{(\Omega_z(0)\cos\alpha + \Omega_y(0)\sin\alpha)^2}{\nu^2 k^4}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Новиков, Изв. АН СССР, ФАО **8**, 759 (1972).
2. H. K. Moffat, J. Fluid Mech. **35**, 117 (1969).
3. H. K. Moffat, Phil. Trans. Roy. Soc. A **333**, 321 (1990).
4. Г. Моффат, *Возбуждение магнитного поля в проводящей среде*, Наука, Москва (1980),
5. О. Г. Чхетиани, С. С. Моисеев, Письма в ЖЭТФ **70**, 268 (1999).
6. Р. Чижелески, Изв. РАН, ФАО **35**, 174 (1999).
7. М. В. Курганский, ДАН **371**, 240 (2000).
8. И. С. Громека, *Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости*, Казань (1881), Собр. соч. Изд. АН СССР (1952), с. 116.
9. Дж. Серрин, *Математические основы классической механики*, Наука, Москва (2001).
10. R. B. Pelz, V. Yakhot, S. A. Orszag, and E. Levich, Phys. Rev. Lett. **54**, 2505 (1985).
11. А. С. Чефранов, С. Г. Чефранов, ДАН **393**, 624 (2003).
12. В. И. Арнольд, *Математические основы классической механики*, Наука, Москва (1974).
13. S. W. Jones, Chaos, Solitons and Fractals **4**, 929 (1994).
14. Е. П. Анисимова, Ю. Н. Белов, А. А. Сперанская, В. С. Шандин, Изв. АН СССР, ФАО **17**, 768 (1981).
15. Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, Москва (1981).
16. С. Г. Чефранов, Изв. РАН, ФАО **39**, 760 (2003).
17. J. C. Andre and M. Lesier, J. Fluid Mech. **81**, 187 (1977).
18. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).

19. Дж. Халтинер, Ф. Мартин, *Динамическая метеорология*, Наука, Москва (1960).

20. Х. Гринспен, *Теория вращающихся жидкостей*, Гидрометиздат, Ленинград (1975).

21. Дж. Бэтчелор, *Введение в динамику жидкости*, Наука, Москва (1973).

22. А. Б. Борисов, ДАН **379**, 319 (2001).

23. А. Б. Борисов, Письма в ЖЭТФ **76**, 95 (2002).

24. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **83**, 215 (1982).

25. С. Г. Чефранов, ЖЭТФ **95**, 547 (1989).

26. N. O. Renno and A. P. Ingersoll, J. Atmos. Sci. **53**, 572 (1996).

27. А. Г. Ярмицкий, Изв. РАН, МЖГ № 2, 90 (2002).

28. P. J. Bren, C. A. Kruelle, and I. Rehberg, Europhys. Lett. **62**, 491 (2003).

29. С. Г. Чефранов, Письма в ЖЭТФ **73**, 312 (2001).

30. С. Л. Шалимов, Физика плазмы **29**, 227 (2003).

31. B. M. Boubnov and P. B. Rhines, in *Turbulent Mixing in Geophysical Flows*, ed. by P. F. Linden and J. M. Redond, CIMNE, Barcelona (2001).

32. C. L. Pekeris, Y. Accad, and B. Shkoller, Phil. Trans. R. Soc. London A **275**, 425 (1973).

33. F. H. Busse, Ann. Rev. Fluid Mech. **10**, 435 (1978).