

# ХАОТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ, ТРАНСПОРТ И ФРАКТАЛЫ В ПРОСТОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

*М. В. Будянский, М. Ю. Улейский, С. В. Пранц\**

*Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева  
Дальневосточного отделения Российской академии наук*

Поступила в редакцию 18 мая 2004 г.

На примере адвекции пассивных примесей в нестационарном гидродинамическом потоке с проточной и вихревой составляющими рассмотрена задача хаотического рассеяния и транспорта частиц. Численно выявлено непритягивающее хаотическое инвариантное множество  $\Lambda$ , определяющее рассеяние и пленение частиц из набегающего потока. Это множество имеет гиперболическую компоненту, состоящую из неустойчивых периодических и непериодических траекторий, и негиперболическую компоненту, представленную слабо неустойчивыми орбитами в зоне «прилипания» частиц в окрестности границ внешних инвариантных торов. Исследованы геометрия и топология хаотического рассеяния и показано, что функции зависимости времени пленения частиц в зоне перемешивания и числа совершаемых ими оборотов вокруг вихря от начальных координат частиц имеют фрактальную структуру со сложной иерархией. В этой иерархии выявлены закономерности, обусловленные бесконечно повторяющимися пересечениями устойчивого многообразия множества  $\Lambda$  с материальной линией частиц из набегающего потока. Установлена взаимосвязь топологических и динамических характеристик потока. Функции рассеяния являются сингулярными на канторовом множестве начальных условий, что должно проявляться в экспериментах в виде сильных флуктуаций измеряемой величины.

PACS: 05.45.Df, 05.45.Pq, 47.52.+j, 47.53.+n

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Детерминированный хаос в классических гамильтоновых динамических системах с компактным фазовым пространством — хорошо развитая область нелинейной физики с набором аналитических, численных и экспериментальных методов и средств изучения нелинейной динамики. В физике рассеяния, как правило, имеют дело с открытыми системами с неограниченным фазовым пространством, когда частицы по вполне регулярным траекториям попадают извне в некоторую область взаимодействия, из которой они рано или поздно уходят по асимптотически регулярным траекториям. Таким образом, типичные траектории рассеяния не являются в строгом смысле слова хаотическими, поскольку хаос подразумевает сложное движение с неограниченным временем. Однако движение в зоне взаимодействия может иметь все признаки истинного гамильтонова хаоса с гомоклиническими структура-

ми, фракталами, странными инвариантными множествами, положительными ляпуновскими показателями и проч. Это явление, получившее название нерегулярного, или хаотического, рассеяния [1–4], активно изучается в небесной механике [5, 6], молекулярной динамике [7], атомной физике [8–10], гидродинамике [11–18], физике потенциального рассеяния [1, 3, 19] и других разделах физики. Можно сказать, что регулярное рассеяние столь же исключительно в мире процессов рассеяния, сколь исключительно интегрируемые системы в множестве ограниченных гамильтоновых систем.

В этих и других работах установлены основные закономерности хаотического рассеяния. Переходный хаос в зоне взаимодействия обусловлен существованием одного или нескольких непритягивающих хаотических инвариантных множеств, состоящих из бесконечного числа локализованных неустойчивых периодических орбит и непериодических траекторий. Хаотическое инвариантное множество  $\Lambda$  имеет устойчивое и неустойчивое многообразия, про-

\*E-mail: prants@poi.dvo.ru

стирающиеся в области асимптотически регулярно движения. Несмотря на то что множество  $\Lambda$  не является глобальным аттрактором, оно во многом определяет процесс рассеяния, формируя своего рода матрицу рассеяния. Частицы, начальные координаты которых точно лежат на устойчивом многообразии  $\Lambda_s$ , навсегда останутся в зоне взаимодействия. Частицы с начальными условиями, близкими к  $\Lambda_s$ , на долгое время задерживаются в зоне взаимодействия, блуждая в окрестностях неустойчивых траекторий из  $\Lambda$ . В результате физически измеряемые функции рассеяния, связывающие выходные характеристики траекторий с их входными характеристиками, являются сингулярными на канторовом множестве начальных условий. Наличие последнего можно положить в основу определения хаотического рассеяния. И хотя эти сингулярности составляют множество меры нуль, они косвенно проявляются в экспериментах в виде сильных флуктуаций измеряемой величины.

Ряд строгих математических результатов получен для гиперболических систем с рассеянием, в которых отсутствуют КАМ-торы и все периодические орбиты являются неустойчивыми. Для них вероятность пленения частиц в зоне взаимодействия убывает по экспоненциальному закону, фрактальная размерность множества  $\Lambda$  простым образом связана с показателем этой экспоненты и средним положительным показателем Ляпунова (см. [20, 4]) и множество сингулярностей функции рассеяния есть простой фрактал. В негиперболических системах КАМ-торы сосуществуют с зонами хаотического движения, топология фазового пространства существенно зависит от параметров системы, вероятность пленения на больших временах убывает по алгебраическому закону и сингулярности не являются простым фрактальным множеством. Более или менее реалистические модели принадлежат классу негиперболических систем, и изучение хаотического рассеяния и транспорта в них представляет практический интерес.

В настоящей работе исследуется хаотическая адвекция в открытом нестационарном гидродинамическом потоке, моделирующем существующие в океане топографические вихри над подводными возвышенностями [21, 22]. Лабораторными прототипами геофизических топографических вихрей являются столбы Тейлора — цилиндрические вихри в потоке однородной жидкости над подводными препятствиями [23, 24]. Переносимые течением с периодически осциллирующей составляющей (приливные течения в океане) пассивные примеси (например, загрязните-

ли) попадают в зону перемешивания, где их движение может быть хаотичным [18], и вымываются наружу в зону регулярного выходящего течения. Таким образом, возникает типичная задача хаотического рассеяния с необходимостью описания транспорта и перемешивания пассивных примесей. Поскольку фазовое пространство двумерного несжимаемого гидродинамического потока совпадает с его конфигурационным пространством, геофизические потоки и лабораторные эксперименты с красителями представляют уникальную возможность наблюдать невооруженным глазом в форме пространственных картин такие фундаментальные структуры и свойства хаотической динамики как инвариантные множества, фрактальные границы, полеты Леви, динамические ловушки и прочее [16, 17, 25, 26]. Целью работы является выяснение топологии потока и описание транспорта пассивных примесей геометрическими методами.

## 2. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ПОТОКА

### 2.1. Двумерный нестационарный поток с топографическим вихрем

Введенный в нашей работе [27] модельный двумерный гидродинамический поток описывается следующей безразмерной функцией тока:

$$\Psi = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \varepsilon x + \xi x \sin \tau, \quad (1)$$

где  $\tau = \omega t$  — нормированное время, а  $x$  и  $y$  — декартовы координаты. Первое слагаемое в (1) характеризует стационарный точечный вихрь с сингулярностью в точке  $x = y = 0$ , второе и третье — стационарное и нестационарное плоские течения с безразмерными параметрами соответственно  $\varepsilon$  и  $\xi$ . Это упрощенная модель геофизического потока в океане с топографическим вихрем на фоне стационарного течения, имеющего периодическую приливную составляющую. Мы изучаем кинематику пассивных примесей (т. е. безынерционных недиффундирующих частиц) в лагранжевом представлении. Как известно, в случае несжимаемого двумерного потока ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) с полем скоростей  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  уравнения движения пассивных примесей записываются в гамильтоновом виде,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x(x, y, \tau) = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \dot{y} &= v_y(x, y, \tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

с функцией тока  $\Psi(x, y, \tau)$ , играющей роль гамильтониана. Таким образом, конфигурационное пространство адвектируемой частицы является фазовым пространством ассоциированной динамической системы (2). Уравнения движения для функции тока (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} + \varepsilon + \xi \sin \tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где точка означает дифференцирование по нормированному времени  $\tau$ . В отсутствие возмущения ( $\xi = 0$ ) фазовый портрет этой системы состоит из набора финитных и инфинитных траекторий, разделенных петлей сепаратрисы, окружающей вихрь и проходящей через особую седловую точку с координатами  $x = -1/\varepsilon$ ,  $y = 0$ . В полярных координатах  $x = \rho \cos \varphi$  и  $y = \rho \sin \varphi$  невозмущенные уравнения разрешаются в квадратурах

$$\dot{\rho} = \varepsilon \sqrt{1 - \left( \frac{E - \ln \rho}{\varepsilon \rho} \right)^2}, \quad (4)$$

где  $E = \varepsilon \rho \cos \varphi + \ln \rho$  — интеграл движения. В зависимости от начальных условий частицы перемещаются либо внутри сепаратрисной петли вдоль замкнутых линий тока, либо огибают ее слева и справа по инфинитным линиям тока. В работе [27] численно и аналитически показано, что при наличии сколь угодно малого возмущения происходит расщепление сепаратрисы с трансверсальными пересечениями устойчивого и неустойчивого многообразий седловой точки и образованием гомоклининой структуры с бесконечным разнообразием периодических и неперидических орбит. Траектории пассивных примесей не совпадают со стационарными линиями тока. Некоторое представление о них дают сечения Пуанкаре, на которых для большого числа начальных условий изображается положение частиц на плоскости  $(x, y)$  в моменты времени  $\tau = 2\pi m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), кратные периоду потока. Для характеристики различных областей потока примем терминологию работы [14] и будем различать область свободного потока (с входящей и выходящей составляющими), зону перемешивания и вихревое ядро как совокупности траекторий, совершающих соответственно нулевое, конечное и бесконечное число оборотов вокруг вихря.

Топология фазового пространства существенно зависит от значений управляющих параметров  $\varepsilon$  и  $\xi$ , поскольку в их определения входят скорость стационарного течения, период нестационарного тече-

ния и интенсивность вихря, определяющая частоту вращения частиц. Соотношения этих величин определяют порядки нелинейных резонансов в системе. С увеличением отношения  $\varepsilon/\xi$  увеличиваются размеры сердцевин вихревого ядра, заполненной регулярными траекториями, увеличиваются порядки выживающих резонансов и, соответственно, уменьшаются размеры зоны перемешивания. Для  $\varepsilon/\xi \gg 1$  динамика системы практически регулярна. Все численные расчеты в этой работе проводились для таких значений управляющих параметров,  $\varepsilon = 0.5$  и  $\xi = 0.1$ , для которых зона перемешивания богата различными топологическими структурами.

## 2.2. КАМ-торы и кантор-торы

Опишем структурообразующие инвариантные множества динамической системы (3). Поведение частиц, принадлежащих разным множествам, качественно различно. Тривиальными примерами инвариантных множеств являются все фазовое пространство, неподвижная точка, замкнутая траектория, любая траектория, определенная по времени от  $-\infty$  до  $\infty$ . Исключим из описания множество всех проточных траекторий, не совершающих ни одного полного оборота вокруг вихря. Выделим множество всех инвариантных кривых на рис. 1, являющихся сечениями КАМ-торов. Это множество всех периодических и квазипериодических движений пассивных примесей вокруг центра вихря. На сечении Пуанкаре они образуют семейства вложенных друг в друга замкнутых гладких кривых. В основном они сосредоточены в вихревом ядре. Сечение Пуанкаре — это множество точек с координатами  $x_m = x(\tau = 2\pi m)$  и  $y_m = y(\tau = 2\pi m)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ . На рис. 1 изображено сечение Пуанкаре для множества примерно  $10^3$  траекторий с начальными условиями из области пространства с координатами  $x$  и  $y$  в интервалах соответственно  $[-0.9, -0.85]$  и  $[-0.1, 0.1]$ . Другие семейства инвариантных кривых образуют острова устойчивости с эллиптическими точками в своих центрах, которые находятся как в вихревом ядре, так и в зоне перемешивания. Острова возникают в результате нелинейных резонансов разных порядков между движением частиц вокруг вихря и  $2\pi$ -периодическим возмущением. Главный остров в хаотическом море (рис. 1б) образован полуцелым первичным резонансом с периодом  $\pi$ , в окрестности которого расположены резонансы высших порядков. На рис. 1б также хорошо виден вторичный резонанс периода  $10\pi$ . На рис. 2 представлена

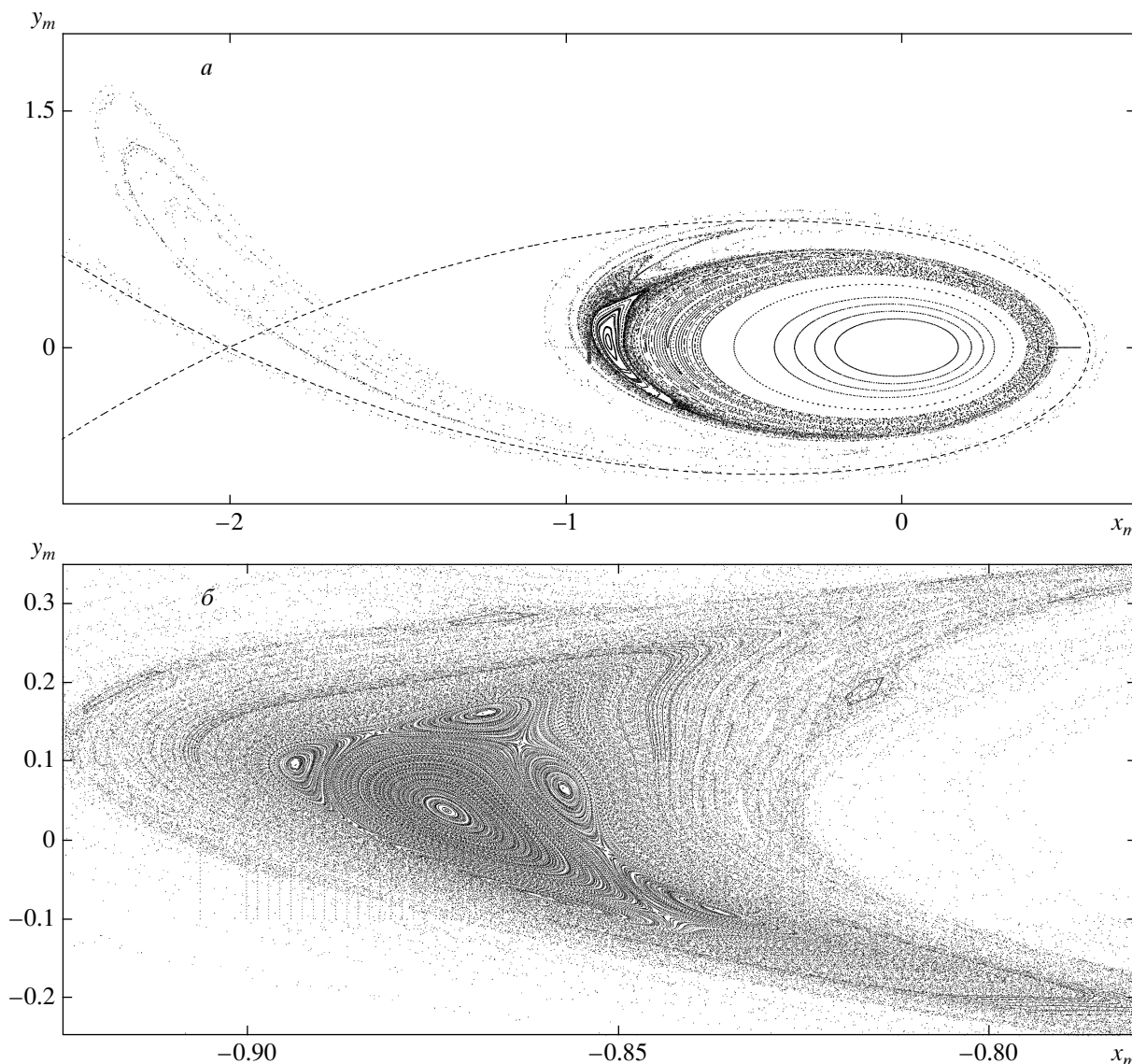


Рис. 1. а) Плоскость сечения Пуанкаре потока. Штрихами изображена невозмущенная сепаратриса. б) Вторичный резонанс периода  $10\pi$  в окрестности первичного полуцелого резонанса периода  $\pi$

периодическая траектория в центре первичного резонанса, а на вставке к нему — фрагмент периодической траектории вторичного резонанса с периодом  $10\pi$ , изображенного на рис. 1б. Звездочками обозначены эллиптические точки вторичного резонанса.

В вихревом ядре также имеются острова и цепи островов. При большом разрешении видно, что такие цепи «одеты» узкими стохастическими слоями. Вихревое ядро сохраняется при всех значениях параметров потока  $\varepsilon$  и  $\xi$ , т.е. оно является грубой структурой. Поскольку частота враще-

ния частиц в вихревом ядре значительно превышает частоту возмущения (равную единице), для типичных траекторий внутри ядра возмущение можно считать адиабатическим, а сами траектории — регулярными. Исключение составляют траектории в окрестностях перекрытия резонансов высоких порядков, образующих очень узкие стохастические слои. Являясь абсолютно непроницаемыми барьерами, КАМ-инвариантные торы ограничивают транспорт и перемешивание пассивных примесей.

Как известно [28], возмущение приводит к тому, что на месте некоторых КАМ-торов (прежде всего

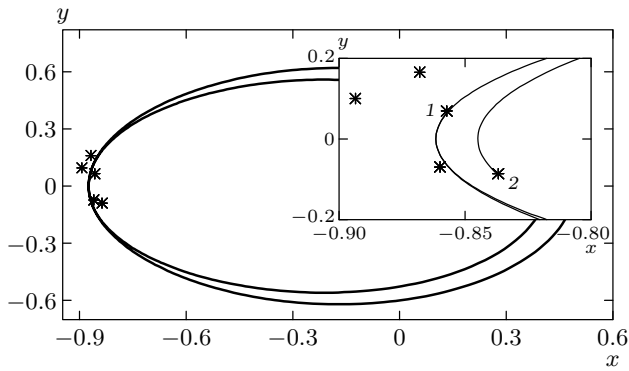


Рис. 2. Периодическая траектория в центре первичного резонанса. На вставке изображен фрагмент периодической траектории вторичного резонанса периода  $10\pi$ , начинающийся в точке 1 и заканчивающийся в точке 2 за время  $2\pi$

тех из них, числа вращения которых не удовлетворяют диофантову условию КАМ-теоремы) появляются кантор-торы. Это инвариантные множества, имеющие канторову структуру со щелями и с топологической размерностью по крайней мере меньше меры кривой. Движение на них квазипериодическое, однако кантор-торы неустойчивы и, следовательно, обладают устойчивыми и неустойчивыми многообразиями. В отличие от КАМ-торов, кантор-торы проницаемы для пассивных примесей. На пересечении материальной линии с устойчивым многообразием  $\Lambda_s$  в области набегающего потока найдутся такие частицы, которые попадают с течением времени на границу зоны перемешивания и вихревого ядра и вращаются там в некоторой области, как-будто ограниченной инвариантной КАМ-кривой. Затем в течение короткого промежутка времени они проникают по другую сторону этой кривой и задерживаются уже на этой стороне. Процесс многократно повторяется до тех пор, пока эти частицы не выйдут за границу с последующим вымыванием. Наличие таких зон «прилипания» на границах вихревого ядра и островов устойчивости указывает на существование там кантор-торов с малыми щелями. На рис. 3 демонстрируется эффект прилипания для пассивной примеси с определенными начальными координатами в области набегающего потока. Из графика изменения  $x$ -координаты частицы со временем (рис. 3а) следует, что большую часть времени она совершает почти периодическое движение в окрестности первичного полуприцельного резонанса (рис. 3б). Фрагмент этой траектории в окрестности седловой точки, где находится неустойчивая периодическая орбита, показан на

рис. 3в. На рис. 3г изображено соответствующее сечение Пуанкаре. Из существования инвариантного множества кантор-торов и/или зон прилипания следует важный вывод о неоднородности перемешивания, проявляющейся, в частности, на топографических картах пленения, в наличии тяжелых (алгебраических) хвостов в функциях распределения частиц по временам пленения и в сингулярностях функций рассеяния [18].

### 2.3. Хаотическое инвариантное множество и неустойчивые периодические орбиты

Хаотическим инвариантным множеством  $\Lambda$  называется множество всех траекторий (за исключением КАМ-торов и кантор-торов), никогда не выходящих из зоны перемешивания. Это множество состоит из бесконечного числа периодических траекторий и непериодических хаотических траекторий. Все траектории этого множества неустойчивы. Пассивные примеси с начальными условиями, принадлежащие множеству  $\Lambda$ , остаются в зоне перемешивания как при  $\tau \rightarrow \infty$ , так и при  $\tau \rightarrow -\infty$ . На сечении Пуанкаре множество  $\Lambda$  представляет собой фрактальное множество точек с нулевой мерой Лебега. Типичные траектории примесей из набегающего потока рано или поздно, конечно, покинут зону перемешивания вместе с выходящим потоком, однако наличие множества  $\Lambda$  существенно определяет их поведение. Они могут в течение неограниченного времени «отслеживать» траектории седлового множества, блуждая по их окрестностям.

Каждая орбита хаотического множества и, следовательно, все множество  $\Lambda$  в целом имеют устойчивое и неустойчивое многообразия. Устойчивым многообразием  $\Lambda_s$  хаотического множества является инвариантное множество всех траекторий, сходящихся к траекториям из множества  $\Lambda$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Неустойчивым многообразием  $\Lambda_u$  называется устойчивое многообразие обращенной во времени динамики. По траекториям из многообразия  $\Lambda_s$  пассивные примеси из набегающего потока попадают в зону перемешивания и остаются в ней навсегда. Как уже говорилось, соответствующие начальные условия образуют множество меры нуль. Трассеры, стартующие вблизи траекторий устойчивого многообразия, длительное время отслеживают траектории хаотического множества, отталкиваются от них в конце концов и покидают зону перемешивания вдоль неустойчивого многообразия. Таким образом, возникает уникальная возможность реконструировать важные свойства множества  $\Lambda$  по результатам

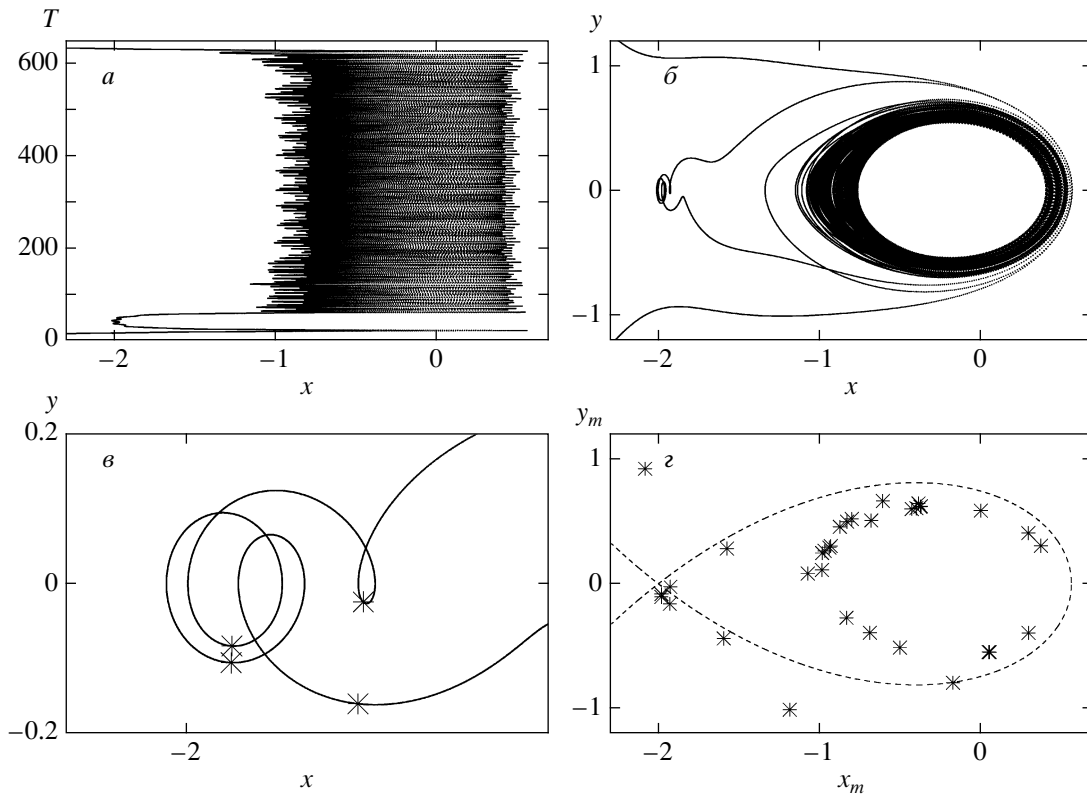


Рис. 3. Прилипание пассивной примеси на кромке хаотического моря: *a* — изменение *x*-координаты со временем; *б* — траектория частицы, *в* — фрагмент траектории вблизи седловой точки; *г* — сечение Пуанкаре

измерений рассеянных частиц и наблюдать непосредственно неустойчивые многообразия в лабораторных экспериментах [11, 12, 16, 17, 29] и даже в геофизических потоках [30, 31].

Визуализация неустойчивого многообразия осуществляется различными способами. В результате расплывания пятна из большого числа трассеров, выбранного на пересечении с устойчивым многообразием где-нибудь в набегающем потоке, формируется сложная фрактальная кривая, сходящаяся с течением времени к  $\Lambda_u$ . Та же картина формируется в экспериментах с треками (streaklines) частиц красителя. Само устойчивое многообразие располагается в области координатной плоскости, ограниченной положениями сепаратрисы в моменты времени, соответствующие двум экстремумам периода возмущения. Вдоль оси *y* эта зона простирается до  $-\infty$ , а ее ширина определяется значениями параметров потока  $\epsilon$  и  $\xi$ . В зону перемешивания попадают только те частицы, которые находятся в этой области. На рис. 4 представлен образ неустойчивого многообразия детерминированного модельного потока (3) в момент времени  $15\pi$ , полученный в результате чис-

ленного интегрирования уравнений движения частиц, непрерывно инжектируемых в точку набегающего потока с координатами  $(x_0 = -4.357759744, y_0 = -6)$ . Эта структура пульсирует с периодом потока. Транспорт пассивных примесей происходит вдоль фрактальной кривой неустойчивого многообразия потока, которое является своего рода аттрактором в гамильтоновой системе (из-за несжимаемости жидкости обычные аттракторы отсутствуют). Непосредственное вычисление так называемой карты пленения частиц [18] дает образ устойчивого многообразия  $\Lambda_s$ . Пересечением многообразий  $\Lambda_s$  и  $\Lambda_u$  является инвариантное хаотическое множество  $\Lambda$ , изображенное на рис. 5. Это фрактальное множество точек, пульсирующее с периодом потока. Трассеры, стартующие из этих точек, остаются в зоне перемешивания при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Если в невозмущенном потоке ( $\xi = 0$ ) линия раздела зон вихревого ядра и свободного потока имеет конечную длину, равную длине замкнутой сепаратрисной петли, то в потоке с периодическим возмущением она бесконечно длинная.

Множество, построенное с помощью описанной

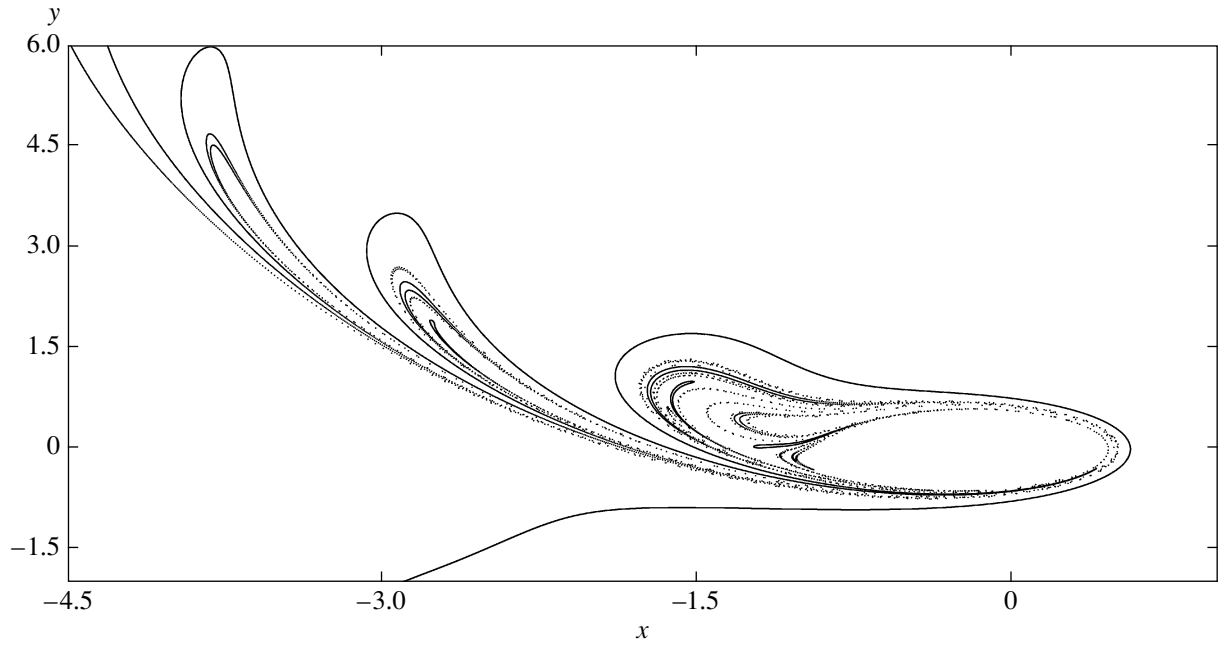


Рис. 4. Образ неустойчивого многообразия потока  $\Lambda_u$  — мгновенный «снимок» трека красителя в потоке,  $\tau = 15\pi$

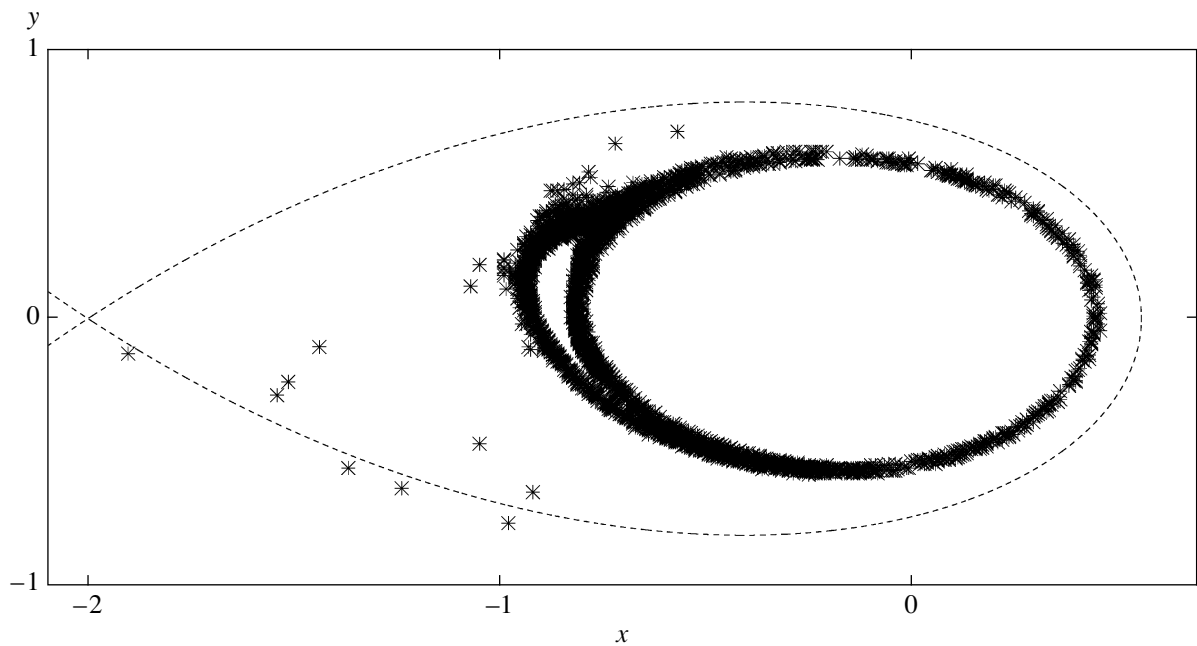


Рис. 5. Образ хаотического инвариантного множества  $\Lambda$

выше численной процедуры и изображенное на рис. 5, является грубым подобием истинного инвариантного хаотического множества потока  $\Lambda$ . Рисунок 5 дает хорошее представление о негиперболической составляющей  $\Lambda$ , состоящей из слабо неустойчи-

вых почти периодических орбит в окрестности границ внешних КАМ-торов. Как уже говорилось и демонстрировалось на рис. 3, здесь расположены кантор-торы и зоны прилипания, где частицы могут надолго застревать, совершая практически периодиче-

ские движения с показателем Ляпунова близким к нулю. С динамической точки зрения, это — движение в окрестности первичного полуцелого резонанса. Фрактальные свойства этих движений будут рассмотрены в следующем разделе.

Периодические траектории из гиперболической составляющей множества  $\Lambda$  существенно неустойчивы, и вероятность их обнаружения при наложении одной фрактальной «пыли» на другую мала. Мы предлагаем следующий численный метод доказательства существования таких орбит и их обнаружения. Численно переходим к новым переменным — углу  $\Theta$  и действию  $I$ . Задаем множество начальных углов  $\Theta_0$  и действий частиц  $I_0$  в зоне перемешивания и находим те их значения, для которых за время  $T$  угловая координата меняется на  $2\pi$ . Для тех же начальных условий вычисляем изменения энергии частиц  $\Delta E$  за определенное время, скажем за  $2\pi$ . Те частицы, для которых за это время угол и энергия не изменились, т. е.  $\Theta(T = 2\pi) = \Theta_0$  и  $\Delta E = 0$ , очевидно, совершают  $2\pi$ -периодическое движение. С помощью этих данных строим карту изменения энергии частиц в зависимости от начального угла и времени движения  $T$ . На рис. 6 цветом маркируются значения  $\Delta E$ . Пересечения линий  $\Delta E = 0$  с прямой  $T = 2\pi = 6.2831852\dots$  дают значения начальных углов частиц, которые в выбранном диапазоне значений начальных действий совершают  $2\pi$ -периодические движения. Таким же образом можно найти  $4\pi$ -периодические,  $6\pi$ -периодические и, в принципе,  $2m\pi$ -периодические орбиты. Стандартный анализ позволяет определить их устойчивость.

### 3. ГЕОМЕТРИЯ ХАОТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ

#### 3.1. Фрактальная структура рассеяния

В этом разделе исследуется геометрия транспорта пассивных примесей в зоне перемешивания. Для иллюстрации выберем в области свободного набегающего потока на линии  $y = -6$  отрезок начальных условий, левый конец которого является точкой пересечения этой линии с нижним «усом» возмущенной сепаратрисной петли в моменты времени  $3\pi/2 + 2\pi m$  ( $\sin \tau = -1$ ), а правый — точкой пересечения с «усом» возмущенной сепаратрисы в моменты времени  $\pi/2 + 2\pi m$  ( $\sin \tau = 1$ ). Все нетривиальные процессы рассеяния происходят с частицами, начальные координаты которых находятся в

области, ограниченной этими двумя амплитудными значениями мгновенных сепаратрисных линий тока. На рис. 7 показаны фрагменты эволюции заданной материальной линии в моменты времени  $\tau = 8\pi, 9\pi, 10\pi$  и  $11\pi$ . Точка  $A$  при  $\tau = 0$  находилась на пересечении невозмущенной сепаратрисы ( $\sin \tau = 0$ ) и линии  $y_0 = -6$ , а именно,  $x_0(A) = -4.6447002$ ; точка  $G$  — на пересечении сепаратрисы в моменты времени  $\pi/2 + 2\pi m$  и этой линии,  $x_0(G) = -4.3577522$ . Частицы с начальными координатами  $x_0 < -4.6447002$  и  $x_0 > -4.3577522$  не захватываются вихрем и сразу вымываются в зону свободного потока (см. сегменты, обозначенные точками на рис. 7). Частицы  $A$  и  $G$  вдоль устойчивого многообразия попадают в окрестность седловой периодической орбиты и задерживаются на длительное время (теоретически бесконечное) в зоне перемешивания.

Вычисляем полное число оборотов  $n$  вокруг вихря, совершаемое большим количеством частиц, выбранных на отрезке  $AG$ , до момента их попадания в зону выходящего свободного потока (часть плоскости выше линии  $y = 6$ ). График зависимости  $n(x_0)$  представляет собой сложную иерархию последовательностей отрезков материальной линии  $AG$  (рис. 8) с фрактальными свойствами, которые порождаются бесконечно повторяющимися пересечениями устойчивого и неустойчивого многообразий с материальной линией начальных условий при ее вращении вокруг вихря.

Для каждого  $n \geq 0$  имеются последовательности отрезков, которые вслед за авторами работы [32] будем называть эпистрофами. Эпистрофы образуют иерархическую структуру. Концы каждого отрезка эпистрофы на уровне  $n$  служат предельными точками эпистроф уровня  $n + 1$ . Например, на уровне  $n = 0$  имеется одна эпистрофа, сходящаяся к точке  $A$ . Концы каждого отрезка этой эпистрофы порождают на уровне  $n = 1$  эпистрофы  $b, c, d, e, g$  и т. д., сходящиеся к соответствующим предельным точкам (см. рис. 8). Численные эксперименты с эпистрофами разных уровней выявили следующие закономерности: 1) каждая эпистрофа сходится к предельной точке отрезка начальных условий, 2) концы каждого отрезка эпистрофы уровня  $n$  являются предельными точками эпистрофы уровня  $n + 1$ , 3) длины отрезков в эпистрофе убывают в геометрической прогрессии, 4) показатель  $q$  этой прогрессии одинаков для всех эпистроф и связан с максимальным показателем Ляпунова  $\lambda$  седловой точки соотношением  $\lambda = -(1/2\pi) \ln q$ .

На рис. 9 приведены зависимости длины  $l_j$  отрезка эпистрофы от его порядкового номера  $j$  для



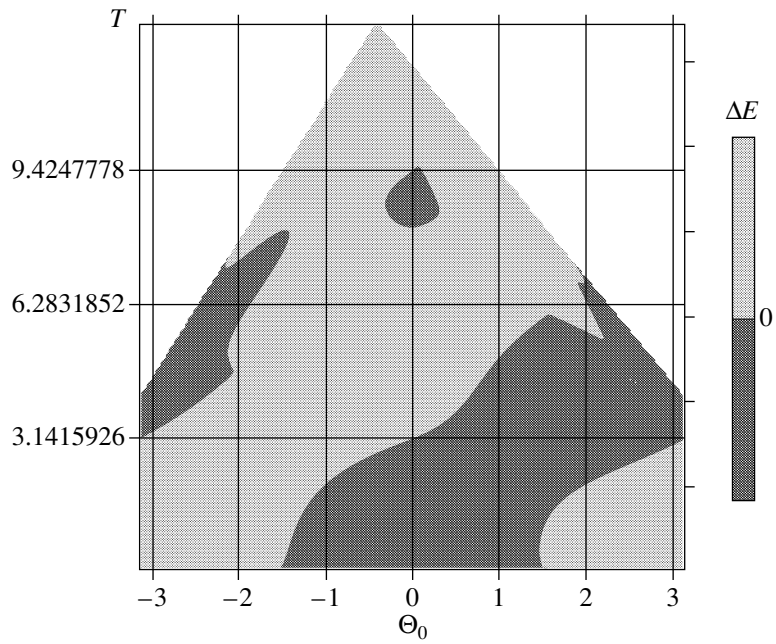


Рис. 6. Карта изменения энергии частиц  $\Delta E$  (в зависимости от начального угла частицы  $\Theta_0$  и времени движения  $T$ ), позволяющая определить начальные координаты частиц, совершающих  $2\pi$ -периодические движения

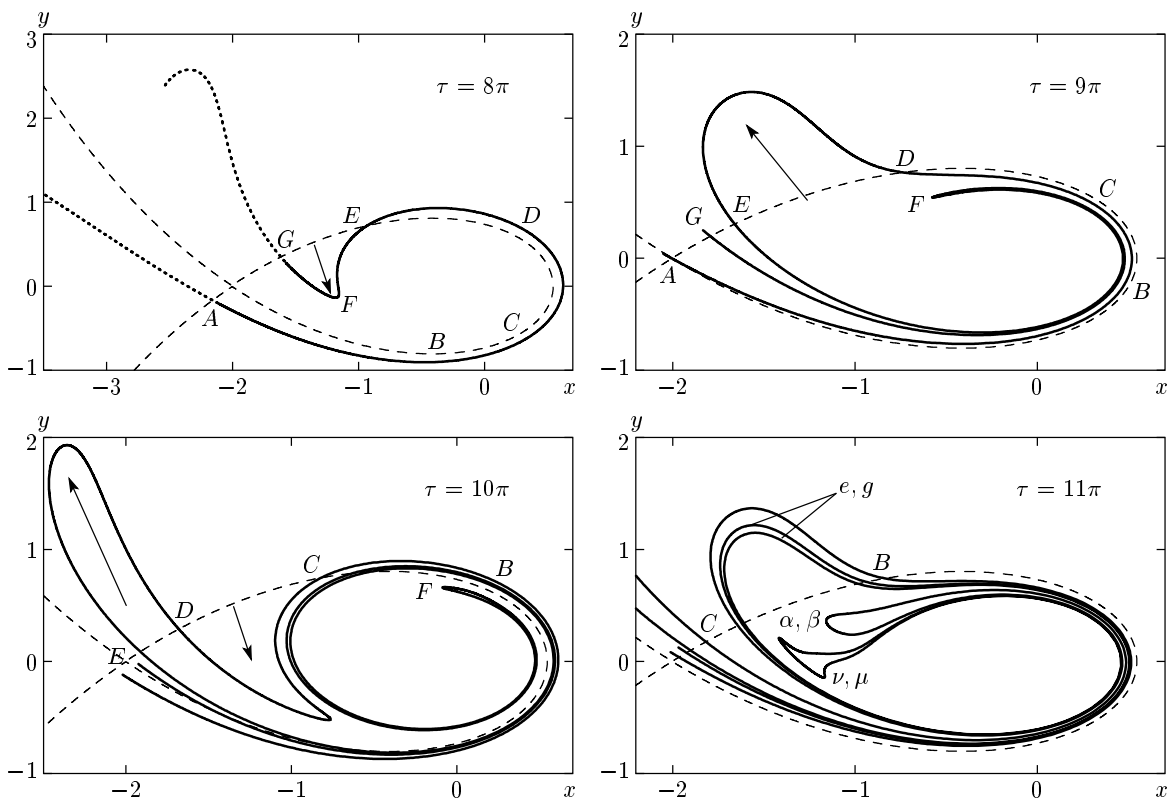


Рис. 7. Фрагмент эволюции материальной линии в последовательные моменты времени. Показано формирование «лепестков» из элементов эпистрофы и строфы фрактала, изображенного на рис. 8

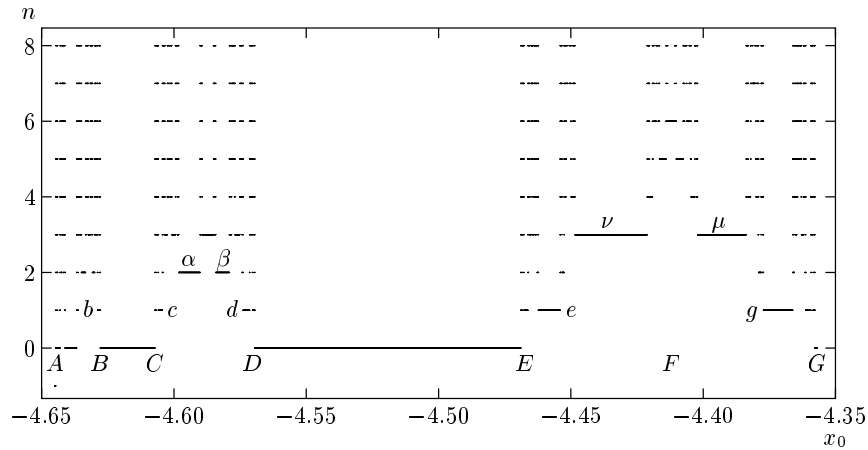


Рис. 8. Фрактальное множество (при  $n \rightarrow \infty$ ) начальных координат  $x_0$  частиц из набегающего потока, вымываемых из зоны перемешивания после  $n$  оборотов вокруг вихря

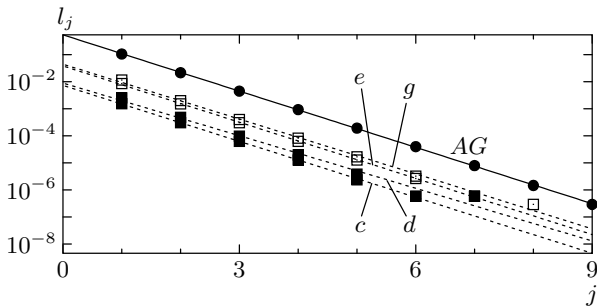


Рис. 9. Убывание длин  $l_j$  отрезков эпистроф с  $n = 0$  ( $AG$ ) и  $n = 1$  ( $c, d, e, g$ ) с порядковым номером  $j$  отрезка в логарифмическом масштабе. Логарифм наклона линий, деленный на  $2\pi$ , равен максимальному показателю Ляпунова с обратным знаком

нулевой эпистрофы и эпистроф  $c, d, e$  и  $g$  первого уровня ( $n = 1$ ). Все линии имеют примерно одинаковый наклон, равный  $\ln q = -1.59$ , т.е. длины отрезков в любой эпистрофе убывают в геометрической прогрессии,  $l_j = l_0 q^j$ , с показателем  $q \approx 0.2$ . Максимальный показатель Ляпунова седловой точки можно оценить по верхней границе ошибки счета на двойном шаге интегрирования. Численные эксперименты с  $2 \cdot 10^4$  трассеров, равномерно распределенных на материальной линии  $AG$ , показывают, что верхняя граница ошибки счета, накопленной к моменту выхода частиц из зоны перемешивания, лежит на прямой с наклоном  $\lambda \approx 0.25$ . То же значение получается из линеаризованной системы уравнений (3) в окрестности седловой точки.

Фрактал на рис. 8 не является строго самоподоб-

ным, так как в его структуре имеются отрезки, называемые строфами [32], которые не являются элементами эпистроф. Некоторые из них обозначены на рисунке греческими буквами. Таким образом, наш фрактал обладает частичным самоподобием — самоподобные эпистрофические последовательности существуют на всех уровнях разрешения. Кроме того, имеются дополнительные элементы (строфы), сохраняющиеся в асимптотическом пределе и не укладывающиеся в регулярную структуру. Все эти результаты полностью согласуются с эпистрофической теоремой, доказанной в работе [32] для открытых, сохраняющих площадь и ориентацию отображений плоскости с центром и неустойчивой особой точкой, устойчивое и неустойчивое многообразия которой трансверсально пересекаются.

### 3.2. Транспорт пассивных примесей

Фрактал на рис. 8 дает полное представление о транспорте пассивных примесей. Прямая материальная линия  $AG$  сначала растягивается и изгибается, опоясывая точечный вихрь, а затем часть ее начинает складываться, так как испытывает одновременное влияние двух противоположных тенденций — ускорения одних частиц при движении вокруг вихря и замедления других вблизи седловой точки. На рис. 7 в момент времени  $\tau = 8\pi$  запечатлен момент образования первой складки. Тыловая часть складки — сегмент  $DE$ , — как видно из последующих фрагментов рис. 7, вымывается в область свободного потока, образуя «лепесток». Фронталь-

ная часть складки — сегмент  $EFG$  — продолжает движение вокруг вихря. Сегменту  $DE$  на рис. 8 соответствует первый отрезок  $DE$  эпистрофы нулевого уровня — это те трассеры, которые не завершили полный оборот. Сегменту  $EFG$  соответствует пустой отрезок на рис. 8, порождающий бесконечную последовательность эпистроф и строф на всех высших уровнях. Через период возмущения ( $\tau = 10\pi$ ) на материальной линии образуется вторая складка, тыловая часть которой (сегмент  $BC$ ) вымывается, образуя второй лепесток, а ее фронтальная часть (пустой отрезок  $CD$  на рис. 8) начинает второй оборот вокруг вихря. К моменту времени  $\tau = 11\pi$  на растянувшемся участке первой складки начинают формироваться два новых лепестка, соответствующие отрезкам эпистроф  $e$  и  $g$  уровня  $n = 1$ , частицы которых, не завершив второго оборота вокруг вихря, вымываются вместе с лепестком  $BC$ , образуя второй «палец» на рис. 4. На фрагменте с  $\tau = 11\pi$  видны также две складки, являющиеся зародышами строф  $\alpha$  и  $\beta$  уровня  $n = 2$  и строф  $\nu$  и  $\mu$  уровня  $n = 3$ . Эти строфы формируют четыре лепестка, которые вместе с отрезками эпистроф нулевого и первого уровня образуют третий палец на рис. 4.

Этот процесс итеративен, т. е. на каждом обороте вокруг вихря от замедлившегося в окрестности седловой точки хвоста оставшегося сегмента материальной линии отматывается очередная порция, соответствующая на рис. 8 отрезку эпистрофы и пустому отрезку. Так образуется бесконечная последовательность отрезков нулевой эпистрофы на рис. 8. Вымывание каждого последующего отрезка нулевой эпистрофы происходит через период относительно предыдущего. По этому сценарию образуются все эпистрофы и строфы на уровнях выше нулевого с тем различием, что каждый отрезок эпистрофы  $n$ -го уровня генерирует не одну, а две эпистрофы  $(n + 1)$ -го уровня, т. е. отрезки этих эпистроф также вымываются последовательно через период, но парами. В экспериментах с треками красителя это проявляется в периодическом образовании пары лепестков. С течением времени треки красителя образуют самоподобную структуру (см. рис. 4) в том смысле, что с каждым периодом возмущения появляются новые пальцы со все большим и большим числом лепестков.

На рис. 10 представлена типичная функция рассеяния частиц, принадлежащих первому элементу  $DE$  эпистрофы нулевого уровня. Пограничные точки  $D$  и  $E$  отделяют частицы, попавшие на устойчивое и неустойчивое многообразия. Такую же роль играют концы всех элементов строф и эпистроф.

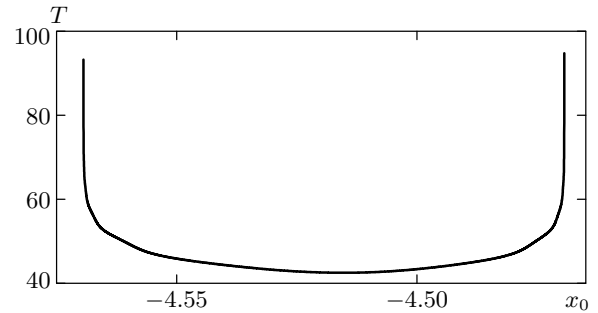


Рис. 10. Функция рассеяния частиц элемента  $DE$  нулевой эпистрофы (см. рис. 8).  $T$  — время пленения частицы в зоне перемешивания

Эти точки образуют множество точек, остающихся в зоне перемешивания навсегда. Функции рассеяния для строф имеют сходную  $U$ -образную форму, но менее симметричную.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках двумерной модели открытого несжимаемого периодического потока со стационарным точечным вихрем описано разбиение фазового пространства на инвариантные множества, исследовано поведение типичных траекторий на каждом из них и транспорт пассивных примесей, предложен численный метод выявления неустойчивых периодических орбит с помощью карт изменения энергии частиц. Выявлено хаотическое инвариантное множество  $\Lambda$ , неустойчивое многообразие  $\Lambda_u$  которого визуализировано в численных экспериментах с эволюцией материальных линий и треков большого числа пассивных примесей. Показано, что эволюция материальной линии на пересечении прямой начальных условий в области набегающего потока с устойчивым многообразием и скейлинг на этом одномерном подпространстве полностью определяют хаотические свойства адвекции пассивных примесей. Показано, что сингулярности в зависимости времени пленения частиц в зоне перемешивания от их начальных координат в набегающем потоке обусловлены частицами, попадающими в эту зону вдоль траекторий, принадлежащих устойчивому многообразию  $\Lambda_s$  и вымываемых из нее вдоль неустойчивого многообразия  $\Lambda_u$ . Исследована геометрия и топология хаотического рассеяния и показано, что функции зависимости времени пленения частиц в зоне перемешивания и числа совершаемых ими оборотов вокруг вихря от начальных координат частиц име-

ют фрактальную структуру со сложной иерархией. В этой иерархии выявлены закономерности, обусловленные бесконечно повторяющимися пересечениями устойчивого многообразия множества  $\Lambda$  с материальной линией частиц из набегающего потока. Обнаружена самоподобная структура этой функции, состоящая из последовательностей эпистроф, определяющих транспорт пассивных примесей. Установлена взаимосвязь топологических и динамических характеристик хаотической адвекции.

В заключение перечислим некоторые открытые проблемы, заслуживающие дальнейшего изучения. Представленная здесь методология пригодна для решения широкого круга задач классического хаотического рассеяния с неоднородным фазовым пространством, закономерности которого определяются наличием и свойствами непритягивающего хаотического множества с гиперболической и негиперболической компонентами. Для гиперболического рассеяния можно вывести формулу  $d \approx 1 - (\lambda/\langle T \rangle)^{-1}$ , связывающую фрактальную размерность  $d$  с максимальным показателем Ляпунова  $\lambda$  и средним временем пленения частиц в зоне перемешивания  $\langle T \rangle$  [4, 20]. При наличии негиперболической компоненты эта формула непригодна. Требуется более глубокое изучение взаимосвязи топологических, динамических и статистических характеристик хаотического рассеяния. Практически важной темой является изучение влияния малого шума на основные характеристики рассеяния. В задачах адвекции в геофизических потоках необходим учет вязкости и конечного размера адвектируемых частиц, динамика которых диссипативна. Практический интерес представляет динамика активных примесей с диффузией, способных к химической и биологической активности [33]. Отметим важную роль хаотического инвариантного множества в геофизических потоках с адвекцией активных примесей, например, фитопланктона в океане и химических реактантов в океане и атмосфере. Такие множества являются своего рода динамическими катализаторами биопродуктивности и химических реакций.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», РФФИ (грант № 02-02-17796) и Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума Дальневосточного отделения РАН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Eckhardt, *Physica D* **33**, 89 (1988).
2. R. Blumel and U. Smilansky, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 477 (1988).
3. P. Gaspard and S. A. Rice, *J. Chem. Phys.* **90**, 2225 (1989).
4. E. Ott and T. Tel, *Chaos* **3**, 417 (1993).
5. J. M. Petit and M. Henon, *Icarus* **60**, 536 (1986).
6. P. T. Boyd and S. L. W. McMillan, *Chaos* **3**, 507 (1993).
7. D. W. Noid, S. Gray, and S. A. Rice, *J. Chem. Phys.* **84**, 2649 (1986).
8. С. В. Пранц, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 777 (2002).
9. В. Ю. Аргонов, С. В. Пранц, *ЖЭТФ* **123**, 946 (2003).
10. S. V. Prants and M. Yu. Uleysky, *Phys. Lett.* **309A**, 357 (2003).
11. J. Chaiken, R. Chevray, M. Tabor, and Q. M. Tan, *Proc. Roy. Soc. London A* **408**, 165 (1986).
12. W. L. Chien, H. Rising, and J. M. Ottino, *J. Fluid Mech.* **170**, 355 (1986).
13. В. Eckhardt and H. Aref, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **326**, 655 (1988).
14. V. Rom-Kedar, A. Leonard, and S. Wiggins, *J. Fluid Mech.* **214**, 347 (1990).
15. C. Jang, T. Tel, and E. Ziemniak, *Chaos* **3**, 555 (1993).
16. T. N. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3975 (1993).
17. J. C. Sommerer, H.-C. Ku, and H. E. Gilreath, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5055 (1996).
18. М. В. Будянский, М. Ю. Улейский, С. В. Пранц, *ДАН* **386**, 686 (2002).
19. В. Eckhardt and C. Jung, *J. Phys. A* **19**, 829 (1986).
20. H. Kautz and P. Grassberger, *Physica D* **17**, 75 (1985).
21. В. Ф. Козлов, *Модели топографических вихрей в океане*, Наука, Москва (1983).
22. В. Н. Зырянов, *Топографические вихри в динамике морских течений*, ИВП РАН, Москва (1995).
23. G. Proudman, *Proc. Roy. Soc. London A* **92**, 408 (1916).

24. G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London A **104**, 213 (1923).
25. С. Д. Данилов, В. А. Довженко, И. Г. Якушкин, ЖЭТФ **118**, 483 (2000).
26. T. Yuster and W. W. Hackborn, Chaos **7**, 769 (1997).
27. М. В. Будянский, С. В. Пранц, Письма в ЖТФ **27**, 51 (2001).
28. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНТИ, Москва (1985).
29. М. Ван-Дайк, *Альбом течений жидкости и газа*, Мир, Москва (1986).
30. R. T. Sutton, H. Maclean, R. Swinbank, A. O'Neil, and F. W. Taylor, J. Atmos. Sci. **51**, 2995 (1994).
31. K. L. Denman and A. E. Gargett, Annu. Rev. Fluid. Mech. **27**, 225 (1995).
32. K. A. Mitchell, J. P. Handley, B. Tighe, J. B. Delos, and S. K. Knudson, Chaos **13**, 880 (2003).
33. Chaos **12**, № 2 (2002), special issue ed. by Z. Toroczkai and T. Tel.

*Примечание при корректуре* (14 сентября 2004 г.). Применяя описанный в конце второго раздела статьи метод поиска периодических орбит, нам удалось обнаружить нерезонансные периодические орбиты (не связанные с эллиптическими и гиперболическими точками резонансов) и неустойчивые периодические орбиты разрушенных резонансов в хаотическом море, которые никак не проявляются на сечениях Пуанкаре.