ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 5 (11), стр. 1153–1166

ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОСЕДАЮЩЕЙ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

В. И. Кляцкин *

Институт физики атмосферы им. А. М. Обухова Российской академии наук
109017, Москва, Россия

Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева
Дальневосточного отделения Российской академии наук
690041, Владивосток, Россия

Поступила в редакцию 5 мая 2004 г.

Работа является развитием и обобщением работ [1, 2] на случай диффузии оседающей малоинерционной примеси в случайных бездивергентных гидродинамических потоках. Принципиальной особенностью такой диффузии является кластеризация поля плотности примеси, обусловленная дивергентностью ее поля скорости. Это явление осуществляется с вероятностью единица и должно проявляться почти во всех реализациях динамики процесса. В работе рассчитываются как пространственный коэффициент диффузии, так и коэффициент диффузии в пространстве плотности, ответственный за кластеризацию. При этом малая инерционность примеси не оказывает влияния на пространственный коэффициент диффузии. При расчетах коэффициентов диффузии необходимо учитывать конечность временного радиуса корреляции гидродинамического поля скоростей, что приводит к анизотропии пространственного коэффициента диффузии. Такие расчеты в работе осуществлялись на основе диффузионного приближения.

PACS: 02.50.-r, 05.40.-a, 05.45.-a

1. ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Диффузия поля плотности инерционной примеси, движущейся в случайном гидродинамическом потоке, описываемом эйлеровым полем скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\right)\rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (1)$$

которое можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}\rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь через $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ обозначено эйлерово поле скоростей примеси в гидродинамическом потоке, которое в общем случае инерционной примеси не совпадает с полем $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Мы не учитываем эффект действия молекулярной диффузии, что справедливо на начальных этапах развития диффузии. На более позднем этапе временной эволюции необходимо учитывать этот эффект, который описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\right)\rho(\mathbf{r}, t) = \mu\Delta\rho(\mathbf{r}, t), \quad \rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где μ — коэффициент молекулярной диффузии. При этом общая масса примеси сохраняется в процессе временной эволюции, т. е.

$$M = M(t) = \int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}\rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Эйлерово поле скоростей примеси $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ в гидродинамическом потоке $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ для малоинерционных частиц в присутствии сил плавучести и тяжести можно описывать квазилинейным уравнением в частных производных (см., например, [3])

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\lambda\left[\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\right] + \mathbf{g}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_p}\right) \quad (4)$$

*E-mail: klyatskin@yandex.ru

(где g — ускорение силы тяжести, а $\rho_{\rm p}$ и ρ_0 — плотности соответственно частицы и среды), которое мы будем рассматривать как феноменологическое. В общем случае возможны неединственность решения уравнения (4), существование в них разрывов и т. п. Однако в асимптотическом случае малой инерционности частиц (параметр $\lambda \to \infty$), который и представляет для нас интерес, решение задачи будет единственным на разумном интервале времени.

Отметим, что линейный по полю скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$ член в правой части (4), $\mathbf{F}(\mathbf{r},t) = \lambda\mathbf{V}(\mathbf{r},t)$, является известной формулой Стокса для силы сопротивления $\mathbf{F}$, действующей на медленно движущуюся частицу. При аппроксимации частицы шаром с радиусом a параметр $\lambda = 6\pi a\eta/m_p$, где η — коэффициент динамической вязкости, а m_p — масса частицы (см., например, [4, 5]).

Скорость оседания или всплывания примеси $\mathbf{v}$, направленная, как правило, по вертикали, определяется балансом сил плавучести и сил вязкого трения движущейся примеси и описывается формулой

$$\frac{\mathbf{g}}{\lambda}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho_p}\right) = \mathbf{v}.$$

Полагая теперь

$$\mathbf{V}(\mathbf{r},t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r},t), \tag{5}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ — флуктуации поля скоростей примеси относительно $\mathbf{v}$, систему уравнений (2) и (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)]\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r},t) = \\
&= -\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\rho(\mathbf{r},t), \quad \rho(\mathbf{r},0) = \rho_0(\mathbf{r}), \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)]\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \\
&= -\lambda\left[\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ предполагается в общем случае дивергентным, статистически однородным и изотропным в пространстве и стационарным во времени случайным гауссовым полем с корреляционным и спектральным тензорами ($\langle \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle = 0$)

$$\begin{aligned}
&B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \langle u_i(\mathbf{r},t)u_j(\mathbf{r}',t')\rangle = \\
&= \int d\mathbf{k}\, E_{ij}(\mathbf{k}, t-t')e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}, \\
&E_{ij}(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{r} B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r},t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\
&E_{ij}(\mathbf{k},t) = E_{ij}^{\rm s}(\mathbf{k},t) + E_{ij}^{\rm p}(\mathbf{k},t),
\end{aligned} \tag{7}$$

где d — размерность пространства, а спектральные составляющие тензора поля скоростей имеют структуру

$$\begin{aligned}
E_{ij}^{\rm s}(\mathbf{k},t) &= E^{\rm s}(k,t)\left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right), \\
E_{ij}^{\rm p}(\mathbf{k},t) &= E^{\rm p}(k,t)\frac{k_ik_j}{k^2}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь через $E^{\rm s}(k,t)$ и $E^{\rm p}(k,t)$ обозначены соответственно соленоидальная и потенциальная компоненты спектральной плотности поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Временной радиус корреляции поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ определим равенством

$$\tau_0 = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{u}}^2}\int_0^\infty d\tau B_{ii}^{(\mathbf{u})}(0,\tau),$$

где дисперсия поля скоростей

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{u}}^2 = B_{ii}^{(\mathbf{u})}(0,0) = \left\langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle = \\
= \int d\mathbf{k}\left[(d-1)\,E^{\rm s}(k,\tau) + E^{\rm p}(k,\tau)\right].
\end{aligned}$$

Будем считать, что дисперсия $\sigma_{\mathbf{u}}^2 = \left\langle \mathbf{u}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle$ достаточно мала и определяет основной малый статистический параметр задачи.

1.1. Диффузия частиц (лагранжево описание)

Уравнение для поля скоростей примеси $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ (6) — уравнение в частных производных первого порядка (эйлерово описание) и оно эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных характеристических уравнений (лагранжево описание) для динамики частиц

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{v}\left(\mathbf{r}(t),t\right), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \\
&\frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = -\lambda\left[\mathbf{v}(t) - \mathbf{u}\left(\mathbf{r}(t),t\right)\right], \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}_0).
\end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что эти уравнения являются обычными уравнениями Ньютона для динамики частицы с линейной силой трения, описываемой силой Стокса $\mathbf{F}\,(t) = -\lambda\mathbf{v}\left(\mathbf{r}(t),t\right)$, под действием случайной силы $\mathbf{f}\,(t) = \lambda\mathbf{u}\left(\mathbf{r}(t),t\right)$, порожденной гидродинамическим потоком.

Решение системы уравнений (9) зависит от начального параметра $\mathbf{r}_0$, что будем обозначать вертикальной чертой,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t|\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t|\mathbf{r}_0),$$

и тогда эйлерово поле плотности числа частиц $\rho(\mathbf{r},t)$ описывается равенством (см., например, [6–8])

$$\rho(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{r}_0\rho_0(\mathbf{r}_0)\delta\left(\mathbf{r}\left(t|\mathbf{r}_0\right)-\mathbf{r}\right). \tag{10}$$

Дельта-функция, стоящая в правой части (10), называется индикаторной функцией

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\delta\left(\mathbf{r}\left(t|\mathbf{r}_0\right)-\mathbf{r}\right), \tag{11}$$

и ее среднее значение по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ описывает пространственную плотность вероятностей положения частиц (см., например, [6–8])

$$P(\mathbf{r},t)=\langle\varphi(\mathbf{r},t)\rangle_{\mathbf{u}}=\langle\delta\left(\mathbf{r}\left(t|\mathbf{r}_0\right)-\mathbf{r}\right)\rangle_{\mathbf{u}}. \tag{12}$$

Для большого значения параметра $\lambda\to\infty$ (безынерционная примесь)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\approx\mathbf{u}(\mathbf{r},t), \tag{13}$$

и уравнения (6) и (9) упрощаются и принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}+\mathbf{u}\left(\mathbf{r}(t),t\right),\quad \mathbf{r}(0)=\mathbf{r}_0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\rho(\mathbf{r},t)=0,\\ \rho(\mathbf{r},0)=\rho_0(\mathbf{r}),\end{gathered} \tag{14}$$

т. е. для безынерционных частиц задача определения их траекторий в гидродинамическом потоке является чисто кинематической задачей.

Прежде всего, возникает вопрос, что означает равенство (13) в статистическом смысле и каковы условия его применимости. Справедливость этого равенства в статистических задачах существенно зависит от последовательности предельных переходов (см. работы [1, 2]).

Пространственная диффузия без учета кластеризации безынерционных оседающих частиц в бездивергентном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ ($\operatorname{div}\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$), изучалась в работах [9, 10], где было показано, что имеется анизотропия пространственного коэффициента диффузии по отношению к направлению вектора оседания примеси $\mathbf{v}$ и плоскости, перпендикулярной этому направлению. И эта анизотропия обусловлена конечностью временного радиуса корреляции τ_0. В приближении дельта-коррелированности по времени t поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ пространственная диффузия будет изотропной. Учет конечности временного радиуса корреляции τ_0 в этих работах осуществлялся в рамках диффузионного приближения.

Диффузия и кластеризация малоинерционных частиц в бездивергентном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ ($\operatorname{div}\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$) в отсутствие оседания частиц ($\mathbf{v}=0$) в рамках системы уравнений (9) изучались в работах [1]. При этом для описания статистических характеристик скорости частиц при предельном переходе к безынерционным частицам было также показано, что использование приближения дельта-коррелированности по времени t поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ невозможно, т. е. предельные переходы $\lambda\to\infty$ и $\tau_0\to0$ не перестановочны. В то же время для описания статистических характеристик только пространственной диффузии частиц эти предельные переходы перестановочны. В работе [11] было показано, что это утверждение справедливо также и для оседающих частиц ($\mathbf{v}\neq0$) в бездивергентном поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ ($\operatorname{div}\ \mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$) и при этом анизотропия пространственного коэффициента диффузии связана также только с конечностью временного радиуса корреляции τ_0. При этом очевидно, что переход к безынерционной примеси соответствует для параметра λ выполнению условий

$$\lambda\tau_0\gg1,\quad \lambda\gg v/l_0,\quad \lambda\gg\sigma_u^2\tau_0/l_0^2, \tag{15}$$

где l_0 — пространственный радиус корреляции случайного гидродинамического поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

1.2. Статистическое описание поля плотности примеси (эйлерово описание)

Чтобы описать статистику поля плотности примеси в эйлеровом представлении, введем индикаторную функцию

$$\Phi(t,\mathbf{r};\rho)=\delta\left(\rho(\mathbf{r},t)-\rho\right), \tag{16}$$

сосредоточенную на поверхности $\rho(\mathbf{r},t)=\rho=\mathrm{const}$ в трехмерном случае или на контуре в двумерном случае. Динамика этой функции в общем случае описывается уравнением Лиувилля

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\left[\mathbf{v}+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right]\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\Phi(t,\mathbf{r};\rho)=\\ =\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\Phi(t,\mathbf{r};\rho),\\ \Phi(0,\mathbf{r};\rho)=\delta\left(\rho_0(\mathbf{r})-\rho\right),\end{gathered} \tag{17}$$

которое можно также переписать в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right)\Phi(t,\mathbf{r};\rho)=\\ =\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t,\mathbf{r};\rho),\\ \Phi(0,\mathbf{r};\rho)=\delta\left(\rho_0(\mathbf{r})-\rho\right),\end{gathered} \tag{18}$$

если поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ дивергентно, т. е. если $\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r} \neq 0$. И одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (6) совпадает с индикаторной функцией, усредненной по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$:

$$P(t,\mathbf{r};\rho) = \langle \Phi(t,\mathbf{r};\rho)\rangle .$$

В отсутствие оседания примеси ($\mathbf{v} = 0$) эта задача изучалась в работах [1]. Если считать, что случайное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ — гауссово, статистически однородно и изотропно в пространстве, стационарно во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$\langle v_i(\mathbf{r},t)v_j(\mathbf{r}',t')\rangle = B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'),$$

то одноточечная плотность вероятностей для решения динамического уравнения (18) $P(t,\mathbf{r};\rho)$ как в приближении дельта-коррелированного во времени поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, так и диффузионном приближении описывается уравнением

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t} - D_0\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\right)P(t,\mathbf{r};\rho) = D_\rho \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2 P(t,\mathbf{r};\rho),\\ P(0,\mathbf{r};\rho) = \delta\left(\rho_0(\mathbf{r})-\rho\right),\end{gathered} \tag{19}$$

где пространственный коэффициент диффузии D_0 и коэффициент диффузии в ρ-пространстве D_ρ определяются равенствами

$$\begin{aligned}D_0 &= \frac{1}{d}\int\limits_0^\infty d\tau\,\langle \mathbf{v}(\mathbf{r},t+\tau)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rangle = \\ &= \frac{1}{d}\tau_{\mathbf{v}}\left\langle \mathbf{v}^2(\mathbf{r},t)\right\rangle,\\ D_\rho &= \int\limits_0^\infty d\tau\left\langle \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle = \\ &= \tau_{\operatorname{div}\mathbf{v}}\left\langle\left(\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2\right\rangle,\end{aligned} \tag{20}$$

и характеризуют соответственно пространственное расплывание и кластеризацию поля плотности $\rho(\mathbf{r},t)$. Здесь$\tau_{\mathbf{v}}$ и $\tau_{\operatorname{div}\mathbf{v}}$ — временные радиусы корреляции для случайных полей $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ и $\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}$, а d — размерность пространства.

В общем случае, конечно, случайное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, описываемое замкнутым нелинейным уравнением (6), не является гауссовым. Однако легко видеть, что высшие кумулянтные функции поля $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ будут более высокого порядка малости, чем вторая кумулянтная функция, и, следовательно, при выводе уравнения (19) действительно можно воспользоваться приближением гауссова поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$.

Индикаторная функция (16) характеризует геометрическую структуру поля плотности примеси $\rho(\mathbf{r},t)$. Через функцию (16), например, в двумерном случае выражаются такие величины, как общая площадь области, ограниченная линиями уровня, где $\rho(\mathbf{r},t) > \rho$:

$$S(t;\rho) = \int\limits_\rho^\infty d\rho' \int d\mathbf{r}\Phi(t,\mathbf{r};\rho'), \tag{21}$$

и общая масса примеси, содержащаяся в этих областях:

$$M(t;\rho) = \int\limits_\rho^\infty \rho' d\rho' \int d\mathbf{r}\Phi(t,\mathbf{r};\rho'). \tag{22}$$

Если поле скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ является случайным дивергентным полем, то с вероятностью, равной единице, образуется кластерная структура поля $\rho(\mathbf{r},t)$. Это означает, что инерционная примесь со временем стремится собраться в кластеры — компактные области повышенной плотности примеси $\rho(\mathbf{r},t)$ в случайном поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, окруженные разреженными областями, и при этом величины $S(t;\rho)\to 0$, $M(t;\rho)\to M_0$. Это когерентное физическое явление, и оно осуществляется почти во всех реализациях процесса (см., например, [1, 2, 12, 13]). Сами когерентные явления не зависят от той или иной модели флуктуирующих параметров. Однако конкретные значения параметров, характеризующие данное явление (например, характерные временные и пространственные масштабы кластерных структур), могут существенно зависеть от модели. Так, из уравнения (19) следует, что при выполнении условия $D_\rho t \gg 1$ среднее значение площади, где поле плотности примеси превышает заданный уровень ρ, уменьшается со временем по закону

$$\begin{aligned}\langle S(t;\rho)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho D_\rho t}}\times\\ \times\exp\left\{-\frac{D_\rho t}{4}\right\}\int\sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}\,d\mathbf{r},\end{aligned} \tag{23}$$

в то время как средняя масса примеси, находящаяся в этой области,

$$\begin{aligned}\langle M(t;\rho)\rangle = M_0 - \sqrt{\frac{\rho}{\pi D_\rho t}}\times\\ \times\exp\left\{-\frac{D_\rho t}{4}\right\}\int\sqrt{\rho_0(\mathbf{r})}\,d\mathbf{r},\end{aligned} \tag{24}$$

монотонно стремится к полной массе $M_0 = \int \rho_0(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$.

Отметим, что для безынерционной примеси в бездивергентном гидродинамическом потоке коэффициент D_ρ может быть отличен от нуля, например, в случае плавучей примеси, движущейся в заданной плоскости. В этом случае плоская дивергенция отлична от нуля, хотя полная (трехмерная) дивергенция равна нулю [14] (см. также [15, 16]).

Коэффициенты диффузии D_0 и D_ρ (20) для малоинерционной примеси в случайном бездивергентном гидродинамическом поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ вычислялись в работах [1, 2].

Таким образом, при учете оседания примеси мы имеем динамическую задачу, описываемую уравнением (17) или (18) для индикаторной функции $\Phi(t,\mathbf{r};\rho)$, где поле скоростей частиц примеси $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ в случайном гидродинамическом потоке $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ описывается квазилинейным уравнением (6). В силу сказанного выше ясно, что все вычисления необходимо проводить в диффузионном приближении, учитывающем конечность временного радиуса корреляции τ_0 случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$. Эта задача и рассматривается в настоящей работе.

2. ДИФФУЗИЯ И КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ ОСЕДАЮЩЕЙ БЕЗЫНЕРЦИОННОЙ ПРИМЕСИ

Рассмотрим статистическое описание поля плотности оседающей безынерционной примеси в диффузионном приближении. В этом случае уравнения (17) и (18) упрощаются и имеют вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+[\mathbf{v}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)]\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Phi(t,\mathbf{r};\rho)= =\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\Phi(t,\mathbf{r};\rho), \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)\Phi(t,\mathbf{r};\rho)= =\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t,\mathbf{r};\rho), \quad (26)$$

$$\Phi(0,\mathbf{r};\rho)=\delta\left(\rho_0(\mathbf{r})-\rho\right).$$

Уравнение (25) удобно для определения функциональной зависимости функции $\Phi(t,\mathbf{r};\rho)$ от поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, а уравнение (26) более удобно для непосредственного усреднения по ансамблю реализаций случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Так как уравнения (25) и (26) являются уравнениями первого порядка по времени с начальным условием, для них выполняется условие динамической причинности

$$\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}=0 \quad \text{при} \quad t'<0 \quad \text{и} \quad t'>t, \quad (27)$$

т.е. их решение $\Phi(t,\mathbf{r};\rho)$ функционально зависит лишь от предшествующих по t значений $u_j(\mathbf{r},t')$ из интервала $t_0 \le t' \le t$. При этом для вариационной производной при $t'\to t$ имеем очевидное равенство

$$\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t-0)}=\left[-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j}+ +\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t,\mathbf{r};\rho). \quad (28)$$

Уравнение для плотности вероятностей $P(t,\mathbf{r};\rho)$ получим, усредняя уравнение (26) по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t,\mathbf{r};\rho)=-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Phi(t,\mathbf{r};\rho)\rangle+ +\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\Phi(t,\mathbf{r};\rho)\right\rangle. \quad (29)$$

Уравнение (29) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t,\mathbf{r};\rho)=-\frac{\partial}{\partial r_i}\int d\mathbf{r}'\times \times\int\limits_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\left\langle\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right\rangle+ +\left[1+\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt'\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')}{\partial r_j}\times \times\left\langle\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right\rangle. \quad (30)$$

Здесь мы воспользовались формулой Фурутцу–Новикова [17, 18]

$$\langle u_i(\mathbf{r},t)R[t;\mathbf{u}(\mathbf{y},\tau)]\rangle=\int d\mathbf{r}'\times \times\int\limits_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\left\langle\frac{\delta R[t;\mathbf{u}(\mathbf{y},\tau)]}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right\rangle, \quad (31)$$

справедливой для корреляции гауссова случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с произвольным функционалом $R[t;\mathbf{u}(\mathbf{y},\tau)]$ от него и условием динамической причинности (27).

Диффузионное приближение для уравнения (30) соответствует пренебрежению случайными флуктуациями на временных масштабах порядка τ_0. Вариационная производная в уравнении (30) в этом приближении описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} = 0 \tag{32}$$

с начальным условием (28), т. е.

$$\left.\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'} = \\ = \left[-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t',\mathbf{r};\rho). \tag{33}$$

Решение задачи (32), (33) имеет вид

$$\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} = \exp\left\{-\mathbf{v}(t-t')\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right\}\times \\ \times\left[-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial r_j} + \frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t',\mathbf{r};\rho). \tag{34}$$

Сама же функция $\Phi(t,\mathbf{r};\rho)$ на временном интервале порядка τ_0 описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\Phi(t,\mathbf{r};\rho) = 0,$$

$$\Phi(t,\mathbf{r};\rho)|_{t=t'} = \Phi(t',\mathbf{r};\rho),$$

и, следовательно,

$$\Phi(t',\mathbf{r};\rho) = \exp\left\{\mathbf{v}(t-t')\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right\}\Phi(t,\mathbf{r};\rho). \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), получаем окончательное выражение для вариационной производной в диффузионном приближении ($\tau = t - t'$):

$$\frac{\delta\Phi(t,\mathbf{r};\rho)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} = \left[-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)\frac{\partial}{\partial r_j} + \right. \\ \left. + \frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)}{\partial r_j}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right]\Phi(t,\mathbf{r};\rho). \tag{36}$$

Подставляя теперь (36) в (30) и выполняя интегрирование по $\mathbf{r}'$, получаем замкнутое уравнение для плотности вероятностей плотности примеси в диффузионном приближении

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t,\mathbf{r};\rho) = \\ = \int\limits_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho) - \\ - \int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho) - \int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}\times \\ \times\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2 P(t,\mathbf{r};\rho). \tag{37}$$

Для достаточно больших значений времени ($t \gg \tau_0$, $t \gg l_0/v$, где l_0 — пространственный масштаб поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$) можно заменить пределы интегрирования в правой части (37) на бесконечность и переписать уравнение для плотности вероятностей в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t,\mathbf{r};\rho) = D_{ij}(\mathbf{v})\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho) + \\ + G_j(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho) + D_\rho(\mathbf{v})\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2 P(t,\mathbf{r};\rho), \tag{38}$$

где коэффициенты диффузии определяются равенствами

$$\begin{aligned} D_{ij}(\mathbf{v}) &= \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau) = \\ &= \int\limits_0^\infty d\tau\,\langle u_i(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,t+\tau)u_j(\mathbf{r},t)\rangle, \\ G_j(\mathbf{v}) &= -\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i} = \\ &= -\int\limits_0^\infty d\tau\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,t+\tau)}{\partial\mathbf{r}}u_j(\mathbf{r},t)\right\rangle, \\ D_\rho(\mathbf{v}) &= -\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i\partial r_j} = \\ &= \int\limits_0^\infty d\tau\left\langle\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,t+\tau)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle. \end{aligned} \tag{39}$$

Величины $D_{ij}(\mathbf{v})$ и $G_j(\mathbf{v})$ описывают пространственное расплывание поля плотности безынерционной примеси и не оказывают прямого влияния на кластеризацию плотности примеси, за которую ответствен коэффициент диффузии $D_\rho(\mathbf{v})$. При этом такие функционалы плотности примеси как (23) и (24) сохраняют свой асимптотический закон эволюции во времени с заменой D_ρ на $D_\rho(\mathbf{v})$.

Если поле скорости гидродинамического потока $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ бездивергентно, т.е. $\operatorname{div}\,\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$, то коэффициенты $G_j(\mathbf{v})$, $D_\rho(\mathbf{v})$ в уравнении (38) обращаются в нуль и кластеризация поля безынерционной примеси не осуществляется. Кластеризация в этом случае может осуществляться только за счет малой инерционности примеси.

Из уравнения (38) можно получить уравнение для средней плотности примеси, умножая его на ρ и интегрируя по ρ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \\ = D_{ij}(\mathbf{v})\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle + G_j(\mathbf{v})\frac{\partial}{\partial r_j}\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle, \quad (40)$$

которое согласно (10) и (12) совпадает с уравнением для плотности вероятностей положения частицы. Легко получить в диффузионном приближении и уравнение для средней плотности примеси с учетом эффектов молекулярной диффузии. В самом деле, усредняя уравнение (3) в безынерционном приближении по ансамблю реализаций поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ с учетом формулы (31), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \mu\Delta\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle - \\ -\frac{\partial}{\partial r_i}\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt' B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\times \\ \times\left\langle\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right\rangle, \\ \langle\rho(\mathbf{r},0)\rangle=\rho_0(\mathbf{r}). \quad (41)$$

Вариационная производная в уравнении (41) в диффузионном приближении описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} = \mu\Delta\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} \quad (42)$$

с начальным условием, вытекающим из (3), т.е.

$$\left.\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'} = -\frac{\partial}{\partial r_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r},t). \quad (43)$$

Решение задачи (42), (43) имеет вид ($\tau=t-t'$)

$$\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta v_j(\mathbf{r}',t')} = \\ = -\exp\left\{\left(\mu\Delta-\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\tau\right\}\frac{\partial}{\partial r_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r},t'). \quad (44)$$

Сама же функция $\rho(\mathbf{r},t)$ на временном интервале порядка $\tau_{\mathbf{v}}$ описывается уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r},t) = \mu\Delta\rho(\mathbf{r},t),$$

$$\rho(\mathbf{r},t)|_{t=t'} = \rho(\mathbf{r},t'),$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{r},t') = \exp\left\{-\left(\mu\Delta-\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\tau\right\}\rho(\mathbf{r},t). \quad (45)$$

Подставляя (45) в правую часть равенства (44), получаем окончательное выражение для вариационной производной в диффузионном приближении ($\tau=t-t'$)

$$\frac{\delta\rho(\mathbf{r},t)}{\delta u_j(\mathbf{r}',t')} = \\ = -e^{\mu\Delta\tau}\frac{\partial}{\partial r_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)e^{-\mu\Delta\tau}\rho(\mathbf{r},t). \quad (46)$$

Подставляя теперь (46) в (41) и выполняя интегрирование по $\mathbf{r}'$, получаем замкнутое уравнение для средней плотности примеси в диффузионном приближении

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \mu\Delta\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle + \\ +\frac{\partial}{\partial r_i}\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\tau)\times \\ \times e^{\mu\tau\Delta}\frac{\partial}{\partial r_j}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)e^{-\mu\tau\Delta}\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle, \\ \langle\rho(\mathbf{r},0)\rangle=\rho_0(\mathbf{r}). \quad (47)$$

Для достаточно больших значений времени ($t\gg\tau_0,\, t\gg l_0/v$) можно заменить предел в интеграле в правой части (47) на бесконечность и переписать уравнение для средней плотности примеси в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \mu\Delta\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle + \frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}\times \\ \times\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\tau)\times \\ \times e^{\mu\tau\Delta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)e^{-\mu\tau\Delta}\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle - \\ -\frac{\partial}{\partial r_i}\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',\tau)}{\partial r_j}\times \\ \times e^{\mu\tau\Delta}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}\tau)e^{-\mu\tau\Delta}\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle,$$

которое может быть решено в явном виде.

Вводя фурье-образ поля плотности

$$\rho(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{q}\rho_{\mathbf{q}}(t)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}},$$

$$\rho_{\mathbf{q}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{r}\rho(\mathbf{r},t)e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$$

и спектральную функцию поля скоростей (8), получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}\right)\langle\rho_{\mathbf{q}}(t)\rangle = \\ = -\left\{\mu\mathbf{q}^2 + q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v}) - q_i G_i(\mathbf{q},\mathbf{v})\right\}\langle\rho_{\mathbf{q}}(t)\rangle,$$

где коэффициенты

$$D_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v}) = \int d\mathbf{k}\int\limits_0^\infty d\tau E_{ij}(\mathbf{k},\tau)\times \\ \times\exp\left\{-\mu(\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\tau\right\},$$

$$G_i(\mathbf{q},\mathbf{v}) = \int d\mathbf{k}\int\limits_0^\infty d\tau\, k_j E_{ij}(\mathbf{k},\tau)\times \\ \times\exp\left\{-\mu(\mathbf{k}^2 - 2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\tau\right\},$$

решение которого

$$\langle\rho_{\mathbf{q}}(t)\rangle = \rho_{\mathbf{q}}(0)\exp\left\{-i\mathbf{v}\cdot\mathbf{q}t - \mu\mathbf{q}^2 t - \right. \\ \left. - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{q},\mathbf{v})t\right\}.$$

Следовательно,

$$\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle = \int d\mathbf{r}'\rho_0(\mathbf{r}')P(\mathbf{r},t|\mathbf{r}'),$$

где величину

$$P(\mathbf{r},t|\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d}\times \\ \times\int d\mathbf{q}\exp\left\{i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}t) - \mu\mathbf{q}^2 t - \right. \\ \left. - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{q},\mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{q},\mathbf{v})t\right\} \quad (48)$$

можно рассматривать, согласно равенствам (10) и (12), как плотность вероятностей положения частицы с учетом молекулярной диффузии, если дополнить уравнение (9) гауссовыми случайными возмущениями $\mathbf{f}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{v} + \mathbf{u}\left(\mathbf{r}(t),t\right) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}',$$

с параметрами

$$\langle\mathbf{f}(t)\rangle = 0, \quad \langle f_i(t)f_j(t')\rangle = 2\mu\delta_{ij}\delta(t-t').$$

В общем случае распределение вероятностей (48) не является гауссовым. Однако при достаточно больших временах ($t \gg \tau_0$, $t \gg l_0/v$) выражение (48) упрощается и принимает вид гауссова распределения

$$P(\mathbf{r},t|\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d\mathbf{q}\exp\left\{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{v}t) - \right. \\ \left. - \mu\mathbf{q}^2 t - q_i q_j D_{ij}(\mathbf{v})t + q_i G_i(\mathbf{v})t\right\}, \quad (49)$$

где теперь коэффициенты

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = D_{ij}(0,\mathbf{v}) = \\ = \int d\mathbf{k}\int\limits_0^\infty d\tau E_{ij}(\mathbf{k},\tau)\exp\left\{-\mu\mathbf{k}^2\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\tau\right\},$$

$$G_i(\mathbf{v}) = G_i(0,\mathbf{v}) = \\ = \int d\mathbf{k}\int\limits_0^\infty d\tau\, k_j E_{ij}(\mathbf{k},\tau)\exp\left\{-\mu\mathbf{k}^2\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\tau\right\}.$$

Пространственный тензор диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ можно представить в виде

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = A(v)\frac{v_i v_j}{\mathbf{v}^2} + B(v)\Delta_{ij}(\mathbf{v}),$$

где

$$A(v) = D_{ij}(\mathbf{v})\frac{v_i v_j}{\mathbf{v}^2}, \quad B(v) = \frac{1}{d-1}D_{ij}(\mathbf{v})\Delta_{ij}(\mathbf{v})$$

и $\Delta_{ij}(\mathbf{v}) = \delta_{ij} - v_i v_j/\mathbf{v}^2$. Из такого представления следует, что если направить одну из осей системы координат (z) по вектору $\mathbf{v}$, то пространственная диффузия поля плотности статистически независима по разным осям и коэффициент диффузии в направлении оси z определяется величиной $D_{zz}(v) = A(v)$, а в поперечной плоскости ($\mathbf{R}$) величиной $D_\perp(v) = B(v)$, при этом имеется дополнительный перенос частиц в среднем по оси z, обусловленный дивергентностью поля скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$, и при этом

$$G_j(\mathbf{v}) = G(v)\frac{v_j}{\mathbf{v}^2} = \frac{v_j}{\mathbf{v}^2}\int d\mathbf{k}\times \\ \times\int\limits_0^\infty d\tau\, E^{\mathrm{p}}(k,\tau)\,(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})\exp\left\{-\mu\mathbf{k}^2\tau + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\tau\right\}. \quad (50)$$

Для оценки анизотропии коэффициентов диффузии можно воспользоваться моделью, для которой

$$E_{ij}(\mathbf{k},\tau) = E_{ij}(\mathbf{k})\exp\{-|\tau|/\tau_0\},$$

где τ_0 — временной радиус корреляции случайного поля скоростей. В этом случае

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{v}\int \frac{d\mathbf{k}}{k} E_{ij}(\mathbf{k}) \frac{p(k,v)}{1+p^2(k,v)\cos^2\theta},$$

где $\cos^2\theta = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2/k^2\mathbf{v}^2$ и введен параметр

$$p(k,v) = \frac{kv\tau_0}{1+\mu\tau_0\mathbf{k}^2}.$$

Для вектора $G_i(\mathbf{v})$ получаем в трехмерном случае

$$G_j(\mathbf{v}) = -\frac{v_j}{\mathbf{v}^2}\int d\mathbf{k}\, E^{\mathrm{p}}(k)\frac{p^2(k,v)\cos^2\theta}{1+p^2(k,v)\cos^2\theta} = \\ = -\frac{4\pi v_j}{\mathbf{v}^2}\int\limits_0^\infty dk\, k^2 E^{\mathrm{p}}(k)\left\{1-\frac{1}{p(k,v)}\operatorname{arctg} p(k,v)\right\}.$$

Для бездивергентного поля скоростей, например в трехмерном случае ($d = 3$), когда $E_{ij}(\mathbf{k}) = E^{\mathrm{s}}(k)\Delta_{ij}(\mathbf{k})$, получаем

$$D_{zz}(v) = \frac{4\pi}{v}\int\limits_0^\infty dk\, kE^{\mathrm{s}}(k) f_{\parallel}(k,v),$$

$$D_{\perp}(v) = \frac{4\pi}{v}\int\limits_0^\infty dk\, kE^{\mathrm{s}}(k) f_{\perp}(k,v),$$

где

$$f_{\parallel}(k,v) = \\ = \left[\operatorname{arctg} p(k,v) + \frac{1}{p(k,v)}\left(\frac{1}{p(k,v)}\operatorname{arctg} p(k,v) - 1\right)\right],$$

$$f_{\perp}(k,v) = \\ = \left[\operatorname{arctg} p(k,v) - \frac{1}{p(k,v)}\left(\frac{1}{p(k,v)}\operatorname{arctg} p(k,v) - 1\right)\right].$$

При малых значениях параметра p ($v\tau_0 \ll l_0$), где l_0 — пространственный радиус корреляции поля скоростей, функции $f_{\parallel}(k,v)$ и $f_{\perp}(k,v)$ близки к $2p/3$, что соответствует изотропной, не зависящей от скорости оседания v, диффузии, а при больших значениях параметра p ($v\tau_0 \gg l_0$) имеем $f_{\parallel}(k,v) = 2f_{\perp}(k,v) \approx \pi/2$. Такая анизотропия диффузии объясняется тем обстоятельством, что диффузия примеси относительно турбулентных движений уменьшает время пребывания частицы примеси в пределах области коррелирующих скоростей. Вместе с тем, в изотропном поле случайных скоростей поперечный радиус корреляции поля скоростей вдвое меньше продольного радиуса корреляции [6, 19], что и объясняет указанную анизотропию коэффициента диффузии. Для значений параметров $\mu\tau_0 \ll l_0^2$ тензор пространственной диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ не зависит от μ. Полученные оценки справедливы, разумеется, при условии сходимости всех фигурирующих интегралов. В работе [11] рассматривался случай развитого турбулентного потока, когда спектральная функция $E(k)$ имеет степенную форму, соответствующую закону Колмогорова–Обухова.

Отметим, что в общем случае в системе координат, ориентированной по направлению оседания примеси, уравнение (38) принимает вид ($\mathbf{r} = \{z, \mathbf{R}\}$)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) P(t,\mathbf{r};\rho) = \\ = A(v)\frac{\partial^2}{\partial z^2}P(t,\mathbf{r};\rho) + B(v)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}^2}P(t,\mathbf{r};\rho) + \\ + G(v)\frac{\partial}{\partial z}P(t,\mathbf{r};\rho) + D_\rho(v)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2 P(t,\mathbf{r};\rho), \quad (51)$$

где коэффициент сноса

$$G(v) = -\int\limits_0^\infty d\tau \frac{\partial B_{iz}^{(\mathbf{u})}(v\tau, 0, \tau)}{\partial r_i}.$$

3. УЧЕТ МАЛОЙ ИНЕРЦИОННОСТИ ПОЛЯ ПРИМЕСИ

3.1. Общие замечания

Как указывалось выше, если гидродинамическое поле скоростей является бездивергентным, то для описания явления кластеризации падающей примеси необходимо принять во внимание его инерционность, т. е. исходить из уравнений (6)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r},t)]\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r},t) = \\ = -\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r},t)}{\partial \mathbf{r}}\rho(\mathbf{r},t), \quad \rho(\mathbf{r},0) = \rho_0(\mathbf{r}), \quad (52)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + [\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{r},t)]\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \\ = -\lambda\left[\mathbf{v}(\mathbf{r},t) - \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right]. \quad (53)$$

Считая теперь, что случайное поле $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ — гауссово, статистически однородно в пространстве, стационарно во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$\langle v_i(\mathbf{r},t)v_j(\mathbf{r}',t')\rangle = B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'),$$

видим, что для решения динамического уравнения (52) одноточечная плотность вероятностей

$P(t,\mathbf{r};\rho)$ будет описываться уравнением, аналогичным уравнению (38):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)P(t,\mathbf{r};\rho)=D_{ij}(\mathbf{v};t)\frac{\partial^2}{\partial r_i\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho)+ +G_j(\mathbf{v};t)\frac{\partial}{\partial r_j}P(t,\mathbf{r};\rho)+D_\rho(\mathbf{v};t)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\rho^2P(t,\mathbf{r};\rho), \quad (54)$$

где коэффициенты диффузии определяются равенствами

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\mathbf{v};t)&=\int\limits_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)=\\
&=\int\limits_0^t dt'\left\langle v_i(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,t)v_j(\mathbf{r}+\mathbf{v}t',t')\right\rangle,\\
G_j(\mathbf{v};t)&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i}=\\
&=-\int\limits_0^t dt'\left\langle\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,t)}{\partial\mathbf{r}}v_j(\mathbf{r}+\mathbf{v}t',t')\right\rangle,\\
D_\rho(\mathbf{v};t)&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}=\\
&=\int\limits_0^t dt'\left\langle\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,t)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}t',t')}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle.
\end{aligned}\quad (55)$$

Величина $D_{ij}(\mathbf{v};t)$, как и ранее, описывает пространственное расплывание поля плотности малоинерционной примеси и не оказывает прямого влияния на кластеризацию плотности примеси, за которую ответствен коэффициент диффузии $D_\rho(\mathbf{v};t)$.

Таким образом, задача сводится к оценке из стохастического уравнения (53) коэффициентов диффузии (55), т. е. к вычислению пространственно-временных корреляционных функций случайных полей $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ и $\partial\mathbf{v}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}$.

Уравнение (53) можно представить в виде

$$\exp\left(-\mathbf{v}t\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(\mathbf{v}t\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right]= =-\left(\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\lambda\left[\mathbf{v}(\mathbf{r},t)-\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right].$$

Следовательно, вводя функции

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{v}(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,t),\quad \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{v}t,t),$$

можно переписать его в виде, не содержащем параметра $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)=-\left(\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)- -\lambda\left[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)\right]\quad (56)$$

и соответствующем полям скоростей в системе координат, связанной с оседающей примесью. В этом случае для коэффициентов диффузии (55) получаем выражения

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\mathbf{v};t)&=\int\limits_0^t d\tau B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)=\\
&=\int\limits_0^t dt'\left\langle\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t')\right\rangle=\int\limits_0^t d\tau B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau),\\
G_j(\mathbf{v};t)&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i}=\\
&=-\int\limits_0^t dt'\left\langle\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t')\right\rangle=\\
&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau)}{\partial r_i},\\
D_\rho(\mathbf{v};t)&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}=\\
&=\int\limits_0^t dt'\left\langle\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t')}{\partial\mathbf{r}}\right\rangle=\\
&=-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}.
\end{aligned}\quad (57)$$

Для достаточно больших значений времени ($t\gg\tau_0$, $t\gg l_0/v$) можно заменить пределы в интегралах в (57) на бесконечность и переписать коэффициенты диффузии в виде

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\mathbf{v})&=\int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau),\\
G_j(\mathbf{v})&=-\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau)}{\partial r_i},\\
D_\rho(\mathbf{v})&=-\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{v}})}(0,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}.
\end{aligned}\quad (58)$$

Таким образом, коэффициенты диффузии определяются пространственно-временными статистическими характеристиками решения нелинейного уравнения (56).

Будем считать, что гидродинамическое поле скоростей $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ — бездивергентное гауссово случайное поле ($\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=0$), однородное и изотропное в пространстве и стационарное во времени с нулевым средним значением и корреляционным тензором

$$B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\langle u_i(\mathbf{r},t)u_j(\mathbf{r}',t')\rangle\,.$$

При этом в системе координат, связанной с оседающей примесью,

$$B_{ij}^{(\widetilde{\mathbf{u}})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')=\langle \widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{u}_j(\mathbf{r}',t')\rangle = \\ = B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'+\mathbf{v}(t-t'),t-t'). \quad (59)$$

Для такой модели можно ввести пространственную спектральную функцию поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$

$$B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r},t)=\int d\mathbf{k}E_{ij}(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ E_{ij}(\mathbf{k},t)=E(k,t)\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\mathbf{k}^2}\right). \quad (60)$$

Отметим, что для важного в дальнейшем тензора четвертого порядка имеем представление

$$-\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0,0)}{\partial r_k\partial r_l}= \\ =\frac{D}{d(d+2)}\left[(d+1)\delta_{kl}\delta_{ij}-\delta_{ki}\delta_{lj}-\delta_{kj}\delta_{li}\right], \quad (61)$$

где коэффициент

$$D=\int d\mathbf{k}\,\mathbf{k}^2E(k)=-\frac{1}{d-1}\langle\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle \quad (62)$$

связан с вихревой структурой случайного бездивергентного поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Изучим статистические характеристики уравнения (56) в эйлеровом описании в диффузионном приближении, т. е. вычислим параметры (58), характеризующие временную эволюцию образования кластерной структуры плотности поля примеси $\rho(\mathbf{r},t)$.

Учитывая что параметр $\sigma_{\mathbf{u}}^2$ мал, можно линеаризовать уравнение (56) относительно функции $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$ и перейти к более простому векторному уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)= \\ =-\left(\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)-\lambda\left[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)-\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)\right],$$

которое запишем в координатном представлении:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)=-\widetilde{u}_k(\mathbf{r},t)\frac{\partial\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}- \\ -\frac{\partial\widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\widetilde{v}_k(\mathbf{r},t)+\lambda\widetilde{u}_i(\mathbf{r},t). \quad (63)$$

По повторяющимся индексам, как всегда, проводится суммирование.

3.2. Диффузионное приближение

Случайное поле $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$ коррелирует с функцией $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$, которая является функционалом поля $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$. Расщепление корреляций для гауссового поля $\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r},t)$ также основано на формуле Фурутцу–Новикова (31), которая в данном случае, согласно (59), имеет вид

$$\langle\widetilde{u}_k(\mathbf{r},t)R[t;\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y},\tau)]\rangle= \\ =\int d\mathbf{r}'\int\limits_0^t dt'B_{kl}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'+\mathbf{v}(t-t'),t-t')\times \\ \times\left\langle\frac{\delta R[t;\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y},\tau)]}{\delta\widetilde{u}_l(\mathbf{r}',t')}\right\rangle. \quad (64)$$

Для вариационных производных в диффузионном приближении имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)\frac{\delta\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\delta\widetilde{u}_l(\mathbf{r}',t')}=0$$

с начальным условием при $t=t'$

$$\left.\frac{\delta\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\delta\widetilde{u}_l(\mathbf{r}',t')}\right|_{t=t'+0}=-\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t')}{\partial r_l}+\right. \\ \left.+\,\delta_{il}\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_k}\widetilde{v}_k(\mathbf{r},t')\right]+\lambda\delta_{il}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

которое следует из уравнения (63). Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{\delta\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\delta\widetilde{u}_l(\mathbf{r}',t')}=e^{-\lambda(t-t')}\left\{-\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t')}{\partial r_l}+\right.\right. \\ \left.\left.+\,\frac{\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_k}\delta_{il}\widetilde{v}_k(\mathbf{r},t')\right]+\lambda\delta_{il}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\}.$$

Само поле $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ в диффузионном приближении имеет структуру

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)=e^{-\lambda(t-t')}\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t')$$

и, следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t')=e^{\lambda(t-t')}\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t).$$

Таким образом, для вариационной производной получаем выражение

$$\frac{\delta \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\delta \widetilde{u}_l(\mathbf{r}',t')} = -\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\partial \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_l} + \delta_{il}\frac{\partial \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial r_\mu}\widetilde{v}_\mu(\mathbf{r},t)\right] + \lambda e^{-\lambda(t-t')}\delta_{il}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (65)$$

3.3. Пространственно-временной корреляционный тензор поля $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$

Для пространственно-временной корреляционной функции поля скоростей $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ при $t>t_1$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle = \lambda\langle \widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle - \frac{\partial}{\partial r_k}\langle \widetilde{u}_k(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle - \left\langle \frac{\partial \widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\widetilde{v}_k(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t_1)\right\rangle.$$

С помощью формулы Фурутцу–Новикова (64) и выражения для вариационной производной (65) получаем в стационарном режиме уравнение с начальным условием для функции $\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t_1)\rangle$ ($\tau=t-t_1$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\lambda\right)\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t+\tau)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \lambda^2 e^{\lambda\tau}\int_\tau^\infty d\tau_1 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1+\mathbf{v}\tau_1,\tau_1)e^{-\lambda\tau_1}, \quad (66)$$

$$\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t+\tau)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle_{\tau=0} = \langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle,$$

где стационарное значение $\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle$, естественно, не зависит от времени t. В уравнении (66) опущены члены порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$. Это можно сделать для достаточно большого значения параметра λ, удовлетворяющего условиям (15), что предполагается выполненным.

Теперь мы можем вычислить тензор пространственной диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ в выражениях (58). С этой целью, интегрируя уравнение (66) по параметру τ в интервале $(0,\infty)$, получаем равенство

$$\lambda\int_0^\infty d\tau\,\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t+\tau)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle = \langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \lambda\int_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1+\mathbf{v}\tau,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]. \quad (67)$$

Полагая теперь $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$, для коэффициента диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ получаем выражение

$$\lambda D_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t)\rangle + \lambda\int_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)\left[1-e^{-\lambda\tau}\right]. \quad (68)$$

Далее из уравнения (63) следует уравнение для одновременного пространственного корреляционного тензора поля $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\lambda\right)\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial r_k}\langle \widetilde{u}_k(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle - \frac{\partial}{\partial r_{1k}}\langle \widetilde{u}_k(\mathbf{r}_1,t)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle - \left\langle \frac{\partial \widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\widetilde{v}_k(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \widetilde{u}_j(\mathbf{r}_1,t)}{\partial r_{1k}}\widetilde{v}_k(\mathbf{r}_1,t)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\right\rangle + \lambda\left[\langle \widetilde{u}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle + \langle \widetilde{u}_j(\mathbf{r}_1,t)\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\rangle\right].$$

Используя формулу Фурутцу–Новикова (64) и выражение (65) для вариационной производной, получаем уравнение для стационарного корреляционного тензора $F_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)=\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r}_1,t)\rangle$, не зависящего от времени ($\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}$):

$$2\lambda F_{ij}(\mathbf{r}) = 2\int_0^\infty d\tau\left[B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)-B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)\right]\frac{\partial^2}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}F_{ij}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma}\frac{\partial}{\partial r_\beta}F_{i\gamma}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma}\frac{\partial}{\partial r_\beta}F_{\gamma j}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}F_{\beta j}(\mathbf{r}) - \int_0^\infty d\tau\frac{\partial B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}F_{i\beta}(\mathbf{r}) - 2\int_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}F_{\beta\gamma}(\mathbf{r}) + 2\lambda^2\int_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{r}+\mathbf{v}\tau,\tau). \quad (69)$$

Для стационарного значения корреляции $\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t)\rangle$, полагая $\mathbf{r} = 0$ в уравнении (69) и пренебрегая членами порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$, получаем уравнение

$$\langle \widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t)\rangle = \lambda \int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau} B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau), \tag{70}$$

и, следовательно, подставляя (70) в выражение (68), получаем для тензора пространственной диффузии $D_{ij}(\mathbf{v})$ равенство

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \int\limits_0^\infty d\tau B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau), \tag{71}$$

не зависящее от параметра λ и совпадающее, естественно, с выражением, соответствующим безынерционной примеси.

Аналогичным образом можно вычислить и коэффициент сноса, описываемый вторым членом в равенствах (58). При этом очевидно, что он будет порядка $\sigma_{\mathbf{u}}^4$ и, следовательно, мал по сравнению с основной скоростью оседания примеси $\mathbf{v}$.

3.4. Пространственно-временной корреляционный тензор поля div $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$

Прежде всего отметим, что, дифференцируя выражение (67) по r_i и r_{1j} и полагая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, получаем для коэффициента диффузии в ρ-пространстве $D_\rho(\mathbf{v})$ выражение

$$D_\rho(\mathbf{v}) = \int\limits_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t+\tau)}{\partial\mathbf{r}}\,\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}} \right\rangle = \frac{1}{\lambda}\left\langle \left(\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle, \tag{72}$$

откуда следует выражение для временно́го радиуса корреляции поля $\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)/\partial\mathbf{r}$:

$$\tau_{\mathrm{div}\widetilde{\mathbf{v}}} = \frac{1}{\lambda},$$

справедливое для всех достаточно больших значений параметра λ и, в частности, для случая (15), когда $\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ и, следовательно, $\tau_{\widetilde{\mathbf{v}}} = \tau_0$.

Обсудим теперь такие статистические характеристики пространственных производных поля $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)$ как

$$\left\langle \frac{\partial\widetilde{v}_i(\mathbf{r},t)}{\partial r_k}\,\frac{\partial\widetilde{v}_j(\mathbf{r},t)}{\partial r_l} \right\rangle = -\left.\frac{\partial^2 F_{ij}(\mathbf{r})}{\partial r_k\partial r_l}\right|_{\mathbf{r}=0}.$$

Для этих величин из уравнения (69) следует уравнение

$$\begin{aligned}
2\lambda\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_k\partial r_l} &= 2\lambda^2\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_k\partial r_l} - \\
&- 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_k\partial r_l}\,\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_k}\,\frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta\partial r_l} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta j}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_l}\,\frac{\partial^2 F_{i\gamma}(0)}{\partial r_\beta\partial r_k} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_k}\,\frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta\partial r_l} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta i}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\gamma\partial r_l}\,\frac{\partial^2 F_{\gamma j}(0)}{\partial r_\beta\partial r_k} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_k}\,\frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_l} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{i\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_l}\,\frac{\partial^2 F_{\beta j}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_k} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_k}\,\frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_l} - \\
&- \int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{j\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_l}\,\frac{\partial^2 F_{i\beta}(0)}{\partial r_\gamma\partial r_k} - \\
&- 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}\,\frac{\partial^2 F_{\beta\gamma}(0)}{\partial r_k\partial r_l} - \\
&- 2\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^4 B_{ij}(0,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma\partial r_k\partial r_l}F_{\beta\gamma}(0).
\end{aligned} \tag{73}$$

Положим в уравнении (73) $i = k$, $j = l$. Получаем выражение

$$\lambda\left\langle \left(\frac{\partial\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\right)^2 \right\rangle = 4\int\limits_0^\infty d\tau\frac{\partial^2 B_{\beta\gamma}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_i\partial r_j}\,\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}. \tag{74}$$

Для величины, стоящей в правой части (74), имеем

$$\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma} = \lambda\int\limits_0^\infty d\tau e^{-\lambda\tau}\frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial r_\beta\partial r_\gamma}$$

и при выполнении условий (15), в силу (61),

$$\frac{\partial^2 F_{ij}(0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} = \frac{\partial^2 B_{ij}^{(\mathbf{u})}(0,0)}{\partial r_\beta \partial r_\gamma} = \\ = \frac{D}{d(d+2)}\left[(d+1)\delta_{\beta\gamma}\delta_{ij} - \delta_{\beta i}\delta_{\gamma j} - \delta_{\beta j}\delta_{\gamma i}\right],$$

где величина D описывается формулой (62) и связана с вихревой структурой поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$.

Следовательно, для коэффициента диффузии $D_\rho(\mathbf{v})$ получаем выражение

$$D_\rho(\mathbf{v}) = \frac{4D(d+1)}{d(d+2)\lambda^2}\int\limits_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\beta}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial \mathbf{r}^2} = \\ = \frac{4(d+1)}{d(d+2)(d-1)\lambda^2}\frac{\partial^2 B_{\alpha\alpha}^{(\mathbf{u})}(0,0)}{\partial \mathbf{r}^2} \times \\ \times \int\limits_0^\infty d\tau \frac{\partial^2 B_{\beta\beta}^{(\mathbf{u})}(\mathbf{v}\tau,\tau)}{\partial \mathbf{r}^2}. \qquad (75)$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент $D_\rho(\mathbf{v}) \sim \sigma_{\mathbf{u}}^4$. И сначала вихревая компонента поля $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ генерирует вихревую компоненту поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ прямым линейным механизмом без участия адвекции, а уже затем вихревая компонента поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ генерирует дивергентную компоненту поля $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ через механизм адвекции. Следовательно, наличие оседания примеси приводит к уменьшению коэффициента диффузии $D_\rho(\mathbf{v})$, т. е. к увеличению времени кластеризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-05-64044 и 02-05-64375).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Кляцкин, Т. Эльперин, ЖЭТФ **122**, 327 (2002); Известия АН, Физ. атм. и океана **38**, 817 (2002).
2. В. И. Кляцкин, УФН **173**, 689 (2003).
3. M. R. Maxey, J. Fluid Mech. **174**, 441 (1987).
4. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Sixth Edition, Dover Publications, New York (1932).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
6. А. С. Монин, А. М. Яглом, *Статистическая гидродинамика*, ч. 1, ч. 2, Наука, Москва (1965, 1967).
7. В. И. Кляцкин, *Стохастические уравнения глазами физика* (*Основные идеи, точные результаты и асимптотические приближения*), Физматлит, Москва (2001).
8. В. И. Кляцкин, *Динамика стохастических систем* (*Курс лекций*), Физматлит, Москва (2002).
9. В. П. Докучаев, Изв. АН, Физ. атм. и океана **31**, 275 (1995).
10. В. И. Кляцкин, О. Г. Налбандян, Известия АН, Физ. атм. и океана **32**, 291 (1997).
11. Е. З. Грибова, И. С. Жукова, С. А. Лапинова и др., ЖЭТФ **123**, 543 (2003).
12. В. И. Кляцкин, Д. Гурарий, УФН **169**, 171 (1999).
13. В. И. Кляцкин, Известия АН, Физ. атм. и океана **36**, 177 (2000).
14. В. И. Кляцкин, А. И. Саичев, ЖЭТФ **111**, 1297 (1997).
15. J. R. Cressman and W. I. Golburg, J. Stat. Phys. **113**, 875 (2003).
16. J. R. Cressman, W. I. Golburg, and J. Schumacher, Europhys. Lett. **66**, 219 (2004).
17. K. Furutsu, J. Res. NBS **D-67**, 303 (1963).
18. Е. А. Новиков, ЖЭТФ **47**, 1919 (1964).
19. Дж. Бэтчелор, *Теория однородной турбулентности*, Изд-во иностр. лит., Москва (1955).