ЖЭТФ, 2005, том 127, вып. 1, стр. 45–55


# МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СПАРИВАНИЯ ПРИ ОТТАЛКИВАНИИ

***В. И. Белявский**, *Ю. В. Копаев*****

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук*
*119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 8 сентября 2004 г.

При сверхпроводящем спаривании с большим импульсом и отталкивательном взаимодействии параметр порядка квазидвумерной электронной системы является знакопеременной функцией импульса относительного движения пары, обращаясь в нуль в точках на отрезках контура Ферми внутри каждой из эквивалентных областей кинематического ограничения. Сверхтекучая плотность пропорциональна площади такой области. При спаривающем взаимодействии отталкивания параметр порядка может быть описан двухкомпонентной комплексной функцией координат, являющейся решением системы двух дифференциальных уравнений Гинзбурга – Ландау. Найдены характерный размер пары, определяемый эффективной массой, а не скоростью электрона вблизи контура Ферми, а также глубина проникновения и корреляционный радиус флуктуаций параметра порядка, который образует несоизмеримые квазипериодические структуры, возникающие при длинноволновых флуктуациях фазы и соответствующие антиферромагнитно упорядоченным токовым циркуляциям. Рассмотренный канал спаривания качественно отражает особенности сверхпроводимости купратов.

PACS: 78.47.+p, 78.66.-w

**1.** Сверхпроводимость в квазидвумерных ($2D$) купратных соединениях, возникающая при допировании родительского диэлектрика с антиферромагнитным (AF) упорядочением, существует в ограниченном интервале допирования $x_* < x < x^*$, внутри которого при $x = x_{opt}$ температура сверхпроводящего (SC) перехода $T_C$ достигает максимума. В недодопированном режиме ($x_* < x < x_{opt}$) сверхтекучая плотность SC-конденсата синглетных пар мала, $n_s \sim (x - x_*)$, а контур Ферми (FC) определяется полной концентрацией носителей $(1 - x)$ и может иметь несколько точек (нод), в которых SC-щель обращается в нуль [1, 2]. При $x_* < x < x_{opt}$ некогерентные пары существуют в области псевдощелевого состояния $T_C < T < T^*$, где температура возникновения псевдощели $T^*$ соответствует ассоциации носителей в пары, тогда как $T_C$ отвечает возникновению фазовой когерентности в системе уже существующих пар [3]. Малость фазовой жесткости приводит к развитым флуктуациям, подавляющим дальний порядок в $2D$-системе, так что $T_C$ может рассматриваться как температура перехода Березинского – Костерлица – Таулесса, соответствующего возникновению несвязанных вихрей и антивихрей фазы параметра SC-порядка [4]. Слабое взаимодействие между электронами в соседних медно-кислородных плоскостях $CuO_2$ стабилизирует систему по отношению к длинноволновым флуктуациям параметра порядка, позволяя объяснить зависимость $T_C$ от числа слоев $CuO_2$ в элементарной ячейке [5]. Ближний AF-порядок допускает существование орбитальных токов (токовых циркуляций) [6] которые в системе с $d$-волновой симметрией SC-щели могут проявляться как волна плотности (DDW) [7] или DDW-флуктуации [8].

Весьма общий феноменологический подход [9, 10] к объединению AF- и SC-упорядочений показывает, что наряду с куперовским SC-спариванием с нулевым импульсом пары и диэлектрическим спариванием с большим AF-вектором с необходимостью существуют и другие каналы спаривания,

*E-mail: vib@spu.ac.ru
**E-mail: kopaev@lebedev.sci.ru

каждый из которых при определенных условиях может стать основным. Одним из таких каналов является синглетное SC-спаривание с большим импульсом пары. Состояния таких пар принадлежат классу собственных состояний гамильтониана Хаббарда [11] и, если допустить перескоки пар между соседними узлами решетки, могут привести к сверхпроводимости при положительной энергии внутрицентровой корреляции [12]. При SC-спаривании с отличным от нуля импульсом возникает неоднородное состояние, подобное состоянию Фулде–Феррела–Ларкина–Овчинникова (FFLO) [13, 14] с пространственной модуляцией модуля и фазы параметра порядка [15].

В качестве механизмов образования пар рассматривается как обусловленное электрон-фононным взаимодействием притяжение [16, 17], так и отталкивание [18]. Спариванием с большим импульсом при кулоновском отталкивании могут быть качественно объяснены известные особенности физики купратных соединений [19] В настоящей работе развит макроскопический подход к описанию сверхпроводимости купратов на основе уравнений Гинзбурга–Ландау [20], выведенных для этого канала спаривания, подобно тому как это сделано [21] для модели Бардина, Купера и Шриффера (BCS) [22]. Применимость приближения среднего поля из-за флуктуационных эффектов ограничивается передопированной областью $x_{opt} < x < x^*$, однако выводы, связанные с особенностями структуры параметра порядка, могут быть распространены и на область слабого допирования.

**2.** Импульсы $\mathbf{k}_\pm$ частиц, составляющих пару с суммарным импульсом $\mathbf{K} = \mathbf{k}_+ + \mathbf{k}_-$ и импульсом относительного движения $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_+ - \mathbf{k}_-)/2$, в вырожденной электронной $2D$-системе имеют ограниченную область значений $\Xi_K$, форма и размеры которой определяются контуром Ферми и импульсом $\mathbf{K}$ [23]. Область кинематического ограничения $\Xi_K$ включает одночастичные состояния, линейной комбинацией которых представляется волновая функция относительного движения пары. Границей, разделяющей заполненную и вакантную части области $\Xi_K$ при $\mathbf{K} \neq 0$, вообще говоря, являются изолированные точки, однако при некоторых $\mathbf{K}$, близких к удвоенному фермиевскому импульсу в направлении $\mathbf{K}$, и особой форме FC, этой границей могут быть конечные отрезки FC, связанные условием зеркального нестинга [19] и образующие парный контур Ферми (PFC), который играет такую же роль для относительного движения пары, что и FC для электронов и дырок [19].

Спариванию с суммарным импульсом $\mathbf{K} \neq 0$ соответствуют отличные от нуля аномальные средние

$$F(\mathbf{K},\mathbf{k}) = \langle \hat{a}_{\frac{\mathbf{K}}{2}-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\frac{\mathbf{K}}{2}+\mathbf{k}\uparrow} \rangle, \qquad (1)$$

где $\hat{a}_{\mathbf{q}\sigma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом $\mathbf{q}$ и спином $\sigma =\uparrow,\downarrow$, усреднение производится при температуре $T$. Параметр энергетической щели

$$\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k}) = -N^{-1} \sum_{\mathbf{k}'} U(\mathbf{k}-\mathbf{k}') F(\mathbf{K},\mathbf{k}'), \qquad (2)$$

где $U(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ — преобразование Фурье энергии спаривающего взаимодействия, $N$ — число элементарных ячеек, является решением (с точностью до фазового множителя) уравнения самосогласования

$$\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k}) = \frac{-1}{2N} \sum_{\mathbf{k}'} U(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \Delta(\mathbf{K},\mathbf{k}') f(\mathbf{K},\mathbf{k}';T), \qquad (3)$$

в котором

$$f(\mathbf{K},\mathbf{k};T) = E^{-1} \operatorname{th} \frac{E}{2T}, \qquad (4)$$

$E = \sqrt{\xi^2 + |\Delta|^2}$ — энергия квазичастицы, $\Delta \equiv \Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})$, а

$$2\xi \equiv 2\xi(\mathbf{K},\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{K}/2+\mathbf{k}) + \varepsilon(\mathbf{K}/2-\mathbf{k}) - 2\mu \qquad (5)$$

— кинетическая энергия относительного движения пары с суммарным импульсом $\mathbf{K}$, отсчитанная от химического потенциала $2\mu$, $\varepsilon(\mathbf{q})$ — закон дисперсии электрона. Суммирование проводится по кинематически разрешенной области $\Xi_K$.

В модели BCS притяжение между электронами в узком слое вблизи поверхности Ферми не зависит от импульса относительного движения пары $\mathbf{k}$, вследствие чего параметр порядка также не зависит от $\mathbf{k}$. Если спаривающим взаимодействием является отталкивание, то нетривиальное решение уравнения самосогласования оказывается возможным при условии, что линейный интегральный оператор с ядром $U(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, помимо положительных, имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение [24].

Следствием идеального зеркального нестинга является логарифмическая сингулярность по $|\Delta|$ в уравнении (3), которое в этом случае имеет решение уже при сколь угодно малом значении эффективной константы связи. Отклонения от совершенного зеркального нестинга при изменении импульса пары или формы FC сглаживают логарифмическую сингулярность и приводят к тому, что спаривание оказывается возможным, когда константа связи превышает некоторое возрастающее по мере отклонения минимальное значение [25]. Энергетическая щель $\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})$ является знакопеременной функцией импульса относительного движения внутри области $\Xi_K$, имея линию нулей, пересекающую PFC [24], и приводя, таким образом, к нодам, обусловленным исключительно отталкивательным характером взаимодействия. Наибольшим значением $|\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})|$ определяется соответствующий конденсату импульс пары $\mathbf{K} = \mathbf{K}_j$ (индекс $j$ нумерует кристаллографически эквивалентные импульсы).

Собственные функции $\varphi_{js}(\mathbf{k})$ эрмитова оператора с ядром $U(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ образуют полную ортонормированную систему функций в области $\Xi_j$, и энергетическая щель может быть разложена по этой системе,

$$\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}) = \sum_s \Delta_s(\mathbf{K}_j)\, \varphi_{js}(\mathbf{k}), \tag{6}$$

так что зависимость от импульса относительного движения переносится на собственные функции, определяемые независимо от уравнения самосогласования. При больших $\mathbf{K}_j$ область $\Xi_j$ достаточно мала, поэтому в пределах этой области ядро $U(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ можно разложить в степенной ряд, ограничившись первыми двумя членами разложения [24],

$$U(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \approx U_0 r_0^2[1 - r_0^2|\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2/2], \tag{7}$$

где $U_0$ и $r_0$ имеют смысл соответственно эффективной константы связи и радиуса экранирования. Ядро (7) является простейшим вырожденным ядром с двумя четными и двумя нечетными (по отношению к преобразованию $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$) собственными функциями [26].

Благодаря кристаллической симметрии каждое состояние пары с импульсом $\mathbf{K}_j \neq 0$ является вырожденным и формируется линейной комбинацией пар с эквивалентными импульсами. Импульс относительного движения такой пары принадлежит объединению кинематически разрешенных областей, соответствующих разным эквивалентным $\mathbf{K}_j$. Энергетическая щель принимает вид

$$\Delta(\mathbf{k}) = \sum_j \beta_j \Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}) = \sum_{j,s} \beta_j \Delta_s(\mathbf{K}_j)\varphi_{js}(\mathbf{k}), \tag{8}$$

где в каждом слагаемом $\mathbf{k}$ принадлежит определенной области $\Xi_j$, а коэффициенты $\Delta_s(\mathbf{K}_j) \equiv \Delta_s$ одинаковы для всех эквивалентных $\Xi_j$. Коэффициенты $\beta_j$ (нормированные условием $\sum_j |\beta_j|^2 = 1$) определяются неприводимым представлением (не обязательно единичным) группы симметрии, по которому преобразуется функция (8) и которое зависит от взаимодействия, перемешивающего импульсы относительного движения пар с разными $\mathbf{K}_j$. Если пересечение кинематически разрешенных областей для разных $\mathbf{K}_j$ отсутствует или им можно пренебречь, то квадрат модуля линейной комбинации (8), которая может рассматриваться как параметр порядка, записывается как

$$|\Delta(\mathbf{k})|^2 = \sum_{j,s,s'} |\beta_j|^2 \Delta_s^* \Delta_{s'} \varphi_{js}^*(\mathbf{k})\varphi_{js'}(\mathbf{k}), \tag{9}$$

что позволяет производить разложение свободной энергии по степеням $|\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})|^2$ при некотором $\mathbf{K}_j$, после чего перейти к (8).

**3.** При температурах, близких к $T_C$, $|\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})| \to 0$, что позволяет при $\tau \equiv (T_C - T)/T_C \ll 1$ линеаризовать уравнение самосогласования, записав его в виде

$$\sum_{\mathbf{k}'} P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{K}_j;T_C)\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}') = 0, \tag{10}$$

где

$$P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{K};T) = NU^{-1}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f_0(\mathbf{K},\mathbf{k};T)/2, \tag{11}$$

$f_0(\mathbf{K},\mathbf{k};T)$ — функция (4) при $\Delta = 0$, а $U^{-1}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ — матрица, обратная $U(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. Используя разложение (6) энергетической щели по собственным функциям ядра (7), систему уравнений (10) можно свести к системе двух уравнений, из условия разрешимости которой определяется температура перехода. Следует отметить, что в случае, когда ядро имеет единственную собственную функцию, соответствующую положительному собственному значению (приближение, аналогичное модели BCS для отталкивательного взаимодействия), получающееся из (10) единственное уравнение имеет лишь тривиальное решение $\Delta = 0$. В спектре ядра (7) имеется одно отрицательное собственное значение, поэтому нетривиальное решение уравнения самосогласования заведомо существует [24] при $T < T_C \neq 0$.

В линеаризованном гамильтониане члены с импульсами конденсата $\mathbf{K}_j$ приводят при $T < T_C$ к макроскопически большому числу пар. При $T \to T_C$ их вклад может рассматриваться как малое возмущение гамильтониана идеального газа пар. Свободная энергия может быть вычислена в рамках термодинамической теории возмущений [27] и во втором порядке имеет вид

$$F^{(2)} = -\sum_{j,\mathbf{k},\mathbf{k}'} \Delta^\dagger(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}) P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\mathbf{K}_j;T)\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}'), \tag{12}$$

где ядро (11) определено при температуре $T$, близкой к $T_C$. Выражение (12) можно представить как

$$F^{(2)} = -\sum_{j,\mathbf{k}} \Delta^\dagger(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}) P(\mathbf{k};T)\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}), \tag{13}$$

где одинаковое для всех $\Xi_j$ ядро с $\mathbf{k}\in\Xi_j$,

$$P(\mathbf{k};T)\approx\frac{\tau}{4T_C}\,\mathrm{ch}^{-2}\left[\frac{\xi(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})}{2T_C}\right]. \tag{14}$$

Воспользовавшись разложением (6), находим

$$F^{(2)}=-\tau\sum_{s,s'}\Delta_s^*F_{ss'}\Delta_{s'}, \tag{15}$$

где элементы матрицы

$$F_{ss'}\equiv\frac{1}{4T_C}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\varphi_{js}^*(\mathbf{k})\varphi_{js'}(\mathbf{k})}{\mathrm{ch}^2[\xi(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})/2T_C]} \tag{16}$$

не зависят (из-за суммирования по $\mathbf{k}$) от $j$. Сумма по $j$ включена (вместе с коэффициентами $\beta_j$) в определение $\Delta_s$ согласно (8).

Вклад четвертого порядка $F_c^{(4)}$ может быть найден из выражения $F=\overline{H}-TS$, где $\overline{H}$ — среднее значение линеаризованного гамильтониана. Не повторяя весь вывод [28], запишем окончательный результат:

$$F^{(4)}=\frac{1}{2}\sum_{s,s',t,t'}\Delta_s^*\Delta_{s'}^*F_{ss'tt'}\Delta_t\Delta_{t'}. \tag{17}$$

Здесь в сумме по объединению всех $\Xi_j$,

$$F_{ss'tt'}=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{k}}\frac{2T_C\,\varphi_{js}^*(\mathbf{k})\varphi_{js'}^*(\mathbf{k})\varphi_{jt}(\mathbf{k})\varphi_{jt'}(\mathbf{k})}{[T_n^2+\xi^2(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})]^2}, \tag{18}$$

положено $T_n=\pi T_C(2n+1)$ и использовано известное представление [29]

$$f_0(\mathbf{K}_j,\mathbf{k};T)=\\ =4T\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[\pi T(2n+1)]^2+\xi^2(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})}. \tag{19}$$

**4.** Чтобы учесть зависимость параметра порядка от радиуса-вектора $\mathbf{R}$ центра масс пары, следует перейти к преобразованию Фурье

$$\Delta(\mathbf{R},\mathbf{k})=N^{-1/2}\sum_{\mathbf{K}}\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})\exp\left(-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}\right), \tag{20}$$

где $\mathbf{k}$ принадлежит области $\Xi_K$, относящейся к импульсу $\mathbf{K}$. В случае слабонеоднородной системы, когда импульсы $\mathbf{K}$ мало отличаются от импульса конденсата $\mathbf{K}_j$ пространственно-однородного состояния, $\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})$ можно разложить по системе функций $\varphi_{js}(\mathbf{k})$, определенных в $\Xi_j$. Тогда

$$\Delta_{js}(\mathbf{R})=\sum_{\mathbf{k}}\Delta(\mathbf{R},\mathbf{k})\;\varphi_{js}^*(\mathbf{k}). \tag{21}$$

Для конденсата с импульсом $\mathbf{K}_j$ в однородной системе положим $\Delta(\mathbf{K},\mathbf{k})=\sqrt{N}\;\Delta(\mathbf{K}_j,\mathbf{k})\;\delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}_j}$, так что

$$\Delta_{js}(\mathbf{R})=\Delta_s\exp(-i\mathbf{K}_j\cdot\mathbf{R}) \tag{22}$$

оказывается подобным FFLO-состоянию [13, 14] с тем существенным отличием, что при отталкивательном взаимодействии энергетическая щель имеет две связанные уравнением самосогласования FFLO-компоненты (22). Функции (22) с различными $j$ ортогональны друг другу:

$$\sum_{\mathbf{R}}\Delta_{js}^*(\mathbf{R})\Delta_{j's'}(\mathbf{R})=N\Delta_s^*\Delta_{s'}\delta_{jj'}.$$

В пространственно-неоднородном состоянии коэффициенты $\Delta_s$ являются функциями $\mathbf{R}$, медленно меняющимися на атомном масштабе. При этом разным $\mathbf{R}$ соответствуют, вообще говоря, разные импульсы конденсата, поэтому, положив $\mathbf{K}=\mathbf{K}_j+\mathbf{q}$, следует производить суммирование по $\mathbf{q}$ при каждом $j$. Поскольку однородный вклад в свободную энергию уже найден, градиентный вклад второго порядка может быть вычислен при $T=T_C$ и представлен в виде

$$F_g^{(2)}=\\ =-\sum_{j,\mathbf{q},\mathbf{k}}\Delta^\dagger(\mathbf{K}_j+\mathbf{q},\mathbf{k})P'(\mathbf{q},\mathbf{k})\Delta(\mathbf{K}_j+\mathbf{q},\mathbf{k}), \tag{23}$$

где

$$P'(\mathbf{q},\mathbf{k})=\\ =[f_0(\mathbf{K}_j+\mathbf{q},\mathbf{k};T_C)-f_0(\mathbf{K}_j,\mathbf{k};T_C)]/2N, \tag{24}$$

так как при малых $\mathbf{q}$ для преобразования ядра в (12) можно воспользоваться уравнением (10).

Магнитное поле приводит к изменению фазы оператора уничтожения электрона на узле $\mathbf{n}$ [30],

$$\hat{c}_{\mathbf{n}\sigma}\to\hat{c}_{\mathbf{n}\sigma}\exp\left[\frac{ie}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\right], \tag{25}$$

поэтому фаза параметра порядка в зависимости от векторного потенциала $\mathbf{A}$ записывается как

$$\frac{e}{\hbar c}\left[\mathbf{A}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}+\mathbf{A}(\mathbf{n}')\cdot\mathbf{n}'\right]\approx\frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}(\mathbf{R})\cdot\mathbf{R}, \tag{26}$$

где $2\mathbf{R}=\mathbf{n}+\mathbf{n}'$, а приближенное равенство имеет место, если производными от векторного потенциала можно пренебречь (приближение слабого поля). Векторный потенциал $\mathbf{A}$ в (25) включает как остающийся в приближенном выражении (26) вклад слабо меняющегося внешнего поля, так и вклад внутреннего поля, возникающего вследствие допирования из-за циркулярных токов [31] и проявляющегося, например, в бозонной модели [32] резонирующих валентных связей [33] как калибровочные поля, связывающие зарядовые и спиновые степени свободы.

Энергетическая щель может быть разложена по собственным функциям ядра оператора взаимодействия и для импульсов, отличных от импульса конденсата для пространственно-однородного состояния, при этом для достаточно малых $\mathbf{q}$ функции $\varphi_s(\mathbf{k})$ можно считать принадлежащими области $\Xi_j$, относящейся к импульсу $\mathbf{K}_j$. Определим функции

$$\Psi_s(\mathbf{R}) = \Delta_s(\mathbf{R})/aT_C, \tag{27}$$

где

$$\Delta_s(\mathbf{R}) = \sum_j \beta_j e^{i\mathbf{K}_j\cdot\mathbf{R}}\Delta_{js}(\mathbf{R}). \tag{28}$$

Из условия нормировки для безразмерных функций $\varphi_{js}(\mathbf{k})$ следует, что $\varphi_{js}(\mathbf{k}) \sim N_c^{-1/2}$, где $N_c \equiv \Xi_j S/(2\pi)^2$ — число состояний в области $\Xi_j$, $S$ — нормировочная площадь. Тогда, как видно из выражений (15)–(18), параметр порядка нормирован в области кинематического ограничения $|\Psi_s(\mathbf{R})|^2 \sim N_c$, так что $\Psi_s(\mathbf{R})$ могут рассматриваться как компоненты волновых функций конденсата. То, что сверхтекучая плотность при большом суммарном импульсе пары оказывается пропорциональной $N_c$, отражает тот факт, что область импульсного пространства, в которой происходит рассеяние пар в результате взаимодействия, определяется областью кинематического ограничения, в отличие от модели BCS, в которой, несмотря на то что спаривающее взаимодействие отлично от нуля в тонком слое, охватывающем поверхность Ферми, областью определения передачи импульса при рассеянии является вся зона Бриллюэна, так что сверхтекучая плотность пропорциональна полному числу частиц. Выражение (23) принимает вид

$$F_g^{(2)} = -\frac{1}{N}\sum_{j,\mathbf{q}}\sum_{s,s'}\sum_{\mathbf{R},\boldsymbol{\rho}}\Psi_s^*(\mathbf{R})Q_{ss'}(\mathbf{q})\Psi_{s'}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho})\times \\ \times e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}\exp\left\{-i\frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\rho}\right\}. \tag{29}$$

Здесь

$$Q_{ss'}(\mathbf{q}) = a^2 T_C^2 \sum_{\mathbf{k}}\varphi_s^*(\mathbf{k})P'(\mathbf{q},\mathbf{k})\varphi_{s'}(\mathbf{k}), \tag{30}$$

где $a^2 = S/N$.

«Смещенный» параметр порядка записывается как

$$\Psi_{s'}(\mathbf{R}+\boldsymbol{\rho})\exp\left\{-i\frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\rho}\right\} = e^{i\boldsymbol{\rho}\cdot\hat{\boldsymbol{D}}}\Psi_{s'}(\mathbf{R}), \tag{31}$$

где оператор ковариантного дифференцирования по координатам центра масс пары имеет вид

$$\hat{\boldsymbol{D}} = -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}. \tag{32}$$

С точностью до второго порядка по $\mathbf{R}$ выражение (29) можно представить в виде (по повторяющимся декартовым индексам $\alpha$, $\beta$ подразумевается суммирование)

$$F_g^{(2)} = \int d^2R \sum_{s,s'}[\hat{D}_\alpha\Psi_s(\mathbf{R})]^\dagger Q_{ss'}^{\alpha\beta}[\hat{D}_\beta\Psi_{s'}(\mathbf{R})], \tag{33}$$

где после перехода к интегрированию по $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\rho}$

$$Q_{ss'}^{\alpha\beta} = a^2 T_C^3 \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\varphi_s^*(\mathbf{k})\varphi_{s'}(\mathbf{k})\times \\ \times\int\frac{d^2\rho}{(2\pi)^2}\rho_\alpha\rho_\beta\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}}}{T_n^2+\xi^2(\mathbf{K}_j+\mathbf{q};\mathbf{k})}. \tag{34}$$

Интеграл по $\mathbf{q}$ определяется полюсами подынтегральной функции в комплексной плоскости (для каждой компоненты вектора $\mathbf{q}$), которые находятся из уравнений

$$\xi(\mathbf{K}_j+\mathbf{q},\mathbf{k}) = \pm\, i\, T_n. \tag{35}$$

Для слабонеоднородного состояния (при малых $\mathbf{q}$) левую часть равенства (35) можно разложить в ряд по $\mathbf{q}$, ограничившись первыми неисчезающими членами:

$$\xi(\mathbf{K}_j+\mathbf{q},\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{K}_j,\mathbf{k}) + \frac{\hbar^2}{8m^*}a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta, \tag{36}$$

где линейные по $\mathbf{q}$ члены в (36) отсутствуют, благодаря тому что скорости электрона в симметричных относительно $\mathbf{K}_j$ точках $\mathbf{k}_+$ и $\mathbf{k}_-$ имеют противоположные направления, $m^*$ имеет смысл некоторой эффективной массы электрона, тензор $a_{\alpha\beta}$, определяемый выражением

$$a_{\alpha\beta} = \frac{m^*}{\hbar^2}\left[\frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{k}_+)}{\partial k_\alpha\partial k_\beta} + \frac{\partial^2\varepsilon(\mathbf{k}_-)}{\partial k_\alpha\partial k_\beta}\right], \tag{37}$$

можно считать не зависящим от $\mathbf{k}$.

Расположение PFC в протяженной окрестности седловой точки [34] позволяет ограничиться рассмотрением случая предельно сильной анизотропии эффективных масс. Пусть $m^*$ есть «легкая» компонента эффективной массы, соответствующая направлению импульса пары $\mathbf{K}_j$ вдоль координатной оси $q_1$. Положим $a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta = q_1^2$, тогда интегрирование по $q_2$ приводит к замене $\rho_\alpha\rho_\beta \to \rho_1^2\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}$ в (34). Интеграл по $q_1$ может быть вычислен по теореме о вычетах. Последующее интегрирование по $\boldsymbol{\rho}$ позволяет записать градиентный вклад в свободную энергию в виде

$$F_g^{(2)} = \frac{\hbar^2}{4m} \int d^2R \sum_{s,s'} [\hat{\mathbf{D}}\Psi_s]^\dagger M_{ss'} [\hat{\mathbf{D}}\Psi_{s'}], \tag{38}$$

где $m = |m^*|$, $\Psi_s \equiv \Psi_s(\mathbf{R})$,

$$M_{ss'} = = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{a^2 T_C^3 \varphi_s^*(\mathbf{k}) |\xi(\mathbf{K}_j, \mathbf{k})| \varphi_{s'}(\mathbf{k})}{[T_n^2 + \xi^2(\mathbf{K}_j, \mathbf{k})]^2}, \tag{39}$$

и учтено, что импульсы $\pm\mathbf{K}_j$ дают одинаковые вклады в (34), а при тетрагональной симметрии эквивалентные им импульсы, повернутые на углы $\pm\pi/2$, дают такие же вклады с одновременным изменением нумерации координатных осей.

Однородные вклады второго (15) и четвертого (17) порядков, соответственно, записываются как

$$F^{(2)} = -\tau \int d^2R \sum_{s,s'} \Psi_s^* A_{ss'} \Psi_{s'}, \tag{40}$$

$$F^{(4)} = \frac{1}{2} \int d^2R \sum_{s,s',t,t'} \Psi_s^* \Psi_{s'}^* B_{ss'tt'} \Psi_t \Psi_{t'}, \tag{41}$$

где в соответствии с выражениями (16) и (18),

$$A_{ss'} = \frac{a^2 T_C}{4} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\varphi_{js}^*(\mathbf{k}) \varphi_{js'}(\mathbf{k})}{\mathrm{ch}^2[\xi(\mathbf{K}_j, \mathbf{k})/2T_C]}, \tag{42}$$

$$B_{ss'tt'} = 2a^4 T_C^5 \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \times \times \frac{\varphi_{js}^*(\mathbf{k}) \varphi_{js'}^*(\mathbf{k}) \varphi_{jt}(\mathbf{k}) \varphi_{jt'}(\mathbf{k})}{[T_n^2 + \xi^2(\mathbf{K}_j, \mathbf{k})]^2}. \tag{43}$$

Отметим, что в простейшем случае (который имеет смысл рассматривать только при взаимодействии притяжения), когда вырожденное ядро оператора взаимодействия имеет единственную собственную функцию $\varphi_{js} = N_c^{-1/2}$, матрицы, введенные выражениями (39), (42) и (43), вырождаются в числа

$$M = \frac{gT_C a^2}{N_c}, \quad A = \frac{ga^2 T_C^2}{N_c}, \quad B = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \frac{ga^4 T_C^2}{N_c^2}, \tag{44}$$

где $g$ — плотность состояний, $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана.

Свободная энергия представляется в виде функционала Гинзбурга–Ландау

$$F = F_g^{(2)} + F^{(2)} + F^{(4)} + F^{(m)},$$

где энергия магнитного поля

$$F^{(m)} = \frac{z_0}{8\pi} \int d^2R (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})^2, \tag{45}$$

$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{R})$, $z_0$ — расстояние между соседними плоскостями $CuO_2$.

Обычная вариационная процедура приводит к системе уравнений, определяющих параметр порядка,

$$\frac{\hbar^2}{4m} \sum_{s'} M_{ss'} \left[-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\right] \Psi_{s'} - - \tau \sum_{s'} A_{ss'} \Psi_{s'} + \sum_{s',t,t'} B_{ss'tt'} \Psi_{s'}^* \Psi_t \Psi_{t'} = 0, \tag{46}$$

и уравнению для векторного потенциала

$$\mathbf{j} = \sum_{s,s'} M_{ss'} \left[\frac{\hbar e}{2im} (\Psi_s^* \nabla \Psi_{s'} - \Psi_{s'} \nabla \Psi_s^*) - - \frac{2e^2}{mc} \Psi_s^* \Psi_{s'} \mathbf{A}\right], \tag{47}$$

где плотность тока в плоскости $CuO_2$

$$\mathbf{j} = z_0 \frac{c}{4\pi} \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}. \tag{48}$$

Система граничных условий может быть, в частности, записана в виде

$$\sum_{s'} M_{ss'} [i\nabla + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}] \Psi_{s'} \mathbf{n} = 0, \tag{49}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе $2D$-области в плоскости $CuO_2$.

Наличие системы двух уравнений (46) вместо единственного уравнения Гинзбурга–Ландау, соответствующего модели BCS, может, как и в случае $s$–$d$-спаривания [35], приводить к нескольким (различающимся, например, относительной фазой) нетривиальным решениям, отвечающим минимумам функционала Гинзбурга–Ландау, положения и значения энергии которых зависят от соотношения между элементами матриц $A_{tt'}$ и $B_{stt's'}$. Кроме того, система уравнений (46) для компонент параметра порядка, связанных друг с другом, может приводить к топологическим дефектам фазы параметра порядка, отличным от вихрей и антивихрей, возникающих как решения соответствующих модели BCS-уравнений Гинзбурга–Ландау, как это, например, имеет место в случае двухкомпонентной модели Гинзбурга–Ландау–Гросса–Питаевского, описывающей два конденсата противоположно заряженных частиц, связанных только через электромагнитное поле [36].

Компоненты равновесного параметра порядка в пространственно-однородной системе определяются системой уравнений

$$\sum_{s'} \Psi_{s'} \left[ \tau A_{ss'} - \sum_{t,t'} B_{stt's'} \Psi_t^* \Psi_{t'} \right] = 0, \qquad (50)$$

из которой следует, что при $\tau < 0$ равновесному состоянию отвечает тривиальное решение $\overline{\Psi}_s = 0$. При $\tau > 0$ равновесный параметр порядка определяется из условия обращения в нуль матрицы в квадратных скобках в (50). Обозначим $\overline{\Psi}_s = \sqrt{\tau} c_s$, где не зависящие от температуры коэффициенты $c_s$ находятся из системы трех независимых уравнений:

$$\sum_{s,s'} B_{tss't'} c_s^* c_{s'} = A_{tt'}, \qquad (51)$$

в которую эти коэффициенты входят в виде трех неотрицательных инвариантных комбинаций: квадратов модулей $|c_1|^2$, $|c_2|^2$ и интерференционного члена $c_1^* c_2 + c_1 c_2^*$, определяющего относительную фазу коэффициентов $c_1$ и $c_2$. Матрицы $A_{tt'}$ и $B_{tss't'}$ имеют соответственно три и пять независимых компонент, величины которых допускают простую оценку. Выберем собственную функцию $\varphi_{j2}$, соответствующую положительному собственному значению, в виде, использованном для оценки (44), тогда функцию $\varphi_{j1}$, относящуюся к отрицательному собственному значению и обращающуюся в нуль на PFC, можно принять в виде линейной функции $\xi$, что согласуется с предположением [37] о «наклоне» энергетической щели. При таком выборе собственных функций элементы матриц $A_{tt'}$, $B_{tss't'}$ и $M_{tt'}$, у которых все индексы равны двум, по порядку величины совпадают с оценками (44). С учетом малости параметра $\gamma = \pi T_C/\varepsilon_0$ элементы соответствующих матриц со всеми индексами, равными единице, можно оценить как $A_{11} \sim \gamma^2 A$, $B_{1111} \sim \gamma^2 B$, $M_{11} \sim \gamma M$. С логарифмической по $\gamma$ точностью $B_{1122} \sim \gamma^2 B$, а элементы с нечетным числом одинаковых индексов, также пропорциональные $\gamma^2$, имеют (определяющую их знак) дополнительную малость, связанную с асимметрией между заполненной и вакантной частями области $\Xi_j$.

Отметим, что в случае, когда ядро оператора взаимодействия имеет всего одно положительное собственное значение, система (50) вырождается в единственное уравнение, не имеющее нетривиального решения. Система (50) имеет только тривиальное решение и тогда, когда все собственные значения ядра неотрицательны. В рассматриваемом здесь случае двух собственных значений (одного положительного и одного отрицательного) элементы матриц $A_{tt'}$ и $B_{stt's'}$ таковы, что нетривиальное решение определенно имеется при $\tau > 0$.

Существенным отличием системы уравнений (46) от системы, описывающей, например, $s$–$d$-спаривание [35], является то, что коэффициенты при первой степени компонент параметра порядка пропорциональны $\tau$, и в случае отталкивания обе компоненты $\Psi_1$ и $\Psi_2$ соответствуют одной и той же температуре перехода и одна без другой существовать не могут [24], поскольку переход к предельному случаю единственного положительного собственного значения одновременно означает переход $T_C \to 0$ [24].

**5.** Из (47) и (48) следует, что глубина проникновения $\lambda$ определяется формулой

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{8\pi e^2 \tau}{mc^2 z_0} \sum_{s,s'} c_s^* M_{ss'} c_{s'}, \qquad (52)$$

а двумерная сверхтекучая плотность, соответственно, имеет вид

$$n_s = 2\tau \sum_{s,s'} c_s^* M_{ss'} c_{s'}, \qquad (53)$$

где коэффициенты $c_s$ являются решениями системы уравнений (51).

Размер пары в реальном пространстве может быть оценен как обратная величина мнимой части определяемого уравнением (35) полюса при $n = 0$. Обозначив через $\varepsilon_0$ характерный энергетический масштаб области $\Xi_j$ и учитывая, что $\varepsilon_0 \gg T_C$, получаем оценку

$$\zeta_0 \approx \frac{\hbar}{\pi T_C} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{|m^*|}}. \qquad (54)$$

Полагая $\varepsilon_0 \sim 0.1$ эВ, для $|m^*| \approx 10^{-27}$ г и $T_C \approx 80$ К находим $\zeta_0 \approx 3 \cdot 10^{-7}$ см. Отметим, что при спаривании с нулевым суммарным импульсом (в случае притяжения), когда кинематические ограничения отсутствуют и $\varepsilon_0$ имеет смысл энергии Ферми, $\sqrt{\varepsilon_0/|m^*|} \sim v_F$ есть скорость Ферми, и (54) принимает вид $\zeta_0 \sim \hbar v_F/\pi T_C$.

Корреляционная функция флуктуаций компонент параметра порядка может быть представлена в виде

$$\langle \Psi_s^*(\mathbf{R}) \Psi_{s'}(\mathbf{R}') \rangle = \\ = \frac{m T_C}{\hbar^2} \sum_t U_{s't} M_t^{-1} U_{ts}^{-1} K_0 \left( \frac{r}{r_t^{(c)}} \right), \qquad (55)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{R}' - \mathbf{R}$, $U_{ss'}$ — унитарная матрица, одновременно диагонализующая матрицы $A_{ss'}$ и $M_{ss'}$, $A_t$ и $M_t$ — собственные числа этих матриц,

$$r_t^{(c)} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{4m|\tau|}\,\frac{M_t}{A_t}}. \qquad (56)$$

Учитывая, что при больших значениях аргумента функция Макдональда

$$K_0(z) \sim (\pi/2z)^{1/2}\exp(-z),$$

наименьшую из величин (56) можно рассматривать как характерный корреляционный радиус флуктуаций параметра порядка $r_c = \min(r_t^{(c)})$, определяемый, как и размер пары в реальном пространстве, эффективной массой электрона вблизи FC.

Для грубых оценок можно воспользоваться выражениями (44), которые по порядку величины представляют наибольшие, отвечающие положительному собственному значению вырожденного ядра (7), диагональные элементы соответствующих матриц. Средний квадрат модуля равновесного параметра порядка пропорционален площади области $\Xi_j$:

$$\overline{|\Psi_s|^2} \sim [2\tau/7\zeta(3)]N\Xi_j\,, \qquad (57)$$

а безразмерное отношение $\kappa = \lambda/r_c \gg 1$.

Градиентный вклад в свободную энергию (40) описывает длинноволновые флуктуации параметра порядка относительно термодинамически равновесного значения, определяемого системой уравнений (50). Структура параметра порядка (28) такова, что в области развитых флуктуаций может возникать особое токовое состояние, характер которого может быть выяснен с помощью уравнений Гинзбурга–Ландау (46), (47). Выделяя фазу параметра порядка,

$$\Psi_s(\mathbf{R}) = |\Psi_s(\mathbf{R})|e^{i\Phi(\mathbf{R})}, \qquad (58)$$

выражение (47) для сверхпроводящего тока в отсутствие внешнего магнитного поля можно записать как

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar e}{m}\,\overline{M}\,\nabla\Phi. \qquad (59)$$

Здесь

$$\overline{M} = \sum_{s,s'}\Psi_s^* M_{ss'}\Psi_{s'}\,, \qquad (60)$$

а $\Psi_s$ определяется выражением (27) и из-за экспоненциальных множителей в определении (28) является быстро (на пространственном масштабе, пропорциональном $K_j^{-1}$) меняющейся функцией координат $X$, $Y$ радиуса-вектора $\mathbf{R}$:

$$\Psi_s(\mathbf{R}) \sim \cos K_j X \pm \cos K_j Y. \qquad (61)$$

Верхний (нижний) знак соответствует неприводимому представлению $A_{1g}$ ($B_{1g}$). Циркуляция тока по любому замкнутому контуру $L_0$ в купратной плоскости,

$$V = \oint_{L_0}\mathbf{j}\,d\mathbf{l} = \frac{\hbar e}{m}\int_{S_0} d^2R\,\mathbf{n}_3[\nabla\overline{M}\times\nabla\Phi], \qquad (62)$$

вообще говоря, отлична от нуля; здесь $\mathbf{n}_3$ — единичный вектор нормали к плоскости $CuO_2$, $S_0$ — площадь поверхности, ограниченной контуром $L_0$. Если характерный размер контура $L_0$ существенно превышает масштаб порядка $K_j^{-1}$, на котором происходит изменение параметра порядка (61), то $V \approx 0$. Структура параметра порядка (61) соответствует делению реального $2D$-пространства на ячейки площади порядка $K_j^{-2}$, таким образом, что в соседних ячейках проекция векторного произведения в (62) на направление $\mathbf{n}_3$ имеет разные знаки. Таким образом, в результате длинноволновых флуктуаций фазы параметра порядка (в особенности существенных в недодопированных купратах из-за малой фазовой жесткости) возникает несоизмеримая антиферромагнитно-упорядоченная (на масштабе флуктуации фазы) структура в виде циркуляций орбитальных токов.

Из формулы (38) может быть получена оценка фазовой жесткости вблизи температуры перехода. В отсутствие магнитного поля выражение (38) можно записать как

$$F_g^{(2)} \approx \frac{1}{2}\int d^2R\,\rho_s(\nabla\Phi)^2, \qquad (63)$$

откуда следует, что

$$\rho_s = \frac{\hbar^2}{2m}\overline{M}, \qquad (64)$$

где $\overline{M}$ определяется выражением (60), в котором компоненты параметра порядка должны быть положены равными своим равновесным значениям, являющимся решениями системы уравнений (50). Таким образом, вблизи температуры перехода $\rho_s \sim \tau$. Если принять линейную зависимость $\rho_s$ от температуры [38], то при $\tau = 1$ выражение (64) определяет значение фазовой жесткости при нулевой температуре $\rho_s(0)$, которое оказывается пропорциональным площади области кинематического ограничения $\Xi_j$.

**6.** Приближение среднего поля, использованное при выводе уравнений Гинзбурга–Ландау (46), (47), считается достаточным [1] для описания SC-состояния оптимально-допированных и передопированных купратов. В недодопированном режиме наличие псевдощели при $T_C < T < T^*$ дает основание думать [33], что основное состояние высокотемпературной ($T > T_C$) фазы отличается от состояния нормальной ферми-жидкости, вследствие чего теория, основанная на тех же принципах, что и теория BCS, может оказаться неадекватной физике купратных соединений. Кроме того, в недодопированных купратах флуктуационные явления играют существенную роль [4], так что если среднее значение параметра порядка обращается в нуль при некоторой температуре перехода $T_C$, то его средний квадрат может быть отличным от нуля в достаточно широком диапазоне температур выше $T_C$ [3].

Рассмотрение $t$–$J$-модели при полном запрете двукратного заполнения узлов решетки позволяет утверждать [18, 39, 40], что теория среднего поля с учетом соответствующей перенормировки кинетической энергии и суперобменного взаимодействия в $t$–$J$-гамильтониане приводит, в целом, к разумным зависимостям температуры SC-перехода $T_C$ и температуры возникновения псевдощели $T^*$ от допирования, а также к малой фазовой жесткости ($\rho_s \sim x$) в недодопированном состоянии, что позволяет трактовать $T^*$ как температуру возникновения пар, существующих при $T_C < T < T^*$ в некогерентных состояниях, а $T_C$ — как температуру возникновения фазовой когерентности [18].

Полный запрет двукратного заполнения отвечает предельному случаю, когда энергия внутрицентровой корреляции существенно превышает ширину электронной энергетической зоны, способствуя диэлектризации системы и возникновению AF-порядка. Более реалистичное ограничение на двукратное заполнение, при котором полное (гуцвиллеровское) проектирование, используемое в [18, 39, 40], заменяется «частичным» [41], также приводит к фазовой жесткости $\rho_s \sim x$ и позволяет сохранить общий подход BCS к описанию SC-состояния недодопированных купратов, не прибегая (как и в [18]) к разнообразным достаточно искусственным схемам разделения зарядовых и спиновых степеней свободы [32, 42–44]. Отсутствие истинного разделения заряда и спина (своеобразный конфайнмент холонов и спинонов) является одним из аргументов в пользу общей идеологии BCS применительно к купратам.

В отличие от теории BCS, в которой SC-состояние возникает в результате неустойчивости нормальной ферми-жидкости по отношению к куперовскому спариванию с нулевым суммарным импульсом, теория сверхпроводимости купратов должна принимать во внимание конкуренцию SC- и AF-состояний [7]. Антиферромагнитное упорядочение характеризуется импульсом порядка удвоенного фермиевского, что является одной из причин того, что SC-спаривание с большим импульсом [9–11] (вообще говоря, несоизмеримым [7] в допированных купратах) может оказаться основным каналом спаривания [19].

Из описания (в рамках $t$–$J$-модели) допированных купратов, основанного на $SU(2)$-симметрии в фермионном представлении [45], следует необходимость введения дублета бозонов, один из которых может конденсироваться в состояние с нулевым импульсом, тогда как другому соответствует конденсат с большим импульсом $(\pi, \pi)$. Следствием $SU(2)$-формализма являются корреляции орбитальных токов, в которых проявляется AF-упорядочение токовых циркуляций [6], соответствующих фазе с потоком [46]. Из (62) следует, что подобный характер токовых циркуляций может быть непосредственно связан с большим импульсом пар, образующих SC-конденсат.

Спаривающее взаимодействие отталкивания (7) учитывает (благодаря положительному слагаемому $U_0 r_0^2$) «частичное» ограничение двукратного заполнения узлов и приводит к существенной зависимости SC-параметра порядка от импульса относительного движения пары. При большом суммарном импульсе пары эта зависимость является следствием, во-первых, кристаллической симметрии (спаривание в эквивалентных областях $\Xi_j$ импульсного пространства) [23, 26] и, во-вторых, особого характера отталкивания (наличие отрицательного собственного значения ядра взаимодействия, что находится в соответствии с предположением [47] о дополнительном к хаббардовскому отталкиванию спаривающем притяжении). Таким образом, к четырем нодам при $d$-волновой симметрии SC-щели (неприводимое представление $B_{1g}$, связывающее эквивалентные области $\Xi_j$) добавляются ноды, обусловленные пересечением FC с линией нулей параметра порядка [24]. При $s$-волновой симметрии (тривиальное представление $A_{1g}$) отталкивательное спаривающее взаимодействие также приводит к нодам параметра порядка («расширенная» $s$-волновая симметрия [2]). Анализ [48, 49] экспериментальных данных, полученных с использованием различных методик, позволяет придти к выводу [48], что в объеме купратного сверхпроводника параметр порядка соответствует $s$-волновой симметрии (расширенной в соединениях с дырочным допированием и анизотропной — с электронным) [48]. Такой вывод не противоречит тому, что фазочувствительные эксперименты, позволяющие зондировать тонкие (порядка длины когерентности) приповерхностные слои, указывают на

$d$-волновую симметрию параметра порядка [48]. С нодами параметра порядка и квазичастицами, термически возбуждаемыми в их окрестностях, может быть связано линейное уменьшение с ростом температуры фазовой жесткости [38], что позволяет (в рамках теории среднего поля) определить температуру перехода из условия $\rho_s(T_C) = 0$ [38]. Следует отметить, что дополнительные ноды, как и участки линии нулей параметра порядка, располагающиеся вблизи FC, приводят к увеличению (по сравнению, например, с «чистой» $d$-волновой симметрией) числа возбуждаемых квазичастиц, поэтому в системах с сильной анизотропией FC, где линия нулей в среднем значительно удалена от FC, должно иметь место повышение $T_C$.

Малость фазовой жесткости является причиной значительных длинноволновых флуктуаций фазы параметра порядка, развивающихся при $T \approx T_C$ в сингулярные флуктуации в виде пар не связанных друг с другом вихрей и антивихрей [4], существующих в псевдощелевом состоянии недодопированных купратов. Дираковский характер спектра нодальных квазичастиц [1] позволяет, используя аналогию с квантовой электродинамикой в двух измерениях ($QED_{2+1}$), описать псевдощелевое состояние в рамках феноменологической схемы [4], в которой несверхпроводящая фаза с псевдощелью проявляется как некая алгебраическая ферми-жидкость [4], при фазовом переходе в SC-состояние играющая такую же роль, что и нормальная ферми-жидкость в теории BCS. Вихри и антивихри, являющиеся элементарными возбуждениями в схеме $QED_{2+1}$, проявляются как топологические дефекты фазы параметра порядка и возникают в результате квантовых или тепловых флуктуаций. Подобные дефекты могут возникать в результате изменения знака отдельных токовых циркуляций [50] в состоянии, соответствующем фазе с потоком. В зонной схеме их можно поставить в соответствие с долгоживущими квазистационарными состояниями пар частиц с большим суммарным импульсом [26].

Фазовый переход в SC-состояние в $2D$-системах с параметром порядка, имеющим ноды, неизбежно приобретает черты перехода Березинского – Костерлица – Таулесса, поскольку квазичастицы, уменьшая фазовую жесткость, способствуют термическому возбуждению вихрей и антивихрей. Джозефсоновская связь между слоями $CuO_2$ [18], как и между эквивалентными областями $\Xi_j$ при спаривании с большим импульсом, может подавить флуктуации фазы и приблизить температуру перехода к значению, определяемому теорией среднего поля. Аналогичный эффект возникает и в результате конкуренции SC-и DDW-состояний с учетом неоднородного распределения носителей, вводимых при допировании, по разным медно-кислородным плоскостям в элементарной ячейке [5].

Все успешные феноменологические подходы к проблеме сверхпроводимости купратов так или иначе связаны с учетом неоднородности, либо в реальном (например, страйпы), либо в импульсном пространстве [1]. При спаривании с большим импульсом с неизбежностью возникает пространственно-неоднородное SC-состояние, подобное FFLO-состоянию, с распределением амплитуды параметра порядка, аналогичным DDW. Спаривающее отталкивание приводит к нодам параметра порядка, способствуя уменьшению фазовой жесткости SC-конденсата. Эти два принципа в значительной степени объединяют [51] различные теоретические подходы к описанию сверхпроводимости купратов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования России (грант № Е02-3.4-147), а также в рамках Федеральной целевой программы «Интеграция» (грант № Б0049), РФФИ (грант № 02-02-17133) и Федеральной целевой научно-технической программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» (государственные контракты №№ 40.072.1.1.1173, 40.012.1.1.1357).

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Orenstein and A. J. Millis, Science **288**, 468 (2000).
2. E. W. Carlson, V. J. Emery, S. A. Kivelson, and D. Orgad, in *Physics of Conventional and Unconventional Superconductors*, ed. by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, Springer-Verlag (2002).
3. V. J. Emery and S. A. Kivelson, Nature (London) **374**, 434 (1995).
4. M. Franz, Z. Tešanović, and O. Vafek, Phys. Rev. B **66**, 054535 (2002).
5. S. Chakravarty, H.-Y. Kee, and K. Volker, Nature **428**, 53 (2004).
6. D. A. Ivanov, P. A. Lee, and X-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **84**, 3958 (2000).
7. S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, and C. Nayak, Phys. Rev. B **63**, 094503 (2001).

8. P. A. Lee, N. Nagaosa, T. K. Ng, and X.-G. Wen, Phys. Rev. B **57**, 6003 (1998).
9. S.-C. Zhang, Science **275**, 1089 (1997).
10. M. Guidry, L.-A. Wu, Y. Sun, and C.-L. Wu, Phys. Rev. B **63**, 134516 (2001).
11. C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **63**, 2144 (1989).
12. G. I. Japaridze, A. P. Kampf, M. Sekania, P. Kakashvili, and Ph. Brune, Phys. Rev. B **65**, 014518 (2001).
13. P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
14. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
15. H. Shimahara, E-print archives, cond-mat/0406384.
16. A. A. Abrikosov, Physica C **341–348**, 97 (2000).
17. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).
18. P. W. Anderson, P. A. Lee, M. Randeria, T. M. Rice, N. Trivedi, and F. C. Zhang, J. Phys.: Condens. Matter **24**, R755 (2004).
19. V. I. Belyavsky and Yu. V. Kopaev, Phys. Rev. B **67**, 024513 (2003); Phys. Lett. A **322**, 244 (2004).
20. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
21. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1918 (1959).
22. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
23. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **118**, 941 (2000).
24. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, В. М. Софронов, С. В. Шевцов, ЖЭТФ **124**, 1149 (2003); V. I. Belyavsky, Yu. V. Kopaev, and S. V. Shevtsov, J. Supercond. & Novel Magn. **17**, 297 (2004).
25. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, Письма в ЖЭТФ **76**, 51 (2002).
26. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, Ю. Н. Тогушова, С. В. Шевцов, ЖЭТФ **126**, 672 (2004).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. 1, Наука, Москва (1995).
28. В. П. Минеев, К. В. Самохин, *Введение в теорию необычной сверхпроводимости*, Изд-во МФТИ, Москва (1998).
29. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, ГИФМЛ, Москва (1962).
30. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, Физматгиз, Москва (2001).
31. D. A. Ivanov, P. A. Lee, and X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **84**, 3958 (2000).
32. Z. Y. Weng, D. N. Sheng, and C. S. Ting, Phys. Rev. B **59**, 8993 (1999); V. N. Muthukumar and Z. Y. Weng, Phys. Rev. B **65**, 174511 (2003).
33. P. W. Anderson, Science **237**, 1196 (1987).
34. Z.-X. Shen, W. E. Spicer, D. M. King, D. S. Dessau, and B. O. Wells, Science **267**, 343 (1995).
35. Y. Ren, J. H. Xu, and C. S. Ting, Phys. Rev. Lett. **74**, 3680 (1995).
36. E. Babaev, L. D. Faddeev, and A. J. Niemi, Phys. Rev. B **65**, 100512 (2002).
37. J. E. Hirsch, Phys. Rev. B **59**, 11962 (1999); Physica C **341–348**, 213 (2000).
38. P. A. Lee and X. G. Wen, Phys. Rev. **78**, 4111 (1997).
39. F. C. Zhang, C. Gros, T. M. Rice, and H. Shiba, Supercond. Sci. Technol. **1**, 36 (1988).
40. A. Paramekanti, M. Randeria, and N. Trivedi, Phys. Rev. Lett. **87**, 217002 (2001); E-print archives, cond-mat/0305611.
41. R. B. Laughlin, E-print archives, cond-mat/0209269.
42. G. Baskaran, Z. Zou, and P. W. Anderson, Sol. St. Comm. **63**, 973 (1987); P. W. Anderson, G. Baskaran, Z. Zou, and T. Hsu, Phys. Rev. Lett. **58**, 2790 (1987).
43. N. Nagaosa and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **64**, 2450 (1990).
44. P. B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60**, 821 (1988); P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **63**, 680 (1989).
45. X. G. Wen and P. A. Lee, Phys. Rev. Lett. **76**, 503 (1996).
46. J. B. Marston and I. Affleck, Phys. Rev. B **39**, 11538 (1989); T. Hsu, J. B. Marston, and I. Affleck, Phys. Rev. B **43**, 2866 (1991).
47. B. A. Bernevig, G. Chapline, R. B. Laughlin, Z. Nazario, and D. I. Santiago, E-print archives, cond-mat/0312573.
48. G. Zhao, Phys. Rev. B **64**, 024503 (2001).
49. B. H. Brandow, Phys. Rev. B **65**, 054503 (2002).
50. S. Chakravarty, Phys. Rev. B **66**, 224505 (2002).
51. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, УФН **174**, 457 (2004).