ЖЭТФ, 2005, том 127, вып. 2, стр. 331–342

РОСТ ЧЕРНЫХ ДЫР В ЦЕНТРАХ ГАЛАКТИК. ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВЕЗД И АКТИВНОСТЬ ГАЛАКТИЧЕСКИХ ЯДЕР

В. А. Сирота, А. С. Ильин[*], *К. П. Зыбин, А. В. Гуревич*

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 2004 г.

Изучается влияние сверхмассивных черных дыр на распределение звезд в центрах галактик. Анализируются релаксационные процессы, связанные с парными столкновениями звезд и их поглощением черными дырами. Для изотермического распределения звезд устанавливается закон роста и оцениваются современные значения масс черных дыр. Приливное разрушение звезд вблизи черных дыр рассматривается в качестве возможной причины активности галактических ядер.

PACS: 98.10.+z

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день почти не вызывает сомнений тот факт, что компактные концентрации массы, обнаруженные в центрах большинства галактик, являются сверхмассивными черными дырами с массами 10^6–10^9 солнечных масс ($M_\odot$) [1].

Существуют два сценария происхождения сверхмассивных черных дыр. Они могли сформироваться одновременно с галактикой (и даже раньше) [2] или расти постепенно, начиная с небольшой затравочной черной дыры. В этой статье мы изучаем возможности роста черных дыр в рамках второго сценария.

Черная дыра может влиять на окружающую материю двумя способами. В первую очередь, она является источником мощного «кулоновского» потенциала, который непосредственно влияет на движение ближайших звезд. Соответствующая кинетическая задача была впервые рассмотрена в работе [3]. Черная дыра также может поглощать барионную материю (звезды, межзвездный газ) и холодную темную материю из центральной части галактического ядра (балджа) и тем самым влиять на распределение звезд и темной материи. Для ближайших звезд (орбиты которых лежат в области влияния гравитационного «кулоновского» потенциала черной дыры) такая задача обсуждалась ранее [4–8]. В частности, в работах [7, 8] было показано, что поток звездной материи на черную дыру возникает благодаря диффузии орбит звезд по энергии и угловому моменту. Однако, как впервые было указано в [7], сверхмассивная черная дыра в центре типичной галактики должна поглощать звезды из области, существенно большей, чем область собственного «кулоновского» потенциала. В этой области гравитационный потенциал определяется распределением звезд, межзвездного газа и темной материи. Кроме того, ниже будет показано, что, в отличие от рассматриваемых ранее стационарных решений, реальный процесс существенно нестационарен.

Кинетическая теория, описывающая динамику одной только небарионной темной материи (в отсутствие барионов и черной дыры), была построена в работе [9]. Было показано, что под влиянием собственных гравитационных сил темная материя распадается на сферически-симметричные объекты с сингулярным распределением плотности в центрах[1)]. Эти объекты давно наблюдаются в виде гигантских гало галактик. Барионная материя в процессе остывания после рекомбинации опускается на дно потенциальных ям, созданных темной материей, и формирует галактики с затравочными черными дырами [10]. Этот сценарий хорошо объясняет, в частности, почему черные дыры расположены точно в динамических центрах галактик [11].

[*] E-mail: asi@lpi.ru

[1)] Однако степень этой сингулярности оказывается недостаточной для образования черной дыры.

Взаимодействие барионной и темной материи в центре галактики и, в частности, гравитационное рассеяние частиц темной материи на звездах с последующим захватом черной дырой было исследовано в работе [12]. Было показано, что этот процесс может привести к формированию черных дыр с массами $(10^7–10^8)M_\odot$.

В данной работе мы анализируем совместную динамику холодной темной материи и звезд в ядрах галактик. Мы показываем, что важную роль играют далекие парные столкновения звезд друг с другом и с частицами темной материи. Эти столкновения являются причиной релаксационных процессов, происходящих в среде из звезд и темной материи, которые в конечном итоге ведут к росту черной дыры. Роль черной дыры при этом сводится не столько к непосредственному гравитационному влиянию, сколько к формированию граничного условия, которому удовлетворяет функция распределения.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе в замкнутом виде выписано кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения звезд и частиц темной материи. В третьем разделе обсуждаются граничные условия, которым должна удовлетворять функция распределения в присутствии черной дыры. Далее, в четвертом разделе мы находим приближенное решение кинетического уравнения для звезд в отсутствие темной материи и межзвездного газа и показываем, что масса черной дыры при поглощении звезд растет со временем как $t^{1/2}$. В заключение мы делаем грубую оценку энерговыделения, происходящего при поглощении звездной материи, и сравниваем ее со средней наблюдаемой активностью галактических ядер.

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Обозначим функции распределения звезд и частиц темной материи как $f_*(\mathbf{r},\mathbf{v})$ и $f_d(\mathbf{r},\mathbf{v})$. При этом масса частиц сорта α, приходящаяся на элемент фазового объема $d^3r\,d^3v$, равна $f_\alpha d^3r d^3v$.

Совместная динамика системы описывается кинетическим уравнением со столкновительным членом в форме Ландау [13]:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \mathrm{St}[f],$$

или

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f_\alpha + \nabla\Psi\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = = 2\pi G^2\Lambda\frac{\partial}{\partial v_k}\sum_\beta\int d^3v' w_{kp}\times \times\left(M_\beta f_\beta\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_p} - M_\alpha\frac{\partial f_\beta}{\partial v'_p}f_\alpha\right). \quad (1)$$

Здесь греческий индекс обозначает сорт частиц, M_α — масса частицы сорта α,

$$w_{kp} = \left(u^2\delta_{kp} - u_k u_p\right)/u^3,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$$

— относительная скорость столкновения, $\Lambda \sim \sim \ln(N/2)$ — гравитационный кулоновский логарифм, N — число частиц в системе (например, в балдже типичной галактики $N\sim 10^9$). Гравитационный потенциал $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Psi = 4\pi G\sum_\alpha \rho_\alpha(\mathbf{r}) = 4\pi G\sum_\alpha\int f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v})\,d^3v\ ,$$

где $\rho_\alpha(\mathbf{r})$ — плотность массы частиц сорта α.

Пренебрегая членами порядка M_d/M_*, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{df_d}{dt} = 2\pi G^2 M_*\Lambda\frac{\partial}{\partial v_k}W_{kp}\frac{\partial f_d}{\partial v_p}, \quad (2)$$

$$\frac{df_*}{dt} = 2\pi G^2 M_*\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial v_k}W_{kp}\frac{\partial f_*}{\partial v_p} - \frac{\partial}{\partial v_k}W_k f_*\right), \quad (3)$$

где

$$\begin{gathered} W_k = \int\frac{\partial}{\partial v'_p}(f_* + f_d)w_{kp}d^3v', \\ W_{kp} = \int f_* w_{kp}d^3v'. \end{gathered} \quad (4)$$

Таким образом, эволюция функции распределения частиц темной материи определяется правой частью уравнения (2), которая описывает их рассеяние на звездах. Для самих звезд соответствующий член в (3) имеет более сложную форму и содержит также слагаемое, соответствующее динамическому трению (о звезды и частицы темной материи).

Важная особенность движения гравитирующих частиц в реальных галактических системах заключается в том, что столкновения редки, и поэтому столкновительный член в кинетическом уравнении мал по сравнению с остальными. Это означает, что изменения параметров орбиты отдельной частицы в течение орбитального периода также малы. Проще всего учесть этот факт, перейдя к переменным действие–угол $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi})$, где $\mathbf{I} = (I, m, m_z)$ — переменные действия (m — абсолютное значение углового момента, m_z — его проекция на ось z, I — адиабатический инвариант; все величины нормированы на единицу массы):

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint v_r dr = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_{r_-(E,m)}^{r_+(E,m)} \sqrt{2\left(E - \Psi(r) - \frac{m^2}{2r^2}\right)}\, dr, \quad (5)$$

$$E = \frac{v^2}{2} + \Psi(r), \quad \mathbf{m} = \mathbf{r}\times\mathbf{v}, \quad E - \Psi(r_\pm) - \frac{m^2}{2r_\pm^2} = 0,$$

а $\boldsymbol{\phi}$ — соответствующие угловые переменные. В новых переменных левая часть кинетического уравнения не содержит производных по I_k и имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial \phi_k} = \mathrm{St}[f],$$

где ω_k — орбитальные частоты, соответствующие I_k. Теперь используем тот факт, что столкновения редки и, следовательно, частота столкновений много меньше орбитальных частот. В этом случае по угловым переменным ϕ_k можно провести усреднение [12]. Уравнения (2), (3) тогда примут вид [14, 12]

$$\frac{\partial f_*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I_k} R_{kp} \frac{\partial f_*}{\partial I_p} - \frac{\partial}{\partial I_k}(R_k f_*), \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I_k} R_{kp} \frac{\partial f_d}{\partial I_p}, \quad (7)$$

где

$$R_k = 2\pi G^2 M_* \Lambda \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\phi \frac{\partial I_k}{\partial v_p} W_p, \\ R_{kp} = 2\pi G^2 M_* \Lambda \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\phi \frac{\partial I_k}{\partial v_m} \frac{\partial I_p}{\partial v_n} W_{mn}. \quad (8)$$

Вблизи центра функция распределения сферически-симметрична и не зависит от направления углового момента. Можно показать, что в этом случае

$$R_3 = \frac{m_z}{m} R_2, \quad R_{31} = \frac{m_z}{m} R_{21}, \quad R_{32} = \frac{m_z}{m} R_{22},$$

и мы можем исключить m_z из (6). Окончательно уравнения примут вид

$$\frac{\partial f_*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I}\left(R_{11}\frac{\partial f_*}{\partial I} + R_{12}\frac{\partial f_*}{\partial m} - R_1 f_*\right) + \\ + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial m} m \left(R_{21}\frac{\partial f_*}{\partial I} + R_{22}\frac{\partial f_*}{\partial m} - R_2 f_*\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_d}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I}\left(R_{11}\frac{\partial f_d}{\partial I} + R_{12}\frac{\partial f_d}{\partial m}\right) + \\ + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial m} m \left(R_{21}\frac{\partial f_d}{\partial I} + R_{22}\frac{\partial f_d}{\partial m}\right). \quad (10)$$

Таким образом, кинетическое уравнение (1) свелось к уравнению дивергентного вида

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \mathrm{div}\mathbf{S}_\alpha$$

в некотором эффективном трехмерном пространстве $I-m$ с естественной цилиндрической структурой; при этом по оси z отложено радиальное действие I, а абсолютная величина углового момента m выступает в роли полярного радиуса. Функция распределения, зависящая только от I и m, также обладает цилиндрической симметрией.

Поток материи через некоторую поверхность в пространстве $I-m$ получается интегрированием $\mathbf{S}$ по этой поверхности. Плоскость $I = 0$ является нефизической границей, поэтому поток через нее должен быть тождественно равен нулю. Таким образом, мы получили первое граничное условие:

$$S_I|_{I=0} = \left(R_{11}\frac{\partial f_\alpha}{\partial I} + R_{12}\frac{\partial f_\alpha}{\partial m} - R_1 f_\alpha\right)\Big|_{I=0} = 0. \quad (11)$$

Второе граничное условие возникает благодаря присутствию черной дыры и будет обсуждаться в следующем разделе.

В отсутствие темной материи простейшее (но важное) решение уравнения (9) есть изотермическая функция распределения:

$$f_{is} = f_0 e^{-E/\sigma^2}, \quad \Psi_{is} = 2\sigma^2 \ln r, \\ f_0 = \left[(2\pi)^{5/2} G\sigma\right]^{-1}, \quad (12)$$

которая определяется единственным параметром — дисперсией скоростей звезд σ. Это равновесное распределение, в котором поток через произвольную поверхность в пространстве $I-m$ равен нулю. Отсюда следуют два соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты R_k, R_{kp} для изотермической функции:

$$R_{11}\frac{\partial f_{is}}{\partial I} + R_{12}\frac{\partial f_{is}}{\partial m} - R_1 f_{is} = 0, \\ R_{21}\frac{\partial f_{is}}{\partial I} + R_{22}\frac{\partial f_{is}}{\partial m} - R_2 f_{is} = 0. \quad (13)$$

Вычисление самих коэффициентов R_k, R_{kp} для этого случая дано в Приложении. Здесь мы приведем результат:

$$R_{22} \approx 0.5GM_*\Lambda\sigma \equiv R,$$
$$R_{12} \approx -0.6R(1-\mu\Phi_2(\mu)),$$
$$R_{11} \approx R(0.4\Phi_1(\mu) - 0.8\mu\Phi_2(\mu) + 0.4),$$
$$R_1 \approx -\frac{R}{I+0.6m}\left(0.7\Phi_1(\mu) - 0.8\mu\Phi_2(\mu)\right), \qquad (14)$$
$$R_2 \approx -1.3\frac{R}{I+0.6m}\mu\Phi_2(\mu),$$
$$\mu \approx 0.3\frac{m}{I+0.6m},$$

где

$$\Phi_2(\mu) \approx 1 + 0.35\mu^{-0.6},$$
$$\Phi_1(\mu) \approx 0.5 - 0.8\ln\mu(\Phi_2(\mu)-1) \approx 0.5 + 0.33\mu^{-0.9}.$$

Изотермическая функция распределения, записанная в переменных действия, имеет вид

$$f_{is}(I,m) = f_0 e^{-E/\sigma^2} \approx \frac{0.3 f_0\sigma^2}{(I+2m/\pi)^2}. \qquad (15)$$

3. ЧЕРНАЯ ДЫРА: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Процессы столкновения частиц темной материи со звездами и их захват черной дырой подробно рассматривались в работе [12]. Здесь мы будем считать, что присутствие темной материи и межзвездного газа в рассматриваемой области незначительно, и обсуждать только динамику звезд. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать индекс «*» для f_*.

Черная дыра с массой M_{bh} разрушает (и затем частично поглощает) все звезды, проходящие вблизи приливного радиуса

$$r_t = \left(\frac{6}{\pi}\,\frac{M_{bh}}{\rho_*}\right)^{1/3},$$

где ρ_* — средняя плотность звезды (мы будем считать, что она сравнима с солнечной плотностью $\rho_\odot$). В терминах переменных (I,m) это означает, что все звезды, попадающие в конус потерь

$$m \le m_t = \sqrt{2GM_{bh}r_t} \approx \approx 6\cdot 10^{18}\left(\frac{M_{bh}}{M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{\rho_\odot}{\rho_*}\right)^{1/6}\ \frac{\text{см}^2}{\text{с}}, \qquad (16)$$

будут разрушены в течение одного орбитального периода. С другой стороны, если угловой момент меньше предельного

$$m \le m_g = 4GM_{bh}/c, \qquad (17)$$

звезда будет захвачена черной дырой, независимо от значения m_t [15]. (Если масса черной дыры M_{bh} больше величины порядка $3\cdot 10^8 M_\odot$, приливный радиус становится меньше гравитационного r_g и все звезды поглощаются без разрушения. Для частиц темной материи конус потерь определяется только величиной m_g.) Для простоты символом m_t мы будем обозначать максимум из двух величин m_g и m_t. Таким образом, захват звезды зависит только от ее углового момента.

Важно отметить, что в силу сферической симметрии гравитационный потенциал черной дыры не изменяет моменты звезд, поэтому, если пренебречь столкновениями, число звезд в конусе потерь может только уменьшаться (из-за захвата черной дырой). Максимальное значение этой величины определяется начальной функцией распределения (до образования черной дыры). Например, для изотермической функции (15) полная масса звезд в конусе потерь черной дыры [12] есть

$$\Delta M = (2\pi)^{1/2}\sigma m_t/G.$$

Простые оценки [12] показывают, что относительное приращение массы черной дыры $\Delta M/M_{bh}$, вызванное захватом этих звезд, мало. Таким образом, значительный рост черной дыры возможен только при учете соударений звезд, так как это единственный процесс, изменяющий угловые моменты[2)].

Разрушение звезд при $m \le m_t$ определяет граничное условие к уравнению (9):

$$f|_{m=m_t} = 0, \qquad (18)$$

которое влияет на градиент функции распределения $\partial f/\partial m$ вблизи границы конуса потерь и приводит к возникновению потока звезд в пространстве моментов.

Из уравнений (6), (9) и теоремы Гаусса следует, что скорость роста черной дыры dM_{bh}/dt равна потоку звезд через границу m_t:

$$\dot M_{bh} = S = \int d^3\phi \int_0^\infty dI \int_{-m_t}^{+m_t} dm_z S_m\Big|_{m=m_t} = = (2\pi)^3 2m_t \int_0^\infty dI\left(R_{22}\frac{\partial f}{\partial m} + R_{12}\frac{\partial f}{\partial I} - R_2 f\right)\Big|_{m=m_t}.$$

Последние два члена в этом выражении обращаются

2) Мы не рассматриваем здесь другой эффект, связанный с коллективным взаимодействием звезд, который также может привести к заполнению конуса потерь (так называемая конусная неустойчивость).

в нуль благодаря граничному условию (18), поэтому выражение для $\dot{M}_{bh}$ принимает вид

$$\dot{M}_{bh} = (2\pi)^3 2m_t \int\limits_0^\infty dI \left(R_{22} \frac{\partial f}{\partial m} \right) \Bigg|_{m=m_t} . \qquad (19)$$

Таким образом, для нахождения современных масс черных дыр и распределения звезд вокруг них необходимо решить уравнения (9) с граничными условиями (11) и (18). Выбор изотермической функции (15) в качестве начального условия представляется наиболее естественным, потому что это стационарное распределение с самосогласованным потенциалом и полным отсутствием потоков.

Однако разрушение и захват звезд черной дырой нарушает равновесие и приводит к эволюции начальной изотермической функции. Далее мы будем предполагать, что изменение функции распределения незначительно влияет на значения коэффициентов R_k, R_{kp} (14), вычисленных для изотермической функции. Это разумное предположение, так как функция распределения входит в их определение лишь интегрально. Следует заметить, что мы также пренебрегаем гравитационным потенциалом черной дыры, который, не изменяя непосредственно моменты частиц, изменяет их скорости и, тем самым, влияет на процессы столкновений. В разд. 4 мы обсудим справедливость этих предположений.

4. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Точное решение уравнения (9) получить, по-видимому, невозможно. В этом разделе мы получим лишь некоторые интегральные характеристики, которые позволят оценить скорость поглощения звезд S и ее эволюцию во времени.

Рассмотрим сначала область вблизи границы, $m_t \le m \ll \sqrt{R_{22}t}$ и $I > m$. Из сравнения различных членов уравнения (9) следует, что, например, слагаемое, содержащее R_{22}, оказывается порядка

$$\frac{R_{22} f}{m^2} \gg \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Это означает, что картина вблизи границы квазистационарна. Все другие члены, за исключением двух (содержащих R_{11}, R_1 — сингулярных при $m \to 0$ (см. (14)), оказываются порядка $R_{22}f/Im$, т. е. меньше. Чтобы избавится от двух сингулярных членов, проинтегрируем (9) по I и введем

$$F(m) = \int f(I, m)\, dI.$$

Таким образом, получим[3)]

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial m} m R_{22} \frac{\partial F}{\partial m} \approx 0. \qquad (20)$$

Принимая во внимание граничное условие при $m = m_t$, имеем

$$F(m) = C(t) \ln \frac{m}{m_t}, \quad m \ll \sqrt{Rt}. \qquad (21)$$

Изотермическая функция (15) остается решением вдали от границы,

$$F(m) = 0.5 f_0 \sigma^2 \frac{1}{m}, \quad m \ge \sqrt{Rt}.$$

Подставляя (21) в (19), мы видим, что

$$S = (2\pi)^3 2 R_{22} C(t). \qquad (22)$$

Множитель $C(t)$ определяется из условия сохранения полной массы:

$$S = -\frac{d}{dt} \int d^3\phi \int dI \int dm \int\limits_{-m}^{+m} dm_z f = \\ = -(2\pi)^3 \frac{d}{dt} \int 2m F(m)\, dm.$$

Сравнивая это равенство с (22) и вычисляя интеграл («сшивая» две асимптотики в точке $m = m_D$), получим два уравнения:

$$C(t) m_D \ln \frac{m_D}{m_t} = 0.5 f_0 \sigma^2, \qquad (23)$$

$$-\frac{\dot{C}}{C} m_D^2 \left(\ln \frac{m_D}{m_t} - \frac{1}{2} \right) = 2R. \qquad (24)$$

Таким образом, m_D — характерный масштаб, определяющий область, где функция распределения значительно изменяется. Если граница не движется, $m_t = \mathrm{const}$, то приближенное решение есть

$$m_D(t) \approx 2\sqrt{Rt} \ln^{-1/2} \left(\frac{2\sqrt{Rt}}{m_t} \right), \qquad (25)$$

$$C(t) \approx \frac{f_0 \sigma^2}{4\sqrt{Rt}} \ln^{-1/2} \left(\frac{2\sqrt{Rt}}{m_t} \right). \qquad (26)$$

---

3) Мы пренебрегаем здесь малыми значениями I, для которых члены с R_{12}, R_2 также могут быть большими (однако не больше, чем член с R_{22}). В любом случае легко проверить, что вблизи границы (и, следовательно, везде) адиабатический инвариант может только расти со временем (так как $S_I > 0$), поэтому вклад звезд с малыми I в поток S и функцию F невелик.

Далее, зная зависимость потока $S = \dot{M}_{bh}$ от времени, найдем зависимость массы черной дыры от времени:

$$M_{bh} \approx \frac{(2\pi)^3 f_0 \sigma^2 \sqrt{Rt}}{\sqrt{\ln(2\sqrt{Rt}/m_t)}}.$$

Подставляя значение f_0, получим

$$M_{bh} \approx \frac{2.6\sigma\sqrt{Rt}}{G\sqrt{\ln(2\sqrt{Rt}/m_t)}}. \qquad (27)$$

Важно, что этот результат слабо зависит от значения m_t. Поэтому решение (25)–(27) остается справедливым и при учете роста m_t со временем ((16) или (17)) в соответствии с ростом массы черной дыры (27).

Полагая далее $\Lambda = 15$ и считая типичную массу звезды M_* близкой к солнечной массе, получим

$$M_{bh} \approx 1.2 \cdot 10^7 M_\odot \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{3/2} \times \sqrt{\frac{t}{3 \cdot 10^{17}\ \text{с}}}. \qquad (28)$$

Поток звезд на черную дыру (22) есть

$$S \approx \frac{M_{bh}}{2t} \approx \left(6 \cdot 10^{-4} M_\odot/\text{лет}\right) \times \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{3/2} \left(\frac{t}{3 \cdot 10^{17}\ \text{с}}\right)^{-1/2}. \qquad (29)$$

Он убывает со временем как $t^{-1/2}$ и равен $3.6 \cdot 10^{43}$ эрг/с в настоящий момент, если $\sigma = 200$ км/с. Значение m_D, соответствующее массе (28), равно

$$m_D \approx 0.8\sqrt{Rt}.$$

Заметим, что в области $m \le m_D$ всегда остается не менее половины от первоначальной массы. Поэтому изменение функции распределения, вызванное уходом частиц в конус потерь, не скажется существенно на коэффициентах R_{kp}.

Обсудим теперь влияние потенциала черной дыры. Значению характерного углового момента m_D в момент времени t соответствует область пространства

$$r_D \approx \frac{m_D}{\sigma} \approx 1\ \text{пс} \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{-1/2} \times \left(\frac{t}{3 \cdot 10^{17}\ \text{с}}\right)^{1/2}. \qquad (30)$$

Эволюция функции распределения звезд в этой области определяется процессом их поглощения черной дырой. Эта область гораздо меньше, чем размер балджа (порядка 1 кпс), поэтому мы можем не принимать во внимание внешнюю границу распределения. С другой стороны, потенциал черной дыры становится существенным на расстояниях

$$r \le r_a \approx \frac{GM_{bh}}{\sigma^2} \approx 1\ \text{пс} \left(\frac{M_{bh}}{10^8 M_\odot}\right) \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{-2}.$$

Отсюда следует, что для черных дыр, массы которых в настоящее время не превышают

$$M_{bh} \le 10^8 M_\odot \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{3/2}, \qquad (31)$$

область влияния черной дыры всегда была меньше характерной области r_D (30). Поэтому большую часть времени интересующие нас звезды движутся вне области гравитационного влияния черной дыры. Этот вывод в целом согласуется с оценками, приведенными в работе [7].

Обсудим теперь вкратце область применимости граничного условия (18). Во все уравнения, начиная с (6), входили только средние за орбитальный период величины. Граничное условие (18) также подразумевает, что все частицы со средним угловым моментом, меньшим m_t, в течение одного периода захватываются черной дырой. Однако для достаточно вытянутых траекторий изменение углового момента частиц за период становится сравнимым с граничным моментом m_t. Таким образом, условие поглощения звезды черной дырой в течение одного орбитального периода определяется не только ее средним моментом, но и малыми флуктуациями вокруг среднего значения. (Можно сказать, что на больших расстояниях происходит «размытие» конуса потерь.)[4] В наших терминах это условие можно сформулировать следующим образом.

Граничное условие (18) перестает быть справедливым при достаточно больших $I > I_{crit}$ (т. е. для достаточно вытянутых орбит). Среднеквадратичное отклонение углового момента Δm за период $T(I, m)$ равно

$$\Delta m \sim \sqrt{RT(I, m)}.$$

Тогда I_{crit} можно определить соотношением

$$\sqrt{RT(I_{crit}, m_t)} = m_t.$$

[4] На важность этого эффекта впервые было указано в работах [5, 7], где были введены понятия критической энергии и критического радиуса.

Звезды с $I \ll I_{crit}$ и $m < m_t$ будут захвачены черной дырой в течение одного периода, в то время как звезды с $I \gg I_{crit}$ наверняка не будут захвачены. С другой стороны, как мы видели в разд. 3, основные изменения в функции распределения, дающие вклад в поток, происходят на масштабах

$$I \leq \sqrt{Rt},$$

где t — возраст черной дыры. Это означает, что обсуждаемый эффект «размытия» конуса потерь не влияет на скорость поглощения звезд черной дырой, если

$$I \sim \sqrt{Rt} \ll I_{crit}. \qquad (32)$$

Эту же оценку можно получить, если при определении функции $F(m)$ ограничиться интегрированием по I до I_{crit}. Соотношение (23) тогда останется в силе, если $I_{crit} \gg m_D$. Принимая во внимание соотношение (25), получим условие (32).

Для достаточно больших значений $I \gg m_t$ орбитальный период

$$T(I, m_t) \sim \pi I/\sigma^2$$

(см. Приложение). С учетом соотношения (16) можно сделать вывод, что если масса черной дыры в момент времени t удовлетворяет неравенству

$$M_{bh} \geq M_{crit} = \\ = \left(\frac{1}{50}\,\frac{t}{3\cdot 10^{17}\ \text{с}}\,\frac{200\ \text{км/с}}{\sigma}\right)^{3/8} \cdot 10^7 M_\odot, \qquad (33)$$

то существование I_{crit} можно не принимать во внимание. Современному моменту времени соответствует $M_{crit} \approx 2\cdot 10^6 M_\odot$. Сравнивая временную зависимость (33) с соотношением (28), легко видеть, что (если только σ не изменяется очень сильно) массы черных дыр, растущих за счет описанного релаксационного механизма, практически всегда оказываются больше M_{crit}.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной работе мы вывели уравнение, описывающее кинетическую релаксацию двухкомпонентной системы (звезды и темная материя) в окрестности сверхмассивной черной дыры. Проанализированы возможности роста черной дыры, вызванного поглощением звезд, без учета небарионной темной материи и межзвездного газа. Показано, что для черных дыр с современными массами, меньшими $10^6 M_\odot$, (33) важную роль могут играть индивидуальные столкновения звезд в окрестности перицентра. При массах, больших $10^8 M_\odot$ (31), собственный потенциал черной дыры может сильно влиять на процесс поглощения звезд. Тем не менее большая часть из открытых черных дыр [11] обладают массами, лежащими между $10^6 M_\odot$ и $10^8 M_\odot$, для которых использованные выше приближения оказываются корректными. Таким образом, современные значения масс, соответствующие решению (28), находятся в разумном соответствии с наблюдательными данными.

Решение (28) также показывает, что M_{bh} довольно слабо зависит от времени,

$$M_{bh} \sim \sqrt{t} \sim (1+z)^{-3/4}.$$

Поэтому различия между массами черных дыр в близких и далеких галактиках невелики и не видны на фоне других эффектов. С другой стороны, наблюдаемые связи масс черных дыр с дисперсией скоростей звезд в балджах галактик ($M-\sigma$-зависимости: $\propto \sigma^{3.7}$ в [16] и $\propto \sigma^{5.3}$ в [17]) отличаются от решения (28). Однако это несоответствие не является катастрофическим для изложенной теории, так как в обсуждаемой области $10^6 M_\odot < M_{bh} < 10^8 M_\odot$ ошибка измерения дисперсии не позволяет сделать окончательный выбор между теоретической (28) и эмпирическими $M-\sigma$-зависимостями. Следует также заметить, что, кроме упомянутой $M-\sigma$-зависимости, в литературе обсуждаются и такие как M_{bh} — масса балджа [11], M_{bh} — масса гало темной материи [18, 12] и другие.

Обсудим теперь вклад небарионной темной материи, который может привести к увеличению массы черной дыры по сравнению с (28) в галактиках, где присутствие темной материи в центральной части значительно. В предыдущей статье [12] мы рассматривали возможности роста черной дыры, вызванного поглощением темной матери. Было показано, что если масса темной материи, находящейся в балдже, сравнима с барионной массой балджа, то ее вклад в черную дыру оказывается примерно на порядок выше вклада звезд:

$$M_{bh(dark)} = 8\cdot 10^7 M_\odot \left(\frac{M_H}{10^{12} M_\odot}\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\frac{R_H}{100\ \text{кпс}}\right)^{-9/14} \left(\frac{\sigma}{200\ \text{км/с}}\right)^{4/7} \times \\ \times \left(\frac{t}{3\cdot 10^{17}\ \text{с}}\right)^{4/7}, \qquad (34)$$

где M_H и R_H — соответственно, масса и радиус гало темной материи.

Рентгеновская активность и масса сверхмассивных черных дыр галактических ядер

Объект	L, эрг/с	M_{bh}, $M_\odot$	Объект	L, эрг/с	M_{bh}, $M_\odot$
3C 120 (Mrk 1506)	$9.772 \cdot 10^{43}$	$2.3 \cdot 10^7$	NGC 4203	$7.471 \cdot 10^{40}$	$< 1.2 \cdot 10^7$
	$1.343 \cdot 10^{44}$			$6.424 \cdot 10^{40}$	
Ark 120 (Mrk 1095)	$7.805 \cdot 10^{43}$	$1.84 \cdot 10^8$	NGC 4258 (M106)	$2.914 \cdot 10^{40}$	$4.1 \cdot 10^7$
Circinus	$2.47 \cdot 10^{40}$	$1.3 \cdot 10^6$	NGC 4261 (3C 270)	$1.575 \cdot 10^{41}$	$5.2 \cdot 10^8$
Fairall 9	$6.688 \cdot 10^{43}$	$8.0 \cdot 10^7$		$1.434 \cdot 10^{41}$	
IC 1459	$8.398 \cdot 10^{40}$	$3.7 \cdot 10^8$	NGC 4291	$6.128 \cdot 10^{40}$	$1.5 \cdot 10^8$
	$1.051 \cdot 10^{41}$			$6.769 \cdot 10^{40}$	
IC 4329A	$3.748 \cdot 10^{43}$	$5 \cdot 10^6$		$4.28 \cdot 10^{40}$	
	$2.541 \cdot 10^{43}$		NGC 4342	$2.077 \cdot 10^{39}$	$3.4 \cdot 10^8$
UGC 3973 (Mrk 79)	$2.594 \cdot 10^{43}$	$5.2 \cdot 10^7$	NGC 4374 (M84)	$6.317 \cdot 10^{40}$	$1.6 \cdot 10^9$
Mrk 110	$1.625 \cdot 10^{44}$	$5.6 \cdot 10^6$		$6.657 \cdot 10^{40}$	
Mrk 335	$2.04 \cdot 10^{43}$	$6.3 \cdot 10^6$		$6.138 \cdot 10^{40}$	
	$4.916 \cdot 10^{43}$		NGC 4459	$4.169 \cdot 10^{39}$	$6.5 \cdot 10^7$
Mrk 509	$1.188 \cdot 10^{44}$	$5.78 \cdot 10^7$	NGC 4473	$1.109 \cdot 10^{40}$	
Mrk 590 (NGC 863)	$3.853 \cdot 10^{43}$	$1.78 \cdot 10^7$		$5.089 \cdot 10^{39}$	$1.0 \cdot 10^8$
	$8.884 \cdot 10^{43}$		NGC 4486 (M87)	$3.257 \cdot 10^{42}$	$3.4 \cdot 10^9$
NGC 205 (M110)	$< 1.172 \cdot 10^{38}$	$< 9.3 \cdot 10^4$	NGC 4593	$6.535 \cdot 10^{42}$	$8.1 \cdot 10^6$
NGC 598 (M33)	$1.46 \cdot 10^{39}$	$< 1.5 \cdot 10^3$	NGC 4594 (M104)	$3.361 \cdot 10^{40}$	$1.1 \cdot 10^9$
	$1.902 \cdot 10^{39}$		NGC 4649	$1.002 \cdot 10^{41}$	$2.0 \cdot 10^9$
NGC 1068 (M77)	$1.315 \cdot 10^{41}$	$1.6 \cdot 10^7$		$1.587 \cdot 10^{41}$	
	$5.124 \cdot 10^{41}$		NGC 4697	$9.141 \cdot 10^{39}$	$1.2 \cdot 10^8$
	$8.81 \cdot 10^{41}$		NGC 4945	$5.447 \cdot 10^{39}$	$1.1 \cdot 10^6$
NGC 3115	$1.773 \cdot 10^{39}$	$9.1 \cdot 10^8$	NGC 5548	$2.182 \cdot 10^{43}$	$1.23 \cdot 10^8$
NGC 3227	$1.371 \cdot 10^{42}$	$3.9 \cdot 10^7$		$2.154 \cdot 10^{43}$	
	$7.127 \cdot 10^{41}$			$2.778 \cdot 10^{43}$	
NGC 3516	$5.578 \cdot 10^{41}$	$2.3 \cdot 10^7$	NGC 6251	$1.71 \cdot 10^{42}$	$5.4 \cdot 10^8$
	$1.084 \cdot 10^{43}$		NGC 7469	$1.699 \cdot 10^{43}$	$6.5 \cdot 10^6$
NGC 3608	$1.174 \cdot 10^{40}$	$1.1 \cdot 10^8$		$3.34 \cdot 10^{43}$	
NGC 3783	$8.515 \cdot 10^{42}$	$9.4 \cdot 10^6$		$2.071 \cdot 10^{43}$	
	$7.384 \cdot 10^{42}$		PG 0026+129	$2.798 \cdot 10^{44}$	$4.5 \cdot 10^7$
NGC 3998	$1.425 \cdot 10^{41}$	$5.6 \cdot 10^8$	PG 0052+251	$4.766 \cdot 10^{44}$	$2.2 \cdot 10^8$
NGC 4051	$7.609 \cdot 10^{41}$	$1.3 \cdot 10^6$	PG 1211+143	$1.098 \cdot 10^{44}$	$4.05 \cdot 10^7$
	$7.624 \cdot 10^{41}$		PG 1411+442	$5.049 \cdot 10^{42}$	$8.0 \cdot 10^7$
NGC 4151	$9.025 \cdot 10^{42}$	$1.53 \cdot 10^7$	PG 1426+015(Mrk 1383)	$8.507 \cdot 10^{43}$	$4.7 \cdot 10^8$
	$5.578 \cdot 10^{41}$		PG 1613+658(Mrk 876)	$1.652 \cdot 10^{44}$	$2.41 \cdot 10^8$
	$4.784 \cdot 10^{41}$		PG 1617+175(Mrk 877)	$6.188 \cdot 10^{43}$	$2.73 \cdot 10^8$

Примечание. Массы черных дыр взяты из работы [11].

Это соотношение и (28) соответствуют двум предельным случаям, когда рост черной дыры обусловлен поглощением в основном темной или барионной материи. С учетом естественного разброса параметров решения (28) и (34) покрывают область

$$5 \cdot 10^6 M_\odot \le M_{bh} \le 2 \cdot 10^8 M_\odot, \tag{35}$$

которая содержит большинство наблюдаемых черных дыр.

Важно подчеркнуть, что в рассмотренной нами модели аккреция частиц темной материи и звезд на черные дыры возникает благодаря рассеянию на звездах. Следовательно, рост черной дыры происходит, лишь начиная с момента времени t_0, когда уже появилась как затравочная черная дыра, так и ее звездное окружение. Таким образом, этот момент является начальным для всех процессов, рассматриваемых в теории. Время t как в основных уравнениях (1), так и в их решениях, отсчитывается именно от момента t_0. Чрезвычайно существенно, что согласно (28) поток материи на черную дыру расходится как $(t - t_0)^{-1/2}$ при $t \to t_0$. Это означает, что наиболее интенсивная аккреция происходит в период зарождения черной дыры и генерации звездного балджа.

Довольно распространено предположение, что основной причиной активности галактических ядер является поглощение звезд черной дырой [19, 20]. Основываясь на этом, мы проанализировали наблюдаемую рентгеновскую активность галактических центров, используя данные по 46 галактикам [21]. Данные получены в основном со спутников ROSAT и EINSTEIN, которые могут регистрировать излучение в диапазоне от 0.1 до 2.4 кэВ и от 0.2 до 4.0 кэВ, соответственно. Заметим, что из-за большой концентрации межзвездного газа и пыли центры галактик в низкоэнергетической части диапазона обычно не видны. Результаты представлены в таблице. Их сопоставление с теорией позволяет сделать следующие выводы.

1. Развитая здесь теория справедлива для черных дыр с массами, лежащими в интервале $5 \cdot 10^6 M_\odot \le M_{bh} \le 2 \cdot 10^8 M_\odot$ (см. (35). Большинство приведенных в таблице черных дыр (более 60 %) также лежат в указанном интервале.

2. В соответствии с выражением (29), полная мощность, высвобождающаяся при разрушении звезд внутри приливного радиуса черной дыры, в среднем составляет примерно $\langle S \rangle \approx 3.6 \cdot 10^{43}$ эрг/с. Согласно таблице, средняя по $N = 46$ источникам мощность излучения

$$\langle L \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \langle L_k \rangle \approx 4 \cdot 10^{43} \text{ эрг/с}.$$

Можно считать, что полученные близкие значения $\langle S \rangle$ и $\langle L \rangle$ указывают на то, что следующая из представленной теории оценка потока звезд внутрь приливного радиуса, а также объяснение активности галактических ядер, связанное с приливным разрушением этих звезд, являются вполне разумными.

3. Из таблицы видно, что корреляция между массами черных дыр и активностью галактических ядер отсутствует. Более того, различия в активности ядер, содержащих черные дыры с близкими массами могут быть весьма значительными (3–4 порядка). В качестве примера можно привести галактики 3C 120 ($M_{bh} = 2.3 \cdot 10^7 M_\odot$, $L = 9.8 \cdot 10^{43}$ эрг/с) и NGC 1068 ($M_{bh} = 1.6 \cdot 10^7 M_\odot$, $L = 1.3 \cdot 10^{41}$ эрг/с), NGC 4459 ($M_{bh} = 6.5 \cdot 10^7 M_\odot$, $L = 4.2 \cdot 10^{39}$ эрг/с) и PG 0026+129 ($M_{bh} = 4.5 \cdot 10^7 M_\odot$, $L = 2.8 \cdot 10^{44}$ эрг/с) и др. Естественно предположить, что причина этих различий заключается в том, что продолжительность τ_e выброса энергии, вызванного разрушением звезды, гораздо меньше, чем среднее время между двумя актами разрушения $T \approx M_\odot / S \approx 2000$ лет (29). Из наблюдаемой разницы мощностей излучения (3–4 порядка) (в предположении экспоненциального убывания мощности излучения) следует оценка $\tau_e \le T/10 \approx 200$ лет. Поэтому можно сделать вывод о том, что большая часть галактик, содержащая черные дыры, в настоящий момент излучают очень слабо или вообще не являются активными (как, например, наша Галактика). С другой стороны, максимальная интенсивность излучения должна быть значительно больше, чем среднее значение S из (29). Например, наибольшая мощность, наблюдающаяся у источника PG 0052+251, составляет $5 \cdot 10^{44}$ эрг/с, что на порядок больше средней мощности.

4. Из таблицы также видно, что существует большая группа галактик (NGC 4374, NGC 4594, NGC 4649, NGC 4251 и др.) с крупными черными дырами ($> 3 \cdot 10^8$), активность которых невелика. Это соответствуют упомянутому в разд. 3 факту, что у достаточно массивных черных дыр гравитационный радиус оказывается больше приливного и звезды поглощаются целиком, не разрушаясь и, следовательно, не излучая энергии. Исключения (например, галактика NGC 4486) соответствуют, по-видимому, случаям, когда в центре галактики присутствует много межзвездного газа, поглощение которого может приводить к выделению значитель-

ной энергии [22].

Мы благодарим проф. А. М. Черепащука и проф. А. В. Засова за содержательное обсуждение. Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-1603.2003.2 и гранта INTAS № 03-51-4286.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление коэффициентов диффузии R_k, R_{kp} в (8) и адиабатического инварианта для изотермического потенциала

Рассмотрим коэффициенты W_{kp}, W_k, определенные в формуле (4). Если функция распределения f_* изотропна, т. е. зависит только от энергии, то тензор W_{kp} зависит только от вектора $\mathbf{v}$ и поэтому принимает вид

$$W_{kp} = A(E,r)\delta_{kp} - B(E,r)\frac{v_k v_p}{v^2}, \tag{36}$$

откуда, вычисляя свертки W_{kk} и $W_{kp}v_p$, найдем

$$A = \frac{8\pi}{3}\int\limits_{\Psi(r)}^{\infty} dE' f(E') \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{v'}{v}\left(1 - \dfrac{v'^2}{3v^2}\right), & E' < E, \\ 1, & E' > E, \end{cases}$$

$$A - B = \frac{8\pi}{3}\int\limits_{\Psi(r)}^{\infty} dE' f(E') \begin{cases} \dfrac{v'^3}{v^3}, & E' < E, \\ 1, & E' > E, \end{cases}$$

$$v = \sqrt{2(E - \Psi(r))}, \quad v' = \sqrt{2(E' - \Psi(r))}.$$

И, аналогично,

$$W_k = \frac{v_k}{v} D(E,r), \tag{37}$$

$$D(E,r) = \frac{8\pi}{3}\int\limits_{\Psi(r)}^{\infty} dE' \frac{\partial f}{\partial E'} v \begin{cases} (v'/v)^3, & E' < E, \\ 1, & E' > E. \end{cases}$$

При вычислении коэффициентов R_k,R_{kp} в (8) удобно перейти к новым переменным

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2\} = \{E, m\}.$$

Таким образом, $I_i = I_i(E,m)$, и мы имеем из (8)

$$R_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial \xi_a}\frac{\partial I_j}{\partial \xi_b} R'_{ab}, \quad R_i = \frac{\partial I_i}{\partial \xi_a} R'_a.$$

Обозначая

$$\Lambda_0 = 2\pi G^2 M_* \Lambda, \quad \langle \ldots \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\phi$$

и используя (36) и (37), получим для R'_a, R'_{ab}:

$$\begin{aligned} &R'_1 = \Lambda_0 \langle vD \rangle, \quad R'_2 = \Lambda_0 m \langle D/v \rangle, \\ &R'_{11} = \Lambda_0 \langle v^2 (A - B) \rangle, \quad R'_{12} = \Lambda_0 m \langle A - B \rangle, \\ &R'_{22} = \Lambda_0 \langle A r^2 - B m^2/v^2 \rangle, \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$\langle \ldots \rangle = \frac{2}{T(E,m)}\int \frac{dr}{v_r}, \quad T(E,m) = \oint \frac{dr}{v_r},$$

$$v_r = \sqrt{2\left(E - \Psi(r) - \frac{m^2}{2r^2}\right)}.$$

Все изложенное выше касалось произвольной изотропной функции распределения. Рассмотрим теперь частный случай изотермической функции (12). Удобно ввести следующие безразмерные переменные:

$$\mu = \frac{m}{2\sigma e^{E/2\sigma^2}}, \quad x = r\exp\left(-\frac{E}{2\sigma^2}\right).$$

Из условия

$$v_r^2 = 2(E - \Psi - m^2/2r^2) > 0$$

следует

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le \mu \le 1/\sqrt{2e}.$$

Таким образом, например, для орбитального периода имеем

$$T(E,m) = \sqrt{2}\int \frac{dr\,\theta(E - \Psi - m^2/2r^2)}{\sqrt{E - \Psi - m^2/2r^2}} = \frac{1}{\sigma}\exp(E/2\sigma^2)\tilde{T}(\mu),$$

$$\tilde{T}(\mu) = \int\limits_0^1 \frac{dx\,\theta(-\ln x - \mu^2/x^2)}{\sqrt{-\ln x - \mu^2/x^2}}.$$

Можно проверить, что $\tilde{T}(\mu)$ — практически постоянная величина, медленно растущая от 1.77 при $\mu = 0$ до 1.9 при $\mu \approx 0.4$ — максимально возможным μ.

Процедура усреднения теперь может быть записана, как

$$\langle \ldots \rangle = \frac{2}{T(E,m)}\int\limits_{r_-}^{r_+} \frac{dr}{v_r}(\ldots) = \frac{1}{\tilde{T}(\mu)}\int\limits_0^1 \frac{dx\,\theta(-\ln x - \mu^2/x^2)}{\sqrt{-\ln x - \mu^2/x^2}}(\ldots).$$

Вычисления A, B и D для изотермической функции распределения дают

$$A = \frac{8\pi}{3}\frac{f_0}{r^2}\sigma^2\left(-2\ln x(2H+x^2) - H + x^2\right),$$

$$A - B = \frac{8\pi}{3}\frac{f_0}{r^2}\sigma^2\left(2H+x^2\right),$$

$$\frac{D}{v} = -\frac{8\pi}{3}\frac{f_0}{r^2}\left(2H+x^2\right), \quad v^2 = -4\sigma^2\ln x,$$

$$H(x) = \int\limits_x^1 y\,dy\left(\sqrt{\frac{\ln y}{\ln x}}\right)^3.$$

Заметим, что

$$A - B = -\sigma^2 D/v,$$

откуда следует выражение (13). Используя (38), найдем

$$R'_{11} = -\sigma^2 R'_1, \quad R'_{12} = -\sigma^2 R'_2,$$

$$R'_1(E,m) = -4\sigma^2\exp\left(-\frac{E}{\sigma^2}\right)\Lambda_0\frac{8\pi}{3}f_0\Phi_1(\mu),$$

$$R'_2(E,m) = -m\exp\left(-\frac{E}{\sigma^2}\right)\Lambda_0\frac{8\pi}{3}f_0\Phi_2(\mu),$$

$$R'_{22}(E,m) = \sigma^2\Lambda_0\frac{8\pi}{3}f_0\Phi_{22}(\mu),$$

где

$$\Phi_2(\mu) = \langle 2H(x)/x^2\rangle + 1,$$

$$\Phi_1(\mu) = \langle -\ln x\cdot 2H(x)/x^2\rangle + \langle -\ln x\rangle,$$

$$\Phi_{22}(\mu) = \langle -2\ln x(2H+x^2) - H + x^2\rangle - \\ - \mu^2\left\langle\frac{4H}{x^2} + 1 + \frac{3H}{x^2\ln x}\right\rangle.$$

Для $\mu \le 10^{-4}$ справедливо приближенное равенство:

$$\Phi_2(\mu) \approx 1 + 0.35\mu^{-0.6},$$

$$\Phi_1(\mu) \approx 0.5 - 0.8\ln\mu\cdot(\Phi_2(\mu)-1) \approx 0.5 - 0.3\ln\mu\cdot\mu^{-0.6},$$

$$\Phi_{22}(\mu) \approx 0.87.$$

Вычислим, наконец, адиабатический инвариант I, определяемый формулой (5):

$$I(E,m) = \frac{2\sigma}{\pi}\exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right)\times \\ \times\int\limits_0^1\sqrt{-\ln x - \frac{\mu^2}{x^2}}\,\theta\left(-\ln x - \frac{\mu^2}{x^2}\right)dx.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$I(E,m) \approx \frac{2\sigma}{\pi}\exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right)(0.9 - 2\mu) = \\ = \frac{2}{\pi}\left(0.9\sigma\exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right) - m\right),$$

поэтому

$$I'_m \approx -\frac{2}{\pi}, \quad I'_E \approx \frac{I + 2m/\pi}{2\sigma^2}.$$

Изотермическая функция в переменных I и m имеет вид

$$f(I,m) = f_0\exp\left(-\frac{E}{\sigma^2}\right) \approx \\ \approx f_0\sigma^2\left(\frac{2\cdot 0.9}{\pi}\right)^2\frac{1}{(I+2m/\pi)^2}.$$

Другая полезная формула — зависимость орбитального периода T от I и m — имеет вид

$$T(I,m) = \frac{\tilde{T}(\mu)}{\sigma}\exp\left(\frac{E}{2\sigma^2}\right) \approx \frac{2}{\sigma}\frac{(\pi/2)I + 2m}{0.9\sigma}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. K. Chakrabarti, in *Astrophys. and Space Sci. Library*, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999), Vol. 234; L. Kaper, E. P. J. van den Heuvel, and P. A. Woudt, in *Proc. of the ESO Workshop, Garching, Germany, 6–8 Sept. 1999, in Honour of Riccardo Giacconi* (*ESO Astrophys. Symposia*), Springer, Berlin (2001).
2. V. I. Dokuchaev and Yu. N. Eroshenko, E-print archives astro-ph/0209324v1.
3. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэрономия **4**, 247 (1964).
4. P. J. E. Peebles, Astrophys. J. **178**, 371 (1972).
5. J. N. Bahcall and R. A. Wolf, Astrophys. J. **209**, 214 (1976).
6. J. Frank and M. J. Rees, MNRAS **176**, 633 (1976).

7. A. P. Lightman and S. L. Shapiro, Astrophys. J. **211**, 244 (1977).

8. В. И. Докучаев, Л. М. Озерной, ЖЭТФ **73**, 1587 (1977).

9. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, УФН **165**, 723 (1995); А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **94**, 5 (1988).

10. А. В. Гуревич, К. П. Зыбин, ЖЭТФ **97**, 20 (1990).

11. А. М. Черепащук, УФН **173**, 345 (2003).

12. А. С. Ильин, К. П. Зыбин, А. В. Гуревич, ЖЭТФ **125**, 5 (2004), E-print archives, astro-ph/0306490.

13. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).

14. Г. И. Будкер, С. Т. Беляев, в кн. *Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций*, Гостехиздат, Москва (1958), т. 2.

15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1973).

16. K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber et al., Astron. Astrophys. **539**, L13 (2000).

17. L. Ferrarese and D. Merritt, Astrophys. J. **539**, L9 (2000).

18. M. Baes, P. Buyle, G. K. T. Hau, and H. Dejonghe, MNRAS **341**, L44 (2003).

19. S. L. Shapiro, in *Carnegie Observatories Astrophysical Series* (2003), Vol. 1; E-print archives, astro-ph/0304202v1.

20. D. Merritt and L. Ferrarese, E-print archives, astro-ph/0107134v2.

21. NASA/IPAC Extragalactic Database (NED), http://nedwww.ipac.caltech.edu.

22. M. Vestergaard, E-print archives, astro-ph/0401430.