ЖЭТФ, 2004, том 126, вып. 5 (11), стр. 1198–1208

ИНДУЦИРОВАННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ ВТОРОГО РОДА В МОДЕЛИ ПОТТСА НА ИЕРАРХИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

П. Н. Тимонин*

Научно-исследовательский институт физики Ростовского государственного университета 344090, Ростов-на-Дону, Россия

Поступила в редакцию 9 февраля 2004 г.

Исследована термодинамика модели Поттса с произвольным числом состояний на классе иерархических решеток с фрактальной размерностью $d > 1$. Показано, что в отличие от случая кристаллических решеток фазовые переходы на них всегда являются переходами второго рода. Определены критические индексы, исследована их зависимость от структурных параметров и установлены скейлинговые соотношения между ними. Обсуждается структурный критерий трансформации рода перехода в неоднородных системах и применение полученных результатов к описанию критических явлений при фазовых переходах в разбавленных кристаллах и пористых средах.

PACS: 05.50.+q, 64.60.-i, 05.70.Jk

Рассмотрение фазовых переходов в спиновых моделях на иерархических решетках ведет свое начало от ренормгруппового метода Мигдала–Каданова [1, 2], где такие решетки появились как аппроксимация обычных кристаллических решеток [3]. Впоследствии были предложены многочисленные варианты иерархических решеток, имеющих нецелую размерность [4, 5] и являющихся, таким образом, моделями фрактальных структур. Поскольку фракталы часто встречаются в неупорядоченных средах (ими можно описать, например, структуру пористых сред и перколяционных кластеров в неупорядоченных кристаллах [6]), изучение фазовых переходов на них представляет большой интерес. Хотя структура иерархических решеток и не является случайной, они также имеют широкое распределение координационных чисел и характерных размеров и в этом смысле могут быть подходящими моделями случайных неоднородных систем. Действительно, исследование модели Изинга на иерархических решетках показало, что критические индексы для перехода второго рода существенно меняются на фракталах и зависят от их структурных характеристик [7, 8] в полной аналогии с изменением индексов в неупорядоченных кристаллах при изменении степени беспорядка [9].

Влияние неоднородностей структуры на переходы первого рода в моделях иерархических фракталов также имеет качественные особенности, сходные с наблюдаемыми в численных исследованиях таких переходов в моделях разбавленных кристаллов [10–13] и пористых сред [14, 15]. Так, обнаруженный в [10–15] эффект превращения переходов первого рода в переходы второго рода под влиянием неоднородностей имеет место и в модели Поттса с q-состояниями ($q = 4, 10$) на двух типах иерархических решеток с фрактальной размерностью $d > 2$ [16]. Это необычное явление трудно объяснить в рамках стандартной феноменологии, описывающей «сглаживание» переходов первого рода в неоднородных средах (уменьшение или полное исчезновение скачков термодинамических параметров) как результат образования неоднородного двухфазного состояния в окрестности перехода [17]. Такая физическая картина не может объяснить природу неустойчивости, появляющейся в неоднородной системе и приводящей к расходимости радиуса корреляций и критической восприимчивости [10–15].

Между тем экспериментальные исследования переходов в жидких кристаллах [18, 19] и анти-

*E-mail: timonin@aaanet.ru

ферромагнетике MnO [20], заключенном в пористые среды, подтверждают возможность трансформации рода перехода под влиянием неоднородностей. Превращение структурного перехода первого рода $O_h \to D_{4h}$ в запрещенный симметрией параметра порядка переход второго рода имеет место в магнетите Fe_3O_4 при допировании его цинком [21]. Изменение рода перехода наблюдается и в смешанных кристаллах $(KBr)_{1-x}(KCN)_x$ [22, 23] при сегнетоэластическом фазовом переходе из кубической в орторомбическую фазу. Такой переход в идеальных кубических кристаллах всегда является переходом первого рода [24], однако в смешанных кристаллах $(KBr)_{1-x}(KCN)_x$ он оказывается переходом второго рода при $x = 0.65$, 0.7 [22] и $x = 0.73$ [23], так что упругий модуль C_{44} обращается в нуль в точке перехода [23].

Таким образом, и эксперименты, и численное моделирование реалистических моделей показывают, что неоднородности могут не только сглаживать скачки первого рода термодинамических параметров, но и приводить к сингулярностям второго рода. Выяснение физической природы этого явления и разработка методов его количественного описания могут быть весьма важными не только для понимания механизмов фазовых переходов в неоднородных системах, но и для многочисленных практических приложений неоднородных материалов. Задачей теории является определение тех классов переходов первого рода и типов неоднородных сред, в которых появляются сингулярности второго рода, и тех, где имеет место обычное сглаживание скачков в результате образования промежуточной неоднородной фазы [17, 25]. Другой задачей является определение критических индексов для индуцированных неоднородностями переходов второго рода и установление их связи с геометрическими характеристиками неоднородных структур.

В решении этих задач существенную помощь могут оказать исследования фазовых переходов в спиновых моделях на таких упрощенных имитациях реальных неоднородных сред, как иерархические решетки, термодинамика которых допускает в ряде случаев точное аналитическое описание [16]. Действительно, результаты работы [16] и исследования модели Поттса на случайных графах со степенным распределением координационных чисел [26, 27] являются в настоящее время единственными аналитическими свидетельствами возможности превращения переходов первого рода в переходы второго рода в неоднородных структурах.

При этом выбор для исследования модели Поттса [10–16, 26, 27] как простейшей модели, имеющей переходы первого рода на трансляционно-инвариантных решетках с размерностью $d = 2, 3$, обусловлен также наличием множества ее физических реализаций. Среди них структурные переходы в адсорбированных слоях ($q = 3, 4$), переходы в кубических ферромагнетиках в магнитном поле и в смесях жидкостей ($q = 3$) (см. обзор [28] и ссылки в нем). Существует также множество сегнетоэластических переходов, описываемых моделью Поттса, например, переходы $O_h \to D_{4h}$ в шпинелях типа $NiCr_2O_4$, Fe_3O_4 и сверхпроводниках Nb_3Sn и V_3Si ($q = 3$) или переходы с упорядочением зарядов в кристаллах Yb_4As_3 [29] и сплавах типа Mg_3Cd ($q = 4$) (см. табл. IV.4 в [24]).

Здесь мы рассмотрим переходы в модели Поттса с произвольным числом состояний q на двупараметрическом семействе иерархических решеток, характеризуемом фрактальной размерностью $d > 1$ и средним координационным числом $\overline{z}$, $2 < \overline{z} < 4$. С помощью аналитического подхода, отличного от использованного в [16], удается показать, что при всех q, d и $\overline{z}$ имеют место переходы второго рода, получить аналитические выражения для критических индексов, исследовать их зависимость от структурных параметров и установить справедливость скейлинговых соотношений между ними. Полученные результаты позволяют также сделать предположение о структурном критерии трансформации рода перехода под влиянием неоднородностей. В заключение мы обсудим применение полученных результатов к описанию критических явлений при фазовых переходах в разбавленных кристаллах и пористых средах.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Процедура построения рассматриваемого семейства иерархических решеток представлена на рис. 1. Она состоит в последовательной замене каждой связи на $n \geq 2$ цепочках, состоящих из $m \geq 2$ связей. На каждом этапе построения такой решетки число связей в ней увеличивается в $B = mn$ раз, так что на k-м шаге имеется B^k связей, а число узлов N_k можно найти из рекуррентного соотношения

$$N_k = BN_{k-1} - n - B + 2,$$

из которого, с учетом равенства $N_0 = 2$, следует

$$N_k = \frac{B - n}{B - 1} B^k + \frac{n - 1}{B - 1} + 1. \qquad (1)$$

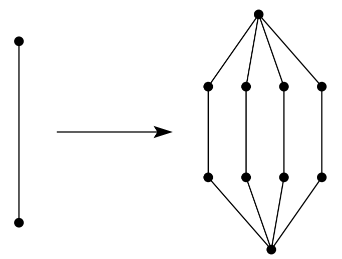

Рис. 1. Графическое представление итерационной процедуры построения иерархической решетки при $m = 3$, $n = 4$

Вводя среднее координационное число узла в бесконечной решетке, $\overline{z} \equiv \lim_{k\to\infty}(2B^k/N_k)$, имеем согласно (1)

$$\overline{z} = 2\frac{B-1}{B-n}, \tag{2}$$

так что $\overline{z}$ может меняться от 2 (при $m \to \infty$) до 4 (при $m = 2$, $n \to \infty$). На k-м шаге наибольшее расстояние между узлами решетки равно m^k, так что $N_k \propto (m^k)^d$ при $k \to \infty$, где

$$d = \frac{\ln B}{\ln m}$$

— фрактальная размерность решетки. Очевидно, $1 < d < \infty$.

Если рассматривать $\overline{z}$ и d как независимые параметры решетки, из условий $m \geq 2$, $n \geq 2$ следует, что $\overline{z}$ меняется в интервале

$$2 < \overline{z} < 4(1 - 2^{-d}). \tag{3}$$

Рассмотрим распределение координационных чисел узлов решетки. Координационные числа принимают значения $z_k = 2n^k$, и число таких узлов в решетке уровня l равно

$$s_k = (B-n)B^{l-k-1}, \quad 0 \leq k \leq l-1.$$

Кроме того, два базисных узла имеют координационные числа $z_l = n^l$, так что $s_l = 2$. Нетрудно убедиться, что $\sum\limits_{k=0}^{l} s_k = N_l$ и $\sum\limits_{k=0}^{l} s_k z_k = 2B_l$. Для функции распределения координационных чисел бесконечной решетки получаем

$$W(z) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \frac{s_k}{N_l}\delta(z - z_k) = \frac{B-1}{B}\left(\frac{2}{z}\right)^{\frac{d}{d-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(z - 2n^k).$$

Таким образом, $W(z)$ имеет степенную зависимость с показателем большим единицы. Аналогичные распределения, но с более плотной последовательностью z_k ($z_k = k$), используются при моделировании «безмасштабных» (scale-free) случайных графов [26, 27]. Модель Поттса с $q \geq 1$ на таких графах имеет переход второго рода с эффективно-полевыми особенностями, если показатель в $W(z)$ меньше 3 [26], что связано с расходимостью момента $\langle z^3 \rangle$. В нашем случае расходятся все моменты $\langle z^r \rangle$ с $r \geq d/(d-1)$, а при меньших r

$$\langle z^r \rangle = 2^r \frac{B-1}{B-n^r}.$$

Однако, как будет показано ниже, переход на рассматриваемых иерархических решетках всегда является переходом второго рода со скейлинговыми аномалиями и свойства $W(z)$ влияют лишь на значения критических индексов.

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ И КОРРЕЛЯЦИИ В МОДЕЛИ ПОТТСА

Статистическую сумму модели Поттса с q-состояниями на рассматриваемых решетках можно получить, приведя каждой связи в соответствие множитель

$$Z_0(\sigma, \sigma') = \exp\left[K\delta_{\sigma,\sigma'} + \frac{h}{2}(\delta_{\sigma,1} + \delta_{\sigma',1})\right] \tag{4}$$

(σ, σ' — поттсовские спины на соединяемых узлах, $K = J/T$, h — внешнее поле) и просуммировав получающееся выражение по значениям поттсовских спинов $\sigma = \{1, 2, \ldots, q\}$. Если ввести частичные статистические суммы для решеток уровня l, $Z_l(\sigma, \sigma')$, просуммированные по всем спинам, кроме σ, σ', находящихся в базовых (затравочных) узлах, то для них можно получить рекуррентные соотношения [1–3] вида

$$Z_{l+1}(\sigma, \sigma') = \left[\left(\hat{Z}_l\right)^m_{\sigma,\sigma'}\right]^n \times \exp\frac{h}{2}(1-n)(\delta_{\sigma,1} + \delta_{\sigma',1}), \tag{5}$$

т. е. частичная сумма следующего уровня получается возведением матрицы $Z_l(\sigma, \sigma')$ в степень m и последующим возведением в степень n каждого элемента полученной матрицы. Экспоненциальный множитель в (5) убирает лишние степени $\exp(h/2)(\delta_{\sigma,1} + \delta_{\sigma',1})$. С помощью формул (4) и (5) можно найти статистическую сумму в термодинамическом пределе $l \to \infty$.

Из формул (4) и (5) следует, что $Z_l(\sigma, \sigma')$ можно представить в виде

$$Z_l(\sigma,\sigma') = a_{1l}\delta_{\sigma,1}\delta_{\sigma',1} + a_{2l}\frac{(1-\delta_{\sigma,1})(1-\delta_{\sigma',1})}{q-1} + \\ + b_l(\delta_{\sigma,1} + \delta_{\sigma',1} + \delta_{\sigma,1}\delta_{\sigma',1}) + \\ + c_l\left[\delta_{\sigma,\sigma'} - \delta_{\sigma,1}\delta_{\sigma',1} - \frac{(1-\delta_{\sigma,1})(1-\delta_{\sigma',1})}{q-1}\right]. \quad (6)$$

Из равенства (6) получаем, что матрица $Z_l(\sigma, \sigma')$ имеет два невырожденных собственных значения

$$\lambda_{\pm l} = \frac{1}{2}(a_{1,l}+a_{2,l}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a_{1,l}-a_{2,l})^2+(q-1)b_l^2} \quad (7)$$

и еще одно c_l с кратностью $q-2$. С помощью формулы (7) преобразование коэффициентов в представлении (6) при возведении матрицы $Z_l(\sigma, \sigma')$ в степень m можно представить в виде

$$\begin{aligned} a'_{1l} &= \frac{1}{2}(\lambda_{+l}^m + \lambda_{-l}^m) + \frac{\zeta_1}{2}(a_{1l} - a_{2l}), \\ a'_{2l} &= \frac{1}{2}(\lambda_{+l}^m + \lambda_{-l}^m) - \frac{\zeta_1}{2}(a_{1l} - a_{2l}), \\ b'_l &= \zeta_l b_l, \quad c'_l = c_l^m, \quad \zeta_l \equiv \frac{\lambda_{+l}^m - \lambda_{-l}^m}{\lambda_{+l} - \lambda_{-l}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда рекуррентные соотношения для коэффициентов, соответствующие равенству (5), имеют вид

$$\begin{aligned} a_{1,l+1} &= e^{-h(n-1)}(a'_{1l})^n, \quad b_{l+1} = e^{-h(n-1)/2}(b'_l)^n, \\ a_{2,l+1} &= \left(\frac{a'_{2l}+(q-2)c'_l}{q-1}\right)^n + (q-2)\left(\frac{a'_{2l}-c'_l}{q-1}\right)^n, \\ c_{l+1} &= \left(\frac{a'_{2l}+(q-2)c'_l}{q-1}\right)^n - \left(\frac{a'_{2l}-c'_l}{q-1}\right)^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно формуле (4), начальными условиями для этих соотношений являются равенства

$$\begin{aligned} a_{1,0} &= e^{K+h}, \quad a_{2,0} = e^K + q - 2, \\ b_0 &= e^{h/2}, \quad c_0 = e^K - 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Решения системы (8), (9) позволяют найти статистические суммы модели Поттса с различными граничными условиями на базовых узлах решетки. Так, для свободных граничных условий, добавляя недостающие поля $h/2$ к базовым узлам, получим

$$Z_l^{(f)} = \sum_{\sigma,\sigma'} e^{h(\sigma+\sigma')/2} Z_l(\sigma,\sigma') = \\ = e^h a_{1l} + (q-1)(a_{2l} + 2e^{h/2}b_l). \quad (11)$$

В случае периодических граничных условий с отождествлением базовых узлов имеем

$$Z_l^{(p)} = \sum_\sigma Z_l(\sigma,\sigma) = a_{1l} + a_{2l} + (q-2)c_l. \quad (12)$$

Наконец, для граничных условий с фиксированным спином $\sigma = 1$ на базовых узлах

$$Z_l^{(1)} = Z_l(1,1) = a_{1l}. \quad (13)$$

В отсутствие дальнего порядка все эти статистические суммы должны давать в термодинамическом пределе одно и то же значение плотности термодинамического потенциала. При $h \neq 0$ вычисление их является весьма сложной задачей, однако потенциал и его производные по полю могут быть получены аналитическими методами при $h = 0$ в окрестности точки перехода. Этого достаточно для определения рода перехода и критических индексов.

В этом разделе мы приведем выражение для термодинамического потенциала в нулевом поле. В этом случае из формул (8), (9) следует

$$a_{1l} = b_l + c_l, \quad a_{2l} = a_{1l} + (q-2)c_l,$$

так что в нулевом поле есть только два независимых коэффициента. Вводя величину

$$K_l \equiv \ln\frac{a_{1l}}{b_l},$$

получаем известное соотношение [30]

$$\begin{aligned} e^{K_{l+1}} &= f(e^{K_l}), \\ f(x) &\equiv \left[1 + \frac{q(x-1)^m}{(x-1+q)^m - (x-1)^m}\right]^n. \end{aligned} \quad (14)$$

Второе рекуррентное соотношение при $h = 0$ имеет вид

$$b_{l+1} = g_{l+1}b_l^B, \quad g_l \equiv \frac{(e^{K_{l-1}} - 1)^B}{(e^{K_l/n} - 1)^n}. \quad (15)$$

Из равенства (15) и определения K_l получается следующее выражение для плотности термодинамического потенциала:

$$F = -T\lim_{l\to\infty} N_l^{-1}\ln Z_l^{(f)} = -\frac{\overline{z}}{2}T\sum_{k=1}^\infty B^{-k}\ln g_k. \quad (16)$$

При выводе формулы (16) использовалось то, что $K_l B^{-l} \to 0$ при $l \to \infty$.

Соотношения (14) имеют одну стационарную точку $K = K_c$,

$$e^{K_c} = f(e^{K_c}), \quad (17)$$

соответствующую точке перехода. При $K > K_c$ величина $K_l \to \infty$, а при $K < K_c$ получаем $K_l \to 0$. Если же $|K - K_c| \ll K_c$, то при достаточно малых l величина K_l меняется медленно,

$$e^{K_l - K_c} \approx 1 + \kappa^l (K - K_c), \qquad (18)$$

$$\kappa \equiv f'(e^{K_c}) = \\ = B \frac{\left(e^{K_c} - e^{K_c/n}\right)\left(e^{K_c/n} + q - 1\right)}{(e^{K_c} - 1)(e^{K_c} + q - 1)} < B, \qquad (19)$$

пока не станет много больше или много меньше K_c. Условие применимости формулы (18) можно представить как

$$l < l_c \equiv \ln \frac{\text{const}}{|K - K_c| \ln \kappa}, \qquad (20)$$

где константа определяется из (18) условием $K_{l_c} \sim K_c$ при $K < K_c$ и условием $K_{l_c} \gg K_c$ при $K > K_c$.

При $l > l_c$ из формулы (14) следует

$$\begin{gathered} K_{l+1} \approx nq \left(\frac{K_l}{q}\right)^m, \\ K_l \approx q n^{-1/(m-1)} \left(\frac{K_{l_c} n^{1/(m-1)}}{q}\right)^{m^{l-l_c}}, \\ K < K_c, \\ \exp K_{l+1} \approx \left(\frac{\exp K_l}{m}\right)^n, \\ \exp K_l \approx m^{n/(n-1)} \left(m^{-n/(n-1)} \exp K_{l_c}\right)^{n^{l-l_c}}, \\ K > K_c. \end{gathered} \qquad (21)$$

Пользуясь формулами (18)–(21), нетрудно установить, что в окрестности перехода потенциал F (16) имеет сингулярную часть, пропорциональную $B^{-l_c} \propto |K - K_c|^{2-\alpha}$, где критический индекс теплоемкости

$$\alpha = 2 - \frac{\ln B}{\ln \kappa}. \qquad (22)$$

Так, при $K > K_c$ и $|K - K_c| \sim K_c$, полагая в (16)

$$g_k \approx \begin{cases} g_c \equiv (e^{K_c} - 1)^B / (e^{K_c/n} - 1)^n, & l < l_c, \\ g_\infty \equiv (q^{m-1}/n)^n, & l > l_c, \end{cases}$$

получим

$$F \approx -\frac{\overline{z}}{2(B-1)} T \left[g_c + B^{-l_c}(g_\infty - g_c)\right].$$

Несложно также найти при $h = 0$ корреляционную функцию

$$G = \langle \delta_{\sigma,1} \delta_{\sigma',1} \rangle - \langle \delta_{\sigma,1} \rangle \langle \delta_{\sigma',1} \rangle$$

для базисных спинов σ, σ'. На решетке уровня l имеем

$$G_l = \frac{Z_l(1,1)}{Z_l^f} - \left(\frac{\sum_\sigma Z_l(\sigma,1)}{Z_l^f}\right)^2 = \frac{q-1}{q^2} \, \frac{e^{K_l}-1}{e^{K_l}+q-1}.$$

При $K < K_c$, $l > l_c$ из первого уравнения (21) получаем

$$G_l \approx \frac{K_l}{q^3} \approx q^{-2} n^{-1/(m-1)} \left(\frac{K_{l_c} n^{1/(m-1)}}{q}\right)^{m^{l-l_c}} \sim \\ \sim \exp\left(-\frac{m^l}{\xi}\right),$$

где радиус корреляций

$$\xi \sim m^{l_c} \sim (K_c - K)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{\ln m}{\ln \kappa}. \qquad (23)$$

Критический индекс радиуса корреляций ν удовлетворяет скейлинговому соотношению

$$d\nu = 2 - \alpha.$$

При $K > K_c$ экспоненциальное убывание корреляций уже не имеет места, из второго соотношения в (21) следует, что G_l стремится к константе,

$$G_l \approx \frac{q-1}{q^2} + A \exp\left(-\text{const} \cdot n^{l-l_c}\right),$$

однако и в этом случае характерный размер изменения G_l пропорционален m^{l_c}, так как $n^{l-l_c} = (m^l/m^{l_c})^{d-1}$.

Таким образом, на рассматриваемых решетках модель Поттса всегда имеет в точке перехода степенные особенности теплоемкости и радиуса корреляций с индексами, удовлетворяющими обычному скейлинговому соотношению. В следующем разделе рассмотрим критические аномалии параметра порядка и соответствующей восприимчивости.

3. ПАРАМЕТР ПОРЯДКА И КРИТИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Выражение для спонтанного параметра порядка модели Поттса имеет в нашем случае вид

$$\mu = \lim_{l \to \infty} \frac{q N_l^{-1} \sum_{i=1}^{N_l - 1} \langle \delta_{\sigma_i,1} \rangle - 1}{q - 1}, \qquad (24)$$

где под $\langle \delta_{\sigma,1} \rangle$ понимается среднее с граничными условиями $\sigma = 1$ на базовых узлах, т. е.

$$\sum_{i=1}^{N_l-1} \langle \delta_{\sigma_i,1} \rangle = \frac{1}{Z_l^{(1)}} \left. \frac{\partial Z_l^{(1)}}{\partial h} \right|_{h=0} \equiv \frac{\dot{Z}_l^{(1)}}{Z_l^{(1)}}. \qquad (25)$$

Лишь использование таких нарушающих симметрию граничных условий позволяет получить ненулевое значение μ при $K > K_c$ и $h = 0$. Действительно, в отсутствие поля в случае свободных или периодических граничных условий $\langle \delta_{\sigma_i,1} \rangle = 1/q$ в силу симметрии относительно перестановок значений σ. Отсюда, в частности, следует

$$\dot{Z}_l^{(f)} = \frac{N_l Z_l^{(f)}}{q}, \quad \dot{Z}_l^{(p)} = \frac{(N_l - 1) Z_l^{(p)}}{q}.$$

Подставляя сюда формулы (11), (12), получим

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_{+l} &= \frac{(N_l - 1)\lambda_{+l}}{q}, \\ \dot{\lambda}_{-l} + (q-2)\dot{c}_l &= \frac{(N_l - 1)(q-1)\lambda_{-l}}{q}, \end{aligned} \qquad (26)$$

где $\dot{\lambda}_{\pm l}$ — производные по полю при $h = 0$ от собственных значений (7),

$$\dot{\lambda}_{\pm l} = \frac{1}{2}(\dot{a}_{1l} + \dot{a}_{2l}) \pm \frac{1}{2q}\left[(2-q)(\dot{a}_{1l} - \dot{a}_{2l}) + 2(q-1)\dot{b}_l\right].$$

Из формул (13), (24)–(26) следует

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{l\to\infty} \frac{q N_l^{-1} \varphi_{+l} + q - 2}{2(q-1)}, \\ \varphi_{+l} &= \frac{\dot{a}_{1l} - \dot{a}_{2l} - (q-2)\dot{c}_l}{a_{1l}}. \end{aligned} \qquad (27)$$

Введем еще одну комбинацию производных, линейно не зависимую с φ_{+l} и с комбинациями в левой части равенств (26),

$$\varphi_{-l} = \frac{\dot{a}_{1l} - \dot{a}_{2l} + q\dot{c}_l}{a_{1l}}.$$

Тогда, дифференцируя по h (9) и используя формулу (26), получим рекуррентные соотношения для вектора $\boldsymbol{\varphi_l} = (\varphi_{+l}, \varphi_{-l})$ следующего вида:

$$\boldsymbol{\varphi}_l = \hat{T}_l \boldsymbol{\varphi}_{l-1} + \mathbf{u}_l, \qquad (28)$$

где

$$\begin{aligned} u_{+l} = \frac{q-2}{q^2} n (N_{l-1} - 1) \big[(q-2)(m - e_l) - \\ - 2(q-1)(m-1)e^{-K_l/n}\big] - n + 1, \end{aligned} \qquad (29)$$

$$u_{-l} = (N_l - 1)\left(1 - \frac{e_l'}{e_l}\right) + \frac{e_l'}{e_l} u_{+l}, \qquad (30)$$

$$\hat{T}_l = \frac{n}{q} \times \times \begin{pmatrix} e_l\,[2 + (q-2)m\vartheta_l] & e_l(q-2)(1 - m\vartheta_l) \\ 2e_l'(1 - m\vartheta_l) & e_l'(q - 2 + 2m\vartheta_l) \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} e_l &\equiv \exp\left(K_{l-1} - \frac{K_l}{n}\right), \\ e_l' &\equiv \exp(K_{l-1} - K_l), \\ \vartheta_l &\equiv \left[\exp\left(\frac{K_l}{n}\right) - 1\right] / \left[\exp(K_{l-1}) - 1\right]. \end{aligned} \qquad (32)$$

Решение системы (28) имеет вид

$$\varphi_l = \hat{T}_l \hat{T}_{l-1} \ldots \hat{T}_1 \varphi_0 + \sum_{k=1}^{l-1} \hat{T}_l \hat{T}_{l-1} \ldots \hat{T}_{k+1} \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_l, \qquad (33)$$

где $\varphi_0 = (1, 1)$.

Рассмотрим асимптотику φ_l при $l \to \infty$ в окрестности перехода. В этом случае $\hat{T}_l$ можно приближенно представить в виде

$$\hat{T}_l \approx \begin{cases} \hat{T}_c \equiv \lim_{K_l \to K_c} \hat{T}_l, & l < l_c, \\ \hat{T}_\infty \equiv \lim_{l\to\infty} \hat{T}_l, & l > l_c. \end{cases} \qquad (34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_l &\approx \hat{T}_\infty^{l-l_c} \hat{T}_c^{l_c} \left[\varphi_0 + \sum_{k=1}^{l_c} \left(B\hat{T}_c^{-1}\right)^k \mathbf{u}_c\right] + \\ &+ \sum_{k=l_c+1}^{l} B^k \hat{T}_\infty^{l-k} \mathbf{u}_\infty = \\ &= \hat{T}_\infty^{l-l_c} \hat{T}_c^{l_c} (\varphi_0 - \varphi_c) + B^{l_c} \hat{T}_\infty^{l-l_c} \varphi_c + \\ &+ B^l \left[\hat{I} - \left(B^{-1}\hat{T}_\infty\right)^{l-l_c}\right] \varphi_\infty. \end{aligned} \qquad (35)$$

Здесь

$$\mathbf{u}_c = \lim_{l\to\infty} \lim_{K_l \to K_c} \mathbf{u}_l B^{-l}, \quad \mathbf{u}_\infty = \lim_{l\to\infty} \mathbf{u}_l B^{-l},$$

$$\varphi_c \equiv \left(\hat{I} - B^{-1}\hat{T}_c\right)^{-1} \mathbf{u}_c, \quad \varphi_\infty \equiv \left(\hat{I} - B^{-l}\hat{T}_\infty\right)^{-1} \mathbf{u}_\infty.$$

Из формул (29)–(32) следует

$$\hat{T}_c = \frac{n}{q} \times \times \begin{pmatrix} e_c\,[2 + (q-2)m\vartheta_c] & e_c(q-2)(1 - m\vartheta_c) \\ 2(1 - m\vartheta_c) & (q - 2 + 2m\vartheta_c) \end{pmatrix}, \qquad (36)$$

$$e_c = \exp\left[K_c \frac{n-1}{n}\right],$$

$$\vartheta_c = \left[\exp\left(\frac{K_c}{n}\right) - 1\right] / \left[\exp(K_c) - 1\right],$$

$$\begin{aligned} \varphi_{c+} &= -\frac{2}{\bar{z}}\frac{q-2}{q}, \\ \varphi_{c-} &= -\frac{2}{\bar{z}}\left(1 - 2e^{-K_c}\frac{q-1}{q}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Важным для дальнейшего является то обстоятельство, что собственные значения $\hat{T}_c$ (36) действительны и меньше B при всех $m \geq 2$, $n \geq 2$, $q > 0$. В самом деле, наибольшее собственное значение $\hat{T}_c$ можно представить как

$$\begin{aligned} &\frac{2\lambda_{max}}{n} = m + \varepsilon - \rho + \sqrt{(m+\varepsilon-\rho)^2 - 4m\varepsilon}, \\ &\varepsilon \equiv e_c\vartheta_c < 1, \\ &\rho \equiv \frac{2}{q}(1-\varepsilon)\left[me^{K_c/n} - e^{K_c} + \frac{q-2}{2}(m-1)\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

Используя уравнение для K_c (17), можно показать, что $0 < \rho < (m-1)(1-\varepsilon)$ при всех $m \geq 2$, $n \geq 2$, $q > 0$, что и обеспечивает действительность собственных значений $\hat{T}_c$ и неравенство $\lambda_{max} < B$.

Выражения для $\hat{T}_\infty$, $\mathbf{u}_\infty$ различаются в упорядоченной и неупорядоченной фазах. Так, при $K < K_c$ из формул (21), (31), (32), (34) следует

$$\hat{T}_\infty = \frac{n}{q}\begin{pmatrix} 2 & q-2 \\ 2 & q-2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_\infty = -\frac{q-2}{q}\,\frac{m-1}{m}\,\frac{2}{\bar{z}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку собственные значения матриц $\hat{T}_\infty$ (0 и n) и $\hat{T}_c$ меньше B, из (35) получаем при $l \to \infty$

$$\varphi_l \approx B^l\varphi_\infty \approx -\frac{q-2}{q}N_l\varphi_0,$$

так что параметр порядка μ (27) равен нулю в неупорядоченной фазе.

При $K > K_c$

$$\hat{T}_\infty = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

так что член с $\mathbf{u}_\infty(\varphi_\infty)$ в (35) обращается в нуль, и мы имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{+l} &= B^{l-l_c}e_+\hat{T}_c^{l_c}(\varphi_0 - \varphi_c) + B^l\varphi_{c+} \approx \\ &\approx N_l\left[\text{const}\left(\frac{\lambda_{max}}{B}\right)^{l_c} - \frac{q-2}{q}\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, параметр порядка μ в (27)

$$\begin{aligned} &\mu \sim \left(\frac{\lambda_{max}}{B}\right)^{l_c} \sim (K-K_c)^\beta, \\ &\beta = \frac{\ln(B/\lambda_{max})}{\ln\kappa} > 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Рассмотрим поведение критической восприимчивости в окрестности перехода при $h = 0$:

$$\begin{aligned} \chi &\equiv \lim_{l\to\infty} N_l^{-1}\left[\frac{\ddot{Z}_l^{(f)}}{Z_l^{(f)}} - \left(\frac{\dot{Z}_l^{(f)}}{Z_l^{(f)}}\right)^2\right] = \\ &= \lim_{l\to\infty}\left(N_l^{-1}\psi_{+l} - \frac{N_l}{q^2}\right) + \frac{2}{q}. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (26) и ввели величину

$$\psi_{+l} = \left[\ddot{a}_{1l} + (q-1)\left(\ddot{a}_{2l} + 2\ddot{b}_l\right)\right]/q\lambda_{+l}.$$

Вводя еще одну линейную комбинацию вторых производных

$$\psi_{-l} = \left[(q-1)\left(\ddot{a}_{1l} - 2\ddot{b}_l\right) + \ddot{a}_{2l} + q(q-2)\ddot{c}_l\right]/q\lambda_{-l}$$

и дважды дифференцируя по h уравнения (9), получим уравнения для вектора $\boldsymbol{\psi}_l = (\psi_{+l}, \psi_{-l})$

$$\boldsymbol{\psi}_l = \hat{P}_l\boldsymbol{\psi}_{l-1} + \mathbf{v}_l, \tag{41}$$

где

$$\hat{P}_l = B\begin{pmatrix} x_l & (1-x_l)/(q-1) \\ (q-1)y_l & 1-y_l \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} x_l &= (e^{K_l/n} + q - 1)\frac{e^{K_l(n-1)/n} + q - 1}{e^{K_l} + q - 1}, \\ y_l &= (e^{K_l/n} + q - 1)\frac{e^{K_l(n-1)/n} - 1}{e^{K_l} - 1}, \end{aligned}$$

а $\mathbf{v}_l$ при $|K - K_c| \sim K_c$ и больших l имеет вид

$$\mathbf{v}_l = \frac{B-1}{B}\frac{N_l^2}{q^2}\begin{pmatrix} 1 \\ q-1 \end{pmatrix} + \mathbf{c}\lambda_{max}^{2l} + O(N_l). \tag{43}$$

Матрица $\hat{P}_l$ имеет собственные значения B и $B(x_l - y_l) < B$, причем пропорциональное N_l^2 слагаемое в $\mathbf{v}_l$ является правым собственным вектором всех матриц $\hat{P}_l$, соответствующим собственному значению B. Пользуясь последним обстоятельством и приближением $\hat{P}_l$, аналогичным (34), получим из (40)–(43) в окрестности перехода

$$\begin{aligned} &\chi \sim \left(\frac{\lambda_{max}^2}{B}\right)^{l_c} \sim |K-K_c|^{-\gamma}, \\ &\gamma = \frac{2\ln\lambda_{max} - \ln B}{\ln\kappa}. \end{aligned} \tag{44}$$

Очевидно, имеет место обычное скейлинговое соотношение

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2.$$

Таким образом, модель Поттса на рассматриваемых решетках всегда испытывает переход второго рода со степенными аномалиями термодинамических параметров.

4. КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Рассмотрим значения критических индексов в зависимости от параметров решеток и числа состояний q. Неравенства $\kappa < B$, $\lambda_{max} < B$ (см. (19), (38)) и скейлинговые соотношения приводят к следующим ограничениям для индексов (22), (23), (39), (44):

$$\nu > 1/d, \quad \alpha < 1, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 1.$$

При $q \to \infty$ индексы стремятся к предельным значениям в этих неравенствах. Действительно, при $q \gg 1$ из (17), (19), (38) следует $K_c \approx 2/\overline{z}\ln q$, $\kappa \approx B$, $\lambda_{max} \approx B\varepsilon$, так что

$$\nu \approx 1/d, \quad \alpha \approx 1, \quad \beta \approx 1/q^{2/\overline{z}n}\ln B, \quad \gamma \approx 1.$$

Простые выражения для индексов можно получить при $n \to \infty$ ($d \to \infty$), когда $K_c \approx qn^{-1/(m-1)}$, $\kappa \approx m$, $\lambda_{max} \approx n$ и

$$\nu \approx 1, \quad \alpha \approx 2 - d, \quad \beta \approx 1, \quad \gamma \approx d - 2,$$

а также при $m \to \infty$ ($d \to 1$), когда $K_c \approx n\ln m/(n-1)$, $\kappa \approx n$, $\rho \approx qm^{(n-3)/(n-1)}/6$, $\lambda_{max} \approx B(1-\rho/m)$, так что

$$\nu \approx \frac{1}{d-1}, \quad \alpha \approx \frac{d-2}{d-1}, \quad \beta \approx \frac{q}{6m^{2/(n-1)}\ln n},$$

$$\gamma \approx \frac{d}{d-1}.$$

Отметим, что в этих предельных случаях лишь индекс β зависит от q, и то только, если он мал. В общем же случае, если рассматривать индексы как функции наблюдаемых параметров реальных фракталов $(d, \overline{z})$, их значения будут мало зависеть от среднего координационного числа при $2.5 < \overline{z} < 4$. На рис. 2 приведены зависимости индексов от фрактальной размерности d в физически реализуемом интервале $1.5 < d < 3$ при различных q и $\overline{z} = 2.5$. Индексы при $q = 1$ описывают критические аномалии у порога перколяции по связям, случайно разбросанным в рассматриваемых решетках с вероятностью $p = 1 - e^{-K}$ [31]. Уравнение для порога перколяции $p_c = 1 - e^{-K_c}$ следует из (17):

$$p_c = 1 - (1 - p_c^m)^n.$$

Следует отметить, что при всем разнообразии критических индексов модели Поттса на фракталах, которое иллюстрирует рис. 2, в реальных ситуациях индексы подчиняются определенным закономерностям. Так, индекс теплоемкости α, как правило, отрицателен, индекс восприимчивости аномально велик ($\gamma \geq 1.7$), индекс радиуса корреляций ν обнаруживает монотонное убывание с ростом фрактальной размерности d, тогда как индекс β монотонно растет. Отметим также их монотонную зависимость от q (исключение составляет индекс β). Возможно, что эти свойства критических индексов сохранятся и в других спиновых моделях на фрактальных решетках при достаточно малых d.

Отметим также, что численные значения индексов α и β при $m = 2$ и некоторых n и q уже были вычислены ранее [16]. Полученные в настоящей работе аналитические выражения для индексов α (22) и β (39) дают такие же значения в пределах точности вычислений.

5. О КРИТЕРИИ ТРАНСФОРМАЦИИ РОДА ПЕРЕХОДА

Рассматривая иерархические решетки как модели таких неоднородных систем, как перколяционные кластеры в разбавленных кристаллах или вещества, заключенные в пористые матрицы, можно сделать некоторые заключения о том, какие геометрические характеристики реальных неоднородных сред определяют трансформацию рода перехода в них. Действительно, это явление оказывается никак не зависящим от фрактальной размерности рассмотренных решеток, при всех $1 < d < \infty$ имеет место переход второго рода. Можно предположить, что обстоятельством, определяющим наличие перехода второго рода, является малость среднего числа ближайших соседей в этих решетках, $\overline{z} < 4$. В случае разбавленных моделей на двумерных (квадратных) решетках ситуация вполне аналогична: разбавление приводит в них к выполнению неравенства $\overline{z} < 4$, оставляя размерность наибольшего кластера $d = 2$ вплоть до порога перколяции [6]. В результате любая малая концентрация примесей приводит к превращению перехода первого рода в переход второго рода [10, 11, 32]. В то же время в модели неупорядоченной среды с $\overline{z} \geq 4$ переход первого рода сглаживается, но не превращается в переход второго рода [25].

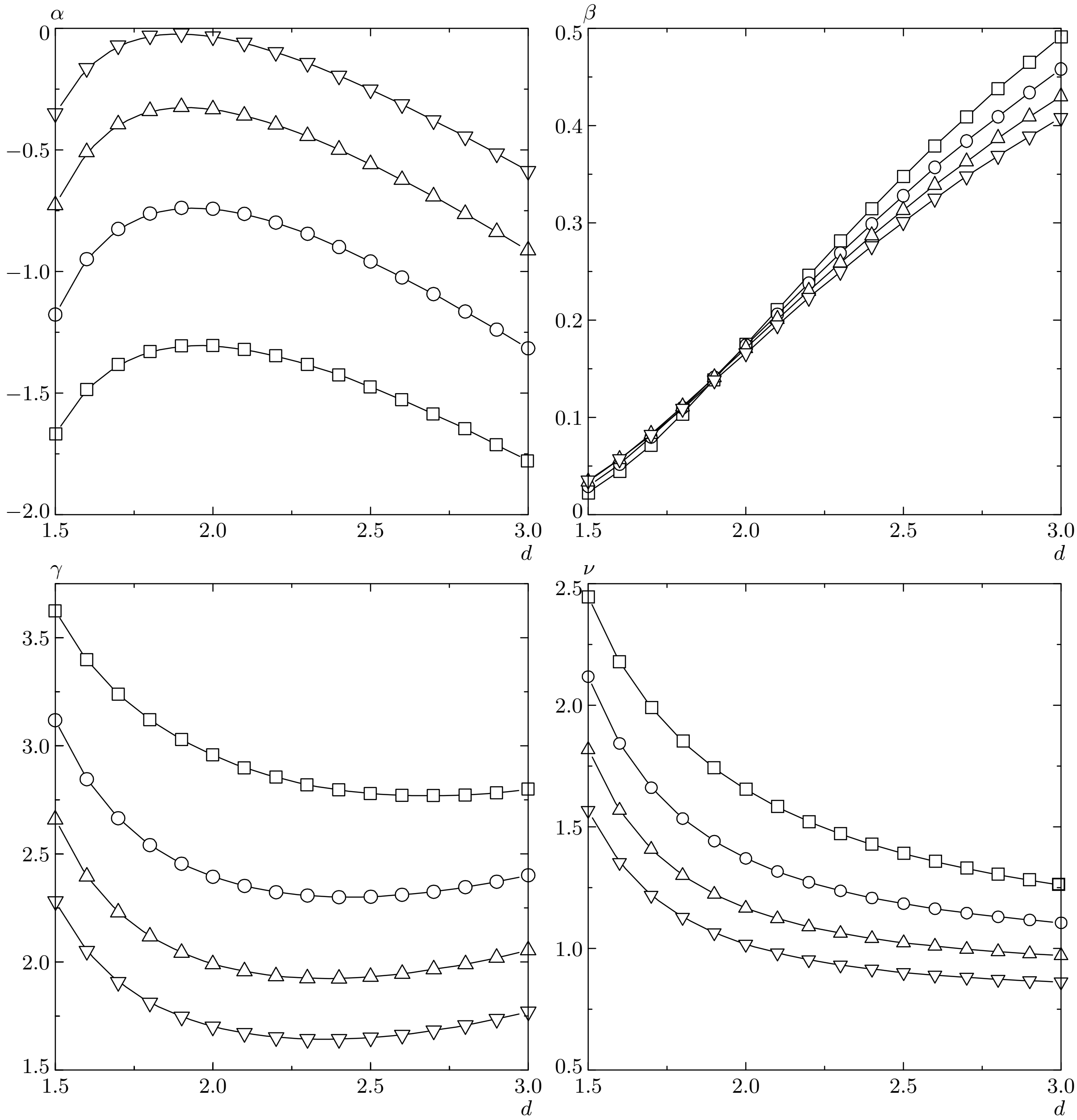

Рис. 2. Зависимости критических индексов модели Поттса на иерархических решетках с $\overline{z} = 2.5$ от фрактальной размерности d: □ — $q = 1$, ○ — $q = 2$, △ — $q = 4$, ▽ — $q = 8$

По-видимому, условие для среднего координационного числа $\overline{z} < 4$ может быть критерием трансформации перехода первого рода в переход второго рода в довольно широком классе неоднородных систем с близкодействием. В частности, для разбавленных моделей на простой кубической решетке ($z = 6$) с концентрацией вакансий $1-x$ среднее координационное число в самом большом кластере можно грубо оценить как $\overline{z} = 6x$, так что из условия $\overline{z} < 4$ следует, что переход второго рода должен иметь место при $x < 2/3$. Эта оценка близка к результатам численных расчетов $x < 0.7 \pm 0.05$ [12, 13].

Качественно наличие порога среднего координационного числа для индуцированного перехода второго рода можно объяснить тем, что в случае малой связности (малого $\overline{z}$) в неоднородной решетке отсутствуют макроскопические области с максимальными координационными числами, что делает энергетически невыгодным образование макроскопических областей упорядоченной фазы при приближении к точке перехода. В этом случае вместо образования упорядоченных областей возможен лишь рост корреляций флуктуаций параметра порядка, характерный для переходов второго рода и приводящий к сингулярностям термодинамических параметров. Напротив, в структурах с большими $\overline{z}$ может реализоваться феноменологический сценарий работы [17], предполагающий образование и рост числа и объемов макроскопических областей упорядоченной фазы. При этом и в упорядоченных, и в неупорядоченных областях радиус корреляций флуктуаций параметра порядка остается конечным и сингулярности второго рода отсутствуют, хотя скачки первого рода могут полностью исчезнуть при достаточно больших неоднородностях [25].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты могут быть использованы для описания критических аномалий при фазовых переходах, описываемых моделью Поттса, в перколяционных кластерах разбавленных кристаллов, или в веществах, заключенных в пористые матрицы, имеющие фрактальные геометрические свойства, сходные со свойствами рассмотренных иерархических решеток. Такая возможность представляется тем более обоснованной, что при не слишком больших $q \leq 10$ индекс теплоемкости $\alpha < 0$, что соответствует точному неравенству для случайных неоднородных систем [33]. Полученные аналитические выражения для критических индексов делают вполне реализуемой процедуру сравнения теории и эксперимента (подбора подходящих значений m и n или d и $\overline{z}$).

При этом то обстоятельство, что значения индексов определяются в основном фрактальной размерностью и слабо зависят от $\overline{z}$ при $2.5 < \overline{z} < 4$, позволяет объяснить малые изменения индексов в разбавленных кристаллах при изменении концентрации примесей [10–13]. Действительно, фрактальная размерность перколяционных кластеров, в которых происходит индуцированный неоднородностями переход второго рода в таких кристаллах, практически не меняется вплоть до порога перколяции [6], так что изменения индексов связаны лишь с их слабой зависимостью от среднего координационного числа. В то же время более существенные изменения индексов можно ожидать при внедрении вещества, испытывающего переход, в пористую матрицу, так как фрактальная размерность пористой среды может меняться в довольно широких пределах [6].

К сожалению, в настоящее время сравнение полученных индексов с экспериментальными значениями невозможно из-за отсутствия детальных данных по критическим аномалиям при индуцированных неоднородностями переходах второго рода. Во многом это связано с тем обстоятельством, что лишь недавние теоретические работы [10–15] установили закономерность этого явления. Между тем издавна известны многочисленные примеры экспериментов, обнаруживающих переходы второго рода в кристаллах в тех случаях, когда, согласно теории фазовых переходов Ландау, они должны быть переходами первого рода [24]. В свете работ [10–15] такие экспериментальные данные являются не курьезом, а результатом присутствия в кристаллах заметных концентраций примесей и дефектов. Характерными примерами являются кристаллы Nb_3Sn и V_3Si [34], в которых отличие сегнетоэластических переходов от переходов второго рода было обнаружено лишь на образцах достаточно хорошего качества [35].

В заключение следует отметить, что, вероятно, индуцированные неоднородностью переходы второго рода не являются специфическим свойством модели Поттса, исследованной в работах [10–16] и настоящей работе. Естественно предположить, что это явление свойственно всем переходам первого рода в подгруппу симметричной фазы, которые в идеальных кристаллах описываются потенциалом Ландау с кубическим инвариантом от компонент параметра порядка [24]. Однако в настоящее время нет ни экспериментальных, ни теоретических свидетельств того, что это явление может иметь место при отсутствии соотношения группа – подгруппа между симметриями неупорядоченной и упорядоченной фаз, то есть при так называемых реконструктивных переходах первого рода [24]. По-видимому, в этом случае возникновение сингулярностей второго рода под влиянием структурных неоднородностей невозможно.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 2001-0826) и РФФИ (грант № 04-02-16228). Автор весьма признателен В. П. Сахненко, В. И. Торгашеву, В. Б. Широкову, М. П. Ивлиеву и Е. И. Гутлянскому за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Мигдал, ЖЭТФ **69**, 1457 (1975).
2. L. P. Kadanoff, Ann. Phys. **100**, 359 (1976).
3. A. N. Berker and S. Ostlund, J. Phys. C **12**, 4961 (1979).
4. M. Kaufman, R. B. Griffiths, Phys. Rev. B **24**, 496 (1981).
5. R. B. Griffiths and M. Kaufman, Phys. Rev. B **26**, 5022 (1982).
6. J. Feder, *Fractals*, Plenum Press: New York, London (1988) [пер.: Е. Федер, *Фракталы*, Мир, Москва (1991)].
7. M. Kaufman and R. B. Griffiths, Phys. Rev. B **30**, 244 (1984).
8. Z. R. Yang, Phys. Rev. B **38**, 728 (1988).
9. R. Folk, Y. Holovatch, and T. Yavors'kii, E-print archives, cond-mat/0106468; Uspekhi Fiz. Nauk **173**, 175 (2003).
10. J. Cardy and J. L. Jacobsen, Phys. Rev. Lett. **79**, 4063 (1997).
11. B. Berche and C. Chatelain, Phys. Rev. Lett. **80**, 1670 (1998); E-print archives, cond-mat/0207421.
12. C. Chatelain, B. Berche, W. Janke, and P.-E. Berche, Phys. Rev. E **64**, 036120 (2001); W. Janke, P.-E. Berche, C. Chatelain, and B. Berche, E-print archives, cond-mat/0304642.
13. H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor, A. Munoz Sudupe, G. Parisi, and J. J. Ruiz-Lorenzo, Phys. Rev. B **61**, 3215 (2000).
14. K. Uzelac, A. Hasmy, and R. Jullien, Phys. Rev. Lett. **74**, 422 (1995).
15. K. Venul, V. S. S. Sastry, and K. P. N. Murthy, E-print archives, cond-mat/0106482.
16. L. da Silva, E. M. F. Curado, S. Coutinho, and W. A. M. Morgado, Phys. Rev. B **53**, 6345 (1992).
17. Y. Imry and M. Wortis, Phys. Rev. B **19**, 3580 (1979).
18. A. Golemme, S. Zumer, D. W. Allender, and J. W. Doane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2937 (1988).
19. G. S. Iannachione, G. P. Crawford, S. Zumer, J. W. Doane, and D. Finotello, Phys. Rev. Lett. **71**, 2595 (1993).
20. I. V. Golosovsky, I. Mirebeau, G. Andre, D. A. Kurdyukov, Yu. A. Kumzerov, and S. B. Vakhrushev, Phys. Rev. Lett. **86**, 5783 (2001).
21. Z. Kakol, R. Zalecky, K. Knight, J. Sabol, and J. M. Honig, J. Phys.: Condens. Matter **11**, 2749 (1999).
22. K. Knorr and A. Loidl, Phys. Rev. B **8**, 5387 (1985).
23. K. Knorr, A. Loidl, and J. K. Kjems, Phys. Rev. Lett. **55**, 2445 (1985).
24. J.-C. Toledano and P. Toledano, *The Landau Theory of Phase Transitions*, World Scientific, Singapore (1987), Chap. 4 [пер.: Ж.-К. Толедано, П. Толедано, *Теория Ландау фазовых переходов*, Мир, Москва (1994), гл. 4].
25. P. N. Timonin, Phys. Rev. B **69**, 092102 (2004); E-print archives, cond-mat/0308422.
26. S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, E-print archives, cond-mat/0310693.
27. F. Igloi and L. Turban, Phys. Rev. E **66**, 036140 (2002).
28. F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
29. T. Goto, Y. Nemoto, A. Ochiai, and T. Suzuki, Phys. Rev. B **59**, 269 (1999).
30. Y. Qin and Z. R. Yang, Phys. Rev. B **43**, 8576 (1991).
31. C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn, Physica **57**, 536 (1972).
32. M. Aizenmann and J. Wehr, Phys. Rev. Lett. **62**, 2503 (1989).
33. J. T. Chayes, L. Chayes, D. S. Fisher, and T. Spencer, Phys. Rev. Lett. **57**, 2999, (1986).
34. L. R. Testardi, Rev. Mod. Phys. **47**, 637 (1975).
35. B. S. Chandrasekhar, H. R. Ott, and B. Seeker, Sol. St. Comm. **39**, 1265 (1981).