

ПЕРЕХОДЫ К ХАОСУ В СИСТЕМЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛН В РЕЗОНАТОРЕ

*Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 16 февраля 2004 г.

Рассматривается сложная динамика трехволновой параметрической неустойчивости в резонаторе. Представлены подробные результаты численного моделирования сценариев перехода к хаосу в широком диапазоне параметров. Обнаружено, что по мере увеличения интенсивности накачки наблюдается сложная последовательность чередующихся регулярных и хаотических режимов автомодуляции. Изучена связь этих режимов с процессами образования и распространения солитонов.

PACS: 05.45.Jn, 42.65.Sf, 42.65.Yj

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящее время одной из наиболее актуальных проблем нелинейной физики является изучение пространственно-временного хаоса (турбулентности) в неравновесных средах [1–4]. Турбулентность в таких средах возникает за счет развития различных волновых неустойчивостей. Одним из важных примеров является трехволновая параметрическая, или распадная неустойчивость, которая проявляется в гидродинамике, физике плазмы, радиофизике и электронике, нелинейной оптике и т. д. [2–7].

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейной динамики параметрической неустойчивости в системе трех волн, распространяющихся в квадратично нелинейной среде, помещенной в резонатор. Следует отметить, что систему параметрически взаимодействующих волн в резонаторе можно рассматривать как модель ряда реальных устройств, используемых для генерации электромагнитных колебаний, прежде всего — оптических параметрических генераторов [8, 9]. В качестве другого примера можно привести задачу об акусто-оптическом взаимодействии с учетом отражения от границ [10]. В последнее время проблема генерации хаотических сигналов привлекает большое внимание в связи с возможными применениями в системах связи, радиолокации и др. [11–13]. Для

этих приложений распределенные системы могут иметь определенные преимущества, поскольку способны генерировать высокоразмерные хаотические колебания, имеющие в некотором смысле большую сложность.

Итак, рассмотрим взаимодействие трех волн, частоты и волновые числа которых удовлетворяют резонансным условиям

$$\begin{aligned}\omega_s + \omega_i &= \omega_p, \\ k_s + k_i &= k_p.\end{aligned}\quad (1)$$

За счет распада волны накачки с частотой ω_p происходит усиление сигнальной и холостой волн с более низкими частотами соответственно ω_s и ω_i [2–7]. Ранее эта задача рассматривалась в работе [14], где была построена математическая модель данной системы на основе хорошо известных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд [2–6]:

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial A_s}{\partial x} = \sigma_s A_i^* A_p, \quad (2)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial A_i}{\partial x} = \sigma_i A_s^* A_p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial t} + v_p \frac{\partial A_p}{\partial x} = -\sigma_p A_s A_i, \quad (4)$$

где $A_{s,i,p}$ — амплитуды соответственно сигнала, холостой волны и накачки, $v_{s,i,p}$ — групповые скорости, $\sigma_{s,i,p}$ — коэффициенты нелинейного взаимодействия. Нелинейная среда помещена в резонатор, на-

*E-mail: RyskinNM@info.sgu.ru

строенный на частоту сигнальной волны. Для холостой волны и волны накачки резонатор считается прозрачным (в теории оптических параметрических генераторов подобный генератор называется однорезонаторным [9]). При этом граничные условия имеют вид [14]

$$A_s(0, t) = R A_s(l, t - \Delta t), \quad (5)$$

$$A_i(0, t) = 0, \quad A_p(0, t) = A_0, \quad (6)$$

где $R = \rho \exp(i\psi)$ — комплексный параметр обратной связи, l — протяженность нелинейной среды, Δt — время прохождения сигнала по цепи обратной связи, A_0 — постоянная амплитуда накачки на входе в систему, которая определяется внешним источником. Начальные условия для накачки выбираются в виде $A_p(x, 0) = A_0$, а для холостой волны и сигнала — в виде малых шумовых флуктуаций.

Параметры ρ , ψ и Δt зависят от типа резонатора, который здесь не конкретизируем. Например, для линейного резонатора типа Фабри–Перо амплитуды прямой A_s и отраженной A_s^- волн на границах системы связаны соотношениями

$$A_s(0) = R_0 A_s^-(0), \quad (7)$$

$$A_s^-(l) = R_l A_s(l) \exp(-2ik_s l),$$

где $R_{0,l}$ — комплексные коэффициенты отражения соответственно от левой и правой границ. Поскольку отраженная волна не участвует в резонансном взаимодействии, для A_s^- имеем уравнение

$$\frac{\partial A_s^-}{\partial t} - v_s \frac{\partial A_s^-}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

так как она распространяется с той же групповой скоростью, что и сигнальная волна, но в противоположном направлении. Поскольку решение уравнения (8) можно представить в виде

$$A_s^-(0, t) = A_s^-(l, t - l/v_s),$$

нетрудно исключить из выражений (7) отраженную волну и прийти к соотношению (5), где $\rho = |R_0 R_l|$, $\psi = \text{Arg}(R_0 R_l) - 2k_s l$, $\Delta t = l/v_s$.

Для кольцевого резонатора бегущей волны время Δt является независимым параметром, однако вид граничных условий (5), (6) не меняется. Более того, они остаются справедливыми и для системы, рассматривавшейся в работе [10], где резонатор как таковой вообще отсутствует, а обратная связь реализуется за счет отражения акустической волны от границ.

Если ввести безразмерные переменные [14]

$$A'_s = \sqrt{\frac{\sigma_p v_s}{\sigma_s v_p}} \frac{A_s}{A_0}, \quad A'_i = \sqrt{\frac{\sigma_p v_i}{\sigma_i v_p}} \frac{A_i}{A_0}, \quad A'_p = \frac{A_p}{A_0},$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{v_s v_i (t - x/v_i)}{l(v_i - v_s)},$$

то уравнения (2)–(4) примут вид (штрихи у безразмерных переменных опускаем)

$$\frac{\partial A_s}{\partial \tau} + \frac{\partial A_s}{\partial \xi} = \alpha A_i^* A_p, \quad (9)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial \xi} = \alpha A_s^* A_p, \quad (10)$$

$$(1 + u) \frac{\partial A_p}{\partial \tau} + \frac{\partial A_p}{\partial \xi} = -\alpha A_s A_i. \quad (11)$$

Здесь $\alpha = A_0 l (\sigma_s \sigma_i / v_s v_i)^{1/2}$ — нормированная амплитуда накачки на входе в систему, $u = v_i (v_s - v_p) / v_p (v_i - v_s)$ — параметр расстройки групповых скоростей. Без ограничения общности будем считать, что $v_i > v_s$; в противном случае можно легко изменить нормировку так, что окончательный вид уравнений останется прежним. Однако в любом случае считается, что групповые скорости сигнала и накачки различаются достаточно сильно, так как именно соотношение этих величин определяет ширину полосы частот параметрического усиления. При $v_s \approx v_i$ ширина полосы стремится к бесконечности, следовательно, спектр генерируемого сигнала должен быть очень широким, так что уже нельзя считать параметры, входящие в исходные уравнения, постоянными и вообще нельзя пользоваться уравнениями для медленно меняющихся амплитуд.

Граничные условия (5) и (6) в безразмерных переменных принимают вид

$$A_s(0, \tau) = R A_s(1, \tau - \delta), \quad A_i(0, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$A_p(0, \tau) = 1.$$

Здесь

$$\delta = \frac{v_s v_i (\Delta t + l/v_i)}{l(v_i - v_s)}$$

— безразмерное время запаздывания. Для резонатора Фабри–Перо, как было показано выше, $\Delta t = l/v_s$, следовательно,

$$\delta = \frac{v_i + v_s}{v_i - v_s} > 1.$$

Однако мы не ограничиваемся каким-то определенным типом резонатора, так что величина δ может принимать, вообще говоря, любые значения. В рамках сделанных предположений спектр собственных частот резонатора эквидистантен и определяется выражением [14]

$$\Omega_n = \frac{2\pi n + \psi}{1 + \delta}. \quad (13)$$

Здесь Ω — безразмерная отстройка от частоты ω_s , соответствующей условиям (1) точного резонанса.

В работе [14] были исследованы процессы самовозбуждения автоколебаний и показано, что порог самовозбуждения периодически зависит от фазы параметра обратной связи ψ , что типично для автоколебательных систем с запаздыванием (см., например, [15–18]). При $\psi = -2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, когда одна из резонансных частот (13) равна нулю (т. е. в размерных единицах совпадает с частотой точного резонанса), самовозбуждение происходит при минимальной интенсивности накачки. Условие самовозбуждения в этом случае определяется простой формулой

$$\rho \operatorname{ch} \alpha = 1. \quad (14)$$

Напротив, при $\psi = -2\pi n + \pi$ частоты двух соседних мод равноудалены от резонансной частоты и пороговая интенсивность накачки максимальна. На плоскости параметров α , ψ имеется периодическая система областей самовозбуждения, называемых зонами генерации.

По мере увеличения интенсивности накачки режим стационарной генерации, когда амплитуды волн не зависят от времени, становится неустойчивым и сменяется автомодуляцией. При этом происходит образование параметрического солитона, который периодически распространяется вдоль системы [14, 15]. Автомодуляция всегда возникает «жестко», т. е. стационарный режим сменяется глубокими пульсациями амплитуды. По существу, происходит одновременное возбуждение большого числа мод резонатора, частоты которых жестко связаны, что приводит к периодическому образованию солитоноподобных импульсов. Такой механизм автомодуляции называется частотным, он связан с появлением провала на амплитудно-частотной характеристике усилителя [14, 17–21].

Был также изучен механизм возникновения хаотических колебаний в центре зоны генерации [14, 15]. Было обнаружено, что переход к хаосу происходит через перемежаемость и связан с разрушением синхронизации фаз взаимодействующих волн, которая характерна для режимов стационарной генерации и периодической автомодуляции. Фазы каждой из волн в отдельности зависят от координаты и времени, однако они связаны таким образом, что

$$\sin [\varphi_p(\xi, \tau) - \varphi_s(\xi, \tau) - \varphi_i(\xi, \tau)] = 0. \quad (15)$$

При этом выполняются оптимальные условия для обмена энергией между волнами. Однако с увеличением параметра α глубина автомодуляции также

увеличивается, что приводит к появлению состояний с быстро меняющимися фазами. В результате в некоторые моменты времени синхронизация фаз нарушается. За счет этого эффективность взаимодействия падает и осцилляции амплитуд уменьшаются. Соответственно, фазовая синхронизация вновь восстанавливается, и процесс повторяется. Зависимость выходного сигнала от времени имеет вид последовательности почти регулярных участков с нарастающими осцилляциями амплитуды и синхронизованными фазами (ламинарная фаза), перемежающихся нерегулярными колебаниями (турбулентная фаза).

Однако описанная в работах [14, 15] картина не является окончательной. Прежде всего, для распределенных автоколебательных систем, как правило, характерна сложная последовательность чередующихся регулярных и хаотических режимов в пространстве управляющих параметров, причем наблюдаются переходы к хаосу по различным сценариям [15–18, 22, 23]. Следует ожидать, что и рассматриваемой системе должно быть свойственно подобное поведение. Кроме того, переход к хаосу был изучен только в центре зоны генерации, тогда как при отстройке от центра зоны динамика может быть существенно другой [15, 16].

В настоящей работе представлены результаты детального исследования хаотической динамики. В разд. 2 изучен случай, когда выполнено условие (15) синхронизации фаз, что позволяет считать переменные в уравнениях (9)–(12) чисто вещественными. Показано, что наблюдаются разнообразные автомодуляционные режимы, различающиеся числом и полярностью образующихся солитонов. С увеличением интенсивности накачки происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Хотя, как было показано в [14], при достаточно сильном превышении порога самовозбуждения режим синхронизации фаз становится неустойчивым и описанный сценарий, строго говоря, не реализуется, рассмотрение этого упрощенного случая полезно, так как помогает дать правильную физическую интерпретацию особенностей сложной динамики в общем случае, когда амплитуды считаются комплексными (разд. 3). В разд. 4 рассмотрен сценарий перехода к хаосу вблизи границ зоны генерации, где возможна бистабильность, т. е. сосуществование режимов колебаний на базе двух соседних собственных мод. Подробно исследован вопрос о том, как происходит объединение этих режимов и исчезновение бистабильности по мере увеличения надкритичности.

Следует отметить, что, вообще говоря, имеется немало работ, посвященных различным вопросам

нелинейной теории оптических параметрических генераторов (см., например, [24–34]). Однако режимы сложной динамики и сценарии перехода к хаосу, о которых в основном идет речь в настоящей работе, в них практически не рассматриваются. Основное внимание уделяется условиям неустойчивости стационарного режима, образованию локализованных структур типа солитонов и т. п. При этом, как правило, рассматривается случай, когда все три волны находятся в резонансе с модами резонатора, имеющими высокую добротность (трехрезонаторный параметрический генератор). Это позволяет перейти к задаче с периодическими граничными условиями и искать решения в виде полей соответствующих собственных мод с медленно меняющимися амплитудами (так называемое приближение среднего поля) [24–26, 28, 29, 31, 34]. В рамках такого приближения удается перейти от исходных уравнений к более простым моделям типа уравнений Гинзбурга–Ландау или Свифта–Хоэнберга [25, 26, 28, 31]. В то же время модель, основанная на уравнениях (9)–(11) трехволнового взаимодействия, представляется более адекватной для изучения принципиально многомодовых режимов сложной динамики. Согласно терминологии, принятой в теории оптических параметрических генераторов, она описывает однорезонаторный невырожденный генератор с резонатором произвольной добротности. Однако подчеркнем также, что рассматриваемая модель носит универсальный характер и описывает динамику помещенной в резонатор системы параметрически связанных волн любой природы.

Отметим также, что мы ограничиваемся одномерной задачей, что справедливо в том случае, когда поперечную структуру поля можно считать фиксированной. В то же время в системах большого поперечного сечения существенную роль могут играть различные неустойчивости поперечной структуры [24–26, 28, 29, 32], которые здесь не рассматриваются. Вопрос о том, как изменится описанная в статье картина сложной динамики под воздействием двумерных эффектов, требует отдельного рассмотрения.

2. ПЕРЕХОД К ХАОСУ В ЦЕНТРЕ ЗОНЫ ГЕНЕРАЦИИ. СЛУЧАЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ФАЗ

Рассмотрим динамику параметрической неустойчивости в центре зоны генерации ($\psi = 0$). Можно показать [14], что в этом случае существуют решения,

в которых фазы взаимодействующих волн синхронизованы, т. е. выполняется условие (15). При этом можно в уравнениях (9)–(12) считать комплексные амплитуды вещественными.

Для определенности выберем следующие значения параметров: $\rho = 0.2$, т. е. добротность резонатора невелика, $u = -1$, $\delta = 1.0$, и рассмотрим последовательность бифуркаций, реализующуюся по мере увеличения параметра накачки. Как было показано в [14], при достаточно небольших значениях параметра α устанавливается режим одночастотной генерации на основной собственной моде. В данном случае безразмерная частота $\Omega = 0$, т. е. генерация происходит точно на частоте резонанса ω_s . Когда параметр α превышает некоторое пороговое значение α_{sm} , одночастотный режим теряет устойчивость и возникает автомодуляция. При этом происходит периодическое образование солитоноподобного импульса, распространяющегося вдоль системы. Пример пространственно-временной динамики, спектра и фазового портрета выходного сигнала $a_{out}(\tau) = |A_s(\xi = 1, \tau)|$ приведен на рис. 1а. Автомодауляция возникает жестко, при этом в спектре появляется большое число гармоник-сателлитов, частоты которых близки к частотам различных собственных мод Ω_n (13). Какие именно моды возбуждаются, определяется параметром δ (подробнее см. [14]). В данном случае это моды с четными номерами ($n = 2, 4, 6, \dots$), а частота автомодауляции Ω_{sm} (т. е. расстояние между основной частотой и ближайшими сателлитами) примерно равна 2π . Заметим, что описанный механизм возникновения автомодауляции типичен для широкополосных генераторов с запаздывающей обратной связью, например, электронных генераторов бегущей волны [18–21], кольцевых оптических лазеров [35–37], лазеров на свободных электронах [38] и др.

По мере увеличения α возникают новые режимы периодической автомодауляции, различающиеся амплитудой и полярностью образующихся солитонов. При данных значениях параметров существуют три подобных режима (рис. 1). В первом режиме, который уже был описан выше (рис. 1а), периодически образуется один солитон положительной полярности. Здесь следует отметить следующее обстоятельство. Ввиду очевидной инвариантности уравнений (9)–(11) относительно замены $A_{s,i} \rightarrow -A_{s,i}$ существуют либо решения, симметричные относительно указанной замены, либо пары асимметричных решений, симметричных друг другу. Таким образом, на рис. 1а приведен лишь один из двух возможных асимметричных режимов.

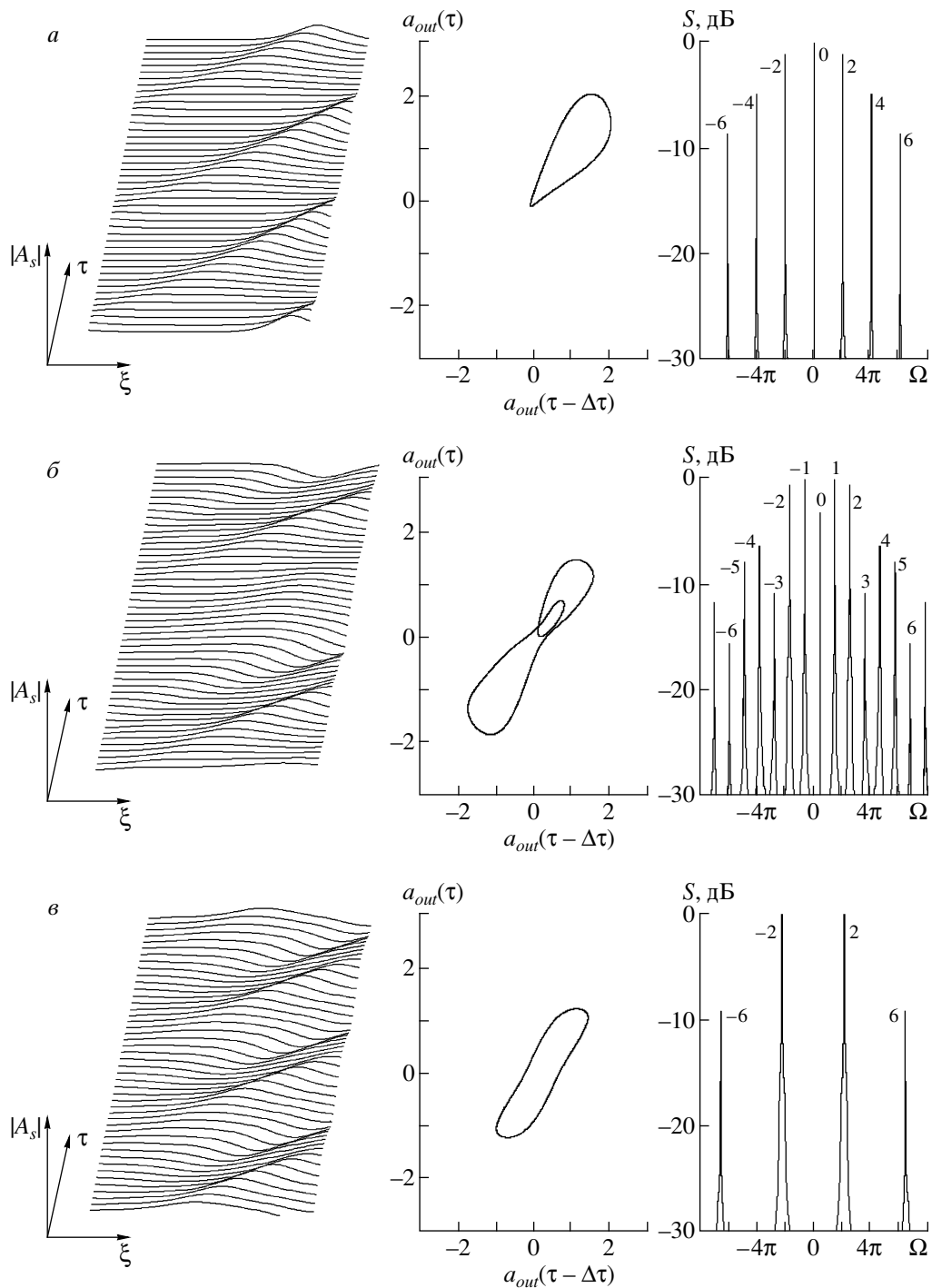


Рис. 1. Пространственно-временная динамика, фазовые портреты и спектры выходного сигнала в различных режимах автомодуляции при $\psi = 0$, $u = -1$, $\delta = 1.0$, $\rho = 0.2$, $\alpha = 4.75$ (а), $\alpha = 5.0$ (б) и $\alpha = 5.8$ (в)

Во втором режиме, который также является асимметричным, формируется пуг из двух солитонов, один из которых имеет положительную полярность, другой — отрицательную (рис. 1б). При этом

базовая частота автомодуляции уменьшается примерно в два раза, что можно интерпретировать как возбуждение мод с нечетными номерами (напомним, что возникновение автомодуляции обусловлено при

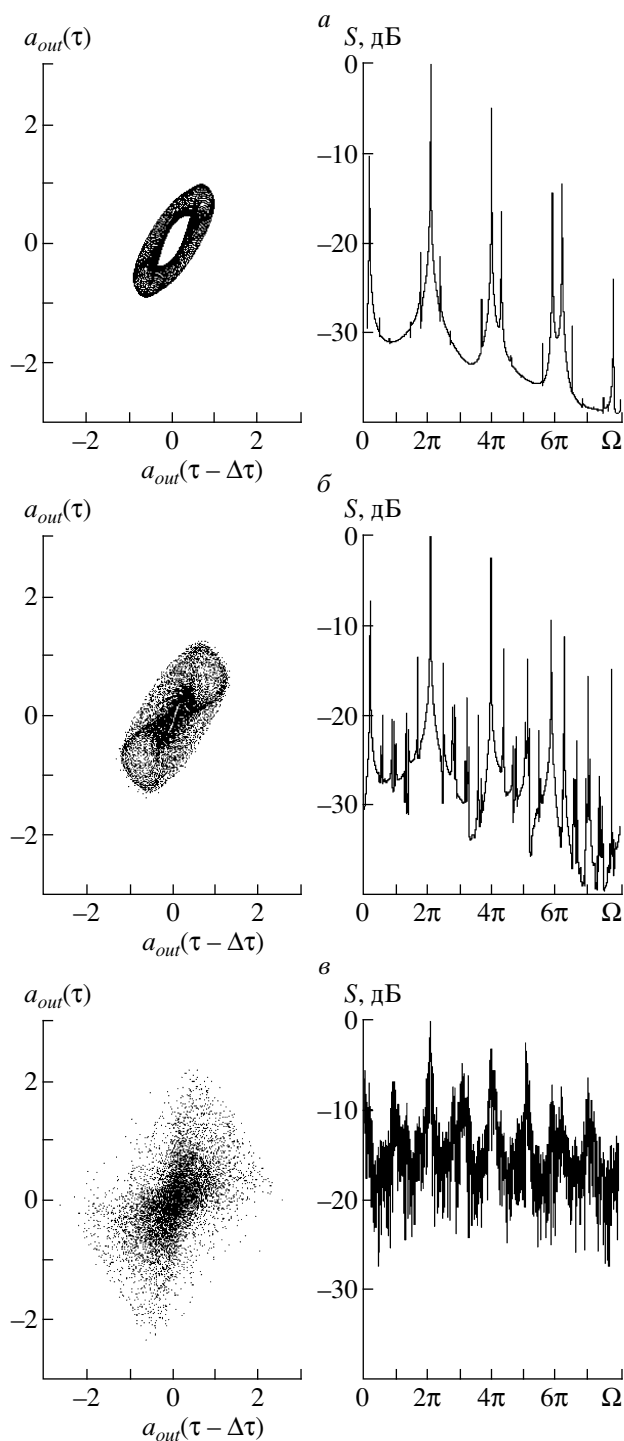


Рис. 2. Фазовые портреты и спектры, иллюстрирующие переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения при $\alpha = 8.2$ (*a*), 8.5 (*б*), 8.75 (*в*). Остальные параметры те же, что и на рис. 1

$\delta = 1.0$ возбуждением мод с $n = \pm 2$). На проекции фазового портрета виден предельный цикл сложной формы. Обратим внимание, что если ранее максимальную амплитуду имела основная мода ($n = 0$), то во втором режиме максимальными являются уже моды с $n = \pm 1$. Такая трансформация спектра объясняется изменением частотной зависимости коэффициента усиления в нелинейном режиме, когда в окрестности частоты нулевой моды образуется провал [14].

В третьем случае (рис. 1в) реализуется симметричный режим, когда поочередно генерируются одинаковые солитоны различной полярности (или, как иногда говорят, солитоны и антисолитоны). Частота Ω_{sm} автомодуляции вновь становится близкой к 2π , однако теперь основная мода вообще подавляется и в спектре остаются только частота Ω_{sm} и ее нечетные гармоники. Таким образом, в данном случае «выживают» только моды с номерами $\pm 2(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

Отметим, что аналогичные переходы от антисимметричных автомодуляционных режимов к симметричным отмечаются и для многих других систем, например, для различных моделей оптических лазеров [35, 36, 39] (в работе [39] этот эффект назван расщеплением моды). Как косвенное экспериментальное подтверждение полученных результатов можно трактовать и недавнюю работу [40], где исследовалась параметрическая генерация спиновых волн в «активном кольце», состоящем из пленки железо-иттриевого граната и цепи обратной связи, в которую включался широкополосный сверхвысокочастотный усилитель и регулируемый аттенуатор. Нелинейные и дисперсионные свойства определялись исключительно свойствами пленки, а усилитель использовался в основном для компенсации больших потерь на согласование в антеннах, служащих для возбуждения и приема волн в пленке. Пленка возбуждалась последовательностью прямоугольных импульсов накачки на частоте, в два раза превышающей частоту сигнала. Когда частота сигнала была близка к собственной частоте одной из кольцевых мод, генерировалась периодическая последовательность идентичных солитонов, аналогичная изображенной на рис. 1а. Если же частота сигнала лежала примерно посередине между двумя собственными частотами, генерировалась последовательность солитонов с чередующейся полярностью, аналогичная приведенной на рис. 1в. Похожее поведение наблюдается и для других активных колец с ферромагнитными пленками [41, 42]. В нашем случае, однако, переход от одного режима к другому осуществля-

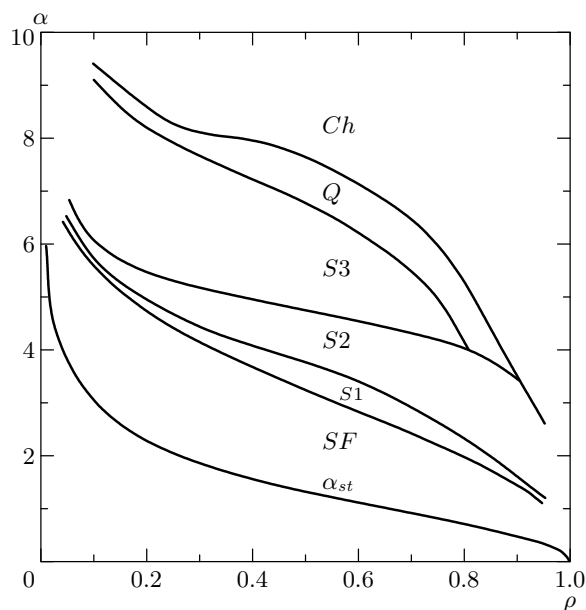


Рис. 3. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров ρ , α . Обозначения на рисунке соответствуют следующим режимам: α_{st} — граница самовозбуждения; SF — стационарные колебания на основной частоте; $S1-S3$ — режимы периодической автомодуляции с различным числом образующихся солитонов; Q — квазипериодическая автомодуляция; Ch — хаотическая автомодуляция

ется перестройкой мощности накачки, а не частоты и связан с нелинейной трансформацией амплитудно-частотной характеристики усилителя, описанной в [14].

При дальнейшем увеличении α автомодуляция вначале становится квазипериодической, а затем происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения (сценарий Рюэля–Тakensа). На рис. 2 изображены фазовые портреты и спектры, иллюстрирующие режимы квазипериодической и хаотической автомодуляции¹⁾.

При других значениях параметров ρ и δ картина поведения в целом сохраняется. Влияние параметра обратной связи помогает представить карта динамических режимов на плоскости параметров ρ , α , которая приведена на рис. 3. На ней нанесены граница самовозбуждения (которая совпадает с теоретиче-

ской формулой (14)), границы режимов одночастотной генерации, периодической автомодуляции с различным числом образующихся солитонов, квазипериодической и хаотической автомодуляции. Видно, что описанный выше сценарий претерпевает некоторые изменения лишь при значениях ρ , близких к единице (т. е. в случае высокочастотного резонатора), где вместо квазипериодической автомодуляции происходит жесткий переход к хаосу. Отметим, что в области квазипериодических режимов наблюдаются многочисленные «языки» синхронизации, внутри которых частоты находятся в рациональных соотношениях. Однако из-за своего малого размера они на рисунке не показаны.

При изменении нормированного времени запаздывания δ какие-либо качественные изменения также не происходят, однако увеличение этого параметра приводит к усложнению динамики в целом. Увеличивается число многосолитонных режимов, которые предшествуют появлению квазипериодической автомодуляции. Это легко объяснить, так как переходы между различными режимами, как было показано выше, связаны с процессами конкуренции мод, а параметр δ отвечает за число «активных» мод, попадающих в полосу усиления. Однако в любом случае наблюдаются такие эффекты, как расщепление моды и переход к хаосу через разрушение квазипериодики.

3. ПЕРЕХОД К ХАОСУ В ЦЕНТРЕ ЗОНЫ ГЕНЕРАЦИИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Как уже отмечалось, хотя в центре зоны генерации режимы, в которых фазы волн синхронизованы, существуют всегда, это еще не означает, что они будут устойчивы. Расчеты в общем случае, когда амплитуды волн считаются комплексными, показывают, что описанная в предыдущем разделе картина остается справедливой лишь для режимов стационарной генерации и периодической автомодуляции, когда на длине системы образуется один солитон (области SF и $S1$ на рис. 3) [14, 15]. Когда становится возможным образование двух солитонов различной полярности, появляются точки, в которых амплитуда сигнальной волны обращается в нуль. Это приводит к возникновению состояний с быстро меняющимися фазами, и условие (15) нарушается. Быстрые осцилляции фазы приводят к тому, что эффективность взаимодействия резко убывает и осцилляции амплитуд уменьшаются. После этого фазовая синхронизация вновь восстанавливается. В резуль-

¹⁾ На рис. 2 изображена только часть спектров, соответствующая $\Omega > 0$, поскольку переменные являются вещественными, так что спектры симметричны относительно нулевой частоты.

тате динамика сигнала становится хаотической, а спектр — сплошным, причем переход к хаосу происходит через перемежаемость. На плоскости параметров ρ, α на рис. 3 граница перемежаемости в точности совпадает с границей между областями $S1$ и $S2$. Поскольку в хаотических режимах условие (15) не выполняется, уже нельзя считать амплитуды взаимодействующих волн чисто вещественными и все режимы, в которых образуется несколько солитонов, описанные в предыдущем разделе, вообще говоря, неустойчивы. Тем не менее, поскольку длительность переходных процессов весьма велика, их скорее следует считать метастабильными и они могут быть реализованы экспериментально, например, при импульсной накачке, как это было сделано в [40].

Однако режимы хаотической перемежаемости существуют только в очень небольшом интервале значений параметра α . С увеличением α восстанавливается режим периодической автомодуляции, во многом аналогичный представленному выше на рис. 1б, хотя спектр уже не является симметричным, а частоты несколько сдвинуты относительно «холодных» значений (13). При дальнейшем росте накачки развивается переход к хаосу, имеющий много общего с описанным в разд. 2. В качестве типичного примера рассмотрим случай, когда $\rho = 0.7$, $\psi = 0.1\pi$ (рис. 4). При $\alpha = 3.9$ наблюдается квазипериодическая автомодуляция (рис. 4а), причем в спектре доминируют моды с номерами $n = -2, +1$, а центральные моды ($n = -1, 0$) подавляются. При этом пространственно-временная динамика очень напоминает двухсолитонный режим, изображенный на рис. 1б. Далее происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения; пример фазового портрета и спектра в хаотическом режиме приведен на рис. 4б. При $\alpha = 5.0$ (рис. 4в) вновь восстанавливается периодическая автомодуляция, качественно подобная односолитонному режиму, представленному на рис. 1а, и колебания вновь становятся регулярными. При дальнейшем увеличении параметра накачки происходит еще один переход к хаосу через разрушение квазипериодики. Таким образом, наблюдается не один переход к хаосу, а целая последовательность чередующихся регулярных и хаотических режимов. Это хорошо согласуется с результатами, полученными для других распределенных систем со сложной динамикой [15–18, 22, 23]. Последовательность бифуркаций заканчивается установлением режимов «развитого» хаоса, т. е. сильно нерегулярных режимов, когда на проекции фазового портрета не удается выделить какую-либо крупномасштабную структуру (рис. 4г). Однако даже в подоб-

ных режимах в спектре колебаний отчетливо выделяются компоненты на частотах собственных мод колебательной системы.

Описанная выше картина сложной динамики в центре зоны генерации в целом характерна и для большинства других значений параметра обратной связи. Исключение составляют области $\rho \ll 1$ и $\rho \sim 1$, где поведение несколько упрощается. Пропадают «окна» регулярного поведения в хаосе. Однако по-прежнему можно выделить несколько переходов между хаотическими аттракторами, сформировавшимися на базе различных мод. Спектры этих аттракторов различаются расположением и амплитудой дискретных пиков, выделяющихся на фоне шумового пьедестала.

Следует также отметить, что при увеличении δ , что соответствует уменьшению частотного расстояния между модами, динамика в целом усложняется. Увеличивается длительность переходных процессов, сокращаются области регулярного поведения. Как следствие, становится затруднительным идентифицировать режимы, о которых говорилось выше. Очевидно, что это обусловлено конкуренцией большого числа близко расположенных мод.

4. ПЕРЕХОД К ХАОСУ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ЗОНЫ ГЕНЕРАЦИИ

Наконец, следует остановиться на особенностях сложной динамики вблизи границ зоны генерации, где сосуществуют устойчивые режимы генерации (не обязательно одночастотные) на базе двух соседних собственных мод. Какой именно из двух режимов устанавливается по окончании переходного процесса, определяется начальными условиями. Такое поведение типично для автоколебательных систем с запаздыванием [15–18]. Основной интерес представляет вопрос о том, что происходит с двумя сосуществующими аттракторами при больших значениях надкритичности, т. е. объединяются ли они в единый аттрактор, сменяются ли каким-то принципиально новым режимом, и т. д.

Для определенности рассмотрим поведение системы при следующих значениях управляющих параметров: $\rho = 0.2$, $\delta = 1.0$, $\psi = 0.9\pi$, где в зависимости от начальных условий реализуются режимы на базе мод с номерами $n = 0$ или $n = -1$. Будем проводить моделирование с наследованием начальных условий, последовательно увеличивая параметр α . Вначале динамика для каждой из мод аналогична описанной выше. В частности, для основной моды

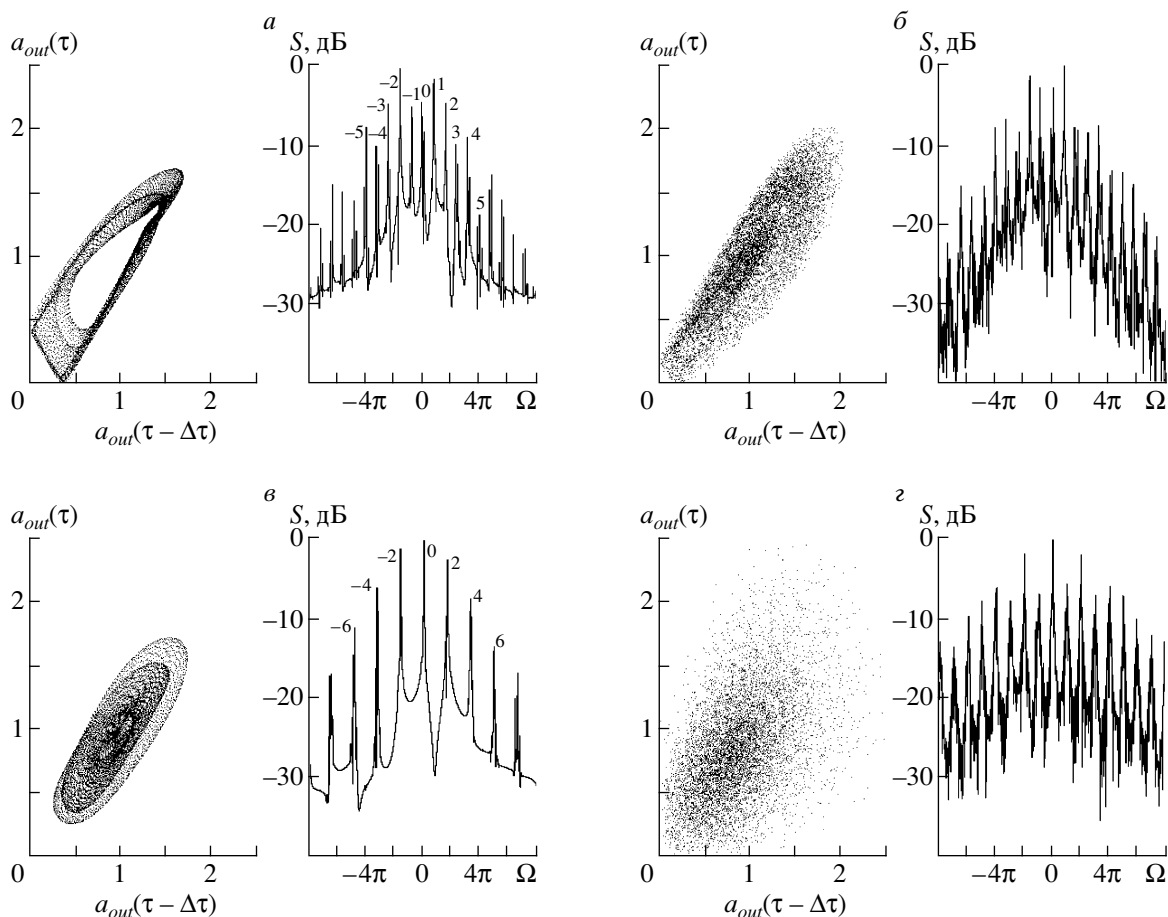


Рис. 4. Фазовые портреты и спектры, иллюстрирующие различное поведение системы после перехода к хаосу через перемежаемость: $\rho = 0.7$, $\delta = 1.0$, $\psi = 0.1\pi$, $\alpha = 3.9$ (а), 4.3 (б), 5.0 (в), 5.2 (г)

переход к хаосу через перемежаемость происходит при $\alpha = 5.2$, а затем при $\alpha = 5.28$ возникает квазипериодическая автомодуляция. Рисунок 5 иллюстрирует сосуществование двух квазипериодических режимов при одних и тех же значениях параметров.

С увеличением α появляется новый аттрактор, в спектре которого доминируют моды с $n = -2, 1$ (рис. 6а). В спектре, который становится почти симметричным относительно нулевой частоты, также выделяются компоненты на частотах мод с $n = -5, 4$, частоты которых близки к утроенным частотам доминирующих мод. Остальные составляющие не совпадают с какими-либо собственными частотами. Таким образом, центральные моды с $n = -1, 0$ подавляются. Такой режим можно отождествить с эффектом «расщепления» моды и «симметричными» циклами, описанными в [35, 36, 39]. Временная реализация выходного сигнала представляет собой последовательность солитонов огибающей,

имеющих различную полярность. Фаза несущей волны у соседних солитонов отличается²⁾ приблизительно на π . Здесь можно провести аналогию с режимами, обсуждавшимися в разд. 2 (см. рис. 1в).

В небольшом диапазоне параметров три режима сосуществуют одновременно, затем аттракторы на базе центральных мод теряют устойчивость и остается единственный «симметричный» аттрактор. Автомодуляция в основном является квазипериодической, хотя в небольшом интервале параметра наблюдается резонанс, вызванный самосинхронизацией мод. Далее при $\alpha \approx 5.65$ происходит переход к хаосу через разрушение квазипериодического движения. Наконец, при сильной надкритичности уста-

²⁾ Разумеется, фаза в данном случае не является постоянной, а зависит от координаты и времени. Однако в пределах каждого импульса (солитона) она меняется незначительно, различаясь для двух соседних примерно на π .

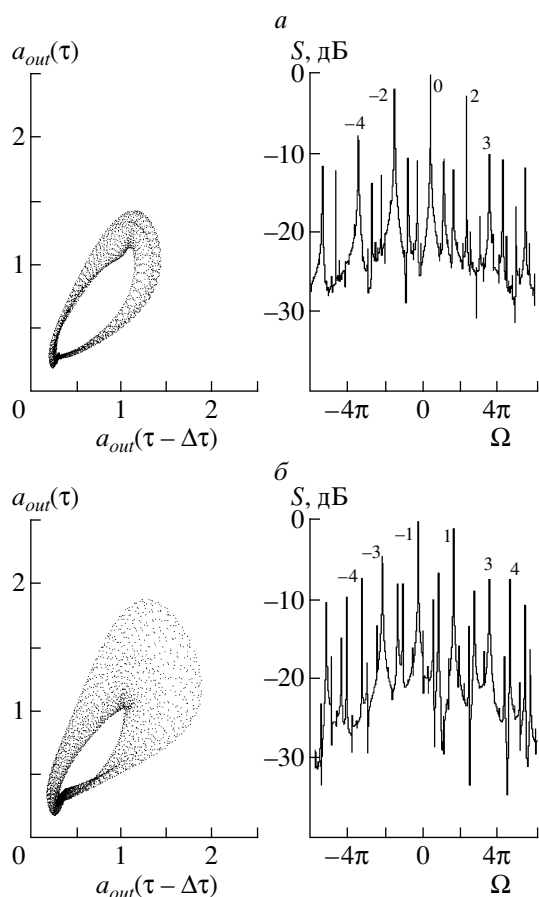


Рис. 5. Фазовые портреты и спектры выходного сигнала в области бистабильности при $\rho = 0.2$, $\psi = 0.9\pi$, $\delta = 1.0$ и $\alpha = 5.37$. Сосуществуют режимы квазипериодической автомодуляции на базе мод с номером $n = 0$ (а) и $n = -1$ (б)

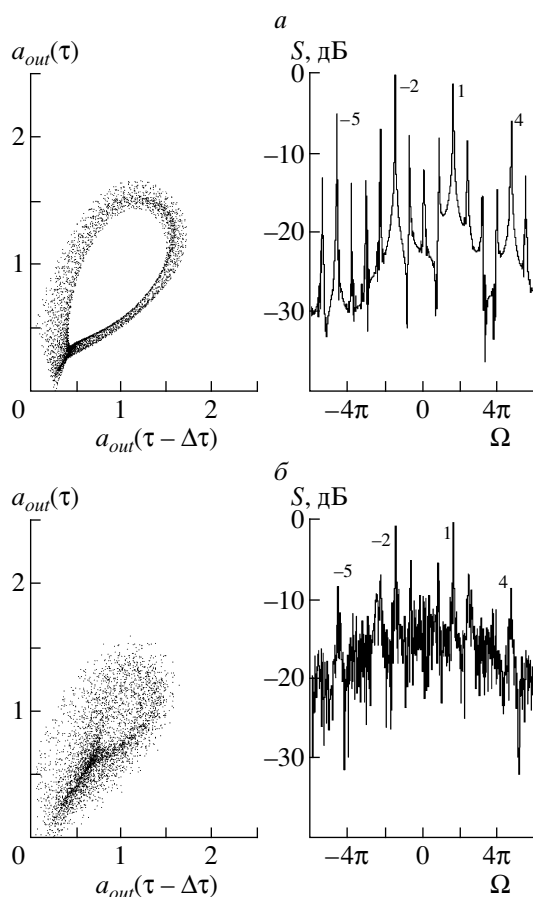


Рис. 6. Фазовые портреты и спектры в режимах с подавлением центральных мод: а) — многочастотный режим при $\alpha = 5.4$; б) — развитой хаотический режим при $\alpha = 6.0$. Остальные параметры — те же, что на рис. 5

навливаются режимы «развитого» хаоса (рис. 6б), которые уже обсуждались выше.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлена достаточно детальная картина хаотической динамики параметрического взаимодействия системы трех волн в резонаторе, обобщающая результаты работ [14, 15]. В частности, обнаружено, что после описанного в [14, 15] первого перехода к хаосу через перемежаемость, вызванного разрушением фазовой синхронизации, реализуется сложная последовательность чередующихся регулярных и хаотических автомодуляционных режимов. Доминирует сценарий разрушения квазипериодического движения. Переходы между различными режимами обусловлены перестройкой про-

странственно-временной динамики, что вызвано образованием и взаимодействием когерентных структур, роль которых играют солитоны огибающей.

Исследована сложная динамика вблизи границ зон генерации (в работах [14, 15] эта ситуация не рассматривалась). Здесь наблюдается особенно сложная картина, обусловленная эффектами бистабильности, т. е. сосуществование режимов колебаний на базе двух соседних собственных мод. С ростом надкритичности соответствующие этим модам аттракторы теряют устойчивость и возникает новый режим, спектр которого примерно симметричен относительно частоты точного резонанса, т. е. центра полосы усиления. Доминируют моды, удаленные от этой частоты, а центральные моды подавлены. Последовательность бифуркаций завершается возникновением так называемого развитого хаоса, т. е.

сильно нерегулярных колебаний, когда на проекции фазового портрета не удается выделить какую-либо крупномасштабную структуру. Такое поведение типично для распределенных систем с запаздыванием и хорошо согласуется с результатами работ [15–18].

Полученные результаты представляют интерес для объяснения особенностей сложной динамики ряда практических устройств, прежде всего оптических параметрических генераторов. Выявлены эффекты, присущие многим другим системам, таким как электронные автогенераторы бегущей волны с запаздыванием [18–21], кольцевые оптические лазеры [35–37], «активные кольца» с ферромагнитными пленками [40–42]. Это свидетельствует в пользу того, что обнаруженные особенности поведения универсальны для широкополосных многомодовых генераторов с запаздывающей обратной связью.

Работа выполнена при финансовой поддержке CRDF (грант № REC-006), РФФИ (грант № 03-02-16192) и Министерства образования России (грант № А03-2.9-810).

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский, *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, Наука, Москва (1992).
2. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Наука, Москва (1984).
3. П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, Москва (1997).
4. Н. М. Рыскин, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Наука, Физматлит, Москва (2000).
5. M. J. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and Inverse Spectral Transform*, SIAM, Philadelphia (1980).
6. D. J. Kaup, A. H. Reiman, and A. Bers, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 275 (1979).
7. W. H. Louisell, *Coupled Mode and Parametric Electronics*, Wiley, New York (1960).
8. A. Yariv, *Quantum Electronics*, Wiley, New York (1975).
9. В. Г. Дмитриев, Л. В. Тарасов, *Прикладная нелинейная оптика*, Сов. радио, Москва (1985).
10. Г. Н. Бурлак, К. Ишкабулов, *ЖЭТФ* **109**, 774 (1996).
11. *Chaotic Electronics in Telecommunications*, ed. by M. P. Kennedy, R. Rovatti, and G. Setti, CRC Press, Boca Raton, FL, USA (2000).
12. Special Issue on Application of Nonlinear Dynamics to Electronic and Information Engineering, *Proc. IEEE* **90** (5) (2002).
13. А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, Физматлит, Москва (2002).
14. Т. В. Дмитриева, Н. М. Рыскин, *ЖЭТФ* **120**, 1517 (2001).
15. T. V. Dmitrieva, N. M. Ryskin, and A. M. Shigaev, *Nonlin. Phen. Complex Syst.* **4**, 376 (2001).
16. Н. М. Рыскин, А. М. Шигаев, *ЖТФ* **72** (7), 1 (2002).
17. Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, *Изв. ВУЗов, радиофизика* **44**, 860 (2001).
18. N. M. Ryskin, V. N. Titov, S. T. Han et al., *Phys. Plasmas* **11**, 1194 (2004).
19. Yu. P. Bliokh, M. G. Liubarskii, V. O. Podobinskii et al., *Phys. Plasmas* **5**, 4061 (1998).
20. Ю. П. Блюх, А. В. Бородкин, М. Г. Любарский и др., *Изв. ВУЗов, прикладная нелинейная динамика* **1** (1–2), 34 (1993).
21. Ю. П. Блюх, М. Г. Любарский, В. О. Подобинский, Я. Б. Файнберг, *Физика плазмы* **20**, 718 (1994).
22. Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, Д. И. Трубецков, *ДАН* **358**, 620 (1998).
23. Н. М. Рыскин, В. Н. Титов, *Изв. ВУЗов, прикладная нелинейная динамика* **6** (1), 75 (1998).
24. G. L. Oppo, M. Brambilla, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **49**, 2028 (1994).
25. S. Longhi, *Phys. Rev. A* **53**, 4488 (1996).
26. S. Longhi and A. Geraci, *Phys. Rev. A* **54**, 4581 (1996).
27. G. D'Alessandro, P. St. J. Russel, and A. A. Wheeler, *Phys. Rev. A* **55**, 3211 (1997).
28. V. J. Sanchez-Morcillo, G. J. de Valcarcel, E. Roldan, and K. Staliunas, *Phys. Rev. A* **56**, 3237 (1997).
29. S. Longhi, *Opt. Comm.* **153**, 90 (1998).
30. A. Apolinar-Irbe, N. Korneev, and J. J. Sanchez-Mondragon, *Opt. Comm.* **153**, 295 (1998).
31. G. J. de Valcarcel, E. Roldan, and K. Staliunas, *Opt. Comm.* **181**, 207 (2000).

32. P. Lodahl and M. Saffman, *Opt. Comm.* **184**, 493 (2000).
33. P. Suret, D. Derozier, M. Lefranc et al., *Phys. Rev. A* **61**, 021805(R) (2000).
34. S. Longhi, *Opt. Comm.* **204**, 339 (2002).
35. L. A. Lugiato, L. M. Narducci, E. V. Eschenazi et al., *Phys. Rev. A* **32**, 1563 (1985).
36. L. M. Narducci, J. R. Tredicce, L. A. Lugiato et al., *Phys. Rev. A* **33**, 1842 (1986).
37. E. M. Pessina, G. Bonfrate, F. Fontana, and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **56**, 4086 (1997).
38. N. S. Ginzburg and M. I. Petelin, *Int. J. Electron.* **59**, 291 (1985).
39. Я. И. Ханин, *Основы динамики лазеров*, Наука, Физматлит, Москва (1999).
40. А. А. Серга, М. П. Костылев, Б. А. Калиникос и др., *Письма в ЖЭТФ* **77**, 350 (2003).
41. Б. А. Калиникос, Н. Г. Ковшиков, М. П. Костылев, Х. Беннер, *Письма в ЖЭТФ* **76**, 310 (2002).
42. S. O. Demokritov, A. A. Serga, V. E. Demidov et al., *Nature* **426**, 159 (2003).