

# ВИХРЕВОЕ СОСТОЯНИЕ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА С ОДНООСНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Ю. И. Джебжера, М. В. Сорокин\*, Е. А. Бубук

Институт магнетизма Национальной академии наук Украины  
и Министерства образования и науки Украины  
03142, Киев, Украина

Поступила в редакцию 12 июля 2004 г.

Для модели антиферромагнетика с легкоосной анизотропией определено многосолитонное состояние, соответствующее доменной границе, на поверхности которой локализованы антиферромагнитные вихри различного топологического заряда. Проанализирован характер взаимодействия вихрей. Показано, что между вихрями с одноименными топологическими зарядами действуют силы отталкивания, а с разноименными — силы притяжения, эквивалентные силам электростатического взаимодействия точечных зарядов в двумерном случае. Однако при этом существует стационарное состояние, поскольку в модели одноосного антиферромагнетика эти вихри обладают бесконечной эффективной массой и не меняют взаимного расположения. Указан общий вид решения, описывающего вихревые структуры на поверхности доменной границы.

PACS: 05.45.Yv, 75.60.Ch

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К числу наиболее изученных элементов доменных структур относятся плоские доменные границы (ДГ) и изолированные полосовые домены. Их математическими образами являются одномерные солитонные решения уравнений Ландау – Лифшица соответственно в виде кинков и бризеров.

Магнитные и антиферромагнитные солитоны в двумерных и трехмерных системах менее изучены, чем их одномерные аналоги. Первое многомерное решение, описывающее вихревые состояния в изотропном ферромагнетике (ФМ), определено Белавиным и Поляковым [1]. Ходенков [2, 3] указал на существование класса частных решений уравнений Ландау – Лифшица в модели легкоосного ФМ, рассмотрел решение, описывающее одиночный магнитный вихрь [2] и пару взаимодействующих вихрей [3], а также предположил, что подобные вихревые структуры существуют в легкоосных антиферромагнетиках (АФМ).

При рассмотрении доменной структуры в коллинеарных антиферромагнитных системах не су-

ществует проблемы учета магнитодипольных вкладов. Уравнения динамики вектора антиферромагнетизма обладают инвариантностью к преобразованию Лоренца и допускают существование динамического солитонного состояния. В настоящей работе для модели легкоосного АФМ в аналитическом виде определено трехмерное решение уравнений Ландау – Лифшица, описывающее семейство топологических солитонов. Решение допускает динамическое обобщение и учитывает влияние магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии.

Обсуждается вопрос о взаимодействии и устойчивости системы антиферромагнитных вихрей в реальных антиферромагнитных системах.

Рассмотрим модель неограниченного двухподрешеточного АФМ с легкоосной анизотропией, направление которой совпадает с осью  $z$  системы координат. Будем полагать, что АФМ пребывает в однородном магнитном поле, направленном вдоль «легкой оси» по  $z$ . Выражение для плотности энергии такой системы имеет вид

$$W = \frac{1}{2}AM^2 + \frac{\alpha_1}{2}(\nabla L_i)^2 + \frac{\alpha_2}{2}(\nabla M_i)^2 - \frac{\beta_1}{2}L_z^2 - \frac{\beta_2}{2}M_z^2 - M_z H, \quad (1)$$

\*E-mail: sorockin@ukr.net

где  $A$  — константа однородного обмена,  $\alpha_1, \alpha_2$  — константы неоднородного обмена,  $\beta_1, \beta_2$  — константы одноосной анизотропии,  $i = x, y, z$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$  — вектор намагниченности,  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$  — намагниченности подрешеток АФМ,  $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$  — вектор антиферромагнетизма — основная характеристика системы,

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

На основании естественного для АФМ предположения, что энергия релятивистских взаимодействий мала по сравнению с энергией обмена, уравнения движения для векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  могут быть сведены к одному уравнению для вектора антиферромагнетизма  $\mathbf{L}$ . Для системы с плотностью энергии (1) это уравнение имеет вид [4]

$$\left[ \mathbf{l} \times \left( \nabla^2 \mathbf{l} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial t^2} \right) \right] - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial t} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{h}) + \frac{1}{c^2} (1 - \mathbf{h}^2) [\mathbf{l} \times \mathbf{e}_z] (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_z) = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{l} = \mathbf{L}/2M_0$  — приведенный вектор антиферромагнетизма,  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/2M_0\sqrt{A\beta_1}$  — приведенное магнитное поле, которое направлено вдоль оси анизотропии параллельно оси  $z$ ,  $c = (4\mu_0 M_0/\hbar)\sqrt{A\alpha_1}$  — характерная скорость,  $\mu_0$  — магнетон Бора.

С подробной процедурой вывода уравнений динамики АФМ можно ознакомиться, например, в работе [4] и книге [5].

Уравнение (2) имеет достаточно широкие пределы применимости, определяемые соотношениями

$$H \ll AM_0, \quad \mathbf{M}^2 \ll \mathbf{L}^2. \quad (3)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{M}$  выражаются через вектор  $\mathbf{L}$  и его производные [5]:

$$\mathbf{M} = \frac{\hbar}{8\mu_0 AM_0^2} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} \times \mathbf{L} + \frac{1}{4AM_0^2} \mathbf{L} \times [\mathbf{H} \times \mathbf{L}]. \quad (4)$$

В рамках приближения (3) длина вектора антиферромагнетизма практически неизменна, поэтому для проведения дальнейших расчетов целесообразно ввести угловые переменные  $\theta$  и  $\varphi$ , связанные с компонентами вектора  $\mathbf{L}$  следующими соотношениями:

$$\mathbf{l} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (5)$$

Уравнения движения АФМ (2) в терминах угловых переменных принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \sin^2 \theta (\dot{\varphi} - \omega_H) + c^2 \operatorname{div} [(\nabla \varphi) \sin^2 \theta] &= 0, \\ \ddot{\theta} - c^2 \nabla^2 \theta + [\omega_0^2 + c^2 (\nabla \varphi)^2 - (\dot{\varphi} - \omega_H)^2] \times \\ &\times \sin \theta \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\omega_0 = c/\delta$ ,  $\delta = \sqrt{\alpha_1/\beta_1}$  — характерная длина;  $\omega_H = 2\mu_0 H/\hbar$ , точки над функциями означают дифференцирование по времени.

Чтобы не ограничивать общность рассмотрения, перейдем к другой ортогональной системе координат с осями  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . При этом полагаем, что новая система ориентирована по отношению к исходной произвольным образом.

Уравнения (6) останутся неизменными, с той лишь разницей, что

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Радиус-вектор точки пространства в новой системе координат имеет вид

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{e}_1 \xi + \mathbf{e}_2 \eta + \mathbf{e}_3 \zeta.$$

Рассмотрим локализованные антиферромагнитные состояния, которые на бесконечности имели бы однородный характер. Поскольку будут рассмотрены различные антиферромагнитные конфигурации, явный вид граничных условий конкретизируется в дальнейшем.

Полагая, что антиферромагнитная конфигурация движется с постоянной скоростью  $v$  в направлении оси  $\xi$ , представим полярный и азимутальный углы вектора антиферромагнетизма в виде

$$\begin{aligned} \theta(\boldsymbol{\rho}) &= 2 \arctg \exp [u(\xi^*, \eta, \zeta)], \\ \varphi &= \psi(\xi^*, \eta, \zeta) + \omega' t, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\xi^* = (\xi - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ,  $\omega'$  — частота прецессии вектора антиферромагнетизма.

Введение переменной  $\xi^*$  означает, по сути, переход к сопутствующей системе координат, которая совместно с антиферромагнитной конфигурацией совершает равномерное движение.

С учетом того что

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = \sin \theta \cos \theta,$$

уравнения (6) в сопутствующей системе координат преобразуются к виду

$$\begin{aligned} 2 \left( c^2 (\nabla^* u) (\nabla^* \psi) + \frac{v\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi^*} \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \theta = -c^2 (\nabla^{*2} \psi) \sin \theta, \\ \left( c^2 (\nabla^* u) - c^2 (\nabla^* \psi)^2 - \omega_0^2 + \omega^2 - \right. \\ \left. - 2 \frac{v\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} \right) \sin \theta \cos \theta = \\ = -c^2 (\nabla^{*2} u) \sin \theta, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\nabla^* = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi^*} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \omega = \omega' - \omega_H.$$

Из уравнений (8) следует, в частности, что они обращаются в тождества, если функции  $\psi$  и  $u$  являются гармоническими и удовлетворяют уравнениям

$$(\nabla^{*2} u) \sin \theta = 0, \quad (\nabla^{*2} \psi) \sin \theta = 0. \quad (9)$$

Вместе с тем данные величины должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\begin{aligned} c^2 (\nabla^* u) (\nabla^* \psi) + \frac{v\omega}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial u}{\partial \xi^*} &= 0, \\ c^2 (\nabla^* u)^2 - c^2 (\nabla^* \psi)^2 - \omega_0^2 + \omega^2 - \\ - 2 \frac{v\omega}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^*} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Определим антиферромагнитные конфигурации, имеющие локализованный характер и удовлетворяющие соотношениям (9), (10).

## 2. ВИХРЕВЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛЯХ ЛЕГКООСНОГО И ИЗОТРОПНОГО АФМ

1. Потребуем, например, чтобы при  $\xi^* \rightarrow \pm\infty$  выполнялись равенства  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ ,  $\partial\theta/\partial\xi^* = 0$ , а производная  $\partial\psi/\partial\xi^*$  была ограничена.

В простейшем случае таким условиям можно удовлетворить, выбрав  $\psi$  и  $u$  в виде линейных функций:

$$\begin{aligned} u &= (\xi^* - \xi_0)/\delta^*, \quad \psi = k\xi^* + \psi_0, \\ \delta^* &= \delta \sqrt{\frac{1 - (v/c)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 - (v/c)^2}}, \\ k &= -\frac{v}{c} \frac{\omega}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\psi_0$  и  $\xi_0$  — константы интегрирования.

Конфигурация (7), (11) описывает 180-градусную ДГ, равномерное движение которой сопровождается прецессией вектора антиферромагнетизма. Динамические свойства данной структуры были подробно исследованы [5]. По сути, величина  $\xi_0$  определяет координату ДГ.

В нашу задачу входит определение трехмерного многосолитонного решения, которое будем искать в виде ДГ с модулированными в пространстве координатой  $\xi_0$  и азимутальным углом  $\psi_0$ , полагая

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{\rho}, t) &= \xi^*/\delta^* - \xi_0(\eta, \zeta)/\delta^*, \\ \psi(\boldsymbol{\rho}, t) &= k\xi^* + \psi_0(\eta, \zeta). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив выражения (12) в (9), находим, что искомые функции  $\xi_0$  и  $\psi_0$  должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \sin \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \psi_0(\eta, \zeta) &= 0, \\ \sin \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \xi_0(\eta, \zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дополнительные условия (10) для этих величин принимают вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_0}{\partial \zeta} \right)^2 &= \\ = \delta^{*2} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \right)^2 + \delta^{*2} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \right)^2, \\ \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial \xi_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \xi_0}{\partial \zeta} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Чтобы в области пространства, где  $\sin \theta \neq 0$ , уравнения (13) обратились в тождество, величины  $\psi_0(\eta, \zeta)$  и  $\xi_0(\eta, \zeta)$  должны быть решениями уравнений Лапласа и являться гармоническими функциями. Что касается дополнительных условий (14), то они удовлетворяются автоматически, если эти функции связаны условием Коши–Римана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0(\eta, \zeta)}{\partial \zeta} &= \delta^* \frac{\partial \psi_0(\eta, \zeta)}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \xi_0(\eta, \zeta)}{\partial \eta} &= -\delta^* \frac{\partial \psi_0(\eta, \zeta)}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, координата  $\xi_0(\eta, \zeta)$  ДГ и азимутальный угол  $\psi_0(\eta, \zeta)$  вектора намагниченности являются произвольными сопряженными гармоническими функциями.

Подобный результат имеет место и для модели ФМ с легкоосной анизотропией [2, 3]. Нетрудно показать, что такая связь между величинами  $\xi_0(\eta, \zeta)$ ,  $\psi_0(\eta, \zeta)$  сохраняется для солитонных конфигураций изотропных ФМ и АФМ.

Для однозначного определения АФМ-конфигурации следует задать определенные граничные условия. В данной работе из всего многообразия сопряженных гармонических функций выберем те, которые описывают антиферромагнитные вихри, полагая

$$\begin{aligned} \xi_0(\eta, \zeta) &= \\ = \delta^* \sum_{k=1}^N \nu_k \ln \left[ \frac{1}{\delta^*} \sqrt{(\eta - \eta_k)^2 + (\zeta - \zeta_k)^2} \right] + C_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная, определяющая положение ДГ вдоль оси  $\xi$ ,  $N$  — количество вихрей,

$(\eta_k, \zeta_k)$  — координата кора вихря под номером  $k$ , а  $\nu_k$  — число, которое определяет его топологический заряд. К вопросу о значениях  $\nu_k$  вернемся позднее.

Из условий Коши–Римана (15) находим, что функция  $\psi_0(\eta, \zeta)$ , сопряженная к  $\xi_0(\eta, \zeta)$ , с точностью до произвольной постоянной имеет вид

$$\psi_0(\eta, \zeta) = \sum_k \nu_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta - \eta_k}{\zeta - \zeta_k} \right) + C_2, \quad (17)$$

где  $C_2$  — константа интегрирования.

Координата  $\xi_0(\eta, \zeta)$  ДГ и азимутальный угол  $\psi_0(\eta, \zeta)$  вектора намагниченности (см. (16) и (17)) являются гармоническими функциями на всей плоскости  $\eta\zeta$ , за исключением координат  $(\eta_k, \zeta_k)$  кора вихрей, поскольку в этих точках уравнение Лапласа для  $\xi_0(\eta, \zeta)$  не обращается в тождество.

Несмотря на это, соотношения (16) и (17) все равно являются решением уравнений (13), поскольку в особых точках  $(\eta_k, \zeta_k)$ , где функции  $\xi_0(\eta, \zeta)$  и  $\psi_0(\eta, \zeta)$  не являются гармоническими, в нуль обращается величина  $\sin \theta$ .

Таким образом, найдено трехмерное решение уравнений динамики АФМ:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta(\rho, t)}{2} = \exp \left( \pm \frac{\xi^* - \xi_0(\eta, \zeta)}{\delta^*} \right), \quad (18)$$

$$\varphi(\rho, t) = \sum_k \nu_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta - \eta_k}{\zeta - \zeta_k} \right) + k\xi^* + \omega't + C_2,$$

которое описывает семейство неподвижных антиферромагнитных вихрей, локализованных на поверхности движущейся ДГ. Оси вихрей могут быть ориентированы по отношению к оси анизотропии произвольным образом.

Важным результатом исследования является вывод о том, что присутствие вихрей на поверхности ДГ не отражается на динамических характеристиках последней, поскольку и скорость ДГ, и частота прецессии, и волновое число  $k$  не зависят от топологического заряда как отдельных вихрей, так и вихревой структуры в целом.

Из качественного анализа конфигурации (18) следует, что точки пространства, где выполняется условие  $\xi^* = \xi_0(\eta, \zeta)$ , формируют поверхность ДГ, при переходе через которую компонента  $l_z = \mathbf{1} \cdot \mathbf{e}$  вектора антиферромагнетизма меняет знак. На рис. 1 представлены фрагменты таких поверхностей для различных антиферромагнитных конфигураций.

Очевидно, что если полный заряд системы вихрей,  $\sum_k \nu_k$ , равен нулю, то вдали от нее поверхность ДГ плоская. Если же он отличен от нуля, то форма

ДГ близка к поверхности, образованной вращением кривой  $\xi^* = (\sum_k \nu_k) \ln \eta$  вокруг оси  $\xi^*$ .

В модели легкоосного АФМ поверхность ДГ асимптотически простирается на бесконечность вдоль оси вихря, стягиваясь по экспоненциальному закону. На самом деле область применимости этого результата определяется ограничениями в использовании континуального подхода феноменологической теории антиферромагнетизма. При этом естественным ограничением диаметра антиферромагнитного вихря является параметр  $a$  кристаллической решетки.

**2.** Следующей локализованной конфигурацией, существование которой допускает модель легкоосного АФМ, является семейство вихрей, движущихся с постоянной скоростью по поверхности 180-градусной ДГ.

Для определения данной структуры зададим граничные условия, потребовав, чтобы при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  выполнялись равенства  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$ ,  $\partial\theta/\partial\zeta = 0$ , а производная  $\partial\psi/\partial\zeta$  была ограничена. Как и в предыдущем случае, решение ищем в виде (7), полагая, что функции  $u(\rho, t)$  и  $\psi(\rho, t)$  удовлетворяют уравнениям (9) и дополнительным условиям (10).

Простейшим солитонным решением уравнений (9), (10), соответствующим заданным граничным условиям, является плоская 180-градусная ДГ:

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}(e^u), \quad u = (\zeta - \zeta_0)/\delta, \quad (19)$$

$$\varphi = \omega_H t + \psi_0,$$

где  $\zeta_0, \psi_0$  — константы интегрирования.

Трехмерную многосолитонную конфигурацию, будем искать в виде ДГ (19) с модулированными в пространстве координатой  $\zeta_0$  и азимутальным углом  $\psi_0$ , полагая

$$u(\rho, t) = \frac{1}{\delta} [\zeta - \zeta_0(\xi^*, \eta)], \quad (20)$$

$$\psi_0 = \psi_0(\xi^*, \eta).$$

Подставив выражения (20) в (9) находим, что искомые функции  $\zeta_0$  и  $\psi_0$  должны удовлетворять уравнениям

$$\sin \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}} \right) \psi_0(\xi^*, \eta) = 0, \quad (21)$$

$$\sin \theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^{*2}} \right) \zeta_0(\xi^*, \eta) = 0.$$

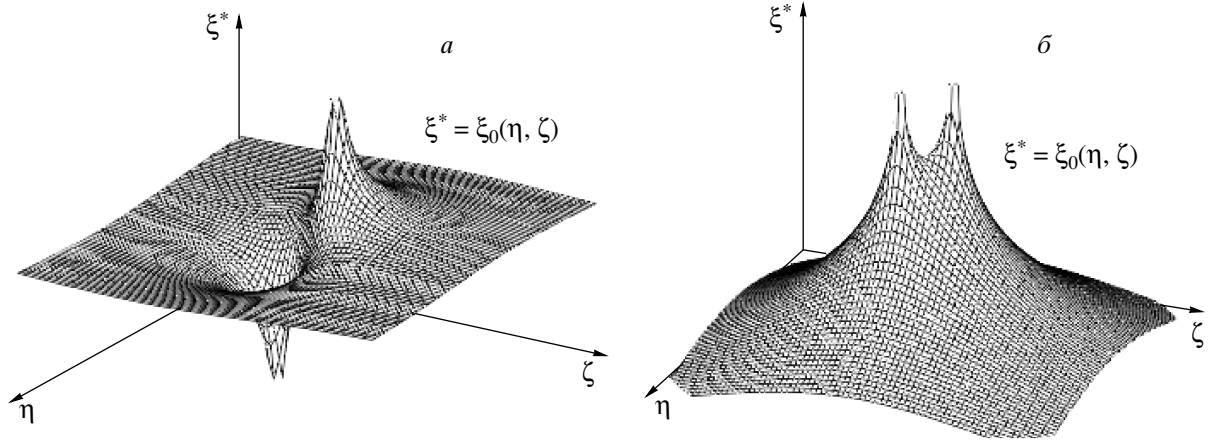


Рис. 1. Изображение поверхности ДГ АФМ с двумя вихрями при а) суммарном топологическом заряде вихрей, равном нулю ( $\nu_1 = -\nu_2$ ) и б) суммарном заряде, отличном от нуля ( $\nu_1 = \nu_2 < 0$ )

Дополнительные условия (10) для этих величин принимают вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi^*}\right)^2 = \\ & = \delta^2 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \eta}\right)^2 + \delta^2 \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi^*}\right)^2, \quad (22) \\ & \frac{\partial \psi_0}{\partial \eta} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi^*} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \xi^*} = 0. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, система уравнений и дополнительных условий (21), (22) имеет решение, описывающее семейство вихрей. Однако эти вихри совершают совместное движение с постоянной скоростью вдоль поверхности покоящейся ДГ.

Выражение, описывающее данную конфигурацию, имеет вид

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{\theta(\rho, t)}{2} &= \exp \left( \pm \frac{\zeta - \zeta_0(\xi^*, \eta)}{\delta} \right), \\ \varphi(\rho, r) &= \sum_k \nu_k \arctg \left( \frac{(\eta - \eta_k) \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\xi - vt - \xi_k} \right) + \quad (23) \\ &+ \omega_H t + C_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_0(\xi^*, \eta) &= \\ &= \delta \sum_k^N \nu_k \ln \left( \frac{1}{\delta} \sqrt{(\eta - \eta_k)^2 + \frac{(\xi - vt - \xi_k)^2}{1 - v^2/c^2}} \right) + C_1. \end{aligned}$$

Точки пространства, где выполняется условие  $\zeta = \zeta_0(\xi^*, \eta)$ , формируют поверхность ДГ, при переходе через которую компонента  $l_z = \mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_z$  вектора антиферромагнетизма меняет знак. На рис. 2а

изображен фрагмент такой поверхности, содержащей движущийся с постоянной скоростью антиферромагнитный вихрь. На рис. 2б представлены изолинии, образованные сечением вихря плоскостями, перпендикулярными его оси. Рисунок 2 иллюстрирует лоренцевское преобразование структуры вихря, вызванное его движением: линейные размеры вихря в направлении движения сокращаются в  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  раз.

3. Располагая вихри в пространстве определенным образом, можно получить различные антиферромагнитные конфигурации. Приведем две из них, которые определяются элементарными функциями.

Например, если вихри (23) с одинаковыми топологическими зарядами  $\nu_n = \nu$  расположить в виде периодической цепочки вдоль оси  $\eta$ , то распределение угла  $\varphi$  можно представить в виде

$$\varphi(\rho, t) = \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arctg \left( \frac{\eta - dn}{\xi^*} \right) + \omega_H t + C_2, \quad (24)$$

где  $d$  — период распределения вихрей. Результат суммирования этого ряда выражается через элементарные функции [6]:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, t) &= \\ &= \nu \arctg \left[ \text{tg} \left( \frac{\pi \eta}{d} \right) \text{cth} \left( \frac{\pi \xi^*}{d} \right) \right] + \omega_H t + C_2. \quad (25) \end{aligned}$$

На основании выражения для функции  $\varphi(\rho, t)$  находим сопряженную к ней функцию  $u(\rho, t)$ , после чего полярный угол вектора антиферромагнетизма можно записать в виде

$$\text{tg} \frac{\theta(\rho, t)}{2} = \exp \left[ \pm \frac{\zeta - \zeta_0(\xi^*, \eta)}{\delta} \right], \quad (26)$$

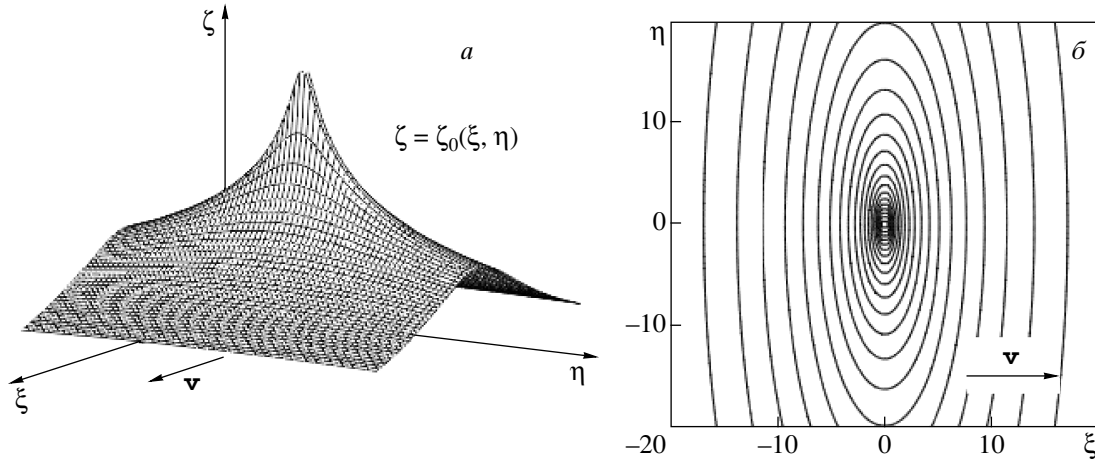


Рис. 2. Изображение поверхности ДГ АФМ с одним вихрем, движущимся с постоянной скоростью  $v$  параллельно оси  $\xi$  (а) и изолинии, образованные сечением этой поверхности плоскостями, перпендикулярными оси  $\zeta$  (б). Отношение  $v^2/c^2 = 0.9$

где

$$\zeta_0(\xi^*, \eta) = \delta \frac{\nu}{2} \ln \left[ \text{sh}^2 \left( \frac{\pi \xi^*}{d} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi \eta}{d} \right) \right] + C_1.$$

Поступая аналогичным образом, можно показать, что конфигурация вектора антиферромагнетизма для цепочки вихрей с чередующимся знаком топологического заряда определяется выражениями

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{\theta(\rho, t)}{2} &= \exp \left[ \pm \frac{\zeta - \zeta_0(\xi^*, \eta)}{\delta} \right], \\ \varphi(\rho, t) &= \nu \arctg \left[ \frac{\sin(\pi \eta / d)}{\text{sh}(\pi \xi^* / d)} \right] + \omega_H t + C_2, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\zeta_0(\xi^*, \eta) = \delta \frac{\nu}{2} \ln \left[ \frac{\text{ch}(\pi \xi^* / d) - \cos(\pi \eta / d)}{\text{ch}(\pi \xi^* / d) + \cos(\pi \eta / d)} \right] + C_1.$$

Не будем останавливаться на анализе распределения вектора антиферромагнетизма для указанных конфигураций, приведем лишь изображения поверхностей, разделяющих домены с различными знаками компоненты  $l_z$  вектора антиферромагнетизма (рис. 3). Как видно на рис. 3б, вдали от цепочки вихрей с чередующимися знаками топологического заряда поверхность ДГ является плоской. Если же заряды одинаковы, то вдали от цепочки вихрей ДГ представляет собой два плоских участка, ориентированных друг относительно друга под некоторым углом  $\chi$  (рис. 3а). Величина этого угла зависит от топологического заряда  $\nu$ , периода  $d$  вихрей и определяется выражением

$$\chi = \pi - 2 \arctg \frac{\pi \nu \delta}{d}.$$

4. Определенный интерес представляет вопрос о преобразовании полученных конфигураций при переходе к модели изотропного АФМ.

Конфигурацию, соответствующую семейству вихрей в изотропном антиферромагнетике, без проведения дополнительных вычислений можно получить из соотношений (18), (23), (26), (27) путем предельного перехода  $\beta_1 \rightarrow 0$  ( $\delta \rightarrow \infty$ ).

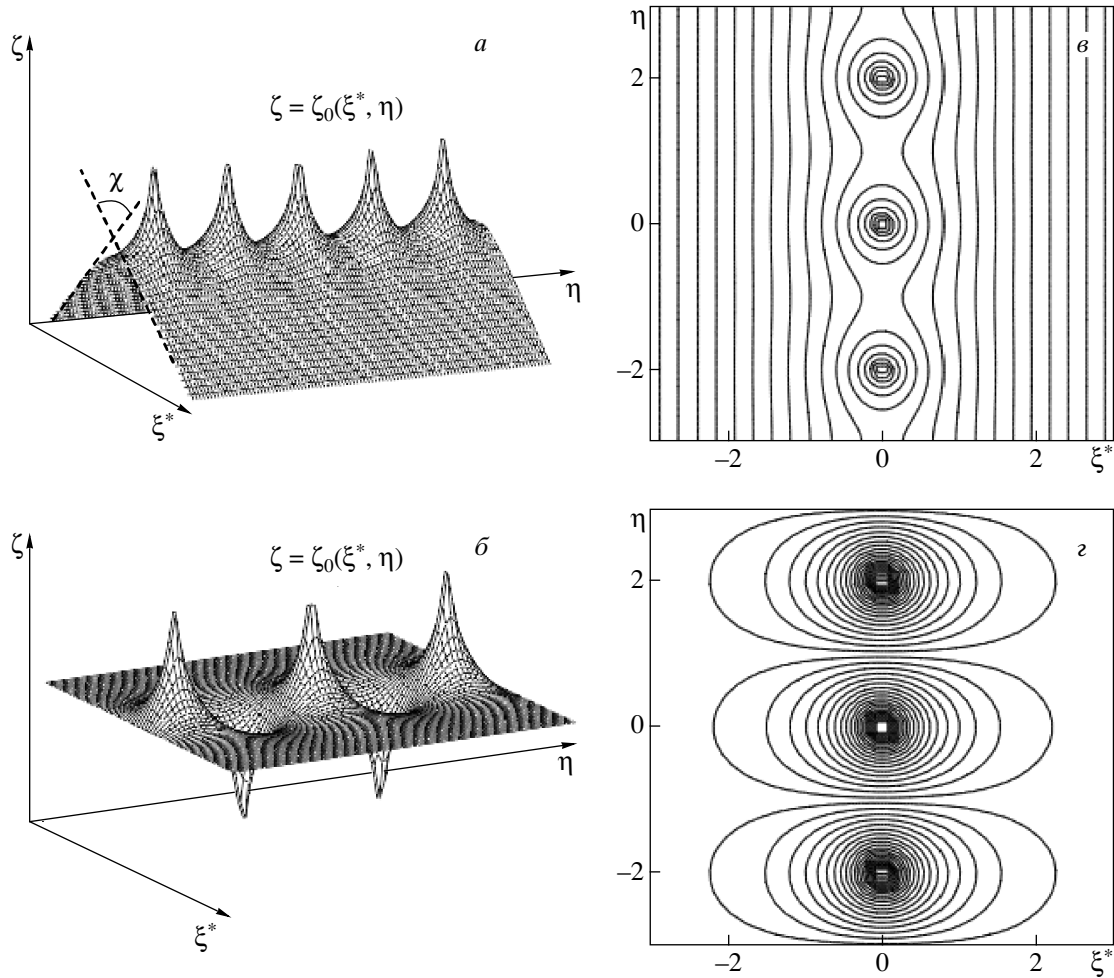
Так, для АФМ, структура которого описывается выражениями (23), в результате предельного перехода получим

$$\begin{aligned} \text{tg} \frac{\theta(\rho, t)}{2} &= \prod_k \left( q \sqrt{(\eta - \eta_k)^2 + (\xi^* - \xi_k^*)^2} \right)^{\nu_k}, \\ \varphi(\rho, t) &= \sum_k \nu_k \arctg \left( \frac{\eta - \eta_k}{\xi^* - \xi_k^*} \right) + \omega_H t + C_2, \end{aligned} \quad (28)$$

где  $q$  — произвольная постоянная с размерностью в обратных единицах длины.

Соотношения (28) определяют конфигурацию с двумерной модуляцией вектора антиферромагнетизма в плоскости  $\xi\eta$ . В статическом случае эта структура полностью совпадает с семейством солитонов Белавина–Полякова [1] и может рассматриваться как частный случай солитонных конфигураций анизотропных систем типа «легкая ось».

Выражения (25), (26), описывающие цепочку вихрей с одинаковыми зарядами, при переходе к изо-



**Рис. 3.** Изображение поверхностей ДГ АФМ с цепочками расположенных периодически вдоль оси  $\eta$  вихрей с одинаковыми (а) и чередующимися (б) знаками топологического заряда (структуры описываются соответственно формулами (27), (28) и (29)), а также изолинии (соответственно в и з), образованные сечениями этих поверхностей плоскостями, перпендикулярными оси  $\zeta$

тропному АФМ преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta(\boldsymbol{\rho}, t)}{2} &= \tilde{C}_1 \left[ \operatorname{sh}^2 \left( \frac{\pi \xi^*}{d} \right) + \sin^2 \theta \left( \frac{\pi \eta}{d} \right) \right]^{\nu/2}, \\ \varphi(\boldsymbol{\rho}, t) &= \nu \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi \eta}{d} \right) \operatorname{cth} \left( \frac{\pi \xi^*}{d} \right) \right] + \\ &+ \omega_H t + C_2, \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\tilde{C}_1, C_2$  — произвольные константы.

Для цепочки вихрей с чередующимися знаками топологического заряда распределение вектора антиферромагнетизма в изотропной системе запишется как

$$\operatorname{tg} \frac{\theta(\boldsymbol{\rho}, t)}{2} = \tilde{C}_1 \left( \frac{\operatorname{ch}(\pi \xi^*/d) - \cos(\pi \eta/d)}{\operatorname{ch}(\pi \xi^*/d) + \cos(\pi \eta/d)} \right)^{\nu/2}, \quad (30)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\rho}, t) = \nu \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin(\pi \eta/d)}{\operatorname{sh}(\pi \xi^*/d)} \right) + \omega_H t + C_2.$$

Из соотношений (28)–(30) следует, что вихри в изотропной модели имеют двумерную структуру и принципиально отличаются от вихрей в АФМ с легкоосной анизотропией. Из качественного анализа полученных результатов следует, что включение в рассмотрение легкоосной анизотропии модифицирует двумерное распределение вектора антиферромагнетизма вихревых структур, свойственное изотропной модели, и вызывает их модуляцию в третьем направлении.



5. Возвращаясь к вопросу о величине топологического заряда, отметим, что в работе [3] говорится о возможности существования вихрей в АФМ с полуцелыми значениями  $\nu_k = n_k + 1/2$ , где  $n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . При таких  $\nu_k$  должна существовать геометрическая граница, разделяющая области с  $\mathbf{l}$  и  $-\mathbf{l}$ . Ввиду полной эквивалентности состояний АФМ с  $\mathbf{l}$  и  $-\mathbf{l}$ , считается, что неоднозначность вектора  $\mathbf{l}$  не связана с каким-либо разрывом спиновой плотности и демонстрирует возможность существования особых неоднородных распределений векторов  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . Это положение справедливо в рамках макроскопической теории, которая основывается на требовании неразличимости магнитных подрешеток  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$  [5]. Вместе с тем, как будет показано в следующем пункте, макроскопическое континуальное приближение не является самодостаточным. Например, при определении энергетических характеристик вихревой структуры приходится накладывать ограничения на размеры области интегрирования и использовать для этого параметр кристаллической ячейки. В таком случае утверждение о неразличимости магнитных подрешеток становится некорректным. Кроме того, хотя состояния с  $\mathbf{l}$  и  $-\mathbf{l}$  эквивалентны друг другу в энергетическом плане и по отношению к внешним полям, может оказаться, что эта эквивалентность нарушается на берегах геометрической границы, где имеется контакт между областями с  $\mathbf{l}$  и  $-\mathbf{l}$ , и появляется возможность возникновения слоя с ферромагнитным типом связи.

Обсуждение этого вопроса выходит за рамки предпринятого исследования. Подчеркнем лишь, что конфигурация солитонов с целым топологическим зарядом отвечает условию неразрывности как для вектора антиферромагнетизма, так и векторов намагниченности подрешеток,  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$ . Поэтому в дальнейшем будем говорить об антиферромагнитных конфигурациях, для которых  $\nu_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

6. Рассмотрим влияние диссипативных свойств среды на динамику вихревых образований. Диссипацию учтем посредством диссипативной функции, плотность которой в простейшем виде (эквивалентном форме Гильберта–Ландау для ферромагнетиков) для угловых переменных пропорциональна величине

$$\frac{1}{2\tau} \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \sin^2 \theta \right],$$

где  $\tau$  — феноменологический параметр, характеризующий время релаксации системы.

С учетом диссипативных слагаемых уравнения движения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}(\dot{\varphi} - \omega_H) \sin^2 \theta - \frac{1}{\tau} \dot{\varphi} \sin^2 \theta + \\ + c^2 \operatorname{div} [(\nabla \varphi) \sin^2 \theta] = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{1}{\tau} \dot{\theta} - c^2 \nabla^2 \theta + [\omega_0^2 + c^2 (\nabla \varphi)^2 - \\ - (\dot{\varphi} - \omega_H)^2] \sin \theta \cos \theta = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Для простоты исключим из рассмотрения магнитное поле, полагая  $\omega_H = 0$ , и рассмотрим движение семейства вихрей по поверхности покоящейся ДГ с учетом диссипации в нерелятивистском пределе  $v^2/c^2 \rightarrow 0$ . Нетрудно показать, что система уравнений (31) в этом случае имеет решение

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta(\boldsymbol{\rho}, t)}{2} = \exp \left( \pm \frac{\zeta - \zeta_0(\xi, \eta)}{\delta} \right), \\ \varphi(\boldsymbol{\rho}, t) = \sum_k \nu_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta - \eta_k}{\xi - \xi_k(t)} \right) + C_2, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\zeta_0(\xi, \eta) = \delta \sum_k \nu_k \ln \left( \frac{1}{\delta} \sqrt{(\eta - \eta_k)^2 + [\xi - \xi_k(t)]^2} \right) + C_1,$$

$\xi_k(t) = \xi_k(0) + v_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})$  — координата кора вихря,  $v_0$  — начальная скорость.

Таким образом, характер движения кора антиферромагнитного вихря аналогичен характеру движения материальной точки в диссипативной среде. Скорость движения убывает по экспоненциальному закону. За время движения вихри смещаются на расстояние  $v_0 \tau$ .

### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ ВИХРЕЙ. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВИХРЕВОГО СОСТОЯНИЯ

Перейдем к вопросу о взаимодействии антиферромагнитных вихрей (18), (23) и об устойчивости таких состояний. Для простоты рассмотрим конфигурацию (23) в статическом случае ( $v = 0, \omega_H = 0$ ).

Если в статическом случае для конфигурации (23) записать интеграл по объему от плотности энергии (1) для АФМ и провести интегрирование по переменной  $\zeta$ , то с учетом условия (22) получится следующий результат:

$$U = U_0 + \varepsilon \iint d\xi d\eta (\nabla_{\perp} \zeta_0)^2, \quad (33)$$

где

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \varepsilon = 8\sqrt{\alpha_1 \beta_1} M_0^2,$$



$\varepsilon$  — энергия, приходящаяся на единицу площади поверхности 180-градусной ДГ АФМ,  $U_0 = -2\beta_1 M_0^2 V + \varepsilon S$  — энергия АФМ с ДГ,  $S$  — площадь поперечного сечения образца АФМ в плоскости  $\xi\eta$ ; второе слагаемое в (33) представляет собой собственную энергию системы вихрей.

Интегрирование в плоскости  $\xi\eta$  проведем по круговому участку, содержащему семейство антиферромагнитных вихрей. Будем полагать, что центр круга находится внутри области сосредоточения коров антиферромагнитных вихрей, а его радиус  $R$  значительно превышает размеры этой области ( $R \gg |\xi_k|, |\eta_k|$ ). В дальнейшем необходимо перейти к пределу, устремив  $R$  к границам АФМ.

Путем интегрирования по частям и на основании теоремы Остроградского–Гаусса выражение (34) для энергии вихревой системы преобразуется к виду

$$U - U_0 = \varepsilon \oint dl (\zeta_0 \nabla_{\perp} \zeta_0)_n - \varepsilon \iint d\xi d\eta \zeta_0 \nabla_{\perp}^2 \zeta_0. \quad (34)$$

Первый интеграл в выражении (34) вычисляется по круговому контуру с большим радиусом  $R$ ,  $dl$  — элемент длины контура. Индекс « $n$ » обозначает, что в подынтегральном выражении берется проекция вектора  $\zeta_0 \nabla_{\perp} \zeta_0$  на нормаль к элементу длины контура.

Наблюдая за распределением вектора  $\mathbf{l}$  на больших расстояниях от вихревой структуры, заметим, что оно совпадает с распределением для одного вихря с зарядом, равным суммарному заряду системы. Действительно, с учетом условия  $R \gg |\xi_k|, |\eta_k|$  выражение (23) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta(\boldsymbol{\rho}, t)}{2} &= \exp \left( \pm \frac{\zeta - \zeta_0(\xi, \eta)}{\delta} \right), \\ \varphi(\boldsymbol{\rho}, t) &= \sum_k \nu_k \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta}{\xi} \right) + C_2, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\zeta_0(\xi, \eta) = \delta \sum_k \nu_k \ln \left( \frac{1}{\delta} \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \right) + C_1,$$

после чего данный интеграл легко вычисляется. Расчет второго интеграла в (34) также не вызывает затруднений, поскольку

$$\nabla_{\perp}^2 \zeta_0 = 2\pi \sum_k \nu_k \delta(\xi - \xi_k) \delta(\eta - \eta_k).$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} U - U_0 &= E \left( \sum_k \nu_k \right)^2 \ln \left( \frac{R}{\delta} \right) - \\ &\quad - E \sum_{i,k} \nu_i \nu_k \ln \left( \frac{R_{ik}}{\delta} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$E = 2\pi\delta^2\varepsilon, \quad R_{ik} = \sqrt{(\xi_i - \xi_k)^2 + (\eta_i - \eta_k)^2},$$

$R_{ik}$  — расстояние между осями вихрей.

При  $i \neq k$  второе слагаемое в (36) определяет энергию взаимодействия вихрей. Очевидно, что эта энергия не зависит от влияния остальных соседей. При этом сила взаимодействия имеет такой же вид, как и для точечных зарядов в двумерном случае:

$$\mathbf{F}_{ik} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_{ik}} = 2E\nu_i\nu_k \frac{\mathbf{R}_{ik}}{R_{ik}^2}. \quad (37)$$

Соответственно, если топологические заряды одного знака, вихри отталкиваются, если разного — притягиваются.

Выражение (36) для энергии системы вихрей показывает ограниченность континуального приближения макроскопической теории, согласно которому собственная энергия отдельного вихря является неограниченной величиной, поскольку  $R_{ik} = 0$  при  $i = k$ . Этим объясняются и стационарные конфигурации (18), (23), которые существуют, несмотря на взаимодействие между отдельными вихрями. Действительно, поскольку в континуальном приближении собственная энергия, равно как и эффективная масса вихрей, бесконечно велики, влияние конечных по величине взаимодействий между вихрями не может изменить их взаимного расположения.

Ситуация изменится, если на диаметр кора вихря наложить ограничения, определяемые периодом кристаллической структуры. Поэтому при записи  $R_{ii}$  в (36) будем полагать, что  $R_{ii} = aK$ , где  $K$  — некоторое целое число. Неопределенность, связанная с введением параметра  $K$  для материалов, у которых  $\delta/a \gg K$ , не имеет принципиального значения, поскольку приводит лишь к относительно малым поправкам энергии, не зависящим от размеров образца и расположения вихрей. Следовательно, параметр  $K$  вообще может быть выведен из рассмотрения.

Разделив энергию (36) системы на собственную энергию вихрей и энергию взаимодействия, запишем

$$\begin{aligned} U - U_0 &= E \left( \sum_k \nu_k \right)^2 \ln \left( \frac{R}{a} \right) - \\ &\quad - E \sum_{i,k} \nu_i \nu_k \ln \left( \frac{R_{ik}}{a} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Нетрудно заметить, что энергия семейства вихрей с нулевым суммарным зарядом всегда ограничена. Если суммарный топологический заряд системы отличен от нуля,  $\sum_k \nu_k \neq 0$ , то величина энергии вихрей определяется размерами АФМ и неограниченно возрастает при переходе  $R \rightarrow \infty$ , так же как энергия дисклинации в АФМ [5].

В заключение сравним потенциальную энергию  $U(\nu_1, \nu_2)$  пары вихрей с зарядами  $\nu_1, \nu_2$  и энергию  $U(\nu)$  одного вихря, заряд которого равен суммарному заряду  $\nu = \nu_1 + \nu_2$  этой пары. Как следует из соотношения (36), разность этих энергий составляет

$$\Delta U = U(\nu) - U(\nu_1, \nu_2) = 2E\nu_1\nu_2 \ln(R_{12}/a). \quad (39)$$

Этот результат указывает на неустойчивость вихря относительно распада на составляющие с элементарным зарядом. В то же время, если соседние вихри имеют заряд разного знака, с энергетической точки зрения выгодно их слияние.

Таким образом, в реальных физических системах устойчивое существование вихревых образований возможно лишь при искусственном зарождении и стабилизации. Например, в легкоосных ферромагнитных системах зарождение вихрей подобного типа возможно в окрестности цилиндрических ферромагнитных включений (dots) малого диаметра (значительно меньше параметра  $\delta$  толщины ДГ), находящихся в ферромагнитной среде, если между материалом включений и средой существует магнитное обменное взаимодействие.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что все рассмотренные конфигурации являются частным случаем распределения вектора антиферромагнетизма более общего вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta(\boldsymbol{\rho}, t)}{2} &= \exp \left( \pm \frac{\zeta - \zeta_0(u, v)}{\delta} \right), \\ \varphi(\boldsymbol{\rho}, t) &= \sum_k \nu_k \operatorname{arctg} \left( \frac{u - u_k}{v - v_k} \right) + \omega_H t + C_2, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\zeta_0(u, v) = \delta \sum_k \nu_k \ln \left( \sqrt{(u - u_k)^2 + (v - v_k)^2} \right) + C_1,$$

а  $u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)$  — любые сопряженные гармонические функции,  $u_k, v_k$  — произвольные постоянные. При этом выражения (16) являются также и решениями уравнений Ландау–Лифшица в модели ФМ с легкоосной анизотропией.

Авторы считают своим приятным долгом выразить признательность В. Г. Барьяхтару и Ю. И. Горобцу за поддержку и плодотворные обсуждения представленного материала.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Белавин, А. М. Поляков, Письма В ЖЭТФ **22**, 503 (1975).
2. Г. Е. Ходенков, ФММ **54**, 644 (1982).
3. Н. Е. Khodenkov, Phys. Stat. Sol. (b) **127**, K121 (1985).
4. И. В. Барьяхтар, Б. А. Иванов, ФНТ **5**, 759 (1979).
5. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
6. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, Москва (1981).