

СХОДЯЩЕЕСЯ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ ВОДОРОДА БЕЗ ТАИНСТВ

А. Н. Старостин, В. К. Периз*

*Государственный научный центр Российской Федерации
«Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований»
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 18 июня 2004 г.

Приводится подробный независимый вывод уравнения состояния слабонеидеальной водородной плазмы. Мотивацией работы является требование высокой точности к уравнению состояния солнечной плазмы в связи с задачами современной гелиосейсмологии, позволяющей из результатов оптических измерений восстанавливать локальную скорость звука на Солнце с точностью, лучшей чем 10^{-4} . Существующие выражения для второго вириального коэффициента в разложении термодинамического потенциала Гельмгольца для системы электронов и протонов по степеням активностей этих частиц содержат определенные процедуры устранения возникающих расходимостей, которые вызывают вопросы и нуждаются в независимой проверке. Представленное уравнение состояния используется для качественного выяснения точности различных физических и химических моделей. Приведены рассчитанные значения скорости звука и показателя адиабатической сжимаемости вдоль солнечной траектории для модельной водородной плазмы. В расчетах учитываются релятивистские поправки, влияние вырождения электронов, давление излучения в плазме, кулоновское взаимодействие в приближении Дебая – Хюккеля с дифракционными и обменными поправками, а также сходящиеся вклады от связанных состояний и состояний рассеяния.

PACS: 51.30.+i, 52.25.Kn, 52.27.Gr

1. ВВЕДЕНИЕ

Уникальную возможность проверить с высокой точностью уравнение состояния (УрС) слабонеидеальной плазмы водорода открывает гелиосейсмология, позволяющая из результатов оптических измерений восстанавливать локальную скорость звука на Солнце с точностью, лучшей чем 10^{-4} [1–3]. Сравнение различных теоретических моделей с экспериментом позволяет проверить существующие способы учета вкладов связанных состояний и континуума, представленных в рамках физической модели в выражениях для второго вириального коэффициента (ВВК) [4–6].

Считается, по крайней мере в физической литературе, что, начиная с работ [7–12], изложенных также в монографиях [13, 14] (где приведена обширная библиография), вопрос о виде УрС слабонеидеального водорода принципиально решен с точностью до

Γ_D^2 , где

$$\Gamma_D = e^2 \kappa_D / T$$

— дебаевский параметр неидеальности (e — заряд электрона, κ_D — обратный дебаевский радиус, T — температура плазмы в энергетических единицах). В частности, принято, что вклад связанных состояний (атомные статистические суммы) в давление плазмы представлен сходящимся выражением Планка – Бриллюэна – Ларкина или просто Планка – Ларкина [6, 8–14].

В то же время в астрофизической литературе статсумма по атомным состояниям представлена в виде, приведенном в [4], и формула Планка – Ларкина (Р-Л) вызывает критику [15], так как сходимости в выражении Р-Л возникает уже начиная с состояний с главными квантовыми числами

$$n \lesssim n_{max} \sim \sqrt{Ry/T},$$

где

$$Ry = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \approx 13.598 \text{ эВ}$$

*E-mail: staran@triniti.ru

— потенциал ионизации атома водорода,

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

— приведенная масса, m_e , m_p — массы электрона и протона, \hbar — постоянная Планка, тогда как в излучении из солнечной фотосферы наблюдаются вклады серии Бальмера с $n \approx 17 > 6 \gtrsim n_{max}$ [16] для $T \approx 5800$ К. Независимо от теоретического обоснования тех или иных выражений для вклада связанных состояний в УрС плазмы водорода в недрах Солнца, гелиосейсмология позволяет отобрать те из них, которые лучше соответствуют эксперименту, и оказывается, что теория, использующая формулу Р-Л, ближе к эксперименту [6], чем теория [4], в которой вклад возбужденных состояний ограничен ионизацией плазменными микрополями (механизм Унзольда [17]).

В работе [18] для вклада связанных состояний приводилось выражение, отличающееся от формулы Р-Л. Это же выражение позднее было подтверждено в работах [19, 20]. В настоящей работе обращается внимание на внутренне противоречивый способ получения сходящихся выражений для второго вириального коэффициента, представленных в литературе (см., например, [13, 14]), так как в их основе лежат выражения типа выражения Бета–Уленбека [21], теорема Левинсона [22] и методы регуляризации расходящихся выражений [8, 10–12], применимость которых для дальнего действия кулоновского взаимодействия неочевидна.

Тот факт, что из исходно неприменимых расходящихся выражений получаются конечные результаты, нередко встречается в теоретической физике, но используемые для этого рецепты в ряде случаев, к каковым мы относим вывод УрС слабонеидеальной плазмы, содержат элементы некоторой мистики, и при их некритическом использовании это может привести к ошибкам и противоречиям с экспериментом.

В работе [8] расходимость атомной «статсуммы» Σ , включающей суммирование по дискретным состояниям и состояниям рассеяния, «устраняется» вычитанием вкладов с одной и двумя волнистыми линиями, соответствующими учету взаимодействия в первом порядке термодинамической теории возмущений (этот вклад исчезает за счет электронейтральности) и во втором порядке, так как этот вклад уже учтен при суммировании ряда кольцевых диаграмм, приводящих к конечному выражению для кулоновского взаимодействия в приближении Де-

бая–Хюккеля. Приведенный в работе [8] ответ соответствует регуляризации типа

$$\Sigma_{P-L} \equiv \Sigma_{reg}(I) = \Sigma(I) - \Sigma(0) - I \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \right)_0, \quad (1)$$

где I — потенциал ионизации атома водорода $I = Ry$,

$$\Sigma(I) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp\left(-\frac{I}{n^2 T}\right), \quad (2)$$

$$\Sigma_{P-L} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\exp\left(-\frac{I}{n^2 T}\right) - 1 - \frac{I}{n^2 T} \right). \quad (3)$$

Этот способ регуляризации при вычислении ВВК был расширен в работе [10] до вычитания вкладов вплоть до третьей производной по e^2 в тейлоровском разложении интеграла по волновым векторам, характеризующим состояния рассеяния в формуле Бета–Уленбека.

В работах [11–13] устранение расходящихся членов в ВВК связывалось с дебаевской экранировкой в плазме, позволяющей применять формулу Бета–Уленбека и теорему Левинсона.

Ниже будет показано, что расходимости, возникающие при вычислении вклада связанных состояний, устраняются лишь частью диаграммы с одной волнистой линией, соответствующей учету дискретных состояний в теореме полноты кулоновских волновых функций, описывающих относительное движение системы электрон–протон. Учет состояний континуума с использованием теоремы полноты кулоновских функций для этой диаграммы наряду с вычитанием вклада двух перекладин, принятых во внимание при получении выражения Дебая–Хюккеля, устраняет расходимости в выражении для вклада состояний рассеяния в ВВК.

Получающееся сходящееся выражение для атомной статистической суммы отличается от формулы Планка–Ларкина. Вычислен также конечный вклад состояний рассеяния от всех парных взаимодействий для ВВК. Вычисление вкладов состояния рассеяния потребовало определения корректных способов обращения с квадратами волновых функций непрерывного спектра, содержащих δ -функции в импульсном представлении. Выражения для состояний притяжения в ВВК обобщены на случай вырождения электронов, что представляется актуальным в связи с астрофизическими приложениями, например, для гелиосейсмологии, так как солнечная плазма является слабонеидеальной и разложение УрС

до второго вириального коэффициента с учетом вырождения электронов вполне оправдано.

Интересно отметить, что суммарный по дискретным и континуальным состояниям вклад в ВВК от состояний притяжения с точностью до некоторых исправлений в логарифмическом члене совпадает с выражением, приведенным в работе [13]. Будет показано, что при самосогласованном расчете вкладов дискретного и непрерывного спектров можно использовать формулу Планка – Ларкина совместно с должным образом определенным вкладом от состояний рассеяния. Проблема «правильного» учета регуляризованной атомной статсуммы возникает в рамках химической модели, в которой атомы (молекулы) объявляются «хорошими» квазичастицами (известными из расчетов или эксперимента), а вкладами от взаимодействия в непрерывном спектре пренебрегается при вычислении $U_p C$.

Такое приближение становится зачастую неизбежным из-за сложности описания равновесной многокомпонентной плазмы, где учет состояний рассеяния соответствует описанию многочастичного взаимодействия (начиная с He I, где необходимо решение квантовой задачи рассеяния для трех тел и т. д.).

В работе проводится сравнение полной физической модели с химическими моделями, использующими тот или иной способ регуляризации атомной статсуммы. Для слабоионизованной плазмы различие между этими способами несущественно (при $I/T \gg 1$). Для горячей плазмы, каковой является плазма вблизи центра Солнца ($I/T \ll 1$) учет только дискретного спектра без соответствующего вклада от состояний рассеяния является превышением точности.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 анализируется ряд теории возмущений и формулируется последовательный способ учета нейтральности плазмы в разложении по степеням активности, необходимость в котором возникает уже при расчете вкладов обменного взаимодействия и приближения Дебая – Хюккеля с учетом поправок на дифракцию и экранировку «одетых» частиц.

В разд. 3 анализируется вклад лестничных диаграмм в выражение для ВВК, формулируются правила регуляризации при интегрировании выражений, содержащих квадраты волновых функций в импульсном пространстве (**p**-пространстве).

В разд. 4 излагается расчет вклада связанных состояний с использованием точных выражений для кулоновских волновых функций дискретного спектра в **p**-пространстве, полученных Фоком. Приводится сравнение с формулой Планка – Ларкина.

В разд. 5 представлен расчет вклада в ВВК состояний рассеяния для взаимодействий в полях отталкивания и притяжения. Проводится сравнение с результатами работы [13].

В разд. 6 приводится общее уравнение состояния слабонеидеальной плазмы водорода применительно к условиям, реализующимся на Солнце (где, конечно, необходим учет большого количества химических элементов). В центральной области с параметрами плазмы $T \sim 1$ кэВ, $\rho \sim 150$ г/см³ необходимо учитывать давление излучения в среде. Приводятся соответствующие выражения.

В разд. 7 представлены результаты численных расчетов скорости звука и адиабатического показателя сжимаемости водородной плазмы вдоль солнечной траектории в рамках так называемой *S*-модели [1].

2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для вычисления термодинамических функций слабонеидеальной плазмы водорода можно воспользоваться техникой Мацубары [23, 24], либо неравновесной техникой функций Грина Каданова – Бэйма – Келдыша [25–27]. В ряде случаев мы воспользуемся также вторым способом, так как он позволяет получить обобщение на неравновесный случай, а также учесть влияние уширения состояний, приводящее к наблюдаемым дискретным спектрам, на термодинамические функции плазмы.

Следуя [25], для давления плазмы P можно получить поправки к давлению P_0 идеального газа, состоящего из невзаимодействующих протонов и электронов [28]:

$$P = P_0 + P_H + P_{exch} + P_{D-H} + \delta P, \quad (4)$$

где включены обсуждаемые в этом разделе P_H — хартриевская поправка, P_{exch} — обменная поправка за счет электрон-электронного взаимодействия, P_{D-H} — поправка приближения Дебая – Хюккеля, а также поправки более высокого порядка δP , учитывающие вклад лестничных диаграмм (см. разд. 3).

Протоны здесь мы будем считать невырожденными, а их идеально-газовая концентрация, называемая активностью ζ_p , связана в большом каноническом ансамбле с химическим потенциалом μ_p и температурой ($\beta = T^{-1}$):

$$\zeta_p = 2\lambda_p^{-3} \exp(\beta\mu_p), \quad (5)$$

где

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_p T}}$$

— тепловая длина волны Де-Бройля. Для давления идеального газа протонов имеем

$$P_{0p} = T\zeta_p. \tag{6}$$

Электроны могут быть вырождены (например, в центре Солнца $n_e\lambda_e^3 \approx 0.6$), поэтому их активность ζ_e мы будем выражать [28] через идеально-газовую, но в общем случае верную для вырожденных частиц, концентрацию n_e^0 :

$$\zeta_e = n_e^0(\mu_e) = \frac{2}{\lambda_e^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{\exp(x-y)+1}, \tag{7}$$

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_e T}}, \quad y = \frac{\mu_e}{T}.$$

Соответственно давление идеального газа вырожденных электронов записывается в виде [28]:

$$P_{0e} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} T \frac{2}{\lambda_e^3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{\exp(x-y)+1}. \tag{8}$$

В этом приближении условие электронейтральности записывается в виде

$$\zeta_p = \zeta_e. \tag{9}$$

Следующая за идеально-газовым приближением

$$P_0 = P_{0p} + P_{0e}$$

хартриевская поправка (см. рис. 1а) имеет вид [7, 13, 28] для термодинамического потенциала Гельмгольца $\Omega = -PV$ (V — объем системы):

$$\frac{\delta\Omega_H}{V} = \tilde{V}(0)(\zeta_e - \zeta_p)^2. \tag{10}$$

Здесь $\tilde{V}(0)$ — фурье-образ кулоновского потенциала взаимодействия при нулевой передаче импульса. При регуляризации интеграла

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \lim_{\varkappa \rightarrow 0} \int \frac{e^2}{r} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \varkappa r) d\mathbf{r} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \varkappa^2}, \tag{11}$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3), \quad |\mathbf{r}| = r,$$

$$d\mathbf{r} = dr_1 dr_2 dr_3,$$

с помощью $\exp(-\varkappa r)$, $\varkappa \rightarrow 0$ — параметр регуляризации, получим

$$\tilde{V}(0) = \frac{4\pi e^2}{\varkappa^2}. \tag{12}$$

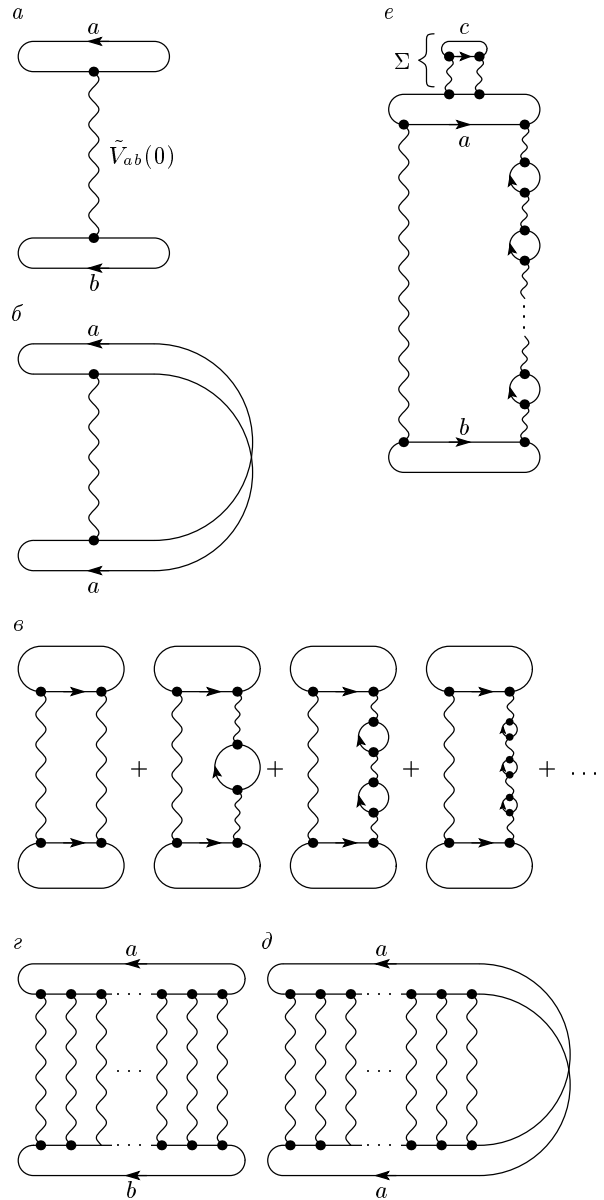


Рис. 1. Фейнмановские диаграммы в технике Матцубары [23, 24] (сплошная линия — функция Грина, волнистая линия — фурье-компонента потенциала взаимодействия): а — хартриевская поправка, см. формулы (10), (109); б — приближение Хартри-Фока (обменное взаимодействие) (15); в — приближение Дебая-Хюккеля (16), (43); г — лестничная диаграмма (58), (59), (87); д — лестничная диаграмма (обменное взаимодействие) (79), (166), (167), (170); е — диаграмма, описывающая влияние среды (учет собственно энергетической вставки Σ_c) на дебай-хюккелевское экранирование (57)

При таком способе регуляризации фурье-компоненты потенциала, выражение (10) обращается в нуль из-за условия электронейтральности (9). В общем случае многокомпонентной плазмы условие (9) имеет вид (z_k — заряд частицы сорта k в единицах e)

$$\zeta_e = \sum_k z_k \zeta_k, \quad (13)$$

а выражение (10) обобщается очевидным образом:

$$\frac{\delta\Omega_H}{V} = \tilde{V}(0) \left(\zeta_e - \sum_k z_k \zeta_k \right)^2. \quad (14)$$

В следующем, хартри-фоковском, приближении (см. рис. 1б), получается известный [25, 28, 29] конечный ответ для обменной поправки за счет электрон-электронного взаимодействия. В случае невырожденных электронов, например, имеем [28] в первом борновском приближении

$$\frac{\delta\Omega_{exch}}{V} = -\frac{2\pi e^2 \hbar^2}{m_e T} \zeta_e^2. \quad (15)$$

Здесь для ζ_e следует брать невырожденный предел ($\exp(-y) \gg 1$) в выражении (7):

$$\zeta_e = 2\lambda_e^{-3} \exp(\mu_e/T).$$

Мы приведем более общее выражение, содержащее сумму по всему борновскому ряду, в разд. 5.

Следующие по потенциалу взаимодействия кольцевые диаграммы [30, 31] (см. рис. 1б) приводят к дебай-хюккелевскому вкладу (см., например, [7–14, 24]):

$$\frac{\delta\Omega_{D-H}}{V} = -T \frac{\kappa_D^3}{12\pi}. \quad (16)$$

Здесь κ_D — обратный дебаевский радиус [24, 32],

$$\kappa_D^2 = 4\pi e^2 \sum_k z_k^2 \left(\frac{\partial n_k}{\partial \mu_k} \right)_T. \quad (17)$$

Выражение (17) было строго получено Фрадким [32], который показал, что в правой части выражения (17) фигурируют производные от физических концентраций n_k по химическим потенциалам. В теории возмущений можно ограничиться значениями активностей $n_k^0(\mu_k) = \zeta_k$.

Напомним, что физические концентрации связаны с химическими потенциалами соотношениями [28]

$$n_k = - \left(\frac{\partial(\Omega/V)}{\partial \mu_k} \right)_T. \quad (18)$$

Для физических концентраций имеет место традиционное соотношение электронейтральности

$$n_e = \sum_k z_k n_k. \quad (19)$$

Если попытаться найти связь физических концентраций с активностями, воспользовавшись соотношением (18), можно получить, что с учетом несимметрии плазмы за счет, например, электронного обмена, найденные значения ζ_k не удовлетворяют соотношению нейтральности для активностей (9) или (13), что приводит к наличию некомпенсируемой расходимости от хартриевского вклада (10) в термодинамический потенциал. В работе [7] для устранения такой расходимости полагалось $\tilde{V}(0) = 0$.

Рассмотрим простейшую модель невырожденной плазмы, в которой пренебрежем обменным вкладом $\delta\Omega_{exch}$ по сравнению с дебай-хюккелевским, что предполагает малость параметра

$$\frac{(\lambda_e \kappa_D)^2}{\Gamma} \ll 1.$$

В этой модели

$$\Omega = \Omega_0 + \delta\Omega_{D-H}. \quad (20)$$

Используя в (17) вместо концентраций n_k значения активностей, из (18) получим

$$n_k = \zeta_k \left(1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k^2 \right), \quad (21)$$

$$n_e = \zeta_e \left(1 + \frac{\Gamma_D}{2} \right). \quad (22)$$

При $z_k \neq 1$ из (21) и (22) с учетом

$$n_e = \sum_k z_k n_k,$$

получим, что

$$\begin{aligned} \zeta_e &= \frac{n_e}{1 + \frac{\Gamma_D}{2}} = \frac{\sum_k z_k n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2}} \neq \sum_k z_k \zeta_k = \\ &= \sum_k \frac{z_k n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

То есть уже в рамках такой простейшей модели происходит нарушение условия (13). Для однозарядной водородной плазмы в этой модели $\zeta_e = \zeta_p$, однако это условие нарушается при учете обмена. Для согласования условий (13) и (19), что необходимо для

устранения расходимости хартриевского члена (14) при $\varkappa \rightarrow 0$, воспользуемся следующим приемом. Поскольку мы считаем, что для отсутствия расходимости хартриевского члена необходимо выполнение одновременно условий (13) и (19), при определении концентраций с помощью определения (18) необходимо дифференцировать термодинамический потенциал по химическим потенциалам с учетом связи, налагаемой соотношением (13). Будем находить величину n_e из условия (19), а ζ_e — из (13)

$$n_e + \sum_k n_k = \sum_k (z_k + 1)n_k = -\beta \sum_k \left(\frac{\partial(\Omega/V)}{\partial \zeta_k} \right)_T \zeta_k. \quad (24)$$

В выражении (24) дифференцирование и суммирование проводятся только по активностям ионов, а вместо ζ_e в Ω подставлено соотношение (13). В рамках модели, описываемой уравнением (20), из (24) имеем

$$\sum_k (z_k + 1)n_k = \sum_k (z_k + 1)\zeta_k + \frac{\Gamma_D}{2} \sum_k z_k (z_k + 1)\zeta_k. \quad (25)$$

Из выражения (25) получаем (ср. с (21))

$$\zeta_k = \frac{n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k}. \quad (26)$$

Легко видеть, что из соотношения электронейтральности для физических концентраций (19) и для активностей (13) с учетом (26) получим

$$n_e = \sum_k z_k n_k = \sum_k \zeta_k z_k \left(1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k \right) = \zeta_e + \frac{\Gamma_D}{2} \sum_k z_k^2 \zeta_k. \quad (27)$$

Из формулы (27) следует

$$\zeta_e = \sum_k z_k n_k - \frac{\Gamma_D}{2} \sum_k \frac{z_k^2 n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k} = \sum_k \frac{z_k n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k}. \quad (28)$$

То есть, в отличие от выражения (23), где использовано независимое определение (18) для ионов и электронов, определение (24) приводит к согласованному выполнению нейтральности (13) и (19) и устраняет расходимость хартриевского члена. Для явного

нахождения величин ζ_k через физические концентрации n_k воспользуемся определением обратного дебаевского радиуса (17)

$$\varkappa_D^2 = \frac{4\pi e^2}{T} \sum_k \frac{z_k (z_k + 1) n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k}. \quad (29)$$

Здесь суммирование происходит по сортам ионов. Умножая (29) на $(e^2/T)^2$, получим уравнение для

$$\Gamma_D(\zeta_k) \equiv \frac{\varkappa_D e^2}{T}$$

через физические концентрации n_k :

$$\Gamma_D^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{T} \right)^3 \sum_k \frac{z_k (z_k + 1) n_k}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_k}. \quad (30)$$

Находя $\Gamma_D(n_k)$ из уравнения (30), можно найти активности ζ_k , ζ_e из выражений (26), (28).

В стандартной теории Дебая–Хюккеля в большом каноническом ансамбле [33, 34] из выражений (18), (19) вместо уравнения (30) обычно используется уравнение

$$\Gamma_D^2 = 4\pi \left(\frac{e^2}{T} \right)^3 \sum_m \frac{z_m^2 n_m}{1 + \frac{\Gamma_D}{2} z_m^2}. \quad (31)$$

Здесь суммирование происходит по ионам и электронам.

Можно сравнить решение уравнений (30) и (31) в пределе

$$\langle z \rangle \gg 1, \quad \frac{\Gamma_D}{2} \langle z \rangle \gtrsim 1, \quad \Gamma_D \ll 1.$$

(Строго говоря, условие применимости приближения Дебая–Хюккеля требует также выполнения неравенства $(\Gamma_D/2)z_m \ll 1$.) Тогда из уравнения (30) следует

$$\Gamma_D^N = 2 \frac{e^2}{T} (\pi n_e)^{1/3}. \quad (32)$$

Индекс «N» означает, что использовано «новое» уравнение (30). В то же время из (31) в указанном случае получим (индекс «O» означает «старое»)

$$\Gamma_D^O = 2 \left(\frac{e^2}{T} \right)^{3/2} (\pi n_e)^{1/2}. \quad (33)$$

При экстраполяции в область $\Gamma_D \gg 1$, что, разумеется, неоправданно, из уравнений (30) и (31) получим

$$\Gamma_D^O = \Gamma_D^N = 2 \frac{e^2}{T} (\pi n_e)^{1/3}. \quad (34)$$

При $\Gamma_D z_m^2 \ll 1$ из уравнений (30) и (31) следует

$$\Gamma_D^N = \Gamma_D^O = \varkappa \frac{e^2}{T}, \quad \varkappa^2 = 4\pi \frac{e^2}{T} \sum_k z_k (z_k + 1) n_k.$$

Отметим, что связи концентраций с активностями (21), (22) и (26)–(28) дают одно и то же уравнение состояния в рамках модели (20):

$$P = T \left(\sum_k \zeta_k + \zeta_e \right) + T \frac{\Gamma_D}{3} \left(\sum_k z_k^2 \zeta_k + \zeta_e \right). \quad (35)$$

Если не предполагать условие нейтральности в активности (игнорировать соотношение (13)) и воспользоваться соотношениями (21), (22), получим (в пределе $\Gamma_D \ll 1$):

$$P = T \sum_k (z_k + 1) n_k - \frac{\Gamma_D}{6} \sum_k z_k (z_k + 1) n_k. \quad (36)$$

Здесь суммирование распространяется только по ионам и использовано условие нейтральности (19). Если же в (35) использовать условие (13) и решение (26), (28), получим в точности УрС, выражаемое тем же уравнением (36). Соотношение (13) для решений (26), (28) означает

$$n_e \Delta \mu_e^N = \sum_k z_k n_k \Delta \mu_k. \quad (37)$$

Значок « Δ » означает поправку к идеально-газовому приближению μ_a^0 :

$$\mu_a = \mu_a^0 + \Delta \mu_a$$

(см. [28]; например, $\mu_e^0 = T \ln(n_e \lambda_e^3 / 2)$). Из выражения (26) следует

$$\Delta \mu_k^N = -T \frac{\Gamma_D}{2} z_k. \quad (38)$$

Из формулы (37) с учетом (38) получим

$$n_e \Delta \mu_e^N = -T \frac{\Gamma_D}{2} \sum_k z_k^2 n_k. \quad (39)$$

В стандартной теории Дебая–Хюккеля в каноническом ансамбле (см. [28]) имеем

$$\Delta \mu_k^O = -T \frac{\Gamma_D}{2} z_k^2 \quad (40)$$

(ср. выражение (40) с решением (21)). А для электронов, аналогично (22), получим

$$\Delta \mu_e^O = -T \frac{\Gamma_D}{2}. \quad (41)$$

Соотношение (37) для решений (40) и (41) не выполняется.

С учетом связи концентраций (19) соотношение между химическими потенциалами и свободной энергией F имеет вид (ср. с (24)):

$$\sum_k \Delta \mu_k n_k + n_e \Delta \mu_e = \sum_k n_k \frac{\partial(\Delta F/V)}{\partial n_k} + n_e \frac{\partial(\Delta F/V)}{\partial n_e}. \quad (42)$$

Это соотношение в теории Дебая–Хюккеля выполняется как для решений (38), (39), так и для решений (40), (41).

В области применимости теории $z_k^2 \Gamma_D \ll 1$ уравнение состояния (36) не чувствительно к выбору решений уравнений (24), однако выбор в пользу условия (13) диктуется требованием отсутствия расходимости выражения (14) и других (более высоких) порядков термодинамической теории возмущений, например, вклада лестничных диаграмм в разложении Ω по степеням активности, конечность которых обусловлена, в частности, обращением в нуль выражения (14) (см. разд. 3–5).

Приближение Дебая–Хюккеля, представленное в статическом пределе вкладом кольцевых диаграмм [24] (см. рис. 1 в), содержит ряд поправок, которые могут быть получены с использованием техники, описанной в работах [25, 26] (спины частиц положены для простоты равными 1/2):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Omega}{V} = & -4 \sum_{i,j} \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \lambda^2 \int \frac{d\mathbf{P} d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^9} \frac{\exp(-\beta(\varepsilon_k^{ij} - \varepsilon_q^{ij})) - 1}{\varepsilon_q^{ij} - \varepsilon_k^{ij}} n_i \left(\frac{m_i}{M} \mathbf{P} + \mathbf{q} \right) \left(1 - n_i \left(\frac{m_i}{M} \mathbf{P} + \mathbf{k} \right) \right) \times \\ & \times n_j \left(\frac{m_j}{M} \mathbf{P} - \mathbf{q} \right) \left(1 - n_j \left(\frac{m_j}{M} \mathbf{P} - \mathbf{k} \right) \right) \frac{16\pi^2 e^4 z_i^2 z_j^2}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 \left[(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + 4\pi e^2 \lambda \Pi^R(\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{V} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{k})) \right]}, \quad (43) \end{aligned}$$

где интегрирование по параметру λ соответствует интегрированию по заряду $e^2 \mapsto e^2\lambda$; \mathbf{P} — полный импульс частиц i, j ; \mathbf{q}, \mathbf{k} — волновые векторы относительного движения центра масс соответственно до и после взаимодействия; $n_i(\mathbf{q})$ — числа заполнения для частиц сорта i ; m_i, z_i — масса и заряд (в элементарных единицах) частицы сорта i ; $M = m_i + m_j$ — суммарная масса;

$$\varepsilon_k^{ij} = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}, \quad \mu = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$$

— приведенная масса частиц i и j ;

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}/M, \quad \hbar|\mathbf{V}|q \sim \hbar|\mathbf{V}|\varkappa_D < T.$$

Это выражение записано для общего случая, допускающего учет вырождения и нестатические поправки. Учет вклада двух перекалин при суммировании кольцевых диаграмм, который следует вычесть из лестничных диаграмм (см. рис. 1з, д), описывающих взаимодействие пары частиц в континууме, соответствует замене $4\pi e^2 \lambda \Pi^R$ (где Π^R — запаздывающий поляризационный оператор [24–27], определяемый суммой вкладов всех частиц, участвующих в экранировке кулоновского взаимодействия) в (43) в знаменателе последнего сомножителя на регуляризующий параметр \varkappa^2 (ср. (11), (12)).

Статическое приближение означает применимость условия

$$\max\{T, \varepsilon_{Fi}\} \gg \hbar\omega_{pi}.$$

Здесь ε_{Fi} — фермиевская энергия частиц i -го сорта, ω_{pi} — их плазменная частота [28, 24].

Так, в невырожденном случае ($n_i \ll 1$) из (43) получается

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{V} &= -4 \sum_{i,j} \frac{\exp(\beta(\mu_i + \mu_j))}{\lambda_\Sigma^3} \times \\ &\times \int_0^1 d\lambda \frac{\lambda}{2} \int \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^6} \frac{\exp(-\beta\varepsilon_k^{ij}) - \exp(-\beta\varepsilon_q^{ij})}{(\varepsilon_q^{ij} - \varepsilon_k^{ij})(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2} \times \\ &\times \frac{16\pi^2 e^4 z_i z_j}{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + 4\pi e^2 \lambda \Pi^R(\mathbf{q} - \mathbf{k}, 0)}. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$\lambda_\Sigma = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{MT}}.$$

Замена множителя

$$\frac{\exp(-\beta\varepsilon_k^{ij}) - \exp(-\beta\varepsilon_q^{ij})}{\varepsilon_q^{ij} - \varepsilon_k^{ij}}$$

на

$$\beta \exp(-\beta\varepsilon_k^{ij})$$

(по параметру $T \gg \hbar\omega_{Ti}^{ij}$, где $v_T^{ij} \sim \sqrt{2T/\mu}$ — тепловая скорость относительного движения) приводит к приближению:

$$\frac{\Delta\Omega}{V} = -\frac{T\varkappa_D^4}{4\pi^2} \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + 4\pi e^2 \lambda \Pi^R(q)}. \quad (45)$$

Здесь

$$\varkappa_D^2 = 4\pi e^2 \Pi^R(0)$$

— квадрат обратного дебаевского радиуса,

$$\Pi^R(q) \equiv \Pi^R(|\mathbf{q}|) \equiv \Pi^R(\mathbf{q}, 0);$$

в невырожденном случае

$$\varkappa_D^2 = 4\pi e^2 \beta \sum_i z_i^2 n_i.$$

В обычно используемом приближении, состоящем в замене $\Pi^R(q)$ на его значение $\Pi^R(0)$ из (45) и (17), получим выражение (16).

Здесь необходимо сделать уточнение. В выражении (45) следует разложить $\Pi^R(q)$ до второй производной по q [35]:

$$\begin{aligned} q^2 + 4\pi e^2 \lambda \Pi^R(q) &\rightarrow q^2 \left(1 + 2\pi e^2 \lambda \frac{\partial^2 \Pi^R}{\partial q^2}(0) \right) + \\ &+ 4\pi e^2 \lambda \Pi^R(0). \end{aligned} \quad (46)$$

Введем величину

$$a = |2\pi e^2 \Pi''(0)|, \quad \Pi'' \equiv \frac{\partial^2 \Pi^R}{\partial q^2}.$$

Для этой величины получим [20, 35]

$$\begin{aligned} 2\pi e^2 \Pi''(0) &= - \sum_i \frac{\pi \hbar^2 e^2 z_i^2}{m_i} \frac{\partial^2 n_i^0}{\partial \mu_i^2} + \\ &+ \frac{\pi \hbar^2}{9} \sum_i \frac{e^2 z_i^2}{m_i} \frac{\partial^3 (\bar{n}_i)}{\partial \mu_i^3}. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь n_i^0 — идеально-газовая концентрация, \bar{n}_i — усреднение кинетической энергии по числам заполнения для частиц сорта i :

$$\bar{n}_i = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2m_i} n_i(\mathbf{p}). \quad (48)$$

С учетом этого обстоятельства дебай-хюккелевская поправка принимает вид [20]:

$$\frac{\Delta\Omega_{D-H}}{V} = -\frac{T\varkappa_D^3}{12\pi} f(a). \quad (49)$$

Здесь

$$f(a) = \frac{3}{2a^{3/2}} \left\{ \arcsin \sqrt{a} - \sqrt{a(1-a)} \right\}. \quad (50)$$

Оценки для водородной плазмы дают

$$2\pi e^2 \Pi''(0) = -173\rho T^{-2}$$

для невырожденного случая (ρ — плотность вещества в г/см³, T — температура в эВ). Для центра Солнца величина $f(a)$ отличается от 1 в третьем знаке после запятой, что с учетом малости дебай-хюккелевской поправки ($\sim 10^{-2}$) по сравнению с идеально-газовым приближением позволяет ограничиться для задач гелиосейсмологии приближением (16) ($f(a) = 1$).

Для «истинного» радиуса экранировки флуктуаций заряда $\Gamma_{scr} = \varkappa^{-1}$ из (46) получим

$$\varkappa^2 = \frac{\varkappa_D^2}{1 + 2\pi e^2 \Pi''(0)}. \quad (51)$$

Из приведенных оценок для величин $\Pi''(0)$ следует, что при температуре плазмы $T \sim 1$ эВ, условие

$$1 + 2\pi e^2 \Pi''(0) = 0$$

выполняется при $n_e \approx 3 \cdot 10^{21}$ см⁻³. В этих условиях, однако, параметр неидеальности

$$\gamma = n^{1/3} e^2 / T \approx 2$$

и данные выражения (47) для $\Pi''(0)$ нуждаются в уточнениях. В области, где $\varkappa^2 < 0$, образуется волна зарядовой плотности, а дебаевская экранировка пропадает. Параметр, по которому следует учитывать поправки порядка a , соответствует величине $(\lambda_e \varkappa_D)^2$, которая оказывается не слишком малой в центре Солнца (близость функции $f(a)$ к единице связана с малостью численного коэффициента при этом параметре). Отношение тепловой длины волны Де-Бройля для электрона к дебаевскому радиусу характеризует квантовые эффекты в процессе дебаевской экранировки, а соответствующие поправки к выражениям (16), (49) (при $f(a) = 1$) носят название дифракционных поправок [12]. Их легко получить из выражения (44) в приближении

$$4\pi e^2 \lambda \Pi^R(\mathbf{q} - \mathbf{k}, 0) = \lambda \varkappa_D^2$$

с учетом экспоненциальных множителей и энергетических знаменателей, содержащихся в этом выражении. В невырожденном случае в первом приближении по параметру $\lambda \varkappa$ из (44) получим (см. [12])

$$\frac{\Delta \Omega_{diff}}{V} = \frac{\pi^{3/2}}{4} T \left(\frac{e^2}{T} \right)^2 \times \left\{ \lambda_{ee} \zeta_e^2 + 2\zeta_e \sum_k \zeta_k z_k^2 \lambda_{ek} + \sum_{kj}' \zeta_k \zeta_j z_k^2 z_j^2 \lambda_{kj} \right\}. \quad (52)$$

Здесь

$$\lambda_{ee} = \frac{\hbar}{\sqrt{m_e T}}, \quad \lambda_{ek} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_{ek} T}}, \quad \lambda_{kj} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_{kj} T}}.$$

Отметим также еще один класс поправок к дебай-хюккелевскому приближению, полученных впервые в работе [8] (см. также [9, 12]). Физически эти поправки связаны с тем, что в экранировке участвуют не свободные частицы, а частицы, взаимодействующие со средой («одетые» частицы, см. рис. 1е). Формально это соответствует учету собственно энергетических поправок к функциям Грина, входящим в поляризационные петли. Поправки, вычисленные в работах [32] и [25, 27], оказываются порядка λ^2 . Классические поправки возникают при учете собственно энергетической диаграммы Σ_i^R [25, 26],

$$\text{Re } \Sigma_i^R = \frac{1}{2} (\Sigma_i^{--} - \Sigma_i^{++}),$$

для частиц сорта i

$$\Sigma_i^{--}(\mathbf{p}) = \int V_q \tilde{V}_q \Pi^{--}(\mathbf{q}) G_i^{--}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^4}, \quad (53)$$

где

$$V_q = \frac{4\pi e^2}{q^2}, \quad \tilde{V}_q = \frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda \varkappa_D^2},$$

$\mathbf{q} = (\mathbf{q}, q_4)$ — 4-вектор.

Вычисление операторов типа Π^{--} с учетом соотношений типа

$$\Pi^{--} = \Pi^R - \Pi^{++}$$

и суммирование при вычислении $\Pi^R(0)$ по всем сортам частиц дает в невырожденном случае (ср. [14])

$$\text{Re } \Sigma_i^R = -\frac{1}{2} \lambda e^2 z_i^2 \varkappa(\lambda). \quad (54)$$

Здесь

$$\varkappa(\lambda) = \sqrt{\lambda} \varkappa_D, \quad \varkappa_D^2 = 4\pi \sum_j e^2 z_j^2 \left(\frac{\partial n_j}{\partial \mu_j} \right).$$

Используя полученное классическое выражение для массового оператора, можно получить для поправки к кинетической функции Грина [27]:

$$G_i^{+-} \equiv G_i^{<}(\mathbf{p}) = -n_i(\omega) \left(G_i^R - (G_i^R)^* \right), \quad (55)$$

где

$$G_i^R = \frac{1}{\omega - \varepsilon_p - \Sigma_i^R(\mathbf{p})}. \quad (56)$$

В выражении (55)

$$n_i(\omega) = \{\exp(\beta(\omega - \mu_i)) + 1\}^{-1}$$

— числа заполнения для фермионов. Учитывая выражение (54) в поправке (43), из формул (55), (56) получим «классическую» поправку к дебай-хюккелевскому члену (индекс «cl» означает, что данный результат имеет классическую природу)

$$\frac{\delta\Omega_{cl}}{V} = -\frac{\pi}{3}T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \left(\sum_i \zeta_i z_i^4\right) \left(\sum_j \zeta_j z_j^2\right). \quad (57)$$

В выражении (57) суммирование идет по всем сортам частиц. В работе [8] вместо $\pi/3$ фигурирует коэффициент $\pi/2$, который впоследствии приводился также в [9]. В книге [13] этот член в разных местах записан с коэффициентом то $\pi/3$, то $\pi/2$. Выполненная нами независимая проверка показывает, что правильное значение коэффициента $\pi/3$. Отметим, что эта поправка мала по сравнению с «большим» логарифмическим членом, который мы обсудим в разд. 5.

3. ЛЕСТНИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ВВК

Рассмотрим вклад величины δP , фигурирующей в формуле (4), см. рис. 1г. В технике Мацубары [23, 24] для $\delta\Omega/V = -\delta P$ имеем (интегрирование по λ подразумевает замену заряда $e^2 \mapsto e^2\lambda$)

$$\frac{\delta\Omega_L}{V} = \frac{2}{\beta} \sum_{i,\omega} \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} G_i(\mathbf{p}, \omega) \Sigma_i(\mathbf{p}, \omega). \quad (58)$$

Здесь выполняется суммирование по частотам ω (или p_4); для фермионов $\omega = \pi T(2n + 1)$, индекс «L» означает «лестницу» (ladder), $G_i(\mathbf{p}, \omega)$ — функция Грина частицы сорта i с импульсом \mathbf{p} и частотой ω в технике Мацубары [24], а собственно-энергетическую часть $\Sigma_i(\mathbf{p}, \omega)$ можно выразить через двухчастичную вершину Γ_{ij} , найденную в лестничном приближении [29]:

$$\Sigma_i(\mathbf{p}) = \frac{2}{\beta} \sum_{j,k_4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G_j(\mathbf{k}) \times \Gamma_{ij} \left(\frac{m_j\mathbf{p} - m_i\mathbf{k}}{m_i + m_j}; \frac{m_j\mathbf{p} - m_i\mathbf{k}}{m_i + m_j}; \mathbf{p} + \mathbf{k} \right). \quad (59)$$

Например, для электрон-протонного взаимодействия $m_i = m_e$, $m_j = m_p$, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}, p_4) \equiv (\mathbf{p}, \omega)$ — 4-импульс электрона, $\mathbf{k} = (\mathbf{k}, k_4)$ — 4-импульс протона. Величина $\Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathfrak{P})$ (\mathbf{q}, \mathbf{q}' — относительный 4-импульс соответственно до и после рассеяния, $\mathfrak{P} = \mathbf{p} + \mathbf{k} = (\mathbf{P}, P_4)$ — суммарный 4-импульс) в лестничном приближении для малых чисел заполнения ($n \ll 1$) может быть записана в виде [7, 29]

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathfrak{P}) = (2\pi)^3 \sum_n \left(iP_4 - \frac{\hbar^2 P^2}{2M} - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} + \mu_i + \mu_j \right) \times \frac{\tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \tilde{\Psi}_n^*(\mathbf{q}') \left(E_n - \frac{\hbar^2 q'^2}{2\mu} \right)}{iP_4 - \frac{\hbar^2 P^2}{2M} - E_n + \mu_i + \mu_j}. \quad (60)$$

Здесь $M = m_i + m_j$, $\mu = m_i m_j / M$; μ_i, μ_j — химические потенциалы; E_n — энергия связи состояния с главным квантовым числом n ; суммирование по n распространяется в общем случае как по дискретным состояниям с квантовыми числами $\{n\} = (n, l, m)$, характеризующимися волновыми функциями относительного движения частиц i и j (связанные состояния электронов в поле протонов) $\tilde{\Psi}_n(\mathbf{q})$, так и по состояниям непрерывного спектра, знак « \sim » над волновой функцией означает фурье-компоненту в импульсном пространстве; $P_4 = 2\pi nT$ — четвертая компонента суммарного импульса. Для состояний рассеяния, отвечающих континууму, вместо суммы по дискретным состояниям $\{n\}$ имеет место интегрирование по импульсам \mathbf{k} , характеризующим волновую функцию на бесконечности (в поле короткодействия — плоскую волну). Используя уравнение Шредингера в импульсном представлении и теорему полноты для волновых функций ($\tilde{V}(\mathbf{q})$ — кулоновский потенциал взаимодействия в импульсном представлении)

$$\left(E_n - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \right) \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) = \int \tilde{V}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}') \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3}, \quad (61)$$

можно преобразовать амплитуду рассеяния к виду

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathfrak{P}) = \tilde{V}_{ij}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + (2\pi)^3 \times \sum_n \frac{\tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \tilde{\Psi}_n^*(\mathbf{q}') \left(E_n - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \right) \left(E_n - \frac{\hbar^2 q'^2}{2\mu} \right)}{iP_4 - \frac{\hbar^2 P^2}{2M} - E_n + \mu_i + \mu_j}. \quad (62)$$

С помощью (58) и (59) запишем $\delta\Omega$ в виде

$$\frac{\delta\Omega}{V} = \sum_{i,j} \frac{4}{(2\pi)^6 \beta^2} \times \sum_{q_4, P_4} \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \int d\mathbf{q} d\mathbf{P} G_i \left(\frac{m_i}{M} \mathfrak{P} + \mathbf{q} \right) \times G_j \left(\frac{m_j}{M} \mathfrak{P} - \mathbf{q} \right) \Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}; \mathfrak{P}). \quad (63)$$

Выполняя суммирование по частотам q_4 и P_4 и интегрируя по $d\mathbf{P}$ в невырожденном случае, из (63) и (60) получим (ср. [20]; в дальнейшем мы будем использовать также выражение (62) для Γ_{ij})

$$\frac{\delta\Omega_L}{V} = \sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j \lambda_{ij}^3 \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \times \sum_n \exp(-\beta E_n) \left(E_n - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \right) \left| \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \right|^2. \quad (64)$$

Здесь использованы активности ζ_i (ср. (5)), $\lambda_{ij} = \sqrt{2\pi\hbar^2/\mu T}$. В дискретном случае для взаимодействующих электрона и протона $E_n = -Ry/n^2$, в континууме $E_k = \hbar^2 k^2/2\mu$. Для двух частиц, i и j , взаимодействующих через короткодействующий потенциал $V = \lambda V_0(\mathbf{r})$, из (64) можно получить формулу Бета–Уленбека [21, 28].

Воспользуемся соотношением, следующим из уравнения Шредингера:

$$\int (E_n - \varepsilon_q) \left| \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \right|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = \int V(\mathbf{r}) \left| \Psi_n(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r}. \quad (65)$$

Для связанных состояний в силу известной теоремы квантовой механики [36] с учетом

$$\frac{V(\mathbf{r})}{\lambda} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda}, \quad (66)$$

где \hat{H} — гамильтониан относительного движения частиц i и j , имеем

$$\frac{\partial E_n}{\partial \lambda} = \left\langle n \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right| n \right\rangle. \quad (67)$$

Из (64) с учетом (65)–(67) получим для вклада от состояний дискретного спектра (индекс « b » обозначает связанные состояния)

$$\frac{\delta\Omega_{ij}^b}{V} = -\zeta_i \zeta_j \lambda_{ij}^3 T \sum_{\{n\}} \left(\exp(-\beta E_n) - 1 \right). \quad (68)$$

Для кулоновского потенциала с учетом суммирования по l, m и связи $E_n = -Ry/n^2$ выражение (68) расходится как

$$\sum_n (1) \sim \zeta(0),$$

где $\zeta(s)$ — ζ -функция Римана:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (69)$$

В короткодействующем потенциале можно из (64) получить также явный вклад от состояний рассеяния для частиц i и j .

Из уравнения Шредингера для комплексно-сопряженной волновой функции $\Psi_k^*(\mathbf{r})$,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \lambda V_0(\mathbf{r}) - \varepsilon_k \right] \Psi_k^*(\mathbf{r}) = 0, \quad (70)$$

можно получить, дифференцируя по λ , уравнение, сопряженное к (70):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \lambda V_0 - \varepsilon_k \right] \frac{\partial \Psi_k}{\partial \lambda} = -V_0 \Psi_k. \quad (71)$$

Умножая (70) на $\partial \Psi_k / \partial \lambda$ и (71) на Ψ_k^* , вычитая полученные выражения и интегрируя результат по объему, получим

$$J_c = \int V_0(\mathbf{r}) \left| \Psi_k(\mathbf{r}) \right|^2 d\mathbf{r} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \int \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial \lambda} \Delta \Psi_k^* - \Psi_k^* \Delta \frac{\partial \Psi_k}{\partial \lambda} \right) d\mathbf{r}. \quad (72)$$

В короткодействующем потенциале можно преобразовать правую часть соотношения (72) в интеграл по поверхности, используя асимптотику волновой функции ($r \rightarrow \infty$)

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + f_k(\theta) \frac{\exp(ikr)}{r}. \quad (73)$$

Здесь

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta = kz,$$

f_k — амплитуда рассеяния.

Для кулоновского потенциала представление (73) не имеет места из-за искажения плоской волны на сколь угодно больших расстояниях. Выражая амплитуду рассеяния через фазы рассеяния δ_l [36], из (72) и (73) можно получить

$$J_c = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{4\pi}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\partial \delta_l}{\partial \lambda}. \quad (74)$$

Собирая (68) и (74), получим

$$\frac{\Delta\Omega_{ij}^L}{V} = -\zeta_i\zeta_j\lambda_{ij}^3 \left[T \sum_n \left(\exp(-\beta E_n) - 1 \right) + \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \int_0^{\infty} \frac{dE}{\pi} \delta_l(E) \exp(-\beta E) \right]. \quad (75)$$

В короткодействующем потенциале справедлива теорема Левинсона, связывающая конечное число связанных состояний n_l с моментом l через фазы рассеяния [22]

$$n_l = \frac{1}{\pi} [\delta_l(0) - \delta_l(\infty)]. \quad (76)$$

Используя (76), можно преобразовать (75) к выражению Бета–Уленбека [21, 28].

К сожалению, в кулоновском случае выражения (68), (75) и (76) расходятся, поэтому использование формулы Бета–Уленбека [10–13] в качестве исходной основано на ненадежном (мистическом) фундаменте.

Отметим, что выражение (64) обобщается для учета обмена тождественными частицами [29] (см. рис. 1*б*). Вместо квадрата модуля волновой функции $|\tilde{\Psi}_n(\mathbf{q})|^2$ для тождественных частиц, в поле отталкивания которых существует только непрерывный спектр, необходимо писать

$$|\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q})|^2 \rightarrow \tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{q}) \left[\Psi_k(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} \Psi_k(-\mathbf{q}) \right]. \quad (77)$$

Второе слагаемое в (77) приводит к дополнительному обменному вкладу, который можно представить в \mathbf{r} -пространстве с использованием тождества

$$\int (E_k - \varepsilon_q) \Psi_k^*(\mathbf{q}) \Psi_k(-\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} = \int \Psi_k^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \Psi_k(-\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (78)$$

Соответственно, повторяя вывод выражения (75), из (78) получим обобщение формулы Бета–Уленбека для тождественных частиц (например, электронов):

$$\frac{\delta\Omega_{ee}^L}{V} = -\frac{\zeta_e^2}{2} \lambda_{ee}^3 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \times \int_0^{\infty} \frac{\delta_l(E)}{\pi} \left[1 - \frac{(-1)^l}{2} \right] \exp(-\beta E) dE. \quad (79)$$

Для состояний рассеяния следует определить, в каком смысле понимать квадрат модуля волновой функции в \mathbf{p} -представлении, так как короткодействующий потенциал $\Psi_k(\mathbf{q})$ содержит трехмерную δ -функцию $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ из-за наличия плоской волны в граничном условии.

Рассмотрим правую часть выражения (65). Обозначим эту величину J . Воспользуемся интегральным представлением волновой функции [36]

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi_k(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (80)$$

Здесь $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — функция Грина, описывающая свободную частицу

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{p^2 - k^2 - i0}. \quad (81)$$

Используя определение амплитуды рассеяния вне массовой поверхности

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (82)$$

(здесь в общем случае $|\mathbf{p}| \neq |\mathbf{k}|$), из (80)–(82) получим для правой части (65)

$$J = -\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left[f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) + 4\pi \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|f(\mathbf{p}, \mathbf{k})|^2}{p^2 - k^2 + i0} \right]. \quad (83)$$

С учетом оптической теоремы [36], выражение в квадратных скобках можно представить также в виде

$$\text{Re } f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) + 4\pi\text{P} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|f(\mathbf{p}, \mathbf{k})|^2}{p^2 - k^2}. \quad (84)$$

Знак «P» означает, что интеграл берется в смысле главного значения.

Из (80)–(82) следует также выражение для $\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q})$:

$$\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q}) = \int \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \frac{4\pi f(\mathbf{q}, \mathbf{k})}{q^2 - k^2 - i0}. \quad (85)$$

Рассмотрим выражение в левой части тождества (65), подставив в него (85) с учетом соотношения

$$\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) (q^2 - k^2) = 0.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{q}) \left[\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q})(\varepsilon_k - \varepsilon_q) \right] = \\ & = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left\{ (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \frac{4\pi f^*(\mathbf{q}, \mathbf{k})}{q^2 - k^2 + i0} \right\} \times \\ & \quad \times \left(-\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \right) f(\mathbf{q}, \mathbf{k}) = \\ & = -\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} \left[f(\mathbf{k}, \mathbf{k}) + 4\pi \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{|f(\mathbf{q}, \mathbf{k})|^2}{q^2 - k^2 + i0} \right], \quad (86) \end{aligned}$$

т. е. при указанном способе ассоциативного перемножения волновых функций в \mathbf{p} -пространстве выражения (86) и (84) совпадают.

Если же перемножить сначала $\Psi_k^*(\mathbf{q})$ на $\Psi_k(\mathbf{q})$ с учетом (85), то возникнут проблемы с определением квадрата трехмерной δ -функции. Даже если положить равным нулю выражение $[\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 (q^2 - k^2)$, что, вообще говоря, неочевидно (но неизбежно, так как иначе левая часть тождества останется конечной при исчезающей правой части в случае устремления заряда к нулю), то возникнет удвоенное произведение δ -функции и второго слагаемого в (85), приводя к лишнему фактору 2 в слагаемом $f(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ в (86), к нарушению тождества (65).

В кулоновском поле нарушаются соотношения типа (80) и, как отмечалось, использование представления амплитуды рассеяния в виде (60), приводящее к выражению (64), сопровождается расходимостями.

Если использовать представление (62) для величины $\Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \mathbf{q}; \mathfrak{P})$, фигурирующей в (63), для вклада лестничных диаграмм, то нетрудно видеть, что вклад от $\tilde{V}_{ij}(0) \sim e^2/\varkappa^2$ (см. (11), (12)) исчезает из-за соотношения нейтральности в активностях (13). После суммирования по q_4 и P_4 в (63) с использованием вклада второго члена выражения (62) получим (см. рис. 1з)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega_L}{V} &= \sum_{i,j} \zeta_i \zeta_j \lambda_{ij}^3 \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \times \\ & \quad \times \sum_n \left(E_n - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} \right) \left| \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \right|^2 \times \\ & \quad \times \left(\exp(-\beta E_n) - \exp(-\beta \varepsilon_q) \right). \quad (87) \end{aligned}$$

В (87) для e - p -взаимодействия следует проводить как суммирование по дискретному спектру (связанным состояниям), так и интегрирование по состояниям рассеяния, характеризуемым индексом \mathbf{k} . Для

e - e - и p - p -взаимодействий имеет смысл только последняя операция.

В разд. 4 и 5 мы покажем, что выражение (87) после вычитания уже учтенного при суммировании кольцевых диаграмм вклада двух перекладин ($\sim e^4\beta/\varkappa$, где $\varkappa \rightarrow 0$ — регуляризующий параметр, ср. (11), (12)) приводит к конечным ответам как для вклада связанных состояний, так и для состояний рассеяния. В плазме водорода конечным оказывается также суммарный вклад логарифмического члена, пропорционального $(e^2/T)^3 \ln(m_p/m_e)$, не требующего обрезания на дебаевском радиусе.

4. СХОДЯЩИЙСЯ ВКЛАД В ВВК ОТ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Для вычисления вклада связанных состояний в ВВК воспользуемся точным результатом Фока [37] для волновых функций нерелятивистского атома водорода в импульсном представлении

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} \left| \tilde{\Psi}_{n,l,m}(\mathbf{q}) \right|^2 = \frac{8}{\pi^2 a_0^5 n^3 (q^2 + p_n^2)^4}. \quad (88)$$

Здесь $p_n = (a_0 n)^{-1}$, $a_0 = \hbar^2/\mu e^2 \lambda$ — боровский «радиус» с текущим зарядом $e^2 \lambda$. Имея в виду, что

$$E_n \equiv -\frac{\hbar^2 p_n^2}{2\mu},$$

ту часть выражения (87), которая соответствует связанным состояниям, с учетом (88) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{BS}}{V} &= -4\zeta_e \zeta_p \frac{\mu^4 \lambda_{ep}^3 e^{10}}{\pi^2 \hbar^8} \times \\ & \quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^1 d\lambda \lambda^4 \left[\exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) \int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + p_n^2)^3} - \right. \\ & \quad \left. - \int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + p_n^2)^3} \exp\left(-\beta \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu}\right) \right]. \quad (89) \end{aligned}$$

Здесь $X = \beta R\gamma$. Из (89) получим

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + p_n^2)^3} = \frac{\pi^2}{4p_n^3}, \quad (90)$$

$$\int \frac{d\mathbf{q}}{(q^2 + p_n^2)^3} \exp\left(-\beta \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu}\right) = c_n(X), \quad (91)$$

$$\beta \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu} = \lambda_{ep}^2 q^2, \quad \lambda_{ep} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu T}}.$$

Явное выражение для $c_n(X)$ получается после преобразований:

$$\begin{aligned} c_n(X) &= 4\pi \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(q^2 + p_n^2)^3} \exp(-q^2 \lambda_{ep}^2) = \\ &= -4\pi \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + z} \exp(-q^2 \lambda_{ep}^2) - \\ &\quad - 4\pi \frac{z}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + z} \exp(-q^2 \lambda_{ep}^2). \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь после дифференцирования по z следует положить $z = p_n^2$.

Рассмотрим интеграл J_0 [38]:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + z} \exp(-q^2 \lambda_{ep}^2) = \\ &= [1 - \Phi(\lambda_{ep} p_n)] \frac{\pi}{2 p_n} \exp(\lambda_{ep}^2 p_n^2) = \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}, \lambda_{ep}^2 z\right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}} \exp(\lambda_{ep}^2 z). \end{aligned} \quad (93)$$

Здесь неполная гамма-функция $\Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right)$ определена на следующем образом:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt, \quad (94)$$

$$1 - \Phi(\lambda_{ep} p_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda^2 X}{n^2}\right). \quad (95)$$

Используя (93), (94) и выполняя дифференцирование в выражении (92), получим

$$\begin{aligned} c_n(X) &= \pi^{3/2} \left[\frac{1}{4} a_0^3 n^3 \exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) - \right. \\ &\quad - \frac{a_0 \beta \hbar^2}{2\mu} n \exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) + \\ &\quad + \frac{\hbar a_0^2 n^2}{2} \sqrt{\frac{\beta}{2\mu}} + \left(\frac{\beta \hbar^2}{2\mu}\right)^{3/2} - \frac{\beta^2 \hbar^4}{4\mu^2 a_0 n} \times \\ &\quad \left. \times \exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

В пределе при $X/n^2 \ll 1$

$$\begin{aligned} c_n(X) &= \frac{\pi^2 a_0^3 n^3}{4} - \frac{3}{8} \frac{\pi^2 a_0 n \beta \hbar^2}{\mu} + \\ &\quad + \frac{8}{3} \pi^{3/2} \left(\frac{\beta \hbar^2}{2\mu}\right)^{3/2} + \dots \end{aligned} \quad (97)$$

Легко видеть, что при $n \gg 1$ вклад от первого члена в (89), представленный выражением (90), сократится с первым членом разложения (97).

Используя (89), (90), (91) и (96), получим после интегрирования по λ

$$\frac{\Delta \Omega^{BS}}{V} = -T \zeta_e \zeta_p \lambda_{ep}^3 \sum_{n=1}^\infty n^2 \exp\left(\frac{I}{n^2 T}\right) F_n(\beta). \quad (98)$$

Здесь $F_n(\beta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_n(\beta) &= 1 - \exp(-\beta I_n) \times \\ &\quad \times \left[4 - \frac{6}{\sqrt{\pi}} (\beta I_n)^{1/2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} (\beta I_n)^{3/2} \right] + \\ &\quad + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}, \beta I_n\right)}{\sqrt{\pi}} \left[3 - 4\beta I_n + 4(\beta I_n)^2 \right], \quad I_n = I/n^2. \end{aligned} \quad (99)$$

Асимптотически при $n \gg 1$ из (99) следует

$$F_n(\beta) \sim 2(\beta I_n)^2. \quad (100)$$

Это выражение в четыре раза больше, чем аналогичное выражение в формуле Планка–Ларкина

$$\begin{aligned} F_n^{P-L}(\beta) &= 1 - \exp(-\beta I_n) - \\ &\quad - \beta I_n \exp(-\beta I_n) \rightarrow \frac{1}{2} (\beta I_n)^2. \end{aligned} \quad (101)$$

Используя разложение (97), можно записать выражение (89) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega^{BS}}{V} &= -\zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 X \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^\infty 2 \int_0^1 \lambda d\lambda \left[\exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}\right) - 1 - 3 \frac{\lambda^2 X}{n^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{32}{3} \frac{\lambda^3}{\sqrt{\pi n^3}} X^{3/2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

Здесь из экспоненты вычитается единица, соответствующая первому члену разложения (97). После интегрирования по λ из (102) получим

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Omega^{BS}}{V} &= -\zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 \sum_{n=1}^\infty n^2 \left(\exp\left(\frac{X}{n^2}\right) - 1 - \frac{X}{n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{X^2}{n^4} - \frac{64}{15} \frac{X^{5/2}}{\sqrt{\pi n^5}} + \dots \right). \end{aligned} \quad (103)$$

Видно, что первые три члена под знаком суммы (103) соответствуют формуле Планка–Ларкина. Остаток от разложения экспоненты (см. (99))

$X^2/2n^4$ складывается с четвертым членом суммы (103) и дает асимптотику (100).

Запишем вклад от связанных состояний в виде

$$\frac{\delta\Omega^{BS}}{V} = -\zeta_c \zeta_p T \lambda_{ep}^3 \Sigma^{BS}. \quad (104)$$

Для выражения (99), используя разложение по X , можно получить

$$\begin{aligned} \Sigma_{SRM}^{BS} = & \sum_{k=4}^{\infty} \zeta(k-2) \frac{(-\sqrt{X})^k}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} (k-2)^2 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k+1) \frac{X^{k+3/2}}{\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (105)$$

В то же время из формулы Планка – Ларкина следует

$$\begin{aligned} \Sigma_{P-L}^{BS} = & \sum_{k=2}^{\infty} \zeta(2k-2) \frac{X^k}{\Gamma(k+1)} = \\ = & \sum_{n=4,6,8,\dots} \zeta(n-2) \frac{X^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \end{aligned} \quad (106)$$

Обозначим разность выражений для Σ_{P-L}^{BS} (106) и для Σ_{SRM}^{BS} (105) через

$$\Sigma_{P-L}^{BS} - \Sigma_{SRM}^{BS} = \Sigma_c. \quad (107)$$

Для Σ_c имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_c = & \sum_{k=2}^{\infty} \zeta(2k-2) \frac{X^k}{\Gamma(k+1)} - \\ & - \sum_{k=4}^{\infty} \zeta(k-2) \frac{(-1)^k X^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} (k-2)^2 - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k+1) \frac{X^{k+3/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}. \end{aligned} \quad (108)$$

В разд. 5 при рассмотрении вклада состояний рассеяния мы покажем, что формула (105) вместе с должным образом вычисленным выражением (87) для непрерывного спектра совпадает с величиной Σ^{tot} для суммарного e - p -взаимодействия, приведенной в [13].

Вычитаемое слагаемое в выражении (87), например, для e - p -взаимодействия с учетом теоремы о полноте функций, включающих дискретный

и непрерывный спектры, может быть представлено в виде (см. рис. 1а)

$$\begin{aligned} & -\zeta_e \zeta_p \lambda_{ep}^3 \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \exp(-\beta\varepsilon_q) \times \\ & \times \left(\sum_n + \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \right) \times \\ & \times \int \tilde{V}(\mathbf{q}-\mathbf{q}') \tilde{\Psi}_{\{k\}}^*(\mathbf{q}) \tilde{\Psi}_{\{n\}}(\mathbf{q}') \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} = \\ & = -\zeta_e \zeta_p \tilde{V}_{ep}(0), \end{aligned} \quad (109)$$

т.е. вычитаемое слагаемое в (87) в точности компенсирует первый член в представлении (62) для $\Gamma_{ep}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathfrak{P})$, который в силу нейтральности в активностях (13) становится равным нулю после суммирования по всем парным взаимодействиям. Таким образом, полученная конечная статистическая сумма (98), (99) соответствует учету в контрчлене (109) лишь суммирования по связанным состояниям. Интеграл по состояниям рассеяния в представлении (87) также оказывается конечным, но только после вычитания вклада от куска лестницы с двумя перекладинами, учтенными при суммировании вклада кольцевых диаграмм.

Приведем некоторое обобщение выражений типа (89), (102) для вклада в $\delta\Omega^{BS}$ от вырожденных электронов ($m_e \ll m_p$):

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{BS}}{V} = & -\zeta_p \frac{32}{\pi} T X \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^1 \lambda d\lambda \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^3} \frac{\exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}(1+t^2)\right) - 1}{\exp\left(\frac{\lambda^2 X}{n^2}t^2 - y\right) + 1}. \end{aligned} \quad (110)$$

При $\lambda^2 X/n^2 \ll 1$, $y = \mu_e/T > 0$ из (110) получим

$$\frac{\delta\Omega^{BS}}{V} = -\zeta_p \frac{2\pi^2}{3} T \left(\frac{\text{Ry}}{T}\right)^2. \quad (111)$$

При выводе (111) предполагалось выполненным условие

$$\frac{\exp y}{2y^{5/2}} X^{5/2} \lesssim 1. \quad (112)$$

При $X \gg 1$, $X > y > 0$, что соответствует определению $I > \mu_e$ в вырожденном случае, из (110) получим

$$\frac{\delta\Omega^{BS}}{V} = -2\zeta_p T \exp y \exp \frac{I}{T}. \quad (113)$$

Условие $X > y$ и получающийся вклад (113) от связанных состояний соответствует аномально большим концентрациям «атомных» квазичастиц, что делает эти выражения неприменимыми из-за их сильного взаимодействия. Кроме того, при нахождении амплитуды рассеяния G не были учтены эффекты типа блокировки Паули [29].

Отметим, что выражения типа (87) получаются в технике Келдыша (см. [25–27]):

$$\delta P = \sum_a (2S_a + 1) \int_0^1 \frac{d\lambda}{2\lambda} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \times \\ \times \int \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \frac{\Sigma_a^>(\mathbf{p}, \omega) G_a^<(\mathbf{p}, \omega')}{\omega - \omega'} \times \\ \times (1 - \exp(-\beta(\omega - \omega'))). \quad (114)$$

Выражая величину $\Sigma^>$ символически через мнимую часть амплитуды рассеяния G_{ep} [25],

$$\Sigma_e^> \sim \int \text{Im} G_{ep}(\omega + \Omega) \cdot G_i^<(\mathbf{p}', \Omega) \frac{d\mathbf{p}' d\Omega}{(2\pi)^4}, \quad (115)$$

для G_{ep} имеем (ср. (62))

$$\text{Im} G_{ep} \sim \sum_n \left| \tilde{\Psi}_n(\mathbf{q}) \right|^2 (E_n - \varepsilon_q)^2 \times \\ \times \delta_\gamma \left(\omega + \Omega - E_n - \frac{p^2}{2M} \right), \quad (116)$$

где $\delta_\gamma(x)$ — лоренцев контур, переходящий в δ -функцию в пределе нулевой ширины $\gamma \rightarrow 0$. Из (114)–(116) получаются выражения (87), (110). В то же время такой подход позволяет учесть эффекты уширения атомных состояний с той же точностью, с которой можно вычислить спонтанное излучение системы заряженных частиц с учетом дискретно-дискретных переходов. В случае учета штарковских микрополей, вызывающих сдвиги уровней и статистическое уширение линий, этот подход содержит также эффекты разрушения состояний микрополями [5, 17, 20].

Отметим, тот факт, что атомная статсумма в низшем порядке по взаимодействию (до ВВК) сходится, начиная со значений главного квантового числа $n_{max} \sim \sqrt{\beta Ry}$, означает, что вклад связанных состояний в давление представлен формулой типа Σ_{SRM} (или Σ_{P-L}), тогда как в другие физические эффекты, например спонтанное излучение равновесной плазмы, дискретные состояния могут вносить наблюдаемый вклад (соответствующая сумма сходится) при $n > n_{max}$, вплоть до состояний, при которых их штарковская ширина сравнима с энергией их ионизации.

5. СХОДЯЩИЙСЯ ВКЛАД В ВВК ОТ СОСТОЯНИЙ РАССЕЯНИЯ

Для вычисления вклада от состояний непрерывного спектра в выражения типа (87) следует определить фурье-компоненты волновых функций, описывающих рассеяние заряженных частиц друг на друге. Удобно воспользоваться системой кулоновских волновых функций, представленных суммированием по орбитальным моментам [36]. Например, для поля притяжения

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(\pi\tilde{\xi}/2) \Gamma(1 - i\tilde{\xi}) \times \\ \times \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) F(i\tilde{\xi}, 1, i(kr + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})). \quad (117)$$

Здесь

$$\tilde{\xi} = (a_0 k)^{-1} = \frac{\mu e^2 \lambda}{\hbar^2 k},$$

$F(\alpha, \beta, z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Для нахождения фурье-образа функции (117) следует воспользоваться процедурой линейной регуляризации:

$$\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \varkappa_1 r) \Psi_k(\mathbf{r}). \quad (118)$$

Параметр \varkappa_1 следует в конце вычислений устремить к нулю. Из (117), (118) получим [39]

$$\tilde{\Psi}_k(q) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(\pi\tilde{\xi}/2) \Gamma(1 - i\tilde{\xi}) J_{\varkappa_1}. \quad (119)$$

Здесь J_{\varkappa_1} имеет вид

$$J_{\varkappa_1} = \left\{ \frac{2\pi(1 - i\tilde{\xi})\varkappa_1}{\left[\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2} + \frac{\varkappa_1^2}{2} \right]^2} + \frac{2\pi\tilde{\xi}(k + i\varkappa_1)}{\left[\frac{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2}{2} + \frac{\varkappa_1^2}{2} \right] \left[\frac{q^2 - k^2 + \varkappa_1^2}{2} - ik\varkappa_1 \right]} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i\tilde{\xi} \ln \frac{(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \varkappa_1^2}{q^2 - k^2 + \varkappa_1^2 - 2ik\varkappa_1} \right\}. \quad (120)$$

Первое слагаемое в (120) аналогично регуляризованной трехмерной δ -функции (ср. (85)), а второе слагаемое аналогично вкладу от амплитуды рассеяния с энергетическим знаменателем в (85). Из-за регуляризации и специфики кулоновского взаимодействия

необходимо уточнить, в каком смысле следует использовать функции (119), (120) в выражениях (87). Для этого обратимся к соотношению (65), справедливому для точных волновых функций в короткодействующем потенциале. Дело в том, что в правой части (65) интеграл от кулоновского потенциала с функциями типа (117) также требует регуляризации. Например, для поля отталкивания при p - p -взаимодействии имеем [36, Приложение §f] точное соотношение:

$$\lambda e^2 \int \frac{\exp(-\varkappa r)}{r} \Psi_k^*(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{4\pi e^2 \lambda}{(2\pi)^3 \varkappa^2} \times \exp(-\lambda z_p) \frac{\pi \tilde{\xi}}{\text{sh } \pi \tilde{\xi}} F\left(i\tilde{\xi}, -i\tilde{\xi}; 1; \frac{y}{y + \eta_p^2/4}\right). \quad (121)$$

Здесь

$$\tilde{\xi} = \frac{\lambda \alpha_p}{2\sqrt{y}}, \quad \alpha_p = \sqrt{\frac{m_p e^4}{\hbar^2 T}}, \quad z_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{y}} \arctg\left(\frac{\eta_p}{2\sqrt{y}}\right), \\ y = \frac{\hbar^2 k^2}{m_p T}, \quad \eta_p^2 = \frac{\hbar^2 \varkappa^2}{m_p T},$$

$F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция.

Аналогичные выражения могут быть получены и для e - e -взаимодействия с заменой $m_p \rightarrow m_e$.

При вычислении левой части равенства (65) следует использовать регуляризованные с помощью соотношений (118) функции $\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q})$. Для величины

$$\tilde{J}_q = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{q})(\varepsilon_k - \varepsilon_q) \tilde{\Psi}_k(\mathbf{q}), \quad (122)$$

подставляя выражение (118) (например, первый множитель $\tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{q})$ с параметром \varkappa_1 , а второй $\tilde{\Psi}_k(\mathbf{q})$ с параметром регуляризации \varkappa_2), получим, используя уравнение Шредингера и интегрируя по $d\mathbf{q}$:

$$\tilde{J}_q = \int d\mathbf{r} \exp(-(\varkappa_1 + \varkappa_2)r) V(\mathbf{r}) \Psi_k^*(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 \varkappa_1^2}{2\mu} \int d\mathbf{r} \exp(-(\varkappa_1 + \varkappa_2)r) \Psi_k^*(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) - 2 \frac{\hbar^2 \varkappa_1}{2\mu} \int d\mathbf{r} \frac{\exp(-(\varkappa_1 + \varkappa_2)r)}{r} \tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{r}) \Psi_k(\mathbf{r}) - 2 \frac{\hbar^2 \varkappa_1}{2\mu} \int d\mathbf{r} (\nabla \tilde{\Psi}_k^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}) \times \frac{\exp(-(\varkappa_1 + \varkappa_2)r)}{r} \tilde{\Psi}_k(\mathbf{r}). \quad (123)$$

Из сопоставления (122), (123) с (121) следует принять (с учетом вещественности (122)) $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa/2$. Можно показать, что три последних

слагаемых (контрчлены) устраняют квадрат модуля первого слагаемого в (120), аналогично тому, как в (85), (86) устранялся квадрат трехмерной δ -функции и вместо удвоенной реальной части от произведения двух членов в фигурной скобке выражения (120) получался коэффициент 1. С учетом вычитания, имеющего место в множителе $(\exp(-\beta\varepsilon_k) - \exp(-\beta\varepsilon_q))$ в формуле (87), устраняющего вклад слагаемого типа $f(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ в (86), получим, что выражение (87) для непрерывного спектра (от состояний рассеяния — SS) следует записывать в виде (например, для e - p -взаимодействия)

$$\frac{\Delta\Omega_{ep}^{SS}}{V} = -16\pi^2 e^4 \frac{2\mu}{\hbar^2} \zeta_e \zeta_p \lambda_{ep}^3 \times \int_0^1 d\lambda \lambda \iint \frac{d\mathbf{q} d\mathbf{k}}{(2\pi)^6} \frac{\pi \tilde{\xi}_{ep}}{\text{sh } \pi \tilde{\xi}_{ep}} \exp(\pi \tilde{\xi}_{ep}) \times (\exp(-\beta\varepsilon_k) - \exp(-\beta\varepsilon_q)) \times \frac{\exp(-2\tilde{\xi}_{ep} \text{Im } \ln(q^2 - k_-^2))}{[(\mathbf{q} - \mathbf{k})^2 + \varkappa^2/4] [q^2 - k^2 - i\varepsilon]}. \quad (124)$$

Здесь $k_- = k - i\varkappa/2$. Можно вычислить интеграл по углам между векторами \mathbf{q} и \mathbf{k} в (124) и после перехода к переменным

$$x = \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu T}, \quad y = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu T}, \\ \eta_{ep}^2 = \frac{\hbar^2 \varkappa^2}{2\mu T}, \quad \tilde{\eta}_{ep} = \frac{\eta_{ep}}{2}$$

получим

$$\frac{\Delta\Omega_{ep}^{SS}}{V} = -\frac{\lambda_{ep}}{\pi} \zeta_e \zeta_p T \left(\frac{e^2}{T}\right)^2 \times \int_0^1 d\lambda \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy \frac{\pi \tilde{\xi}_{ep}}{\text{sh } \pi \tilde{\xi}_{ep}} \exp(\pi \tilde{\xi}_{ep}) \frac{e^{-y} - e^{-x}}{x - y} \times \left[\frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + \tilde{\eta}_{ep}^2} - \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + \tilde{\eta}_{ep}^2} \right] \times \exp\left\{-2\tilde{\xi}_{ep} \text{Im } \ln(x - y + \tilde{\eta}_{ep}^2 + i2\sqrt{y\tilde{\eta}_{ep}^2})\right\}, \\ \tilde{\xi}_{ep} = \frac{\lambda \alpha_{ep}}{\sqrt{y}}, \quad \alpha_{ep} = \sqrt{\frac{Ry}{T}}. \quad (125)$$

Запишем также выражение для контрчлена к выражению (125) (вклад от двух переключений в лестнице, учтенных при суммировании ряда кольцевых диаграмм). Из выражения (44), выделяя вклад от

e - p -взаимодействия, заменив при этом в знаменателе последнего сомножителя $4\pi e^2 \lambda \Pi^R$ на \varkappa^2 , где \varkappa — регуляризующий параметр (см. (11), (118), (121)), который в конце всех вычислений следует устремить к нулю, получим

$$\frac{\Delta\Omega_{ep}^{(2)}}{V} = -8\sqrt{\pi}\zeta_e\zeta_p \frac{e^2}{\varkappa^2} \sqrt{X} \times \int_0^\infty e^{-y} \arctg\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta_{ep}^2}{y}}\right) dy = -8\sqrt{\pi}\zeta_e\zeta_p \frac{e^2}{\varkappa^2} \sqrt{X} J. \quad (126)$$

Здесь J — интеграл по y , который равен

$$J = \frac{\pi}{2} \left[1 - \exp\left(\frac{\eta_{ep}^2}{4}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\eta_{ep}}{2}\right) \right] \right]. \quad (127)$$

Здесь функция $\Phi(x)$ — интеграл вероятности [38]:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (128)$$

Асимптотически при $\varkappa \rightarrow 0$ из (126), (127) получим

$$\frac{\Delta\Omega_{ep}^{(2)}}{V} = -2\pi\zeta_e\zeta_p T \frac{e^4}{T^2\varkappa} \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\varkappa\lambda_{ep} \right), \quad \lambda_{ep} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu T}}. \quad (129)$$

Для отладки процедуры трехмерного интегрирования выражения (125) и тестирования полученных результатов проще начать с вычисления вкладов от p - p и e - e -взаимодействий, так как в поле отталкивания теорема полноты кулоновских волновых функций включает только состояния рассеяния и имеет место (с учетом (121)) тождество (например, для p - p -взаимодействия, ср. также с (125))

$$\frac{\Delta\Omega_{pp}^{SS}}{V} = -\frac{\lambda_{pp}}{2\pi}\zeta_p^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^2 \times \int_0^1 d\lambda \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy \frac{\pi\tilde{\xi}_{pp}}{\text{sh}\pi\tilde{\xi}_{pp}} \exp(-\pi\tilde{\xi}_{pp}) \frac{e^{-y}-e^{-x}}{x-y} \times \left[\frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \tilde{\eta}_{pp}^2} - \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 + \tilde{\eta}_{pp}^2} \right] \times \exp\left\{ 2\tilde{\xi}_{pp} \text{Im} \ln \left(x - y + \tilde{\eta}_{pp}^2 + i2\sqrt{y\tilde{\eta}_{pp}^2} \right) \right\} = \frac{\Delta\Omega_{pp}^{(H)}}{V} - \frac{\Delta\Omega_{pp}^{(1)}}{V}. \quad (130)$$

В (130)

$$\lambda_{pp} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar^2}{m_p T}}, \quad \tilde{\xi}_{pp} = \frac{\lambda\alpha_p}{2\sqrt{y}}, \quad \alpha_p = \sqrt{\frac{m_p e^4}{\hbar^2 T}}, \quad y = \frac{\hbar^2 k^2}{m_p T}, \quad x = \frac{\hbar^2 q^2}{m_p T}, \quad \eta_{pp}^2 = \frac{\hbar^2 \varkappa^2}{m_p T}, \quad \tilde{\eta}_{pp} = \frac{\eta_{pp}}{2}.$$

Для $\Delta\Omega_{pp}^{(H)}$ из (121) получим (индекс « H » означает гипергеометрическую функцию, присутствующую в выражении (121))

$$\frac{\Delta\Omega_{pp}^{(H)}}{V} = 4\sqrt{\pi}\zeta_p^2 \frac{e^2}{\varkappa^2} \int_0^1 d\lambda \int_0^\infty dy \sqrt{y} e^{-y} e^{-\lambda z_p} \Phi. \quad (131)$$

Здесь

$$z_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{y}} \arctg\left(\frac{\eta_{pp}}{2\sqrt{y}}\right), \quad (132)$$

$$\Phi = F\left(i\tilde{\xi}_{pp}, -i\tilde{\xi}_{pp}; 1; \frac{y}{y + \eta_{pp}^2/4}\right) \frac{\pi\tilde{\xi}_{pp}}{\text{sh}\pi\tilde{\xi}_{pp}}. \quad (133)$$

Для величины $\Delta\Omega_{pp}^{(1)}$, соответствующей вычитанию диаграммы с одной перекладиной (типа вычитания слагаемого $\sim \exp(-\beta\varepsilon_q)$ в скобке выражения (87) в лестничной диаграмме (в сумме все вклады p - p -, e - e -, e - p -взаимодействий обращаются в нуль в силу (9), (13)) имеем

$$\frac{\Delta\Omega_{pp}^{(1)}}{V} = \frac{2\pi e^2 \zeta_p^2}{\varkappa^2}. \quad (134)$$

Для устранения расходимости выражений $\Delta\Omega_{pp}^{SS}$ и $\Delta\Omega_{pp}^{(H)} - \Delta\Omega_{pp}^{(1)}$ следует вычесть вклад от двух перекладин из величин (130)–(134) (аналогично (126)–(129)):

$$\frac{\Delta\Omega_{pp}^{(2)}}{V} = -4\sqrt{\pi}\zeta_p^2 \frac{e^2}{\varkappa^2} \int_0^\infty \sqrt{y} \exp(-y) \frac{z_p}{2} dy \rightarrow -\pi\zeta_p^2 T \frac{e^4}{T^2\varkappa} \left(1 - \frac{\lambda_{pp}\varkappa}{8} \right) \text{ при } \varkappa \rightarrow 0. \quad (135)$$

Для численного интегрирования использовались библиотечные подпрограммы вычисления интеграла по одномерному конечному интервалу по квадратным формулам Гаусса–Кронрода (с числом узлов 10 и 21) с автоматическим выбором числа точек и адаптивной процедурой измельчения сетки вблизи резких пиков интегрируемой функции с целью

достижения требуемой точности. Для многомерного интегрирования была разработана рекурсивная (по числу измерений) процедура интегрирования функции, которая может сама быть задана в виде интеграла, вычисляемого той же рекурсивной процедурой со следующим рангом вложенности. Тем не менее каждый ранг рекурсии выполнялся со своей копией библиотечных подпрограмм одномерного интегрирования.

Для одномерного интегрирования задается значение требуемой относительной погрешности. В многомерном интеграле относительная точность вычисления подынтегральной функции (т. е. каждого «внутреннего» по рангу интеграла) в каждой отдельной точке полагалась обратно пропорциональной абсолютной величине ее вклада во «внешний» по рангу интеграл.

Трехмерные интегралы в (125), (130) вычислялись в переменных

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad v = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

λ — в порядке

$$\int_0^\infty du \int_{-u}^u dv \int_0^1 d\lambda,$$

а при интегрировании по v приходилось дополнительно разбивать интервал так, чтобы локальный максимум приходился на конец подинтервала. Для вычисления первой и второй переключин (растущих при $\varkappa \rightarrow 0$ соответственно пропорционально \varkappa^{-2} и \varkappa^{-1}) использовались аналитические выражения типа (134), (126), (127).

Следует отметить, что использование библиотечных программ интегрирования по полубесконечному интервалу для вычисления второй переключины приводило при малых \varkappa к ошибке случайного (по величине \varkappa) характера, превышавшей требуемую относительную точность. При вычислении констант в асимптотике по \varkappa для разностей типа $\Delta\Omega_{ep}^{(2)} - \Delta\Omega_{ep}^{SS}$ ошибка была сравнима с результатом. Поэтому интеграл по полубесконечному интервалу вычислялся итерациями как предельное значение интеграла по отрезку при последовательном удвоении верхнего предела. Такой вариант всегда давал малую стабильную ошибку при аппроксимации второй переключины при всех \varkappa и использовался при интегрировании с бесконечными пределами.

На первом этапе в ходе расчетов была с удовлетворительной точностью получена линейная по $\ln \eta_f$ ($\eta_f = \varkappa/\varkappa_D$) асимптотика при $\eta_f \rightarrow 0$ для выражений

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{aa} &= e^{-6} T^2 V^{-1} \zeta_a^{-2} \times \\ &\times \left(\Delta\Omega_{aa}^{(H)} - \Delta\Omega_{aa}^{(1)} - \Delta\Omega_{aa}^{(2)} \right), \end{aligned} \quad (136)$$

$$a = e, p,$$

$$\mathcal{I}_{ep} = e^{-6} T^2 V^{-1} \zeta_e^{-1} \zeta_p^{-1} \left(\Delta\Omega_{ep}^{(2)} - \Delta\Omega_{ep}^{SS} \right)$$

в виде

$$-A - k_{ab} \frac{\pi}{3} \ln \eta_f,$$

где

$$k_{ee} = k_{pp} = 1, \quad k_{ep} = 2$$

(см. [20] для e - e - и p - p -взаимодействий). Последующее вычисление величины $A = A(\rho, T)$ с максимально возможной точностью для определения подходящей аналитической аппроксимации требует при уменьшении $\eta_f \rightarrow 0$ адекватного увеличения точности вычисления $\Delta\Omega_{aa}^{(H)}/V$ и $\Delta\Omega_{ep}^{SS}/V$.

В дальнейшем построение выражений, подобных [13, (6.1)–(6.4)], и расчеты в нескольких точках (ρ, T) вдоль радиуса Солнца привели к формуле асимптотики в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ab}(\varkappa, T) &\xrightarrow{\varkappa \rightarrow 0} -A_{ab}(T) - \\ &- k_{ab} \left(\frac{\pi}{3} \ln(\varkappa \lambda_{ab}) - \frac{\pi}{6} (1 - C) \right), \end{aligned} \quad (137)$$

$$ab = ep, ee, pp.$$

Величина

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ab}(T, \varkappa) &= - \left[\mathcal{I}_{ab}(\varkappa, T) + \right. \\ &\left. + k_{ab} \left(\frac{\pi}{3} \ln(\varkappa \lambda_{ab}) - \frac{\pi}{6} (1 - C) \right) \right] \end{aligned} \quad (138)$$

сходится по \varkappa к предельному значению

$$A_{ab}(T) = \lim_{\varkappa \rightarrow 0} \tilde{A}_{ab}(T, \varkappa),$$

и скорость сходимости (абсолютная ошибка)

$$\varepsilon(T, \varkappa) = \left| \tilde{A}_{ab}(T, \varkappa) - A_{ab}(T) \right| \quad (139)$$

пропорциональна \varkappa^2 для e - e - и p - p -случаев и $\sim \varkappa^{1.14}$ для e - p -взаимодействия. Минимальное значение $\tilde{\eta}_{ep}^2$, при котором оказывалось возможным вычислить интеграл (125) и получить оценку A_{ab} , равно по порядку величины 10^{-12} – 10^{-13} .

На рис. 2 показаны полученные предельные значения A_{ab} ($ab=ep, ee$ и pp) в зависимости от параметра $|\alpha_{ab}|$ ($\alpha_{ee} = -\alpha_e/2$, $\alpha_{pp} = -\alpha_p/2$). Оказалось, что эти значения с удовлетворительной точностью

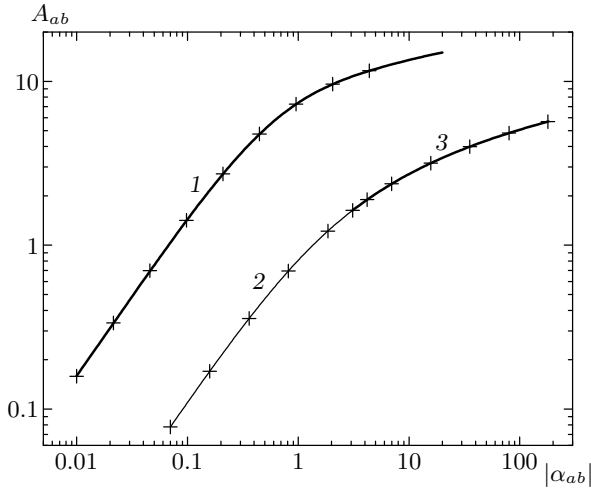


Рис. 2. Расчетные значения A_{ab} в зависимости от параметра $|\alpha_{ab}|$ (ab : 1 — e - p -, 2 — e - e -, 3 — p - p -взаимодействия). Знаком «+» отмечены значения соответствующих аналитических выражений B_{ab} в нескольких точках

(неразличимой в линейном масштабе) совпадают с аналитическими выражениями

$$B_{ep} = \lambda_{ep}^3 T^3 e^{-6} (\Sigma_{SRM}^{BS} - \Sigma^{tot}), \quad (140)$$

$$\Sigma^{tot} = \Sigma_Q(\alpha_{ep}),$$

$$B_{ee} = \frac{1}{2} \lambda_{ee}^3 T^3 e^{-6} \Sigma_{ee}^{SS}, \quad (141)$$

$$\Sigma_{ee}^{SS} = \Sigma_Q\left(-\frac{\alpha_e}{2}\right), \quad \alpha_e = \sqrt{\frac{m_e e^4}{\hbar^2 T}},$$

$$B_{pp} = \frac{1}{2} \lambda_{pp}^3 T^3 e^{-6} \Sigma_{pp}^{SS}, \quad (142)$$

$$\Sigma_{pp}^{SS} = \Sigma_Q\left(-\frac{\alpha_p}{2}\right), \quad \alpha_p = \sqrt{\frac{m_p e^4}{\hbar^2 T}},$$

где функция $\Sigma_Q(\alpha)$ представлена рядом (см. разд. 6, формула (184))

$$\Sigma_Q(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\zeta(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \alpha^n, \quad (143)$$

при больших $-\alpha \gg 1$ имеющих асимптотику

$$\Sigma_Q^0(\alpha) = -\left(\ln|2\alpha| + \frac{3C}{2} - \frac{4}{3}\right) \frac{2\alpha^3}{3\sqrt{\pi}} + o(|\alpha|^3), \quad (144)$$

$$\alpha \rightarrow -\infty.$$

Максимальное отклонение

$$\max_{\alpha} |A_{ab} - B_{ab}|$$

вдоль солнечной кривой для e - e -взаимодействия приблизительно равно $2.5 \cdot 10^{-4}$, для p - p -взаимодействия по порядку величины равно 10^{-3} , а для e - p -взаимодействия — 10^{-2} . Большая погрешность для e - p -асимптотики объясняется меньшей скоростью сходимости и необходимостью вычисления трехмерных интегралов, в то время как для e - e - и p - p -взаимодействий после проверки выполнения (130) использовалось двумерное интегрирование (131)–(133). Отметим, что при этом предельная относительная точность вычисления двумерных интегралов составила $2 \cdot 10^{-14}$, а трехмерных — 10^{-10} .

Таким образом, численное интегрирование с точностью до лишнего члена с $\ln 3$ в [13] подтверждает аналитическое представление для борновского ряда в [13].

Отметим, что выражение (131) можно проинтегрировать аналитически для сравнения и проверки выражений, приведенных в [13]. Запишем для начала выражение для гипергеометрической функции [40], у которой аргумент γ равен 1:

$$F(i\tilde{\xi}, -i\tilde{\xi}; 1; z) = \frac{\text{sh } \pi\tilde{\xi}}{\pi\tilde{\xi}} \left\{ 1 + \frac{(\varkappa\tilde{\xi}/2)^2}{k^2 + \varkappa^2/4} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\ln \frac{\varkappa^2/4}{k^2 + \varkappa^2/4} + 2C - 1 + 2 \text{Re } \psi(1 + i\tilde{\xi}) \right] \right\} + O(\varkappa^4). \quad (145)$$

Здесь $C = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера–Маклорена [38], $\psi(x) = d \ln \Gamma(x) / dx$ — ψ -функция. Для величины $\psi(1 + i\tilde{\xi})$ воспользуемся разложением в ряд по степеням $\tilde{\xi}$ [38], получим

$$2 \text{Re } \psi(1 + i\tilde{\xi}) = -2C - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\xi}^{2k} \zeta(2k + 1), \quad (146)$$

$$\tilde{\xi} = \frac{\lambda\alpha_p}{2\sqrt{y}}.$$

Если подставить выражение (146) в (131), то легко видеть, что члены ряда (146) дают расходящиеся ответы при интегрировании по y . В выражениях перед квадратной скобкой и под знаком логарифма можно пренебречь слагаемым $\varkappa^2/4$ по сравнению с k^2 из-за наличия предельного перехода $\varkappa \rightarrow 0$.

Воспользуемся процедурой, которая оказывается строгой, хотя и слегка странной, при суммировании ряда из расходящихся интегралов. Рассмотрим модельный пример, для которого все процедуры аналогичны тем, которые возникают при обращении

с (131) при использовании (145), (146). Воспользуемся интегральным представлением ψ -функции [38]:

$$J_{model} = \operatorname{Re} \int_0^\infty \psi \left(1 \pm i \frac{a}{\sqrt{y}} \right) e^{-y} \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$= -C\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} -$$

$$- \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \int_0^\infty \operatorname{Re} \exp \left(\mp i \frac{at}{\sqrt{y}} \right) \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy. \quad (147)$$

Здесь a — вещественное число. Вводя обозначение $b = |a|t$ и переходя при внутреннем интегрировании в последнем слагаемом (147) к новой переменной $x = y^{-1/2}$, получим [41, стр. 454, (2.5.38.1–3)]

$$\operatorname{Re} \int_0^\infty \exp \left(\mp i \frac{at}{\sqrt{y}} \right) \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= 2 \int_0^\infty \cos bx \exp(-1/x^2) \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \pi \sum_{k=0}^\infty \frac{(-|b|)^k}{k! \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}. \quad (148)$$

С использованием соотношения [38]

$$\int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} t^k = \Gamma(k+1) \zeta(k+1), \quad (149)$$

получим из (147)–(149)

$$J_{model} = -C\sqrt{\pi} - \pi \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k |a|^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \zeta(k+1). \quad (150)$$

Этот результат является строгим. С другой стороны, разложим $\psi(1 \pm ia/\sqrt{y})$ в ряд по степеням a , как в (146):

$$\operatorname{Re} \psi \left(1 \pm i \frac{a}{\sqrt{y}} \right) =$$

$$= -C - \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \zeta(2m+1) \frac{a^{2m}}{y^m} \quad (151)$$

и будем интегрировать получающийся ряд почленно, используя определение J_{model} (147):

$$J_{model} =$$

$$= -C\sqrt{\pi} - \pi \sum_{m=1}^\infty (-1)^{2m} \frac{a^{2m} \zeta(2m+1)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (152)$$

При написании правой части (152) мы регуляризовали расходящиеся интегралы с помощью аналитических продолжений (соотношений для Γ -функции [38]):

$$\int_0^\infty \frac{y^{1/2}}{y^{m+1}} e^{-y} dy = \Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\cos \pi m \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(-1)^m \pi}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (153)$$

При сравнении (150) и (152) мы видим, что в (150) присутствуют все целые степени a , а в (152) — только четные. Переходя к новой переменной суммирования

$$2m = k \quad (m = k/2) \quad (154)$$

и суммируя по всем k от 1, а не только по четным k от 2, как следовало бы — здесь и содержится элемент необычности — получим из (152)–(154)

$$J_{model} = -C\sqrt{\pi} - \pi \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{|a|^k \zeta(k+1)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

что в точности совпадает со строгим ответом (150).

Из (131) с учетом вычитания (134) и (135), используя процедуру регуляризации (153) и прием дробления переменной суммирования (154), получим, аналогично выводу выражения (150), из соотношения (147):

$$\frac{\delta \Omega_{pp}^L}{V} = \frac{\delta \Omega_{pp}^{cl}}{V} + \frac{\delta \Omega_{pp}^q}{V}. \quad (155)$$

Первый член в правой части (155) соответствует «классическому» пределу, представленному логарифмическим вкладом в ВВК (здесь $\varkappa \rightarrow 0$):

$$\frac{\delta \Omega_{pp}^{cl}}{V} = -\zeta_p^2 T \left(\frac{e^2}{T} \right)^3 \left\{ \frac{\pi}{3} \ln \varkappa \lambda_p - \frac{\pi}{6} (1-C) \right\}, \quad (156)$$

$$\lambda_p = \frac{\hbar}{\sqrt{m_p T}}.$$

В работе [13] в соответствующем выражении во втором слагаемом присутствует лишний член с $\ln 3$ в скобке $(-C - 2 \ln 3 + 1)$. Этот член «возникает» при буквальном использовании классического представления для ВВК (B_{cl}) с разложением в ряд по U/T до третьего порядка и заменой

$$U(r) = e^2/r$$

на экранированное значение потенциала взаимодействия

$$U(r) = (e^2/r) \exp(-\varkappa_D r).$$

В работе [13] в выражении (156) под \varkappa подразумевается \varkappa_D [28]. Имеем

$$\begin{aligned} B_{cl} &= \frac{T}{2} \int_0^\infty \left(\exp\left(-\frac{U}{T}\right) - 1 \right) dU \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{T}{2} \frac{1}{6} \int_0^\infty \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \frac{1}{r^3} \exp(-3\varkappa_D r) 4\pi r^2 dr \rightarrow \\ &\rightarrow -T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \frac{\pi}{3} \ln 3\varkappa_D(r_{min}). \end{aligned} \quad (157)$$

В качестве нижнего предела выбирают $\max(e^2/T, \lambda_p)$. Процедура регуляризации (121) содержит линейную экспоненту, и $\ln 3$ не возникает. Отметим, что выражение (156) получается с использованием аналитических продолжений и соотношений [38]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}-1} e^{-y} \ln \Lambda dy &= \ln \Lambda \cdot \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= -2\sqrt{\pi} \ln \Lambda. \end{aligned} \quad (158)$$

Здесь $\Lambda = (\varkappa \lambda_p / 2)^2$ и

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}-1} e^{-y} \ln y dy &= \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= -2\sqrt{\pi}(-C + 2 - 2 \ln 2). \end{aligned} \quad (159)$$

Как будет показано ниже, сумма вкладов $\delta\Omega_{pp}^L$, $\delta\Omega_{ee}^L$ и $\delta\Omega_{ep}^L$ приводит к исчезновению в конечном ответе параметра регуляризации $\varkappa \rightarrow 0$ для водородной плазмы.

Для второго, квантового, слагаемого в формуле (155) получаем ряд по борновскому параметру, имеющему порядок $e^2/\hbar v_T$, в данном случае по параметру $\alpha_p/2$, в точности совпадающему с выражением, приведенным в [13]:

$$\frac{\delta\Omega_{pp}^q}{V} = -2\pi\lambda_p^3 \zeta_p^2 T \sum_{n=4}^\infty \frac{\zeta(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(-\frac{\alpha_p}{2}\right)^n. \quad (160)$$

Подчеркнем, что этот результат подтверждается также подробным сравнением с численным интегрированием как в представлении (130), так и в (131) с учетом вычитания $\Delta\Omega_{pp}^{(1)}$ (для (131)) и $\Delta\Omega_{pp}^{(2)}$ для

обоих случаев. Для e - e -взаимодействия все ответы (156), (160) совпадают с точностью до замены $m_p \rightarrow m_e$.

Для притягивающего e - p -взаимодействия тождество (130) не выполняется, так как использование теоремы полноты кулоновских функций, приводящее к (134), требует включения дискретных и непрерывных состояний, тогда как в представлении (130) присутствуют только последние.

Результаты численного интегрирования показывают, что трехмерный интеграл аппроксимируется аналитическим выражением, смысл которого мы обсудим в разд. 6:

$$\frac{\delta\Omega_{ep}^L}{V} = \frac{\delta\Omega_{ep}^{cl}}{V} + \frac{\delta\Omega_{ep}^q}{V}. \quad (161)$$

Здесь $\delta\Omega_{ep}^{cl}$ представляет собой логарифмический вклад (ср. (156))

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega_{ep}^{cl}}{V} &= \zeta_e \zeta_p T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 2 \left\{ \frac{\pi}{3} \ln \varkappa \lambda_{ep} - \frac{\pi}{6} (1-C) \right\}, \\ \lambda_{ep} &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu T}}. \end{aligned} \quad (162)$$

Суммирование выражений типа (156) для p - p - и e - e -взаимодействий вместе с (162) с учетом $\zeta_e = \zeta_p$ дает

$$\frac{\delta\Omega^{cl}}{V} = \zeta_e^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \frac{\pi}{6} \ln \frac{m_p}{4m_e}. \quad (163)$$

Полученный результат не содержит параметра \varkappa .

Для $\delta\Omega_{ep}^q$ ответ может быть представлен (ср. (105), (108)) в виде

$$\frac{\delta\Omega_{ep}^q}{V} = -\zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 \Sigma^{SS}, \quad (164)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{SS} &= \sum_{n=4}^\infty \frac{\zeta(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left(\frac{1}{2} - (-1)^n (n-2)^2\right) \alpha_{ep}^n - \\ &- \sum_{k=1}^\infty \frac{\zeta(2k+1)}{\Gamma\left(k + \frac{5}{2}\right)} \alpha_{ep}^{2k+3}, \quad \alpha_{ep} = \sqrt{\beta \text{Ry}}. \end{aligned} \quad (165)$$

Аналогично (121) с использованием выражений (81), (82) может быть получено выражение для обменного взаимодействия (в основном для e - e).

С учетом выражений типа (117) для величины J_{exch} получим для поля отталкивания

$$J_{exch} = \int d\mathbf{r} \Psi_k^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \Psi_k(-\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi \tilde{\xi}_{ee}}{\text{sh} \pi \tilde{\xi}_{ee}} \lambda e^2 \pi, \quad (166)$$

$$\tilde{\xi}_{ee} = \frac{\lambda}{\sqrt{2y}} \sqrt{\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 T}}, \quad y = \frac{\hbar^2 k^2}{m_e T}.$$

В итоге для обменного вклада $\delta\Omega_{ee}^{exch}$ получим

$$\frac{\delta\Omega_{ee}^{exch}}{V} = -\frac{\zeta_e^2}{16\hbar^2} \lambda_{ee}^3 m_e e^4 \times \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^\infty \frac{dk}{k} \frac{\exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{m_e T}\right)}{\text{sh} \frac{\pi \lambda m_e e^2}{2\hbar^2 k}}. \quad (167)$$

Интегралы в (167) считаются численно. Можно также получить явный аналитический результат, используя прием, аналогичный примененному при выводе выражений для J_{model} (147)–(150), и разложение [38]

$$\frac{1}{\text{sh} x} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(2^{2k-1} - 1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1}. \quad (168)$$

Используя выражение для чисел Бернулли [38]

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k), \quad B_{2k+1} = 0, \quad (169)$$

из (167) получим изначально сходящийся результат

$$\frac{\delta\Omega_{ee}^{exch}}{V} = \frac{\zeta_e^2 T}{\sqrt{\pi}} \lambda_{ee}^3 E(\alpha_e), \quad \lambda_{ee} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar^2}{m_e T}}. \quad (170)$$

Для $E(\alpha_e)$ имеем

$$E(\alpha_e) = -\frac{\alpha_e}{4} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} \ln 2 \left(-\frac{\alpha_e}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{72} \left(-\frac{\alpha_e}{2}\right)^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} (1 - 2^{2-n})}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \zeta(n-1) \left(-\frac{\alpha_e}{2}\right)^n, \quad (171)$$

$$\alpha_e = \sqrt{\frac{m_e e^4}{\hbar^2 T}}.$$

Выражение (171) в точности совпадает с приведенным в работе [13] для обменного вклада и подтверждается численным интегрированием. Первый член борновского ряда в (171) дает вклад, представленный ранее выражением (15). Отметим, что даже для условий вблизи центра Солнца борновский ряд для

p - p -взаимодействия (160) плохо сходится, так как $\alpha_p \gg 1$.

В этом пределе вместо разложения (146) можно использовать асимптотическое выражение для ψ -функции [38] ($\xi \gg 1$)

$$\text{Re} \psi(1 + i\tilde{\xi}) = \ln \tilde{\xi}. \quad (172)$$

Подставляя это выражение в (131), используя (145) и способ суммирования расходящихся интегралов (типа (147)–(150)), получим в пределе $\alpha_p \gg 1$

$$\frac{\delta\Omega_{pp}^L}{V} \approx -\zeta_p^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \frac{\pi}{3} \left\{ \ln \Gamma + 2C - \frac{11}{6} \right\}, \quad (173)$$

$$\Gamma = e^2 \varkappa / T, \quad \varkappa \rightarrow 0.$$

В этом пределе из (173) ($\alpha_p \gg 1$) и выражений типа (163) (для e - e -взаимодействия при $\alpha_e \ll 1$), (162) ($\alpha_{ep} \ll 1$) получим ($\zeta_e = \zeta_p$)

$$\frac{\delta\Omega^L}{V} = \zeta_e^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \times \frac{\pi}{6} \left\{ \ln \frac{m_p}{2\mu_{ep}} + 2 \ln \frac{\lambda_{ep} T}{e^2} - 3C + \frac{8}{3} \right\}. \quad (174)$$

Выражение (174) также не содержит \varkappa ($\lambda_{ep} T / e^2 \gg 1$ в соответствии с условием $\alpha_{ep} \ll 1$). Отметим также, что в пределе ($\alpha_p \gg 1$, $\alpha_e \gg 1$, $\alpha_{ep} \gg 1$) вклад всех логарифмических поправок, включая константы вне знака логарифма, для водородной плазмы сокращается. Для плазмы, состоящей из электронов и ядер с зарядом $z \gg 1$ и атомным весом A , при выводе выражения для ВВК, пренебрегая вкладом констант вне знака логарифма ($\ln z \gg 1$), имеем следующие результаты.

1) В пределе

$$\alpha_p^z \ll 1, \quad \alpha_e \ll 1, \quad \alpha_{ep}^z \ll 1,$$

$$\alpha_p^z = z^2 \sqrt{\frac{m_p e^4 A}{\hbar^2 T}}, \quad \alpha_{ep}^z = z \sqrt{\beta \text{Ry}}$$

(такой предел предполагает аномально высокие температуры $T \gtrsim 50z^4 A$ кэВ) получаем

$$\frac{\delta\Omega^{cl}}{V} = -\zeta_e^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \frac{\pi}{3} \left\{ (z^2 - 1)^2 \ln \frac{\varkappa \hbar}{\sqrt{m_e T}} - \frac{z^4}{2} \ln \frac{m_e}{m_p A} + z^2 \ln 2 \right\}. \quad (175)$$

Здесь использовано условие $\zeta_e = z\zeta_p$. В выражении (175) остается явно параметр \varkappa (при $z \neq 1$) и его разумно положить $\varkappa = \varkappa_D$.

2) В пределе

$$\alpha_p^z \gg 1, \quad \alpha_e \gg 1, \quad \alpha_{ep}^z \gg 1$$

получаем

$$\frac{\delta\Omega^{cl}}{V} = -\zeta_e^2 T \left(\frac{e^2}{T}\right)^3 \times \frac{\pi}{3} \left\{ (z^2 - 1)^2 \ln \Gamma_D + 2z^2(z^2 - 1) \ln z \right\}. \quad (176)$$

Здесь положено

$$\Gamma = \Gamma_D = \kappa_D e^2 / T \ll 1, \quad \Gamma_D z^2 \ll 1.$$

Выражение (176) можно при $z \gg 1$ записать в виде

$$\frac{\delta\Omega^{cl}}{V} = -T \zeta_e \frac{\Gamma_D^2 z^3}{12} \ln \Gamma_D z^2. \quad (177)$$

6. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОЙ ПЛАЗМЫ ВОДОРОДА

Рассмотрим суммарный вклад полученных выше выражений (6), (8), (16), (52), (57), (98), (104), (155), (156), (163), (160), (164), (165), (170), (171) для описания УрС слабонеидеальной плазмы водорода применительно к задачам гелиосейсмологии.

Поясним еще раз смысл учитываемых выражений: (6) — давление идеального газа протонов, (8) — давление идеального газа вырожденных электронов, (16) — вклад в давление от кулоновского взаимодействия ($\delta P_{D-H} = -\delta\Omega_{D-H}/V$) в дебай-хюккелевском приближении в большом каноническом ансамбле, (52) — дифракционные (квантовые) поправки к приближению Дебая-Хюккеля; (57) — поправки, учитывающие, что дебаевское экранирование осуществляется за счет не свободных, а взаимодействующих со средой частиц; (98), (104) — сходящийся вклад в давление связанных состояний (вклад «атомов» в давление); (155), (156) — логарифмический вклад порядка $(e^2/T)^3$ от протон-протонного взаимодействия в ВВК; (163) — суммарный логарифмический вклад от всех взаимодействий порядка $(e^2/T)^3 \ln(m_p/m_e)$ в плазме протонов и электронов; (160), (164), (165) — вклад в термодинамику плазмы от состояний рассеяния; (170), (171) — вклад от электрон-электронного обмена.

В центре Солнца необходимо учесть релятивистские поправки во вклад в термодинамические функции от свободного электронного газа, а также давление излучения в «прозрачной» плазме. Используя

релятивизм как поправку ($T/mc^2 \lesssim 10^{-3}$), напомним связь между импульсом и кинетической энергией электрона

$$p = \sqrt{2mE} \left(1 + \frac{E}{4mc^2}\right). \quad (178)$$

Используя (178), получим выражения для активности электронов (ср. с (7))

$$n_e^0(\mu_e) \equiv \zeta_{e,r} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{\lambda_e^3} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} \left(1 + \frac{5}{4} \frac{T}{mc^2} x\right)}{\exp(x-y) + 1} dx \quad (179)$$

и давления электронного газа (ср. (8)) (индекс «r» означает, что учтены релятивистские поправки)

$$P_{0e,r} = \frac{4T}{3\sqrt{\pi}} \frac{2}{\lambda_e^3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{T}{mc^2} x\right)}{\exp(x-y) + 1}. \quad (180)$$

В (179), (180), как и раньше,

$$x = \varepsilon/T, \quad y = \mu_e/T.$$

Аналогично можно найти поправки к энергии и другим функциям электронов. При получении УрС слабонеидеальной плазмы водорода необходимо найти связь активностей (или химических потенциалов) с концентрацией (ср. (24)) с учетом вырождения электронов

$$n_e + \sum_k n_k = \sum_k (z_k + 1) n_k = - \sum_k' \left(\frac{\partial(\Omega/V)}{\partial \mu_k} \right)_T. \quad (181)$$

Термодинамический потенциал Ω представлен суммой всех перечисленных выше вкладов. Здесь штрих при суммировании означает, что дифференцировать в (181) следует с учетом соотношения (13) и выражений типа (179), (180) для активности и давления электронов. Так, в рамках простейшей модели типа (20), в которой кроме вклада идеального газа в УрС учтен дебай-хюккелевский вклад с использованием общих выражений (16), (17) и условия нейтральности (19), получим для простейшего случая $z_k = 1$

$$2n_e = \zeta_e + \zeta_p + \frac{\Gamma_D}{2} \left(\zeta_p + T^2 \frac{\partial^2 n_e^0}{\partial \mu_e^2} \right). \quad (182)$$

В (182) следует дифференцировать n_e^0 по химическому потенциалу с учетом (179). В (182) следует затем положить

$$\zeta_{e,r} = \zeta_p = \zeta, \quad n_e = N_A \rho,$$

где N_A — число Авогадро, ρ — плотность плазмы.

Отметим, что в силу слабой неидеальности плазмы ($\Gamma_D \ll 1$), а также относительной малости поправок на вырождение и релятивизм в водородной плазме в условиях Солнца остальные вклады в ВВК, сверх модели типа (20), можно описывать в рамках приведенных ранее выражений (52), (57), (98), (104), (155), (156), (163), (160), (164), (165), (170), (171), полученных в невырожденном случае.

Отметим, что полученные аналитические выражения для сходящегося вклада от связанных состояний (104) вместе с конечным выражением для вклада от состояний рассеяния (164), (165) (полученным, строго говоря, путем угадывания и сопоставления с результатами численного интегрирования (125) с вычитанием (126)) в сумме дают (с использованием разложения (105))

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega_{ep}^q}{V} &= \frac{\delta\Omega^{BS}}{V} + \frac{\delta\Omega_{ep}^{SS}}{V} = \\ &= -\zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 (\Sigma^{BS} + \Sigma^{SS}) = \\ &= -\zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 \Sigma^{tot}. \end{aligned} \quad (183)$$

Здесь Σ^{tot} — соответствующая сумма по степеням параметра $\alpha_{ep} = \sqrt{\beta R\gamma}$, в точности совпадающая с выражением, приведенным в работах [13, 14] и полученным из формул типа формулы Бета–Уленбека, записанных для суммарного вклада от состояний притяжения, без разбиения на связанные состояния и состояния рассеяния:

$$\Sigma^{tot} = \frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\zeta(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \alpha_{ep}^n. \quad (184)$$

Интересно отметить, что выражение (184) в работах [13, 14] было получено после отбрасывания расходящихся членов порядка e^2 , e^4 , e^6 со ссылками на кулоновскую экранировку. В нашем подходе можно получить точное соответствие выражения (184) сумме сходящихся вкладов от связанных состояний (не требующих никакого учета экранировки) и состояний рассеяния, вычисленных с помощью трехмерных интегралов (125), из которых необходимо вычесть вклад от двух перекалин (126), уже учтенных при получении кольцевого приближения, соответствующего приближению Дебая–Хюккеля. При

больших значениях параметра $\alpha_{ep} \gg 1$ можно оценить сумму в (184), заменяя суммирование интегрированием по n и применяя метод перевала

$$\Sigma^{tot} \rightarrow \exp(I/T),$$

что соответствует учету только основного состояния в атомной статсумме, как это изначально принималось в формуле Саха. Оценки по этой формуле для доли связанных состояний («атомов») дают значение порядка 30% в центре Солнца (что абсурдно), тогда как согласно формуле Планка–Ларкина эта доля по порядку величины равна 10^{-4} . Если из (184) вычесть вклад связанных состояний, представленный формулой Планка–Ларкина (с Σ_{P-L}^{BS} (3), (106)), то можно получить аналог вклада от состояний рассеяния (ср. (164), (165)):

$$\begin{aligned} (\Sigma^{SS})' &= \Sigma^{tot} - \Sigma_{P-L}^{BS} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n-2)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \alpha_{ep}^n. \end{aligned} \quad (185)$$

Выражение (185) в явном виде не приводилось. Однако, если сравнить его с выражением для вклада от состояний рассеяния типа (160) для p - p -взаимодействия, то видно, что этот вклад построен аналогично. (Ср. также формулу (148), где результат не зависит от знака a).

Таким образом, можно установить с учетом выражений (107), (108) и (185) следующие соотношения:

$$\Sigma^{SS} = (\Sigma^{SS})' + \Sigma_c, \quad (186)$$

$$\Sigma_{SRM}^{BS} = \Sigma_{P-L}^{BS} - \Sigma_c. \quad (187)$$

Полный вклад от связанных состояний и состояний рассеяния (184) может быть представлен двумя способами:

$$\Sigma^{tot} = \Sigma_{SRM}^{BS} + \Sigma^{SS} = \Sigma_{P-L}^{BS} + (\Sigma^{SS})'. \quad (188)$$

В этом смысле формула Планка–Ларкина является «правильной», но содержащей вклады от связанных состояний и непрерывного спектра, если одновременно должным образом определить вклад от состояний рассеяния. В отличие от формулы Планка–Ларкина, выражение для Σ_{SRM}^{BS} описывает вклад только связанных состояний.

С учетом $\delta\Omega/V = -T\zeta_e \zeta_p \lambda_{ep}^3 \Sigma$ запишем несколько первых членов разложений (105), (106), (165) и (185) по борновскому параметру ($\sim e^2/(\hbar v_T)$):

$$\lambda_{ep}^3 \Sigma_{SRM}^{BS} = \frac{\pi^4}{3} \left(\frac{e^2}{T} \right)^4 \frac{1}{\lambda_{ep}} - \frac{64\pi^2}{15} \zeta(3) \left(\frac{e^2}{T} \right)^5 \times \\ \times \frac{1}{\lambda_{ep}^2} + \frac{8\pi^3}{3} \zeta(4) \left(\frac{e^2}{T} \right)^6 \frac{1}{\lambda_{ep}^3} - \dots, \quad (189)$$

$$\lambda_{ep}^3 \Sigma_{P-L}^{BS} = \frac{\pi^4}{12} \left(\frac{e^2}{T} \right)^4 \frac{1}{\lambda_{ep}} - \\ - \frac{\pi^3}{6} \zeta(4) \left(\frac{e^2}{T} \right)^6 \frac{1}{\lambda_{ep}^3} + \dots, \quad (190)$$

$$\lambda_{ep}^3 \Sigma^{SS} = -\frac{7\pi^4}{24} \left(\frac{e^2}{T} \right)^4 \frac{1}{\lambda_{ep}} + \frac{68\pi^2}{15} \zeta(3) \left(\frac{e^2}{T} \right)^5 \times \\ \times \frac{1}{\lambda_{ep}^2} - \frac{31\pi^3}{12} \zeta(4) \left(\frac{e^2}{T} \right)^6 \frac{1}{\lambda_{ep}^3} - \dots, \quad (191)$$

$$\lambda_{ep}^3 (\Sigma^{SS})' = -\frac{\pi^4}{24} \left(\frac{e^2}{T} \right)^4 \frac{1}{\lambda_{ep}} + \frac{4\pi^2}{15} \zeta(3) \left(\frac{e^2}{T} \right)^5 \times \\ \times \frac{1}{\lambda_{ep}^2} - \frac{\pi^3}{12} \zeta(4) \left(\frac{e^2}{T} \right)^6 \frac{1}{\lambda_{ep}^3} - \dots \quad (192)$$

Из сравнения выражений (189), (191) видно, что главный исчезающий вклад от связанных состояний соизмерим по абсолютной величине со вкладом от состояний рассеяния, тогда как в (190) первый член по абсолютной величине в два раза больше соответствующего члена в (192). Отметим, что результат (192) был получен в работе [10].

В литературе часто используется химическая картина, в которой в УрС учитывается вклад идеального газа, дебай-хюккелевское приближение и вклад от связанных состояний. Всеми поправками — на дифракцию, экранировку «одетыми» частицами и взаимодействие в континууме (от состояний рассеяния, содержащих «классические» логарифмические вклады и квантовые суммы по борновскому параметру $e^2/\hbar v_T$) — пренебрегается. В пределе $I/T \gg 1$ это оправдано, так как основной вклад в УрС происходит от связанных состояний, пропорциональных $\exp(I/T)$. Для условий в центре Солнца имеем $I/T \ll 1$, поэтому отбрасывание состояний рассеяния с одновременным удержанием вклада от связанных состояний незаконно. Однако тот факт, что и те, и другие вклады (величины Σ) при этом малы ($\sim 10^{-4}$), а на периферии преобладает вклад от связанных состояний, показывает, что химическая картина может быть достаточно «правильной».

В разд. 7 мы приведем сравнение полной физической модели при нахождении УрС водородной

плазмы вдоль солнечной траектории с химическими моделями, представленными формулами Σ_{SRM}^{BS} или Σ_{P-L}^{BS} .

К уравнению состояния плазмы (величине давления $P(\rho, T)$ и другим термодинамическим функциям) следует добавить вклад от равновесного теплового излучения в плазме. В работе [42] приводились выражения для интенсивности излучения в поглощающей среде, из которых следует, что по параметру $\varepsilon''/\varepsilon' \ll 1$ можно использовать выражение для излучения в прозрачной среде. В центре Солнца, например, в рамках S -модели [1] параметр $\bar{k}_\omega c/\bar{\omega} \sim 10^{-6}$, где \bar{k}_ω — средний коэффициент поглощения (непрозрачность), c — скорость света, $\bar{\omega}$ — средняя частота теплового излучения.

Запишем выражение для энергии в прозрачной плотной плазме [43] с учетом связи $k = n\omega/c$ ($n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$ — показатель преломления плазмы):

$$E_R = 2V \int \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = \\ = \frac{\hbar V}{\pi^2 c^3} \int_{\omega_p}^{\infty} \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2} \omega^2}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} d\omega. \quad (193)$$

Здесь

$$\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_e / m_e,$$

ω_p — электронная плазменная частота, V — объем системы ($V \rightarrow \infty$). В выражении (193) учтено, что излучение с частотами $\omega < \omega_p$ не распространяется в среде как свободное. Разлагая знаменатель в (193) по степеням экспоненты $\exp(-\hbar\omega/T)$, получим

$$\frac{E_R}{V} = \frac{\hbar\omega_p}{\pi^2 c^3} \frac{T^3}{\hbar^3} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[z K_0(z) + 2z K_2(z) + (2+z^2) K_1(z) \right], \quad (194)$$

где $K_n(z)$ — функции Макдональда [38], $z = n\hbar\omega_p/T$. В пределе $\hbar\omega_p \ll T$ (в центре Солнца $\hbar\omega_p/T \sim 1/4$) из (194) получим (ср. [28])

$$\frac{E_R}{V} = \frac{\pi^2 T^4}{15 \hbar^3 c^3} \left[1 - \frac{5}{4\pi^2} \left(\frac{\hbar\omega_p}{T} \right)^2 \right]. \quad (195)$$

Для свободной энергии излучения аналогично получим

$$\begin{aligned}
 F_R &= \frac{TV}{\pi^2 c^3} \int_{\omega_p}^{\infty} \omega \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{T} \right) \right) d\omega = \\
 &= -\frac{\hbar V}{3\pi^2 c^3} \int_{\omega_p}^{\infty} \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)^{3/2}}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} d\omega = \\
 &= -\frac{\hbar V \omega_p^2 T^2}{\pi^2 c^3 \hbar^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2(z). \quad (196)
 \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\frac{\partial \omega_p}{\partial V} = -\frac{\omega_p}{2V}$$

из выражения (196) можно получить выражение для давления излучения:

$$\begin{aligned}
 P_R &= -\left(\frac{\partial F_R}{\partial V} \right)_T = \frac{\omega_p^2 T^2}{\hbar \pi^2 c^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} K_2(z) + \\
 &+ \frac{\omega_p^3 T}{2\pi^2 c^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(z). \quad (197)
 \end{aligned}$$

В пределе $\hbar\omega_p \ll T$ из (197) имеем [28]

$$P_R^0 = \frac{T^4 \pi^2}{45 \hbar^3 c^3}. \quad (198)$$

Для нахождения скорости звука вдоль солнечной траектории нам необходимы значения величин c_V^R — теплоемкости излучения,

$$c_V^R = \frac{\partial E_R / V}{\partial T},$$

и производных $(\partial P_R / \partial T)_\rho$, $(\partial P_R / \partial \rho)_T$. Эти выражения легко получаются из выражений (194) и (197). Мы не будем здесь приводить соответствующих достаточно громоздких выражений.

Отметим, что равновесие излучения с веществом предполагает выполнение условия $\bar{k}_\omega R \gg 1$. На периферии, в фотосфере, это условие уже нарушается [1], так

$$\begin{aligned}
 \rho &\sim 4 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3, \\
 \bar{k} &= \kappa \rho = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 3.2 \cdot 10^{-11} \text{ см}^{-1}, \\
 R_\odot &\approx 7 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad \bar{k} R_\odot \sim 2.
 \end{aligned}$$

Для прямых задач гелиосейсмологии необходимы различные термодинамические величины вдоль солнечной траектории. Здесь мы ограничились только водородной плазмой (тогда как на Солнце представлены и другие элементы, особенно He, а также

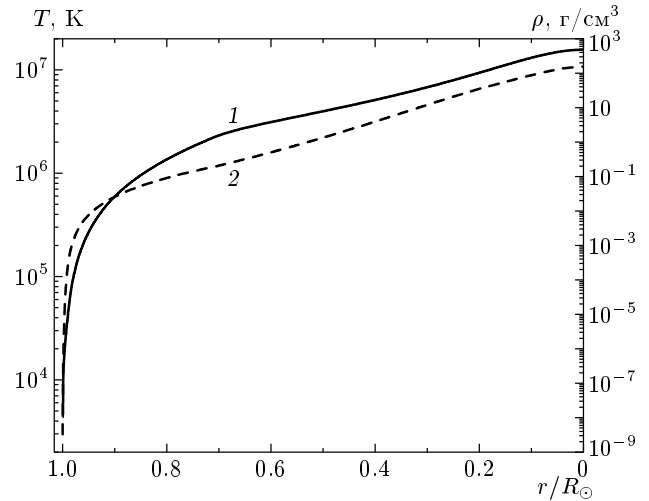


Рис. 3. Солнечная траектория: 1 — температура (К), 2 — плотность (г/см³) в зависимости от относительного радиуса r/R_\odot

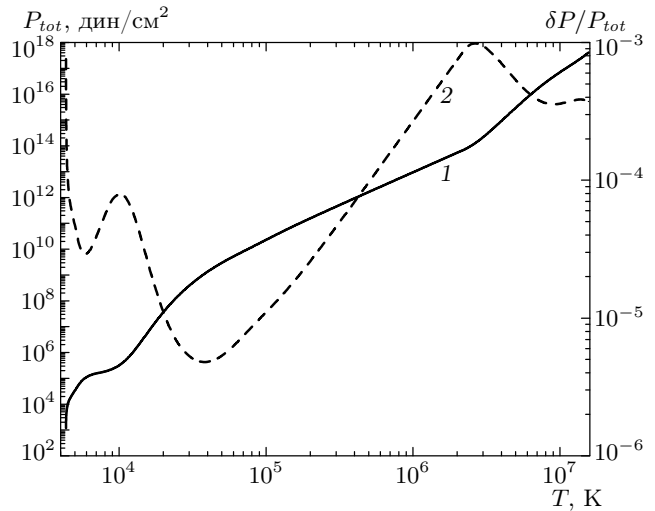


Рис. 4. Суммарное давление (1) и доля давления излучения в суммарном давлении (2) в зависимости от температуры вдоль солнечной траектории

Li, Be, B, C, N, O, Ne, ..., Fe), поскольку обобщение формул типа (104) с Σ^{BS} в том или ином виде (даже в рамках химической модели) на многоэлектронные связанные состояния требует рассмотрения задачи трех и более тел. Строгих результатов даже для HeI к настоящему времени не получено и этот вопрос требует дальнейших исследований. Некоторые комментарии будут даны в Заключение.

Для вычисления скорости звука в водородной плазме следует воспользоваться соотношением [44]

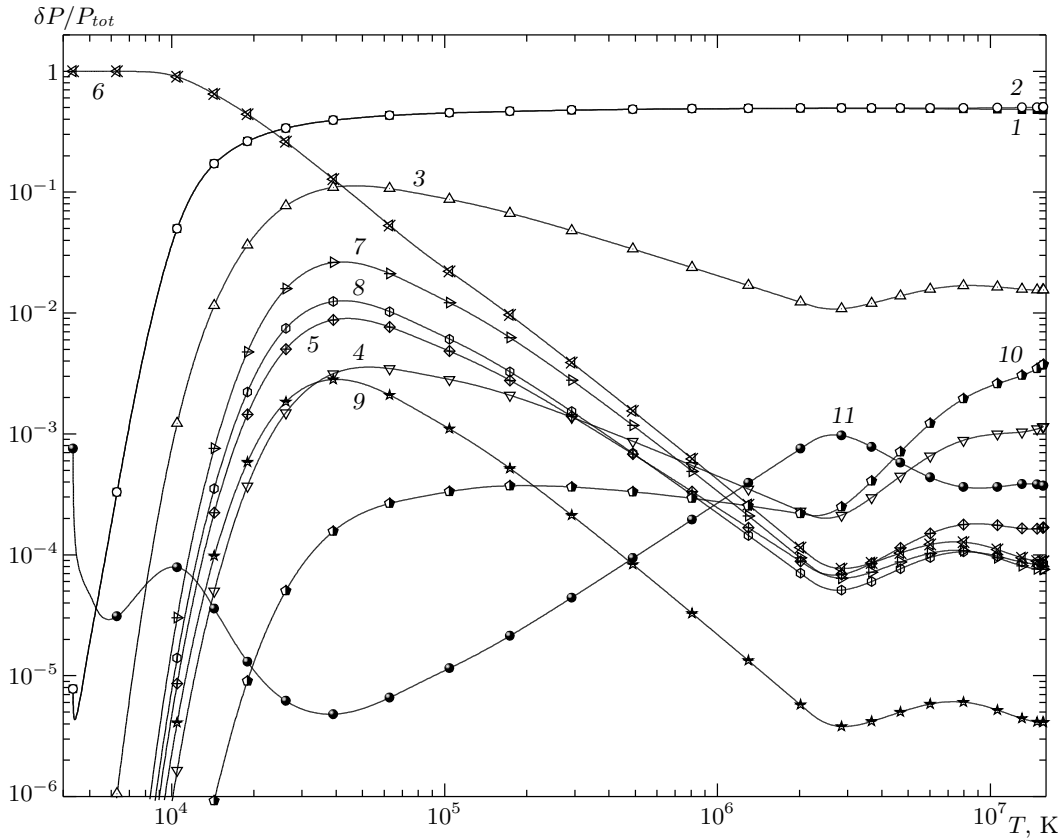


Рис. 5. Абсолютные значения удельных вкладов ($\delta P/P_{tot}$) в суммарное давление в зависимости от температуры вдоль солнечной кривой от составляющих: 1 — $P_{0,i}$, 2 — $P_{0,er}$, 3 — δP_{D-H} , 4 — $\Delta\Omega_{diff}/V$, 5 — $\delta\Omega^{cl}/V$, 6 — $-\delta\Omega_{SRM}^{BS}/V$, 7 — $\delta\Omega_{ep}^q/V$, 8 — $-\delta\Omega_{pp}^q/V$, 9 — $-\delta\Omega_{ee}^q/V$, 10 — $-\delta\Omega_{ee}^{exch}/V$, 11 — P_R

7. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ УРС СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОЙ ВОДОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ ВДОЛЬ СОЛНЕЧНОЙ ТРАЕКТОРИИ

С использованием соотношений (5), (6), (9), (179), (180), (182), (16), (52), (57), (98), (104), (156), (163), (160), (164), (165), (170), (171), (194), (197) рассчитывалось уравнение состояния слабонеидеальной плазмы водорода, т. е. зависимость суммарного давления $P(r)$ или $P(T)$ вдоль солнечной траектории в рамках S -модели [1].

На рис. 3 представлено распределение плотности и температуры в зависимости от текущего радиуса, отсчитываемого от центра Солнца [1]. Расчеты, учитывающие все перечисленные выше вклады, относятся к физической картине, представленной, согласно термодинамической теории возмущений, с точностью до ВВК (вплоть до ζ^2) для водородной плазмы.

На рис. 4 представлено суммарное давление плаз-

Здесь давление P и теплоемкость c_V представлены суммой вкладов вещества, P_M (c_V^M), и излучения, P_R (c_V^R); ρ — плотность плазмы. Еще один важный параметр, используемый в задачах гелиосейсмологии, — адиабатический показатель сжимаемости Γ_1 , определяемый соотношением

$$\Gamma_1 = \frac{\rho}{P} c_S^2. \quad (200)$$

$$c_S^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \left[1 + \frac{T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)^2}{c_V \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T} \right]. \quad (199)$$

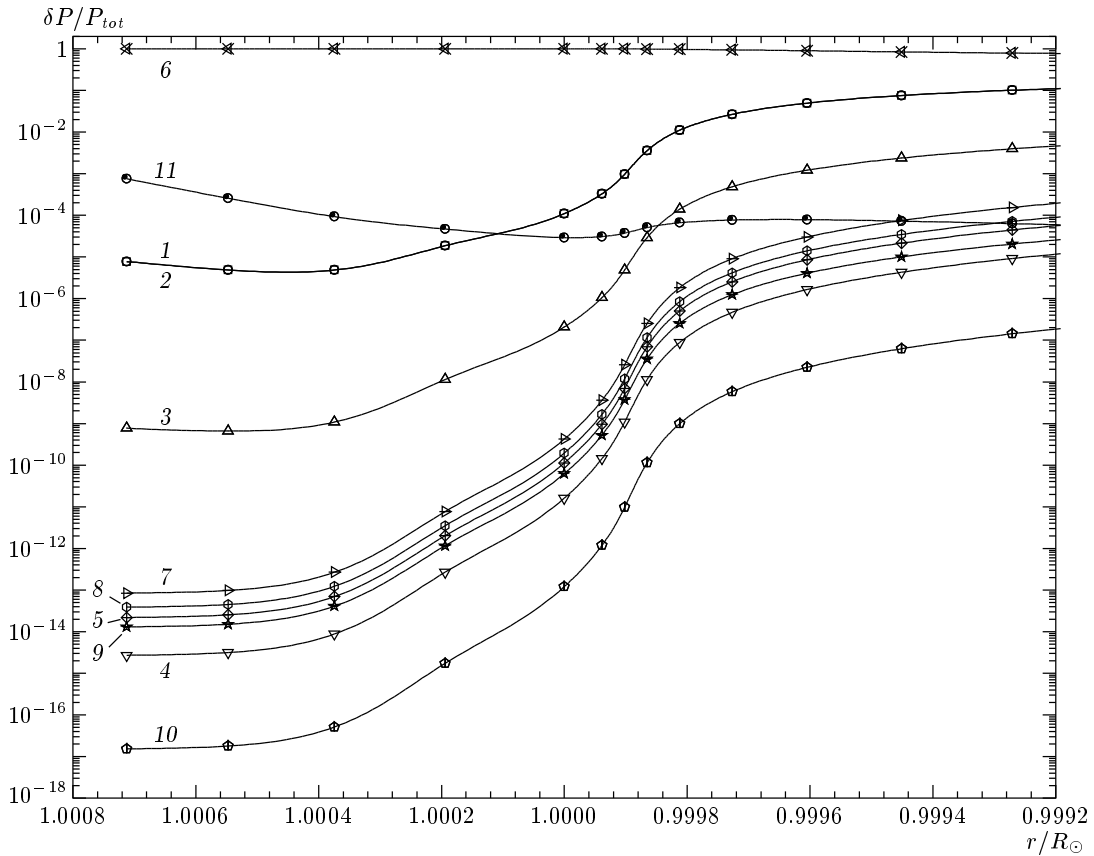


Рис. 6. Абсолютные значения удельных вкладов ($\delta P/P_{tot}$) в суммарное давление в зависимости от относительного радиуса r/R_{\odot} на периферии Солнца от составляющих: 1 — $P_{0,i}$, 2 — $P_{0,er}$, 3 — δP_{D-H} , 4 — $\Delta\Omega_{diff}/V$, 5 — $\delta\Omega^{cl}/V$, 6 — $-\delta\Omega_{SRM}^B/V$, 7 — $\delta\Omega_{ep}^q/V$, 8 — $-\delta\Omega_{pp}^q/V$, 9 — $-\delta\Omega_{ee}^q/V$, 10 — $-\delta\Omega_{ee}^{exch}/V$, 11 — P_R

мы и излучения вдоль солнечной траектории. Здесь же можно видеть долю, которую составляет давление излучения от полного давления (приблизительно $4 \cdot 10^{-4}$ в центре Солнца).

На рис. 5, 6 представлены абсолютные значения удельных вкладов в суммарное давление от различных составляющих $\delta P/P_{tot}$, $\delta P = -\delta\Omega/V$ (на рис. 5 — в температурной шкале, на рис. 6 — на периферии в шкале относительных радиусов $1.0008 \geq r/R_{\odot} \geq 0.9992$). Видно, что вклад от давления электронов и протонов, значение которого приблизительно равно 1 в температурных координатах, резко падает примерно до 10^{-5} на периферии, где преобладают связанные состояния (атомы), вклад которых в центре Солнца (как и $e-p$ -состояний рассеяния) составляет приблизительно 10^{-4} . Вклад кулоновского взаимодействия (порядка 10^{-2} в центре Солнца) достигает максимума (порядка 10^{-1}) при $T \sim 5 \cdot 10^4$ К и убывает на периферии до 10^{-9} . Дифракционные поправки (поряд-

ка 10^{-3} в центре Солнца) проходят через максимум (около $4 \cdot 10^{-3}$) при $T \approx 5 \cdot 10^4$ К и далее, как и все взаимодействия, связанные с заряженными частицами (от суммарного логарифма, состояний рассеяния от $e-p$, $p-p$, $e-e$ -взаимодействий, обменного $e-e$ -взаимодействия) резко падают на периферии.

В центре Солнца относительный вклад от суммарного логарифмического члена составляет приблизительно $2 \cdot 10^{-4}$ (соответственно, поправка на экранировку «одетыми» частицами еще на порядок меньше).

Обменное взаимодействие в центре Солнца, следующее по значимости после кулоновского вклада, составляет примерно $4 \cdot 10^{-3}$. Давление излучения в центре Солнца приблизительно равно $4 \cdot 10^{-4}$. Вклад от $p-p$ -состояний рассеяния здесь же порядка 10^{-4} . Наименьший вклад от $e-e$ -состояний рассеяния, составляет приблизительно $4 \cdot 10^{-6}$.

Видно также, что многие поправки, входящие в ВВК, вполне существенны, если учитывать высокую

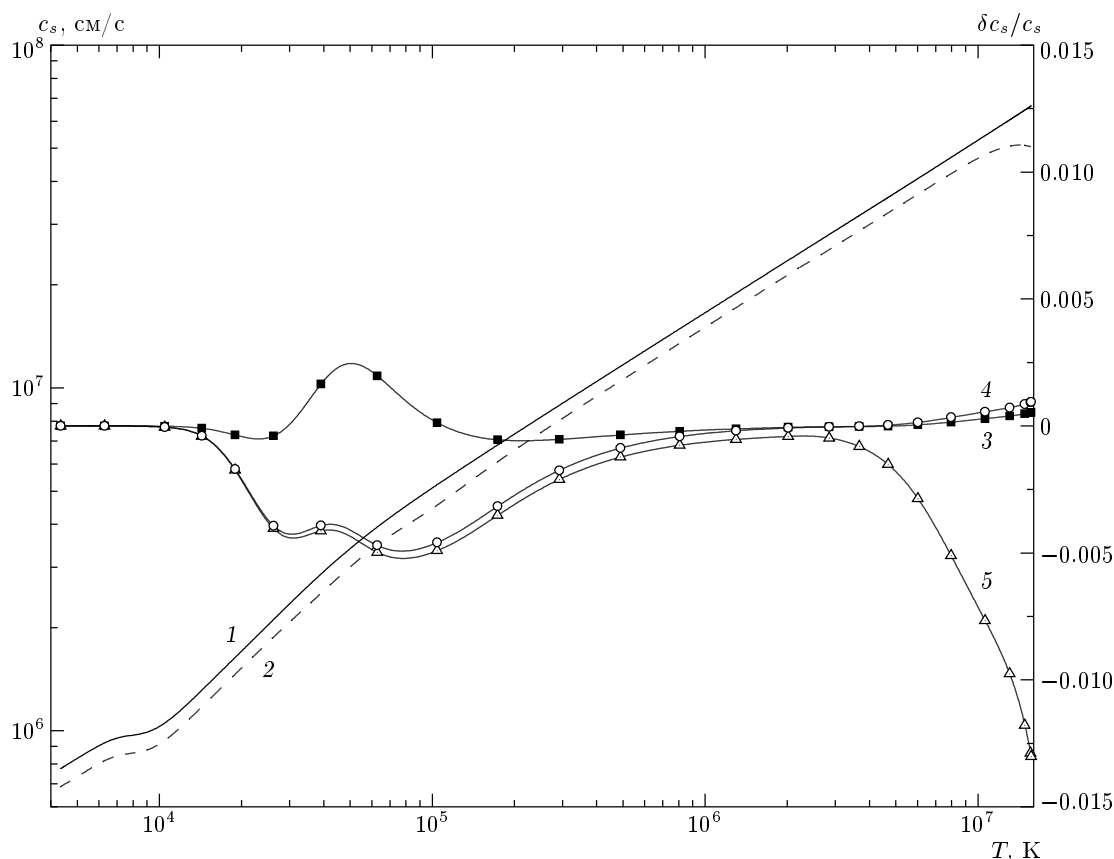


Рис. 7. Скорость звука (1 — водородная физическая модель, 2 — S -модель [1]) и относительные отклонения от 1 для различных химических моделей с учетом излучения (3 — Σ_{P-L}^{BS} -модель, 4 — Σ_{SRM}^{BS} -модель, 5 — Σ_{SRM}^{BS} -модель без учета вырождения) в зависимости от температуры вдоль солнечной траектории

точность процедуры инверсии в задачах гелиосейсмологии.

Следует еще раз оговориться, что здесь рассмотрен лишь вклад от водородной плазмы в предположении (заведомо неверном, особенно вблизи центра, из-за наличия He и других элементов), что именно водородом определяется полная плотность вещества. При всей условности этой модели цель данных расчетов состояла в качественном выяснении относительной доли различных вкладов в суммарное давление плазмы. В то же время точность такой модели в обычном, не прецизионном, как в гелиосейсмологии, смысле вполне разумна при сравнении с данными полной S -модели, включающей He и другие элементы, распределенные вдоль солнечной траектории. Так, на рис. 7 представлено распределение скорости звука c_s в температурной шкале, вычисленное в рамках водородной физической модели (см. (199)) и в рамках S -модели. Здесь же представлены относительные отклонения в скорости звука,

вычисленные в рамках различных химических моделей. В последних мы пренебрегаем всеми поправками, кроме вклада свободных частиц, кулоновского взаимодействия Дебая–Хюккеля, вклада связанных состояний, представленных формулами Планка–Ларкина (Σ_{P-L}^{BS}) или Σ_{SRM}^{BS} , и излучения. Разница, получающаяся при двух способах учета связанных состояний, составляет приблизительно $7 \cdot 10^{-3}$ при $T \sim 10^5$ К, где эффекты вырождения не существенны. В центре Солнца, где роль вырождения заметна, обе модели, Σ_{P-L}^{BS} и Σ_{SRM}^{BS} , весьма близки друг к другу (если учитывать вырождение или если его не учитывать), однако относительные отклонения для моделей, учитывающих вырождение, от не учитывающих его, больше 10^{-2} .

На рис. 8 представлены значения отклонения показателя адиабатической сжимаемости от идеального-газового, см. (200), $(\Gamma_1 - 5/3) \cdot 10^3$ вдоль солнечной траектории. Здесь можно сравнить данные, вычисленные по полной физической модели и по

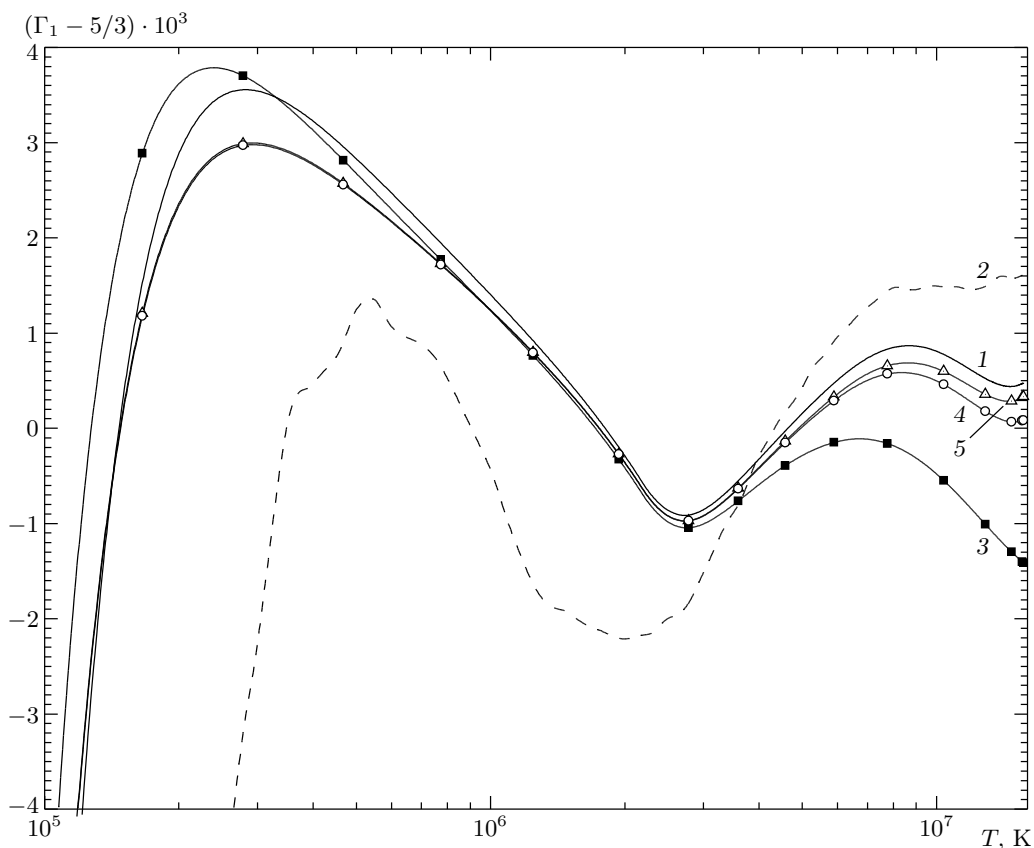


Рис. 8. Относительные отклонения показателя адиабатической сжимаемости от идеально-газового значения $((\Gamma_1 - 5/3) \cdot 10^3)$ в зависимости от температуры вдоль солнечной траектории: 1 — водородная физическая модель, 2 — *S*-модель [1]; химические модели с учетом излучения: 3 — Σ_{P-L}^{BS} , 4 — Σ_{SRM}^{BS} , 5 — Σ_{SRM}^{BS} без учета вырождения

химическим моделям, с формулами для Σ_{P-L}^{BS} и Σ_{SRM}^{BS} (с учетом и без учета вырождения). На этом же рисунке представлены результаты расчетов по *S*-модели для «настоящего» Солнца, содержащего все элементы [1]. Даже при очевидной неполноценности водородной модели видно, что отличие величины $(\Gamma_1 - 5/3) \cdot 10^3$, вычисленной с ее помощью, от величины, полученной в рамках *S*-модели, не столь велико, особенно вблизи центра Солнца, где физическая модель и вариант химической модели Σ_{SRM}^{BS} ближе к эксперименту, чем химическая модель Σ_{P-L}^{BS} (даже знак отклонения в этих моделях разный).

Для еще одной иллюстрации качества водородной модели приведем (см. рис. 9) величину $\Gamma_1 - 5/3$ в полном диапазоне по осям координат, чтобы отметить уменьшение показателя адиабаты в области ионизации водорода. Второй, меньший пикочок, присутствующий в рамках *S*-модели, обусловлен ионизацией гелия, которого нет в нашей модели. Разли-

чие между указанными выше химическими моделями в таком масштабе незаметно.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку развитие гелиосейсмологии требует знания уравнения состояния с высокой точностью, в настоящей работе было выведено независимым и подробным способом сходящееся УрС, включающее эффекты релятивизма ($\sim T/(mc^2)$), вырождения ($\sim n_e \lambda_e^3$), последовательный учет условия нейтральности в активностях $\zeta_e = \zeta_p$, кулоновского взаимодействия в приближении Дебая–Хюккеля ($\sim \Gamma_D$) с различными поправками порядка $\Gamma_D \lambda_e$, а также вклады в ВВК от сходящегося логарифмического члена ($\Gamma_D^2 \ln(m_p/m_e)$), связанных состояний ($\sim \zeta_e \lambda_{ep}^3 \Sigma_{SRM}^{BS}$) и состояний рассеяния от всех видов взаимодействия ($\sim \zeta_e \lambda_{ij}^3 \Sigma_{ij}^{SS}$), обменного взаимодействия ($\sim \zeta_e \lambda_e^2 e^2/T$) и давления излучения с учетом

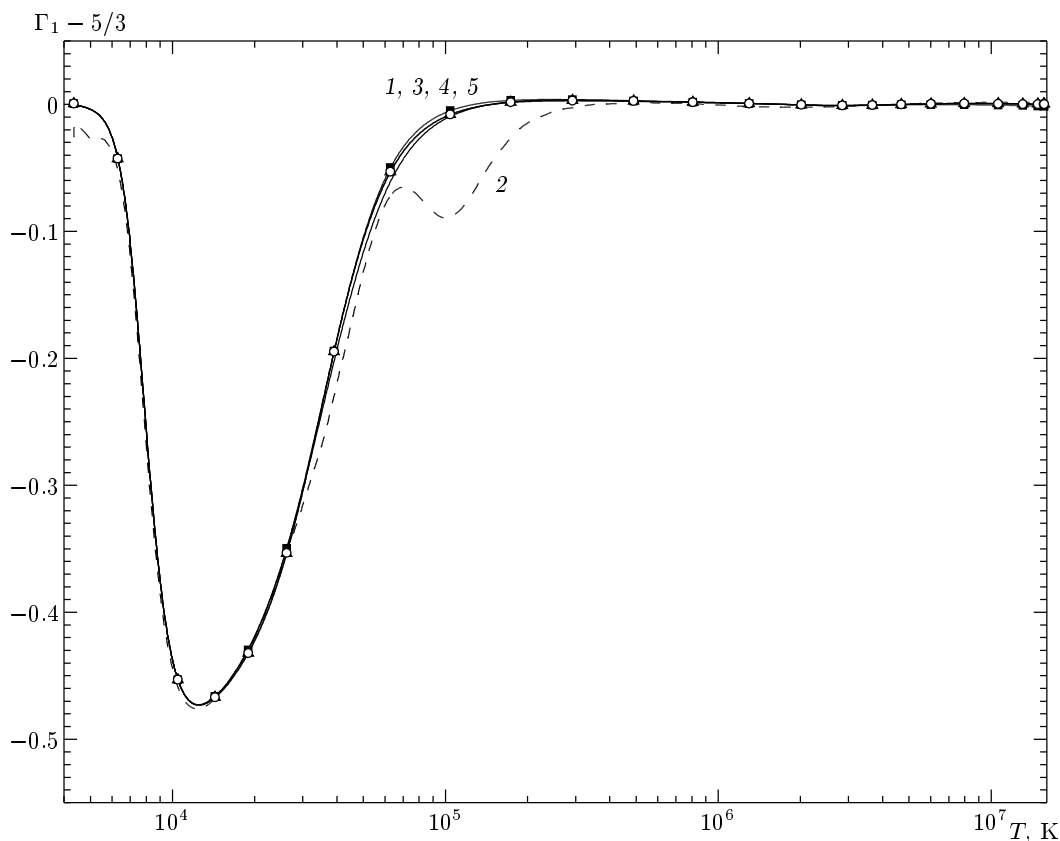


Рис. 9. Относительные отклонения показателя адиабатической сжимаемости от идеально-газового значения $(\Gamma_1 - 5/3)$ (то же, что и на рис. 8)

влияния плазмы на его дисперсионные свойства. Проведено численное моделирование УрС, скорости звука и показателя адиабаты водородной плазмы вдоль солнечной траектории по полной физической модели и по различным химическим моделям. Следует отметить, что в рамках имеющейся точности гелиосейсмологии, в принципе, возможна определенная качественная отбраковка тех или иных приближений (например, результаты работы [6] ближе к эксперименту, чем результаты работы [4]).

Отметим некоторые проблемы, требующие решения для дальнейшего прогресса в этой области. В первую очередь, это относится к последовательному выходу за рамки приближения, описывающего УрС до второго вириального коэффициента. Уже учет вкладов в давление от состояний H^- , H_2^+ , H_2 даже для водорода требует выхода за рамки ВВК. Ранее упоминалась проблема описания вклада многоэлектронных состояний в нейтральных и заряженных частицах (HeI , $HeII$ и т. д. по всем другим элементам), а также многочастичных состояний рассе-

яния. Предпринятые в этом направлении героические усилия [45, 46] нельзя считать закрывающими проблему, так как сам метод [45] учета связанных диаграмм (P_{CD} , от «connected») при знании вклада простых (simple) неприводимых диаграмм

$$P_{SD} = TS(\zeta_k)$$

(см. также [13]), состоящий в использовании соотношения

$$P_{CD} = T \sum_k \frac{\zeta_k}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta_k} \right)^2, \quad (201)$$

приводит к неточностям из-за наличия интегрирования по заряду в квантовой термодинамической теории возмущений [24]. Так, беря $S(\zeta_k)$ в приближении Дебая – Хюккеля,

$$S = \frac{\chi_D^3}{12\pi}, \quad (202)$$

из (201) получим

$$P_{CD} = \frac{\pi}{2} T \left(\frac{e^2}{T} \right)^3 \left(\sum_i \zeta_i z_i^4 \right) \left(\sum_j \zeta_j z_j^2 \right), \quad (203)$$

что отличается от «правильного» ответа (57) коэффициентом, где вместо $\pi/2$ из-за интегрирования по заряду получается $\pi/3$ (ср. такую же описку в [8]).

В то же время подход [45, 46] позволяет хотя бы качественно предсказать, как устроена сходящаяся статистическая сумма многоэлектронного атома. Отметим, что формулы типа формулы Планка – Ларкина или Σ_{SRM} расходятся, будучи буквально обобщены, например, на двухэлектронный (гелиеподобный) атом (ион) из-за наличия дважды возбужденных состояний. В пределе большого заряда ядра ($z \gg 1$), когда в главном приближении можно пренебречь электрон-электронным взаимодействием по сравнению с взаимодействием электронов с ядром, получающееся из (201) с учетом (ср. (104))

$$S_{SD} = \zeta_e \zeta_p T \lambda_{ep}^3 \Sigma^{BS}$$

выражение

$$P_{CD} = \frac{T}{2} \zeta_p \zeta_e^2 \lambda_{ep}^6 (\Sigma_{ep}^{BS})^2 \quad (204)$$

представляется, по крайней мере качественно, разумным. Обоснование такого рода выражений требует использования уравнений Фаддеева для задачи трех тел [47].

Следует отметить также, что Солнце представляет собой уникальную научную лабораторию, так как из-за слабой неидеальности плазмы возможно моделирование многих процессов из первых принципов. Так, в центре Солнца из-за наличия условия

$$T \gg \max(e^2 \kappa_D, \hbar \omega_p, R_y, E_{St} d) \quad (205)$$

(где $E_{St} = en_e^{2/3}$ — штарковское микрополе в плазме, $d \sim ea_0$) самым главным обрезвающим фактором для атомной статсуммы является температура, так как вклад связанных состояний составляет величину порядка $(R_y/T)^2$ (см. (100), (101)). В выражении (205) величина $E_{St} d$ — энергия взаимодействия штарковского микрополя с атомным диполем $d \sim ea_0$. Наличие большого параметра (205) позволяет начинать при расчете УрС с идеально-газового приближения и последовательно учитывать остальные эффекты, в том числе и влияние дискретного спектра на величину давления плазмы, где возникают в качестве первого шага невозмущенные атомные состояния. Качественное рассмотрение, состоящее в разрушении

«атомов» за счет экранировки, уширения, ионизации микрополем (механизм Унзоляда [4]) и т. д., приводит к другой, отличной от следующей из теории возмущения в разложении по степеням активностей, картине, которая даже не подтверждается экспериментом. (Ср. [1], где отмечено, что результаты работы [6] ближе к данным инверсии, чем результаты [4].) Также буквальный учет дебаевской экранировки при расчете атомных состояний (см., например, [13, 14]) приводит к большому сдвигу энергии атомных уровней и, соответственно, центров спектральных линий, что не наблюдается в слабонеидеальной плазме дугового разряда [48, 49].

Более перспективным, на наш взгляд, является учет эффектов уширения (ср. формулу (116) и результаты работы [20]) как при описании спектральных линий, так и термодинамики слабонеидеальной плотной плазмы. Этот подход, в принципе, увязывает проблемы радиационной газодинамики и радиационно-столкновительной кинетики, в которых «атомы» представлены по-разному при вычислении давления и излучения [20].

Авторы признательны С. В. Аюкову, В. А. Батурину, В. К. Грязнову, И. Л. Иосилевскому, Т. Kato, R. More, В. Е. Фортову за многочисленные плодотворные дискуссии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-02-16775-а) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1257.2003.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Christensen-Dalsgaard, W. Däppen, W. A. Dziembowski, and J. A. Guzik, in *Proc. Variable Stars as Important Astrophysical Tools*, ed. by C. Ibanoglu, Kluwer, Dordrecht (2000), p. 59; http://bigcat.ifa.au.dk/~jcd/solar_models/cptrho.15bi.d.15c.
2. V. A. Baturin, W. Däppen, D. O. Gough, and S. V. Vorontsov, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **316**, 71 (2000).
3. S. Basu, W. Däppen, and A. Nayfonov, *Astrophys. J.* **518**, 985 (1999).
4. D. G. Hummer, and D. Mihalas, *Astrophys. J.* **331**, 794 (1988).
5. D. Mihalas, W. Däppen, and D. G. Hummer, *Astrophys. J.* **331**, 815 (1988).
6. F. J. Rogers, F. J. Swenson, and C. A. Iglesias, *Astrophys. J.* **456**, 902 (1996).

7. А. А. Веденов, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **36**, 1133 (1959).
8. А. И. Ларкин, ЖЭТФ **38**, 1896 (1960).
9. Ю. Г. Красников, ЖЭТФ **53**, 2223 (1967).
10. В. П. Копышев, ЖЭТФ **55**, 1304 (1968).
11. W. Ebeling, H. J. Hoffman, and G. Kelbg, Beitr. Plasmaph. **7**, 233 (1967).
12. W. Ebeling, G. Kelbg, and K. Rohde, Ann. der Phys. **21**, 235 (1968).
13. В. Эбелинг, В. Крефт, Д. Кремп, *Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле*, Мир, Москва (1979).
14. В.-Д. Крефт, Д. Кремп, В. Эбелинг, Г. Репке, *Квантовая статистика систем заряженных частиц*, Мир, Москва (1988).
15. C. A. Rouse, Astrophys. J. **272**, 377 (1983).
16. C. E. Moore, M. G. J. Minnaert, and J. Houtgast, *The Solar Spectrum 2935 Å to 8770 Å*, NBS Monograph **61** (1966).
17. A. Unsöld, Z. Astrophys. **24**, 355 (1948).
18. Г. Э. Норман, А. Н. Старостин, ТВТ **8**, 413 (1970).
19. В. С. Воробьев, А. Л. Хомкин, ТМФ **8**, 109 (1971).
20. A. N. Starostin, V. C. Roerich, and R. M. More, Contrib. Plasma Phys. **43**, № 5–6, 369 (2003).
21. E. Ulenbeck and G. E. Beth, Physica **3**, 729 (1936); G. E. Beth and E. Ulenbeck, Physica **4**, 915 (1937).
22. N. Levinson, Kgl. Danske Videnskab. Selskab., Matt.-Fys. Medd. **25** (9) (1949).
23. T. Matsubara, Progr. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
24. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
25. L. Kadanoff, and G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York (1962).
26. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1515 (1964).
27. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, ч. 1*, Наука, Москва (1976).
29. В. М. Галицкий, ЖЭТФ **34**, 152 (1958).
30. E. W. Montroll and J. C. Ward, Phys. Fluids **1**, 55 (1958).
31. H. E. De Witt, J. Math. Phys. **3**, 1216 (1962); **7**, 616 (1966).
32. Е. С. Фрадкин, в сб. *Квантовая теория поля и гидродинамика*, Труды ФИАН, т. 29, Наука, Москва (1965).
33. А. А. Ликальтер, ЖЭТФ **56**, 240 (1969).
34. В. К. Грязнов, И. Л. Иосилевский, В. Е. Фортов, ЖПМТФ **3**, 70 (1973).
35. A. N. Starostin, in *IX Intern. Conf. on Phenom. in Ionized Gases*, Bucharest, (1969), p. 366.
36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматгиз, Москва (1963).
37. В. А. Фок, Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук **2**, 169 (1935).
38. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971).
39. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1969).
40. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра*, Наука, Москва (1965).
41. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).
42. Ю. К. Земцов, А. Ю. Сечин, А. Н. Старостин, ЖЭТФ **110**, 1654 (1996).
43. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
44. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
45. F. J. Rogers, and H. De Witt, Phys. Rev. A **8**, 1061 (1973).
46. F. J. Rogers, Phys. Rev. A **10**, 2441 (1974).
47. Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ **39**, 1459 (1960).
48. H. R. Griem, Phys. Rev. **131**, 1170 (1963).
49. W. L. Wiese, D. E. Kelleher, and D. R. Paquette, Phys. Rev. A **6**, 1132 (1972).