

ВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК ТОНКИХ ПЛЕНОК СВЕРХПРОВОДНИКОВ СО СМЕШАННОЙ d - И s -СИММЕТРИЕЙ

*В. В. Курин**, *А. А. Уткин***

*Институт физики микроструктур Российской академия наук
603600, Нижний Новгород, ГСП-105, Россия*

Поступила в редакцию 8 сентября 2004 г.

Проведено теоретическое исследование процессов генерации третьей гармоники при отражении электромагнитного излучения от тонкой пленки сверхпроводника со смешанным d - и s -параметром порядка. В рамках теории Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников с двухкомпонентным параметром порядка вычислена зависимость интенсивности третьей гармоники от температуры и амплитуды падающей волны и проанализировано ее поведение в окрестности переходов между фазами с различной симметрией. В частности, показано, что в окрестности температуры, соответствующей фазовому переходу $d \leftrightarrow d + s$, интенсивность третьей гармоники значительно возрастает и является неаналитичной по амплитуде падающей волны, в то время как при переходе $d \leftrightarrow d + is$ особенность нелинейного отклика отсутствует. Линейный коэффициент отражения оказывается практически нечувствительным к этим фазовым переходам.

PACS: 74.25.Nf

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что купратные сверхпроводники (ВТСП), обладающие температурой сверхпроводящего перехода на порядок большей, чем в обычных сверхпроводниках, были открыты восемнадцать лет назад, вопрос о симметрии сверхпроводящего параметра порядка в них до сих пор остается в центре внимания исследователей. К настоящему моменту считается почти общепринятым, что в ВТСП доминирует параметр порядка с d -симметрией [1, 2]. При этом некоторые эксперименты по рамановскому рассеянию [3], измерению поверхностного импеданса [4], туннелированию между ВТСП и нормальным сверхпроводником [5], фотоэмиссии с угловым разрешением [1, 6] свидетельствуют о том, что наряду с параметром порядка с d -симметрией, присутствует также и s -компонента параметра порядка.

Концепция смешанной $s + e^{i\theta}d$ -симметрии параметра порядка для высокотемпературных сверхпроводников, по-видимому, впервые обсуждалась в ра-

ботах [7, 8] и применялась, например, для анализа экспериментальных данных по ядерному магнитному резонансу в YBCO [9] и интерпретации джозефсоновских измерений в ВТСП [10]. Многие микроскопические модели, предлагаемые для описания механизма ВТСП в купратных материалах, приводят к заключению о возможности смешанной симметрии параметра порядка в высокотемпературных сверхпроводниках. На феноменологическом уровне сверхпроводники со смешанным параметром порядка могут быть описаны теорией Гинзбурга–Ландау, включающей два уравнения для взаимодействующих параметров порядка и уравнения Максвелла, дополненные выражением для сверхтока, состоящим не только из отдельных токов s - и d -компонент, но также и интерференционной компоненты [11–13].

В данной статье мы хотим обратить внимание на нетривиальные электродинамические свойства такого рода сверхпроводников, в частности, на необычный нелинейный отклик, обусловленный наличием интерференционного тока. На примере расчета генерации третьей гармоники падающего излучения в тонкой сверхпроводниковой пленке с помощью тео-

*E-mail: kurin@ipm.sci-nnov.ru

**E-mail: tolik@ipm.sci-nnov.ru

рии Гинзбурга–Ландау для двухкомпонентного параметра порядка будет показано, что нелинейный отклик чрезвычайно чувствителен к возможным фазовым переходам между сверхпроводящими фазами с различной симметрией и может значительно возрастать в окрестности фазовых переходов. В частности, мы покажем, что в окрестности температуры, соответствующей фазовому переходу $d \rightleftharpoons d + s$, интенсивность третьей гармоники значительно возрастает и является неаналитичной по амплитуде падающей волны, в то время как при переходе $d \rightleftharpoons d + is$ особенность нелинейного отклика отсутствует. Линейный же коэффициент отражения оказывается практически нечувствительным к этим фазовым переходам. Таким образом, экспериментальное исследование нелинейных характеристик сверхпроводников оказывается интересным инструментом исследования переходов между фазами с различной симметрией параметра порядка.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 рассмотрена электродинамическая часть задачи, при этом в предположении слабой нелинейности и локальности связи между векторным потенциалом и током в сверхпроводнике решена задача о падении плоской волны на тонкую сверхпроводящую пленку. Найдена связь амплитуды падающей волны с амплитудами отраженных и прошедших волн на частотах падающей волны и ее третьей гармоники. В третьем разделе с помощью решения уравнений Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников со смешанным s -, d -параметром порядка найдены выражения, связывающие электрический ток с векторным потенциалом при различных температурах, соответствующих фазам с различной симметрией параметра порядка. В разд. 4 анализируются полученные результаты и обсуждаются сравнительные возможности линейной и нелинейной электродинамической диагностики свойств симметрии параметра порядка в сверхпроводниках.

2. ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ СВЕРХПРОВОДНИКА

Рассмотрим задачу о нормальном падении линейно поляризованной электромагнитной волны с круговой частотой ω и амплитудой электрического поля \mathbf{E}_{inc} на тонкую однородную сверхпроводящую пленку толщиной d (рис. 1, 2). Нам нужно найти распределение электромагнитного поля как вне, так и внутри пленки. Запишем уравнения Максвелла:

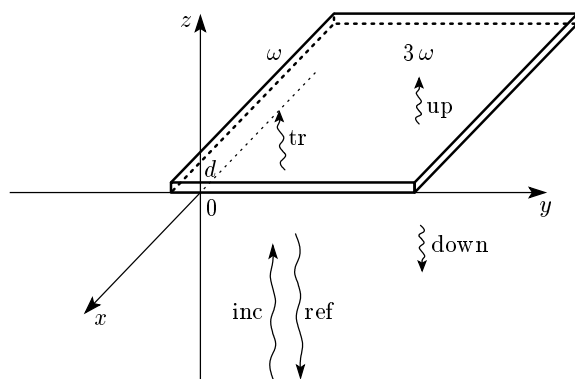


Рис. 1. Падение электромагнитной волны на сверхпроводящую пленку. Трехмерная проекция. Показаны падающая, отраженная и прошедшая волны с частотой ω , переизлученные вверх и вниз волны с утроенной частотой 3ω . Нижняя поверхность — с $z = d$. Падающая волна распространяется вдоль оси z . Оси x и y в дальнейшем привязываются к кристаллографическим осям кристалла

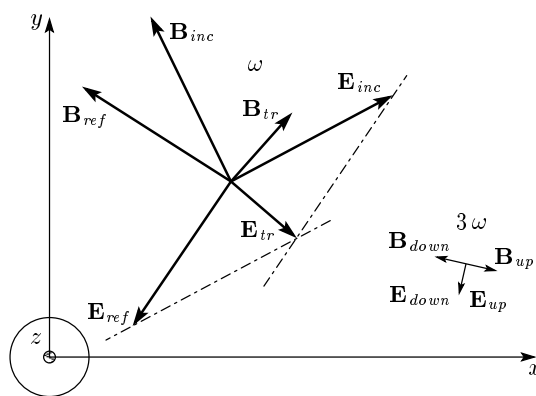


Рис. 2. Падение электромагнитной волны на сверхпроводящую пленку. Вид сверху. Показаны векторы электрического и магнитного полей в падающей, отраженной и прошедшей волнах с частотой ω , а также поля в переизлученной вверх и вниз волнах с утроенной частотой. Все поля нарисованы для одного и того же момента времени; в случае волн, распространяющихся в нижнем полупространстве, поля нарисованы для $z = 0$, в случае волн, распространяющихся в верхнем полупространстве, — для $z = d$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля, ρ и \mathbf{j} — плотности заряда и тока. Введем обычным образом векторный и скалярный потенциалы \mathbf{A} и ϕ так, что $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, а $\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\phi$. Подставляя эти выражения в систему уравнений Максвелла, а также выбирая калибровку $\text{div } \mathbf{A} = 0$, для \mathbf{A} получим уравнение

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \quad (1)$$

Учитывая, что в нашей задаче из-за поперечности электромагнитных волн справедливо выражение $\text{div } \mathbf{E} = 0$, получим, что для ϕ выполнено уравнение Лапласа, которое в данной задаче имеет решение $\phi = \text{const}$. Таким образом, система уравнений Максвелла свелась к одному уравнению для \mathbf{A} .

Чтобы замкнуть это уравнение, следует найти, как плотность тока \mathbf{j} зависит от электромагнитного поля. Назовем эту зависимость материальной связью. В сверхпроводнике плотность тока есть явная функция от векторного потенциала и параметра порядка. В случае лондоновского сверхпроводника эта функция линейна и локальна по \mathbf{A} . Мы предполагаем, что параметр порядка имеет две компоненты ψ_d и ψ_s , связанные, соответственно, с d - и s -упорядочениями. Тогда материальную связь в данной калибровке можно записать как

$$\mathbf{j} = \overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d, \psi_s)\mathbf{A}, \quad (2)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{f}$ — некий тензор второго ранга. Хорошо известно, что сверхпроводящий параметр порядка подавляется магнитным полем. В нашем случае этот эффект ведет к тому, что ψ_d и ψ_s зависят от векторного потенциала $\psi_{d,s} = \psi_{d,s}(\mathbf{A})$. Поэтому после подстановки $\psi_{d,s}(\mathbf{A})$ в (2) зависимость $\mathbf{j}(\mathbf{A})$ будет нелинейной. При этом и уравнение (1) будет нелинейным по \mathbf{A} , что ведет к эффекту генерации гармоник в нашей задаче. Будем считать, что нелинейность слаба в том смысле, что изменения параметра порядка, обусловленные влиянием магнитного поля, невелики по сравнению с характерным значением самого параметра порядка, реализующегося в отсутствие магнитного поля. Тогда зависимости $\psi_{d,s}(\mathbf{A})$ представимы в виде $\psi_{d,s} = \psi_{d,s}^0 + G_{d,s}(\mathbf{A})$, где $\psi_{d,s}^0$ — значения компонент параметра порядка без магнитного поля, а $G_{d,s}(\mathbf{A})$ — отклонения, вызываемые магнитным полем, причем $|G_{d,s}(\mathbf{A})| \ll |\psi_{d,s}^0|$. Подставляя эти соотношения в равенство (2) и раскладывая функцию $\overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d, \psi_s)$ в ряд вблизи точки (ψ_d^0, ψ_s^0) , можно получить для плотности тока в пленке

$$\mathbf{j} = -c(4\pi)^{-1}\overset{\leftrightarrow}{1}/\lambda^2\mathbf{A} + \overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A})\mathbf{A}, \quad (3)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{1}/\lambda^2 = -4\pi c^{-1}\overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d^0, \psi_s^0)$ — тензор, связывающий \mathbf{j} и \mathbf{A} в линейном приближении,

$$\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A}) = \frac{\partial\overset{\leftrightarrow}{f}}{\partial\psi_d}(\psi_d^0, \psi_s^0)G_d(\mathbf{A}) + \frac{\partial\overset{\leftrightarrow}{f}}{\partial\psi_s}(\psi_d^0, \psi_s^0)G_s(\mathbf{A}) + \text{с.с.}$$

Для упрощения выкладок в этом разделе будем полагать, что тензор $\overset{\leftrightarrow}{1}/\lambda^2$ представим в виде $1/\lambda^2 \times \delta_{ik}$, где δ_{ik} — единичный тензор (позже мы найдем $\overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d, \psi_s)$ и увидим, когда это справедливо). Это значит, что \mathbf{j} и \mathbf{A} параллельны, если пренебречь в выражении (3) нелинейным по \mathbf{A} членом. Далее будем полагать величины $1/\lambda^2$ и $\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A})$ известными и рассмотрим уравнение (1) с выражением для плотности тока в пленке (3). С учетом того, что ток течет только по пленке, его можно записать в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \begin{cases} \frac{\mathbf{A}}{\lambda^2} - \frac{4\pi}{c}\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A})\mathbf{A}, & 0 \leq z \leq d, \\ 0, & z > d \text{ или } z < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Предположим, что толщина d пленки много меньше характерного масштаба изменения \mathbf{A} в ней. Тогда можно считать, что распределения электромагнитного поля и тока в пленке однородны по координате z . Учитывая то, что пленка бесконечна в плоскости xy , можно считать распределения тока и электромагнитного поля по пленке однородными. Заметим, что в ВТСП лондоновская глубина проникновения имеет величину около 2000 \AA , поэтому толщина пленки должна быть много меньше этой величины. Фактически, в экспериментах толщины пленок имеют такой же порядок величины. Для оценок мы будем полагать толщину пленки 1000 \AA , т.е. в два раза меньше лондоновской глубины проникновения. В этом случае приближение однородного тока, конечно, нельзя считать полностью удовлетворительным, однако, как показывают расчеты, ошибка будет невелика, кроме того, она не может повлиять на качественные эффекты, которые мы хотим предсказать. Поэтому мы будем пользоваться приближением малой толщины пленки. Тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = d\delta(z)\left\{\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{A} - \frac{4\pi}{c}\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A})\mathbf{A}\right\}. \quad (5)$$

Вспомним, что мы полагаем нелинейные эффекты слабыми. Это значит, что

$$\left|\frac{4\pi}{c}\overset{\leftrightarrow}{G}(\mathbf{A})\mathbf{A}\right| \ll \left|\frac{\mathbf{A}}{\lambda^2}\right|.$$

Тогда можно решать уравнение (5) с использованием теории возмущений. Будем искать решение в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}^{(1)}$, где \mathbf{A}_l — решение уравнения (5) в пренебрежении нелинейным членом, $\mathbf{A}^{(1)}$ — поправка к нему, определяемая нелинейным членом в уравнении. Фактически, нулевое приближение соответствует линейной задаче отражения электромагнитной волны от пленки, а первое приближение соответствует задаче о генерации гармоник, а также о влиянии нелинейных эффектов на решение в линейном приближении.

Рассмотрим вначале нулевой порядок теории возмущений. Из (5) следует, что уравнение для \mathbf{A}_l имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_l}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_l}{\partial t^2} = d\delta(z) \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A}_l. \quad (6)$$

Это уравнение описывает отражение падающей волны от пленки. Решая его, получаем, что коэффициент отражения равен

$$R_\omega = -\frac{icd/2\omega\lambda^2}{1 + icd/2\omega\lambda^2},$$

а коэффициент прохождения —

$$T_\omega = \frac{1}{1 + icd/2\omega\lambda^2}.$$

Оценим величину $cd/\omega\lambda^2$, входящую в коэффициенты отражения и прохождения. Если частота волны $\omega \sim 10^9$ Гц, то в случае пленки из ВТСП, у которых $\lambda \sim 2 \cdot 10^{-5}$ см, даже при толщине пленки порядка 10^{-5} см величина $cd/\omega\lambda^2$ будет порядка 10^5 . Поэтому следует считать, что $cd/\omega\lambda^2 \gg 1$. В этом случае $|1 + R_l| \ll 1$, а $|T| \ll 1$, т. е. волна почти полностью отразится. Тогда можно с хорошей степенью точности считать амплитуду плотности тока в пленке \mathbf{j}_0 связанной только с \mathbf{E}_{inc} простым соотношением $\mathbf{j}_0 = c\mathbf{E}_{inc}/2\pi d$. Вследствие этого линейный ток в пленке $\mathbf{j}_l = \mathbf{j}_0 \sin \omega t$ при дальнейшем решении следует считать заданным (приближение заданного тока), т. е.

$$\mathbf{j}_l = \mathbf{j}_0 \sin \omega t = \frac{c}{2\pi d} \mathbf{E}_{inc} \sin \omega t. \quad (7)$$

Для дальнейшего расчета в первом порядке теории возмущений нам необходимо знать $\mathbf{A}_l(z = 0)$, поскольку именно \mathbf{A} входит в нелинейную часть уравнения (5). Наиболее просто эту величину найти из (3) в линейном приближении. Тогда

$$\mathbf{A}_l(z = 0) = -\frac{4\pi}{c} \lambda^2 \mathbf{j}_l, \quad (8)$$

а линейный ток \mathbf{j}_l непосредственно связан с известной величиной \mathbf{E}_{inc} .

Рассмотрим теперь первый порядок теории возмущений. Из равенства (5) получаем следующее уравнение для $\mathbf{A}^{(1)}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}^{(1)}}{\partial t^2} = d\delta(z) \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A}^{(1)} - \frac{4\pi}{c} \overleftrightarrow{G}(\mathbf{A}_l) \mathbf{A}_l \right\}. \quad (9)$$

Фактически, это уравнение описывает излучение электромагнитных волн сторонним током

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e &= \overleftrightarrow{G}(\mathbf{A}_l) \mathbf{A}_l|_{z=0} = \\ &= -\overleftrightarrow{G} \left(-\frac{4\pi}{c} \lambda^2 \mathbf{j}_l \right) \times \frac{4\pi}{c} \lambda^2 \mathbf{j}_l, \quad (10) \end{aligned}$$

текущим по пленке. Рассмотрим частотный спектр этого излучения. Из симметрии задачи ясно, что пленка излучает в обе стороны одинаково, поэтому спектры излучений, направленных вверх и вниз, совпадают. Поскольку $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{A}) \mathbf{A}$ является векторной функцией векторного аргумента, а постоянного магнитного поля в задаче нет, из симметричных соображений ясно, что выражение для стороннего тока

$$-\frac{4\pi}{c} \overleftrightarrow{G} \left(-\frac{2\lambda^2}{d} \mathbf{E}_{inc} \sin \omega t \right) \times \mathbf{E}_{inc} \sin \omega t$$

может содержать только нечетные гармоники частоты ω . Поэтому и спектр излучения, порождаемого этим током, может содержать только такие гармоники. Нас будет интересовать излучение на третьей гармонике, поскольку в рамках теории возмущений оно будет много больше, чем излучение на более высоких гармониках. Амплитуду излученной волны на третьей гармонике будем называть нелинейным откликом. Чтобы выделить из уравнения (9) часть, описывающую процесс на частоте 3ω , найдем уравнение для $\mathbf{A}_{3\omega}^{(1)}$ — коэффициента перед $\sin 3\omega t$ в ряду Фурье для $\mathbf{A}^{(1)}$. Для этого следует умножить уравнение (9) на $\pi^{-1} \omega \sin 3\omega t$ и проинтегрировать по периоду падающей волны $2\pi\omega^{-1}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{3\omega}^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{(3\omega)^2}{c^2} \mathbf{A}_{3\omega}^{(1)} &= \\ &= d\delta(z) \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{A}_{3\omega}^{(1)} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{e3\omega} \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{j}_e(t) \sin 3\omega t dt. \quad (12)$$

Решая это уравнение, получим амплитуду векторного потенциала в излученной волне в виде

$$\mathbf{A}_{3\omega}^{rad} = R_{3\omega} 4\pi c^{-1} \lambda^2 \mathbf{j}_{e3\omega},$$

где

$$R_{3\omega} = -\frac{icd/2(3\omega)\lambda^2}{1 + icd/2(3\omega)\lambda^2}$$

— коэффициент отражения от пленки волны с частотой 3ω . Учитывая то, что $cd/\omega\lambda^2 \gg 1$, получим амплитуду электрического поля в нелинейном отклике:

$$\mathbf{E}_{3\omega}^{rad} = -i \frac{12\pi\omega\lambda^2}{c^2} \mathbf{j}_{e3\omega}. \quad (13)$$

Именно этой формулой мы будем пользоваться в дальнейшем, поскольку обычно будем находить именно $\mathbf{j}_{e3\omega}$, однако для анализа ответа сейчас мы продвинемся немного дальше. Из формул (10) и (12) ясно, что величина $\mathbf{j}_{e3\omega}$ представима в виде

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \overleftarrow{h}(\lambda^2, \mathbf{j}_0) \mathbf{j}_0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \overleftarrow{h}(\lambda^2, \mathbf{j}_0) = & -\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{4\pi\lambda^2}{c} \times \\ & \times \overleftarrow{G} \left(-\frac{4\pi}{c} \lambda^2 \mathbf{j}_0 \sin \omega t \right) \sin \omega t \sin 3\omega t dt. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение для $\mathbf{j}_{e3\omega}$ в (13) и учитывая, что \mathbf{j}_0 и \mathbf{E}_{inc} связаны между собой соотношением (7), получим выражение для амплитуды нелинейного отклика через амплитуду падающей волны:

$$\mathbf{E}_{3\omega}^{rad} = -6i \overleftarrow{h}(\lambda^2, \mathbf{j}_0) \frac{\omega\lambda^2}{cd} \mathbf{E}_{inc}. \quad (15)$$

Проанализируем полученные ответы. Прежде всего ясно, что они легко обобщаются на случай, когда величина $\overleftarrow{1/\lambda^2}$ не представима в виде $(1/\lambda^2)\delta_{ik}$. Для этого необходимо в формулах (13)–(15) под λ^2 понимать тензор, обратный к $\overleftarrow{1/\lambda^2}$, и умножать его на вектор, стоящий справа от него. Далее, вспомним, что мы считаем нелинейность слабой, а это значит, что $\|\overleftarrow{h}\| \ll 1$, откуда сразу следует то, что нелинейный отклик много меньше линейного. Но есть еще и ослабление, связанное с почти полным отражением

падающей волны. Действительно, в ответе присутствует малый множитель $\omega\lambda^2/cd$, что связано с тем, что в нашей задаче происходит почти полное отражение падающей волны. Поскольку, по нашим оценкам, $\omega\lambda^2/cd$ имеет порядок 10^{-5} , а $\|\overleftarrow{h}\|$ не больше чем 10^{-1} , нелинейный отклик ослабляется как минимум на 6 порядков по сравнению с линейным.

Обсудим теперь этот результат с точки зрения дальнейших рассуждений. Формулы (13)–(15) позволяют, зная материальную связь в пленке, выразить амплитуду нелинейного отклика через амплитуду падающей волны. Иными словами, если мы знаем $\overleftarrow{1/\lambda^2}$ и $\overleftarrow{G}(\mathbf{A})$, то сразу найдем нелинейный отклик. Очевидно, полученные соотношения верны для любой материальной связи; единственное требование — материальную связь можно разложить на сумму линейной и нелинейной по \mathbf{A} частей. Поэтому прежде всего следует найти материальную связь в рамках нашей модели сверхпроводника. Затем из нее нужно найти сторонний ток \mathbf{j}_e и его фурье-образ $\mathbf{j}_{e3\omega}$, выраженные через линейный ток. После этого остается только воспользоваться формулой (15) для нелинейного отклика.

3. НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК СВЕРХПРОВОДНИКА СО СЛОЖНЫМ ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ПАРАМЕТРОМ ПОРЯДКА

В этом разделе мы найдем материальную связь в случае тонкой сверхпроводящей пленки с двухкомпонентным параметром порядка. Рассмотрим тонкую ВТСП-пленку с купратными слоями, параллельными ее поверхности. Используем для поиска материальной связи теорию Гинзбурга–Ландау. Будем полагать, что в пленке реализуется сложный двухкомпонентный параметр порядка: первая компонента, $\psi_d = f_d \exp(i\theta_d)$, связана с d -спариванием, а вторая компонента, $\psi_s = f_s \exp(i\theta_s)$, связана с s -спариванием. Известно [14], что кристаллическая решетка соединений типа ВТСП может обладать различными типами симметрии. В зависимости от способа приготовления, это могут быть группы симметрий D_{2h} , D_{4h} и другие. Будем рассматривать D_{4h} -симметрию, которая обычно реализуется при высокотемпературном отжиге образца. В этом случае можно записать свободную энергию Гинзбурга–Ландау в виде [11]

$$\begin{aligned}
F = & \int \{ a_d |\psi_d|^2 + b_2 |\psi_d|^4 + \gamma_d |\mathbf{\Pi} \psi_d|^2 + \\
& + a_s |\psi_s|^2 + b_1 |\psi_s|^4 + \gamma_s |\mathbf{\Pi} \psi_s|^2 + b_3 |\psi_s|^2 |\psi_d|^2 + \\
& + b_4 (\psi_s^{*2} \psi_d^2 + \psi_d^{*2} \psi_s^2) + \gamma_v ((\mathbf{\Pi}_y \psi_s)^* (\mathbf{\Pi}_y \psi_d) - \\
& - (\mathbf{\Pi}_x \psi_s)^* (\mathbf{\Pi}_x \psi_d) + \text{c.c.}) + \\
& + (8\pi)^{-1} (\text{rot } \mathbf{A})^2 \} d^2 \mathbf{r}_\perp dz, \quad (16)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{\Pi} = -i\hbar\nabla - 2ec^{-1}\mathbf{A}$, $a_{s,d} = \alpha_{s,d}(T - T_{s,d})$, оси x и y направлены, соответственно, по кристаллографическим осям a и b . Поскольку общепринятой микротеории ВТСП на данный момент не существует, мы не знаем параметров, входящих в этот функционал. Поэтому мы должны сделать какие-то предположения. Будем полагать, что $T_d > T_s$ в соответствии с тем, что d -компонента параметра порядка является доминирующей. Кроме того, будем полагать, что $T_d - T_s \sim T_s$, с целью разделить по температуре эффекты, связанные с близостью T_d , и эффекты, связанные с близостью T_s . Заметим, что в этом случае не существует температур, при которых выражения для $a_d = \alpha_d(T - T_d)$ и $a_s = \alpha_s(T - T_s)$, получающиеся разложением по температуре вблизи T_d и T_s , одновременно справедливы. Поэтому, вообще говоря, наше предположение противоречит условию применимости теории Гинзбурга–Ландау. Однако, как мы увидим в дальнейшем, для нас важно лишь то, где расположена температура, при которой $a_s = 0$, поэтому можно пользоваться простейшим выражением для a_s даже в случае $T_d - T_s \sim T_s$. Кроме того, мы совершаем лишь некоторую количественную ошибку, пользуясь функционалом вида (16) во всей области температур. Что касается остальных параметров теории, то мы можем оценить их согласно теории БКШ [15], из которой следует, что параметры b_1, b_2, b_3, b_4 имеют один порядок так же, как и параметры $\gamma_s, \gamma_d, \gamma_v$, а также α_s, α_d .

Приступим к поиску материальной связи. Для этого найдем выражение для плотности тока, проводя варьирование функционала (16) по \mathbf{A} . Вспомним, что поскольку плотность тока однородна по координате, следует считать f_s и f_d также однородными. Учитывая это обстоятельство в соотношении, получающемся после варьирования, имеем следующее выражение для плотности тока [12]:

$$\mathbf{j} = 2en_d \mathbf{v}_d + 2en_s \mathbf{v}_s + 2en_{sd} \bar{\mathbf{v}}_{sd} \cos(\theta_d - \theta_s), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned}
n_s = f_s^2, \quad \mathbf{v}_s = 2\gamma_s \left(\hbar\nabla\theta_s - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right), \quad n_d = f_d^2, \\
\mathbf{v}_d = 2\gamma_d \left(\hbar\nabla\theta_d - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right), \quad n_{sd} = \sqrt{n_s n_d},
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{sd} = 2\gamma_v \left(\hbar\nabla\theta_s + \hbar\nabla\theta_d - \frac{4e}{c}\mathbf{A} \right)$$

(черта над каким-либо вектором $\mathbf{C} = C_y \mathbf{y}_0 + C_x \mathbf{x}_0$ означает $\bar{\mathbf{C}} = C_y \mathbf{y}_0 - C_x \mathbf{x}_0$). Видно, что ток складывается из тока d -компоненты, тока s -компоненты и интерференционной части. Нетрудно показать, что величины $\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_d, \bar{\mathbf{v}}_{sd}$ и $\theta_d - \theta_s$ являются калибровочно-инвариантными. Мы уже зафиксировали калибровку для \mathbf{A} ($\text{div } \mathbf{A} = 0$), теперь выберем калибровку для фаз θ_d и θ_s . Пусть $\theta_s = 0$, а $\theta_d = \theta_0$. Тогда компоненты параметра порядка ψ_d и ψ_s определяются тремя действительными числами f_d, f_s и θ_0 , причем f_d и f_s отвечают за модули компонент параметра порядка, а θ_0 — за угол между ψ_d и ψ_s на комплексной плоскости. С целью избавления от косинуса перепишем выражение для тока в виде

$$\mathbf{j} = -\frac{8e^2}{c} \{ \gamma_d (U^2 + V^2) \mathbf{A} + \gamma_s f_s^2 \mathbf{A} + 2\gamma_v U f_s \bar{\mathbf{A}} \}, \quad (18)$$

где $U = f_d \cos \theta_0, V = f_d \sin \theta_0$. В этом выражении величины f_s, U, V , определяющие параметры порядка, должны быть найдены из условия того, что они дают минимум свободной энергии. Для нахождения уравнений, которым должны удовлетворять эти величины, проварьируем свободную энергию по ψ_s^* и ψ_d^* . Учитывая в получающихся соотношениях однородность f_s, U и V , получим следующую систему уравнений для параметров порядка:

$$\begin{aligned}
\left(a_s + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_s \mathbf{A}^2 \right) f_s + 2b_1 f_s^3 + b_3 f_s (U^2 + V^2) + \\
+ 2b_4 f_s (U^2 - V^2) + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) U = 0, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(a_d + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_d \mathbf{A}^2 \right) U + 2b_2 (U^2 + V^2) U + \\
+ (b_3 + 2b_4) f_s^2 U + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s = 0, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(a_d + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_d \mathbf{A}^2 \right) V + \\
+ 2b_2 (U^2 + V^2) V + (b_3 - 2b_4) f_s^2 V = 0. \quad (21)
\end{aligned}$$

Следует найти все решения этой системы и выбрать из них то, которое несет самый глубокий минимум свободной энергии. Назовем такое решение минимизирующим. Из вида системы (19)–(21) ясно, что минимизирующее решение зависит от \mathbf{A} , что и приводит, как мы уже указывали, к нелинейной материальной связи. Отметим также, что мы хотим исследовать связь между нелинейным откликом и фазовыми переходами. Поэтому следует найти нелинейный отклик в зависимости от температуры, чтобы

потом, меняя температуру, мы могли бы проводить анализ как вблизи, так и вдалеке от фазовых переходов, и, тем самым, выяснить влияние фазовых переходов на нелинейный отклик. Кроме того, интересна также зависимость и от других параметров теории Гинзбурга – Ландау. Вследствие этого минимизирующее решение будем искать для всего диапазона температур, а также для некоторой области изменения других параметров теории.

К сожалению, найти точные решения системы (19)–(21) в большинстве случаев не представляется возможным. Поэтому будем использовать приближенный метод, основанный на теории возмущений, использующей то обстоятельство, что магнитное поле и векторный потенциал малы. Вспомним, что мы полагаем эффекты, связанные с подавлением параметра порядка магнитным полем, слабыми. Тогда при решении системы можно считать, что

$$\frac{4e^2}{c^2} \gamma_{s,d,v} \mathbf{A}^2 \ll a_{s,d}, \quad (22)$$

и решать ее, используя теорию возмущений. В нулевом порядке теории возмущений положим $\mathbf{A} = 0$, и, решая систему, найдем параметры порядка, минимизирующие свободную энергию в отсутствие электромагнитного поля. Подставляя это решение в (18), получим не зависящую от \mathbf{A} часть $\overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d, \psi_s)$ в формуле (2), т. е. тензор $\overset{\leftrightarrow}{1}/\lambda^2$. Затем в первом порядке теории возмущений найдем поправки к этому решению, определяющие часть $\overset{\leftrightarrow}{f}(\psi_d, \psi_s)$, зависящую от \mathbf{A} (аналогичная методика поиска параметров порядка была использована в работе [16]). Точное математическое условие применимости такого подхода дадим позже. Рассмотрим вначале систему (19)–(21) в нулевом приближении, т. е. при $\mathbf{A} = 0$. В этом случае она легко может быть решена точно. Имеем следующие решения:

$$f_s = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad (i)$$

$$f_s = 0, \quad U^2 + V^2 = -\frac{a_d}{2b_2}, \quad (ii)$$

$$f_s^2 = \frac{-2b_2 a_s + (b_3 + 2b_4) a_d}{4b_1 b_2 - (b_3 + 2b_4)^2}, \quad V = 0, \quad (iii)$$

$$U^2 = \frac{-2b_1 a_d + (b_3 + 2b_4) a_s}{4b_1 b_2 - (b_3 + 2b_4)^2},$$

$$f_s^2 = \frac{-2b_2 a_s + (b_3 - 2b_4) a_d}{4b_1 b_2 - (b_3 - 2b_4)^2}, \quad U = 0, \quad (iiii)$$

$$V^2 = \frac{-2b_1 a_d + (b_3 - 2b_4) a_s}{4b_1 b_2 - (b_3 - 2b_4)^2},$$

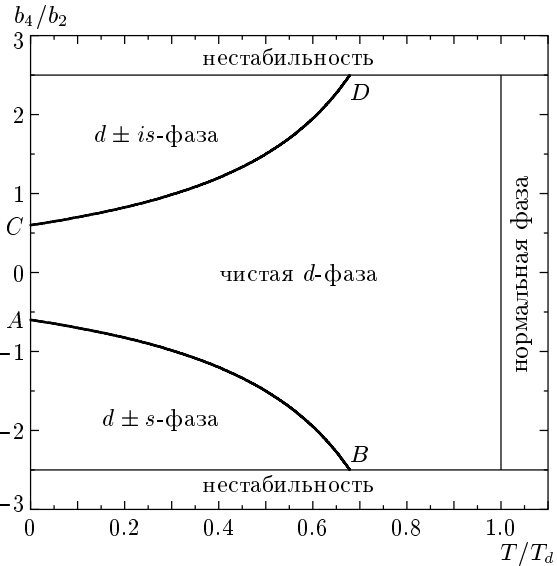


Рис. 3. Фазовая диаграмма сверхпроводника с двухкомпонентным параметром порядка в отсутствие тока при следующих значениях параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $T_s/T_d = 0.5$, $b_3/b_2 = 3$

$$f_s^2 = -\frac{a_s}{2b_1}, \quad U = 0, \quad V = 0. \quad (iiii)$$

Решение (i) соответствует нормальной фазе, решение (ii) — чистой d -фазе, решение (iii) — $d \pm s$ -фазе, решение (iiii) — $d \pm is$ -фазе и, наконец, решение (iiii) — чистой s -фазе. Путем анализа вторых производных свободной энергии по компонентам параметра порядка нетрудно выбрать минимизирующее решение при различных параметрах теории Гинзбурга – Ландау. Оказывается, что получающиеся результаты удобно отразить на фазовой диаграмме (b_4, T) (рис. 3). Видно, что если $|b_4|$ больше определенной величины, то при изменении температуры от величин, больших критической, до нуля могут реализовываться два фазовых перехода второго рода, первый из которых является переходом из нормального в сверхпроводящее состояние, а второй — из чистой d - в смешанную d - и s -фазу. При этом при $b_4 < 0$ второй фазовый переход происходит в $d \pm s$ -фазу, а при $b_4 > 0$ — в $d \pm is$ -фазу. Обозначим первый фазовый переход как АВ, а второй — как СD. Приведем также характерную зависимость параметров порядка от температуры (рис. 4). Отметим, что в той области параметров, где реализуется чистая d -фаза, величина θ_0 может быть любой, поскольку в решение (ii), соответствующее чистой d -фазе, входит только комбинация $U^2 + V^2$. Такая ситуация обусловлена тем, что $f_s = 0$, а $f_d \neq 0$, из-за чего угол между ψ_d и $\psi_s = 0$ может быть любым. Это значит, что есть вы-

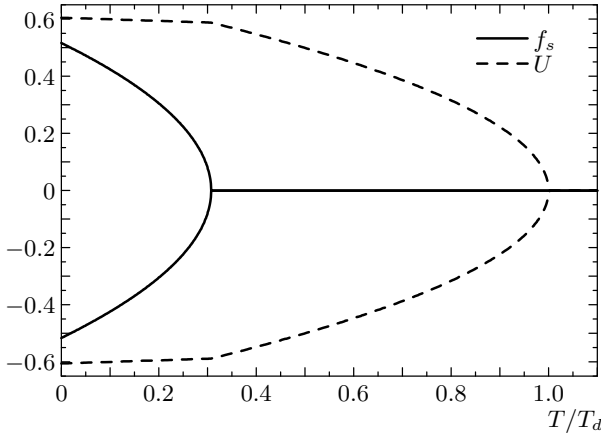


Рис. 4. Зависимость параметров порядка от температуры $\tau = T/T_d$ в отсутствие тока. Параметры порядка измеряются в $\sqrt{\alpha_d T_d/b_2}$. Сплошная линия — $f_s(\tau)$, штриховая — $\sqrt{U^2 + V^2}(\tau)$. В области температур, где $f_s \neq 0$, выполнено $U = 0$. Значения параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $b_3/b_2 = 3$, $b_4/b_2 = 1$, $T_s/T_d = 0.5$

рождение по U и V в случае чистой d -фазы. Такая ситуация возникает только тогда, когда одна из компонент параметра порядка равна нулю, а другая — нет, т. е. в случае чистой d -фазы.

Рассмотрим теперь первый порядок теории возмущений, т. е. случай $\mathbf{A} \neq 0$. При этом система (19)–(21) не имеет решений, при которых $f_s = 0$, а $U^2 + V^2$ не равно нулю. Поэтому вырождение по U и V , существовавшее в области чистой d -фазы в отсутствие тока, снимается. Из-за этого возникает проблема выбора правильного нулевого приближения. Для ее решения проведем параллельный анализ системы (19)–(21) и свободной энергии, эту систему порождающей. Поскольку левая часть уравнения (21) представляет собой произведение V и некоторого многочлена, у системы (19)–(21) возможны два типа решений: первый (I) при $V = 0$ и второй (II) при $V \neq 0$. Тип (I) соответствует $s \pm d$ -типу параметра порядка ($\theta_0 = 0, \pi$), тип (II) соответствует $s \pm e^{i\theta_0} d$ -типу параметра порядка ($\theta_0 \neq 0, \pi$). Выясним, какое из них является минимизирующим в зависимости от параметров теории Гинзбурга–Ландау. При этом мы ответим и на вопрос о правильном нулевом приближении при решении системы. Для этого запишем ту часть свободной энергии, в которую входят параметры порядка. Из формулы (16) имеем

$$F_\psi = \int \left\{ \left(a_d + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_d \mathbf{A}^2 \right) (U^2 + V^2) + b_2 (U^2 + V^2)^2 + \left(a_s + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_s \mathbf{A}^2 \right) f_s^2 + b_1 f_s^4 + b_3 f_s^2 (U^2 + V^2) + 2b_4 f_s^2 (U^2 - V^2) + \frac{8e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s U \right\} d\mathbf{r} dz. \quad (23)$$

Видно, что на взаимное распределение, а также на знаки U и V влияют только члены $2b_4 f_s^2 (U^2 - V^2)$ и $8e^2 c^{-2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s U$, поскольку в остальные члены U и V входят только как $U^2 + V^2$. Из того что минимизирующие значения f_s , U и V соответствуют самому глубокому минимуму F , можно сказать следующее:

1. На знак U влияет только член $8e^2 c^{-2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s U$. Поэтому при $A_y^2 > A_x^2$ решение с $U < 0$ имеет меньшую энергию по сравнению с решением с $U > 0$, а при $A_y^2 < A_x^2$ более глубокий минимум энергии несет решение с $U > 0$ (при $\gamma_v > 0$). Таким образом, знак минимизирующего U выбирается в зависимости от направления поляризации падающей волны по отношению к кристаллографическим осям.

2. Величина V входит в свободную энергию только как V^2 , т. е., если есть минимум при каком-то V , то будет минимум такой же глубины и при $-V$.

3. На взаимное распределение U и V влияют оба члена, причем можно заметить, что

а) при $b_4 < 0$ искомым является распределение $V = 0, U \neq 0$, поскольку оно минимизирует оба интересующих нас члена независимо от величины f_s . Учитывая соображения п. 1, можно сказать, что если поляризация электромагнитной волны такова, что $A_y^2 > A_x^2$, то минимизирующей является $d - s$ -фаза, а если $A_y^2 < A_x^2$, то минимизирующей является $d + s$ -фаза;

б) при $b_4 > 0$ величины U и V конкурируют между собой: с одной стороны, увеличение U ведет к уменьшению члена $8e^2 c^{-2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s U$, с другой стороны, увеличение V ведет к уменьшению члена $2b_4 f_s^2 (U^2 - V^2)$. Поэтому в данном случае необходимо учесть величину множителей перед $U^2 - V^2$ и U в интересующих нас членах.

Вспомним, что мы полагаем \mathbf{A} малым в смысле (22). Заметим, что в множитель перед U входит малая величина $(A_y^2 - A_x^2) f_s$, тогда как перед $U^2 - V^2$ стоит f_s^2 . Поэтому, если значение f_s велико (что выполнено в области параметров, где реализовывалась $d \pm is$ -фаза на рис. 3), реализуется тип (II) решений. Если же f_s порядка \mathbf{A} , что выполняется в области параметров, соответствующей чистой d -фазе на

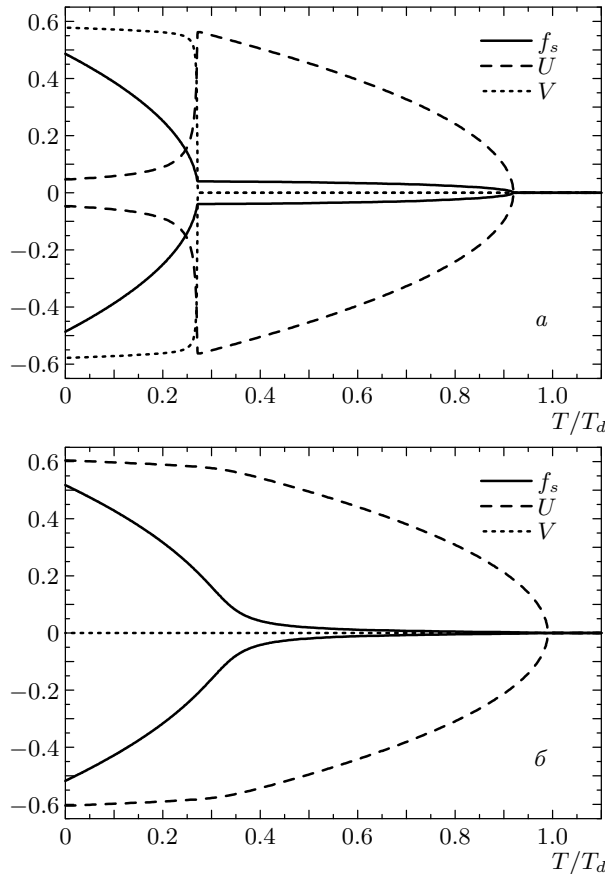


Рис. 5. Зависимость параметров порядка от температуры $\tau = T/T_d$: *a* — $b_4 > 0$, *б* — $b_4 < 0$. Параметры порядка измеряются в $\sqrt{\alpha_d T_d}/b_2$. Значения параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $b_3/b_2 = 3$, $b_4/b_2 = 1$ (*a*), -1 (*б*), $\gamma_s/\gamma_d = 1$, $\gamma_v/\gamma_d = 1$, $A\sqrt{4e^2\gamma_d/c^2\alpha_d T_d} = 0.3$ (*a*), 0.1 (*б*), $T_s/T_d = 0.5$, падающая волна поляризована вдоль оси y

рис. 3, то оба интересующих нас члена будут иметь один порядок малости. В этом случае ничего определенного сказать нельзя и требуется более детальное исследование.

Поскольку аналитическое решение для данной области параметров невозможно, нами было проведено численное моделирование, в котором рассчитывалось положение локальных минимумов F_ψ в зависимости от температуры при различных значениях параметров теории Гинзбурга–Ландау. Характерная зависимость параметров порядка, несущих минимумы F_ψ , от температуры при $b_4 > 0$ представлена на рис. 5*a*. Видно, что имеются два фазовых перехода второго рода, один между нормальной и $d-s$ -фазой, другой между $d-s$ - и $d \pm e^{i\theta}s$ -фазой. Таким образом, даже при $b_4 > 0$ при пропуски то-

ка чистая d -фаза переходит в $d \pm s$ -фазу, а не в $d \pm is$ -, как можно было бы ожидать. Отметим, что, как и следовало ожидать, второй фазовый переход происходит вблизи границы CD, разделяющей чистую d - и $d \pm s$ -фазы на рис. 3. Мы также провели численное моделирование для случая $b_4 < 0$, которое подтвердило наши рассуждения. Характерные зависимости компонент параметра порядка от температуры представлены на рис. 5*б*. Видно, что, как и ожидалось, при всех температурах реализуется $d-s$ -фаза.

Делая вывод, можно сказать, что в первом приближении теории возмущений фазовый переход между чистой d - и смешанной d - и s -фазой, существовавший в отсутствие тока, исчезает при $b_4 < 0$ и трансформируется в фазовый переход между $d-s$ - и $d \pm e^{i\theta}s$ -фазами при $b_4 > 0$. Таким образом, при появлении тока происходит следующее:

- 1) во всей области, соответствующей чистой d -фазе в случае отсутствия тока, образуется $d \pm s$ -фаза, знак зависит от поляризации падающей волны;
- 2) в области, соответствующей $d \pm s$ -фазе, она же и остается, но выбирается знак «плюс» или «минус» в зависимости от поляризации падающей волны;
- 3) в области $d \pm is$ -фазы образуется $d \pm e^{i\theta}s$ -фаза.

Поэтому в качестве нулевого приближения следует рассматривать

- 1) решение (ii) с $V = 0$ в области чистой d -фазы на рис. 3;
- 2) решение (iii) в области $d \pm s$ -фазы на рис. 3;
- 3) решение (iiii) в области $d \pm is$ -фазы на рис. 3.

В дальнейшем, во избежание путаницы, при использовании термина «фазовый переход» мы будем иметь в виду фазовые переходы, возникающие при отсутствии тока, т. е. в нулевом приближении.

Перейдем теперь к количественному нахождению решений системы (19)–(21) в первом порядке теории возмущений и поиску материальной связи на всей фазовой диаграмме. Мы показали, что фазовая диаграмма должна быть разбита на три различных области соответственно различным нулевым приближениям, используемым при решении системы. Из-за этого аналитические выражения для нелинейного отклика в различных областях фазовой диаграммы будут различны. Поэтому дальнейшее рассмотрение мы проведем отдельно для каждой такой области. Найдем аналитические формулы для нелинейного отклика в каждой из областей. Затем, с целью понять, что происходит с нелинейным откликом при пересечении фазовых переходов, построим температурные зависимости нелинейного отклика при различных b_4 . Отметим, что выбор тем-

пературы в качестве независимой переменной, а b_4 в качестве параметра связан лишь с тем, что температура является параметром, который легко измерять и менять в эксперименте.

3.1. Нелинейный отклик в области чистой d -фазы

В этом случае нулевым приближением при решении системы для параметров порядка является решение (ii) с $V = 0$ (рис. 3). Поскольку уравнение (21) при этом удовлетворяется тождественно, система перейдет в следующую:

$$\left(a_s + \frac{4e^2}{c^2}\gamma_s \mathbf{A}^2\right) f_s + 2b_1 f_s^3 + (b_3 + 2b_4) f_s U^2 + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) U = 0, \quad (24)$$

$$\left(a_d + \frac{4e^2}{c^2}\gamma_d \mathbf{A}^2\right) U + 2b_2 U^3 + (b_3 + 2b_4) f_s^2 U + \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_s = 0, \quad (25)$$

причем нулевым приближением будет $f_s = 0$, $U^2 = f_{d0}^2$, где $f_{d0} = \sqrt{-a_d/2b_2}$. Тогда в первом порядке из уравнения (25) с точностью до малой величины второго порядка имеем

$$U = -\text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \sqrt{-\frac{a_d}{2b_2}}, \quad (26)$$

а уравнение (24) для f_s примет вид

$$a_{s+}^* f_s + 2b_1 f_s^3 - \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v |(A_y^2 - A_x^2) U| = 0, \quad (27)$$

где

$$a_{s+}^* \equiv a_s - \frac{(b_3 + 2b_4)a_d}{2b_2} = 0.$$

В этом уравнении есть два члена с неизвестным f_s — линейный и кубический. Если коэффициент перед линейным членом достаточно велик, то при решении можно пренебречь кубическим членом. Действительно, решая в этом случае уравнение, получим, что $f_s \propto \mathbf{A}^2$ — малая величина, тогда $a_{s+}^* f_s \gg 2b_1 f_s^3$. Однако такое решение справедливо лишь тогда, когда a_{s+}^* не мало. Нетрудно показать, что в рассматриваемой области параметров a_{s+}^* может быть как большим, так и малым. Для этого представим a_{s+}^* в виде

$$a_{s+}^* = \alpha_{s+}^* (T - T_{s+}^*),$$

где

$$\alpha_{s+}^* = a_s - \alpha_d (b_3 + 2b_4),$$

тогда при температуре $T = T_{s+}^*$ величина $a_{s+}^* = 0$. Расчет показывает, что температура T_{s+}^* соответствует температуре фазового перехода АВ на фазовой диаграмме (см. рис. 3). Таким образом, в рассматриваемой области параметров температура меняется от T_{s+}^* до T_d , при этом a_{s+}^* меняется от 0 до некоей большой величины. Следовательно, кубическим членом можно пренебрегать везде, кроме узкой области вблизи линии фазового перехода АВ. Поскольку нас интересует нелинейный отклик при любых параметрах, приведем точное решение уравнения (27).

Нетрудно видеть, что уравнение (27) имеет один действительный корень, поэтому для его решения эффективно воспользоваться формулой Кардано. Тогда решение выражается в виде

$$f_s = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{f_{s1}^6}{4} + \frac{(a_{s+}^*)^3}{(6b_1)^3} + \frac{f_{s1}^3}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{f_{s1}^6}{4} + \frac{(a_{s+}^*)^3}{(6b_1)^3} - \frac{f_{s1}^3}{2}}}, \quad (28)$$

где

$$f_{s1} = \{2e^2 c^{-2} \gamma_v b_1^{-1} |(A_y^2 - A_x^2)| f_{d0}\}^{1/3}.$$

Формулы (26) и (28), а также соотношение $V = 0$ определяют решение системы (19)–(21), т. е. искомую зависимость параметров порядка от векторного потенциала. Теперь следует подставить их в выражение для тока (18) и, тем самым, найти материальную связь. Заметим, что поскольку $f_s \ll |U|$, в (18) имеем $|\gamma_s f_s^2 \mathbf{A}| \ll |2\gamma_v f_s U \mathbf{A}|$ и следует пренебречь током s -компоненты по сравнению с интерференционным членом. Тогда материальная связь запишется в виде

$$\mathbf{j} = -\frac{4e^2 \gamma_d}{cb_2} |a_d| \mathbf{A} + \frac{16e^4}{c^3 b_2} \gamma_d^2 \mathbf{A}^2 \mathbf{A} + \frac{16e^2 \gamma_v}{c} \text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \times f_{d0} \left\{ \left[\sqrt{\frac{(A_y^2 - A_x^2)^2 f_{d0}^2}{4e^{-2} \gamma_v^{-1} c^2 b_1^2} + \frac{(a_{s+}^*)^3}{(6b_1)^3} + \frac{|A_y^2 - A_x^2| f_{d0}}{e^{-2} \gamma_v^{-1} c^2 b_1}} \right]^{1/3} - \left[\sqrt{\frac{(A_y^2 - A_x^2)^2 f_{d0}^2}{4c^2 b_1^2 e^{-2} \gamma_v^{-1}} + \frac{(a_{s+}^*)^3}{(6b_1)^3}} - \frac{|A_y^2 - A_x^2| f_{d0}}{c^2 b_1 e^{-2} \gamma_v^{-1}} \right]^{1/3} \right\} \mathbf{A}. \quad (29)$$

Итак, мы получили материальную связь. Видно, что ток складывается из трех слагаемых. Первые два

слагаемых связаны с током d -компоненты и могли бы быть получены в рамках теории Гинзбурга–Ландау для однокомпонентного d -параметра порядка. Первое слагаемое линейно по \mathbf{A} и определяет тензор $\overleftrightarrow{1/\lambda_d^2}$, который в данном случае равен $(1/\lambda_d^2)\delta_{ik}$, где

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{c^2 b_2}{32\pi\gamma_d e^2 |a_d|}}$$

— лондоновская глубина проникновения в d -сверхпроводник. Второе слагаемое нелинейно по \mathbf{A} и определило бы $\overleftrightarrow{G}(\mathbf{A})$ в случае однокомпонентного d -параметра порядка. Третье слагаемое определяется интерференционным членом в выражении (18) и связано непосредственно с тем, что параметр порядка имеет две компоненты.

Найдем нелинейный отклик. Для этого согласно методике, изложенной в разд. 2, следует прежде всего найти \mathbf{j}_e — источник в уравнении (9), причем следует выразить \mathbf{j}_e через линейный ток в пленке \mathbf{j}_l . Для этого необходимо в формуле для материальной связи выразить \mathbf{A} через \mathbf{j} в линейном приближении, а затем подставить полученное \mathbf{A} в нелинейную часть материальной связи. Прделаем это. В линейном приближении из (29) для тока имеем $\mathbf{j}_l = -(c/4\pi\lambda_d^2)\mathbf{A}_l$ и этот ток следует считать заданным (см. уравнение (7)). Тогда $\mathbf{A}_l = -4\pi c^{-1}\lambda_d^2\mathbf{j}_l$. Подставляя это выражение в нелинейную часть формулы (29), получим

$$\mathbf{j}_e = -\frac{j_l^2}{j_{c1}^2(T)}\mathbf{j}_l - 2\text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \times \\ \times \frac{\gamma_v}{\gamma_d} \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{\mu^2 + \nu} + \mu} - \sqrt[3]{\sqrt{\mu^2 + \nu} - \mu} \right\} \bar{\mathbf{j}}_l, \quad (30)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{b_2}{b_1} \frac{\gamma_v}{\gamma_d} \frac{|j_{ly}^2 - j_{lx}^2|}{j_{c1}^2(T)}, \quad \nu = \frac{1}{27} \frac{b_2^3}{b_1^3} \frac{a_{s+}^{*3}}{|a_d|^3},$$

а $j_{c1}(T) = \sqrt{4e^2|a_d|^3\gamma_d/b_2^2}$ — характерная плотность тока, по порядку величины совпадающая с током распаривания сверхпроводника с однокомпонентным d -параметром порядка. Здесь уместно вспомнить, что условием применимости нашей теории возмущений являлась слабость нелинейных эффектов в том смысле, что при наличии токов параметр порядка меняется не сильно по сравнению со своим значением в отсутствие токов. Фактически это означает, что \mathbf{j}_e должен быть много меньше, чем \mathbf{j}_l , поскольку \mathbf{j}_l пропорционален значению параметра порядка в отсутствие тока, а \mathbf{j}_e пропорционален

отклонению параметра порядка от этого значения. Тогда из формулы (30) видно, что наше рассмотрение применимо тогда, когда линейный ток в пленке много меньше тока распаривания сверхпроводника с однокомпонентным d -параметром порядка. Оценим вначале характерный линейный ток, возникающий при отражении электромагнитной волны от пленки. Для этого в качестве примера рассмотрим эксперимент, описанный в работе [17]. Характерная величина мощности падающей волны в этих экспериментах равнялась 0.1 Вт, а площадь, на которую эта волна подавалась, — около 0.02 мм². Тогда при толщине пленки 1000 Å характерная величина плотности тока, текущего по пленке, равна 10⁶ А/см². Оценим теперь критический ток распаривания для ВТСП. Для ВТСП типичным значением лондоновской глубины проникновения является 2000 Å, а характерный масштаб изменения параметра порядка ξ — около 20 Å. Нетрудно вычислить характерную величину тока распаривания, она равна 10⁸ А/см². Таким образом, наше основное предположение о слабости нелинейных эффектов является удовлетворительным.

Теперь, в соответствии с разд. 2, следует найти $\mathbf{j}_{e3\omega}$ по формуле (12). Имеем

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-\tau)^3} \frac{j_0^2}{j_{c1}^2(0)} \mathbf{j}_0 - \\ - 2\text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \frac{\gamma_v}{\gamma_d} \sqrt[3]{\mu} I(\eta) \bar{\mathbf{j}}_0, \quad (31)$$

где $\tau = T/T_d$ — безразмерная температура,

$$I(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sqrt[3]{\sqrt{\sin^4 z + \eta + \sin^2 z} -} \right. \\ \left. - \sqrt[3]{\sqrt{\sin^4 z + \eta - \sin^2 z}} \right\} \sin z \sin 3z dz, \quad (32)$$

$$\eta = \frac{4}{27} \frac{b_2}{b_1} \frac{\gamma_d^2}{\gamma_v^2} \frac{\alpha_{s+}^{*3}}{\alpha_d^3} \frac{j_{c1}^4(0)}{(j_{0y}^2 - j_{0x}^2)^2} (\tau - \tau_{s+}^*)^3 (1-\tau)^3. \quad (33)$$

Интеграл $I(\eta)$ нельзя взять аналитически, однако для любого η его значение может быть найдено численно. Мы провели численное моделирование и построили график зависимости $I(\eta)$ (рис. 6). Видно, что $-I(\eta)$ имеет максимум при $\eta \approx 0.04$. Поэтому и нелинейный отклик, который повторяет по форме зависимость $-I(\eta)$, будет иметь максимум весьма близко от линии фазового перехода. Заметим, что такое поведение нелинейного отклика связано с интерференционным членом в токе, поскольку интеграл $I(\eta)$ связан именно с ним. Таким образом,

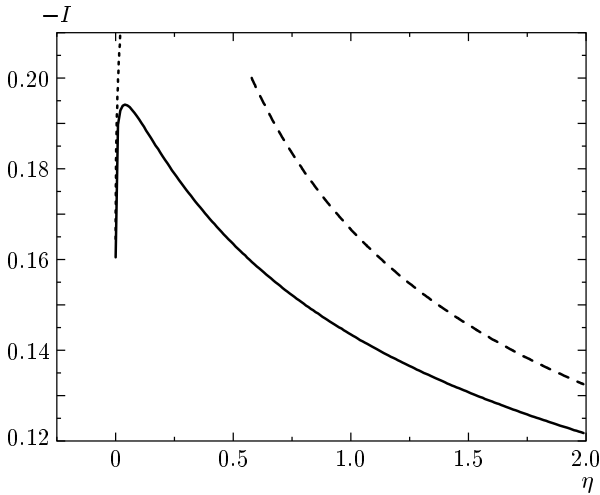


Рис. 6. График $I(\eta)$. Сплошная линия — результат численного расчета, пунктирная — асимптотика при $\eta \rightarrow 0$, штриховая — асимптотика при $\eta \rightarrow \infty$

мы можем найти $\mathbf{j}_{e3\omega}$ для любого η . Зная зависимость $\mathbf{j}_{e3\omega}(\mathbf{j}_0)$, можно вывести зависимость амплитуды нелинейного отклика от амплитуды падающей волны. Мы не будем здесь приводить формулу для $\mathbf{E}_{3\omega}^{rad}(\mathbf{E}_{inc})$, из-за того что она фактически повторяет (31) и может быть получена умножением (31) на $-i12\pi\omega\lambda_d^2/c^2$ (см. уравнение (13)) и подстановкой вместо \mathbf{j}_0 его выражения через \mathbf{E}_{ins} (см. уравнение (7)). В дальнейшем мы приведем графики зависимости $\mathbf{E}_{3\omega}^{rad}$ от температуры, используя формулу (15), а сейчас будем рассматривать полученную зависимость $\mathbf{j}_{e3\omega}(\mathbf{j}_0)$, поскольку именно в ней заключена наиболее интересная для нас информация.

Проанализируем полученные соотношения (31)–(33). Управляющим параметром в них является η . Величина $\eta \propto j_{c1}^4(0)/j_0^4$, а наше рассмотрение по теории возмущений предполагает, что $j_0 \ll j_{c1}(T)$, поэтому $\eta \gg 1$ за исключением области параметров, близкой к линии фазового перехода АВ, когда η может быть порядка 1 и даже много меньше 1 за счет множителя $(\tau - \tau_{s+}^*)^3$. В области фазовой диаграммы, далекой от фазового перехода АВ, имеет смысл попробовать упростить ответ, воспользовавшись тем, что η велико. Можно показать, что асимптотически $I(\eta) = -1/6\sqrt[3]{\eta}$ при $\eta \rightarrow \infty$. Подставляя это выражение в (31), получим

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \frac{1}{4(1-\tau)^3} \frac{j_0^2}{j_{c1}^2(0)} \mathbf{j}_0 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_d}{\alpha_{s+}^*} \frac{\gamma_v^2}{\gamma_d^2} \frac{1}{(\tau - \tau_{s+}^*)(1-\tau)^2} \frac{j_{0y}^2 - j_{0x}^2}{j_{c1}^2(0)} \bar{\mathbf{j}}_0, \quad (34)$$

и эта формула справедлива для всей рассматриваемой области параметров за исключением близкой окрестности линии фазового перехода АВ. Заметим, что это соотношение могло бы быть получено без использования формулы Кардано, путем приближенного решения уравнения (27), если пренебречь в нем членом $2b_1 f_s^3$. Видно, что рост нелинейного отклика связан с наличием величины $\tau - \tau_{s+}^*$ в знаменателе второго слагаемого в формуле (34). Данная формула перестает быть удовлетворительной, когда η становится порядка 1. В этом случае следует воспользоваться численным результатом. Однако в области параметров, весьма близкой к фазовому переходу АВ, такой, что $\eta \ll 1$, опять возможно асимптотическое вычисление интеграла $I(\eta)$. Можно показать, что асимптотически при $\eta \rightarrow 0$

$$I(\eta) = \sqrt[3]{2} M_1 - M_2 \sqrt[3]{\frac{\eta}{2}},$$

где

$$M_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{5/3} z \sin 3z dz \approx -0.127,$$

$$M_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{1/3} z \sin 3z dz \approx 0.231.$$

Подставляя это соотношение в (31), запишем

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \frac{1}{4} \frac{j_0^2}{j_{c1}^2(T_{s+}^*)} \mathbf{j}_0 - 2M_1 \frac{\gamma_v^{4/3}}{\gamma_d^{4/3}} \frac{b_2^{1/3}}{b_1^{1/3}} \frac{(j_{0y}^2 - j_{0x}^2)^{1/3}}{j_{c1}^{2/3}(T_{s+}^*)} \bar{\mathbf{j}}_0 + \frac{2}{3} M_2 \frac{\gamma_v^{2/3}}{\gamma_d^{2/3}} \frac{b_2^{2/3}}{b_1^{2/3}} \frac{\alpha_{s+}^*(\tau - \tau_{s+}^*)}{\alpha_d(1 - \tau_{s+}^*)} \frac{j_{c1}^{2/3}(T_{s+}^*)}{(j_{0y}^2 - j_{0x}^2)^{1/3}} \bar{\mathbf{j}}_0. \quad (35)$$

Заметим, что эта формула могла бы быть получена путем приближенного решения уравнения (27) по теории возмущений при $a_{s+}^* f_s \ll 2b_1 f_s^3$. Второй член в (35) получался в нулевом порядке такой теории возмущений, т. е. при пренебрежении членом $a_{s+}^* f_s$, а третий член, линейный по a_{s+}^* , — в первом порядке, т. е. при учете члена $a_{s+}^* f_s$ как малой поправки. Это соотношение пригодится нам в дальнейшем при построении температурной зависимости нелинейного отклика, но оно интересно и само по себе, поскольку из него видно, что большая величина нелинейного отклика вблизи фазового перехода АВ связана с неаналитичностью зависимости $\mathbf{j}_e(\mathbf{j}_0)$ в точке этого фазового перехода.

Обсудим теперь вопрос о связи между поляризациями падающей, отраженной и переизлученной на третьей гармонике волн. В данном случае в линейном приближении $\mathbf{j} \parallel \mathbf{A}$, а следовательно, и $\mathbf{j} \parallel \mathbf{E}$,

поэтому отраженная волна поляризована так же, как и падающая. Нелинейный же отклик поляризован по-другому, и это связано с наличием интерференционного члена в выражении для тока. Выражения (31), (34) и (35) имеют структуру вида

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = H_1 \mathbf{j}_0 + H_2 \bar{\mathbf{j}}_0, \quad (36)$$

причем член $H_2 \bar{\mathbf{j}}_0$, ведущий к непараллельности $\mathbf{j}_{e3\omega}$ и \mathbf{j}_0 , получается из интерференционного члена в (18). Пусть падающая волна поляризована под углом α к оси x (напомним, что оси x и y выбраны вдоль кристаллографических осей пленки). Тогда из (36) нетрудно получить, что нелинейный отклик будет поляризован под углом ϕ ,

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1 + H_2/H_1}{1 - H_2/H_1} \operatorname{tg} \alpha. \quad (37)$$

Рассмотрим вначале область параметров, далекую от фазового перехода АВ. В этом случае для расчетов удобно использовать формулу (34). Подставляя значения H_1 и H_2 , соответствующие (34), в (37), получим

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1 - p(\tau) \cos 2\alpha}{1 + p(\tau) \cos 2\alpha} \operatorname{tg} \alpha, \quad (38)$$

где

$$p(\tau) = \frac{2\alpha_d \gamma_v^2 (1 - \tau)}{\alpha_{s+}^* \gamma_d^2 (\tau - \tau_{s+}^*)}$$

— параметр, зависящий от температуры и имеющий порядок величины около 1. Таким образом, у нас есть аналитические формулы для амплитуды и поляризации нелинейного отклика. В соответствии с нашим планом проведем более подробный анализ этих формул позже, а сейчас перейдем к поиску нелинейного отклика в следующей области фазовой диаграммы.

3.2. Нелинейный отклик в области $s \pm d$ -фазы

В этом случае нулевым приближением при решении системы для параметров порядка (19)–(21) будет решение (iii). При этом $V = 0$, поэтому аналогично предыдущему разделу система упрощается и переходит в систему (24), (25). В соответствии с тем, что нулевым приближением является решение (iii), и учитывая соображения про знак U , высказанные ранее, следует выбрать в качестве нулевого приближения решение

$$f_s = \sqrt{\frac{2|a_{s+}^*|}{b_2 \Delta}} \equiv f_{s0}, \quad (39)$$

$$U = -\operatorname{sign}(A_y^2 - A_x^2) \sqrt{\frac{2b_1|a_{d+}^*|}{b_2^2 \Delta}} \equiv U_0, \quad (40)$$

где

$$\Delta = \frac{4b_1}{b_2} - \frac{(b_3 - 2|b_4|)^2}{b_2^2}, \quad a_{d+}^* = a_d - \frac{(b_3 + 2b_4)a_s}{2b_1}.$$

В первом приближении ищем решение системы (24), (25) в виде $f_s = f_{s0} + f_s''$, $U = U_0 + U''$, где f_s'' и U'' — малые поправки к решениям нулевого приближения. Подставим эти решения в систему. Получим, вообще говоря, некую нелинейную систему для f_s'' и U'' — аналог уравнения (27) для f_s' в случае чистой d -фазы. Нетрудно показать, что так же, как и в предыдущем разделе, кубические по f_s'' и U'' члены должны быть учтены только вблизи линии фазового перехода АВ. Из-за этого можно ограничиться рассмотрением только линейных членов, при этом полученные решения перестанут быть справедливыми вблизи фазового перехода АВ. В дальнейшем мы увидим, что более точное решение в данном случае лишь незначительно улучшило бы срачиваемость результатов справа и слева от линии фазового перехода, не приводя при этом к каким-либо качественным эффектам. Итак, учитывая только члены, линейные по f_s'' и U'' , получим следующую линейную систему уравнений для поправок:

$$4b_1 f_{s0} f_s'' + 2(b_3 + 2b_4) U_0 f_{s0} U'' = -\frac{4e^2}{c^2} \gamma_s \mathbf{A}^2 f_{s0} - \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) U_0, \quad (41)$$

$$4b_2 U_0^2 f_s'' + 2(b_3 + 2b_4) U_0 f_{s0} f_s'' = -\frac{4e^2}{c^2} \gamma_d \mathbf{A}^2 U_0 - \frac{4e^2}{c^2} \gamma_v (A_y^2 - A_x^2) f_{s0}. \quad (42)$$

Решая ее, имеем

$$f_s'' = 2 \frac{(b_3 + 2b_4) \gamma_d - 2b_2 \gamma_s}{e^{-2} c^2 b_2^2 f_{s0} \Delta} \mathbf{A}^2 + 2 \gamma_v \frac{(b_3 + 2b_4) f_{s0}^2 - 2b_2 U_0^2}{e^{-2} c^2 b_2^2 f_{s0}^2 U_0 \Delta} (A_y^2 - A_x^2), \quad (43)$$

$$U'' = 2 \frac{(b_3 + 2b_4) \gamma_s - 2b_1 \gamma_d}{e^{-2} c^2 b_2^2 U_0 \Delta} \mathbf{A}^2 + 2 \gamma_v \frac{(b_3 + 2b_4) U_0^2 - 2b_1 f_{s0}^2}{e^{-2} c^2 b_2^2 f_{s0} U_0^2 \Delta} (A_y^2 - A_x^2). \quad (44)$$

Теперь следует полученные соотношения для параметров порядка подставить в выражение для тока (18). Отметим, что в данном случае нельзя

пренебрегать током s -компоненты, как мы делали это в п. 3.1, поскольку f_s не мало. Подставляя $f_s = f_{s0} + f_s''$, $U = U_0 + U''$ в выражение (18) и пренебрегая квадратичными по f_s'' и U'' членами, получим материальную связь в виде

$$\mathbf{j} = -\frac{8e^2}{c} \{ \gamma_d U_0^2 \mathbf{A} + \gamma_s f_{s0}^2 \mathbf{A} + 2\gamma_v U_0 f_{s0} \bar{\mathbf{A}} + 2\gamma_d U_0 U'' \mathbf{A} + 2\gamma_s f_{s0} f_s'' \mathbf{A} + 2\gamma_v U_0 f_s'' \bar{\mathbf{A}} + 2\gamma_v f_{s0} U'' \bar{\mathbf{A}} \}. \quad (45)$$

Первые три слагаемых описывают линейную по \mathbf{A} часть, остальные — нелинейную. Видно, что вектор \mathbf{j} не параллелен \mathbf{E} уже в линейном приближении, что связано с тем, что интерференционный член в этом приближении не равен 0. Из формулы (45) следует, что тензор $\overleftarrow{1/\lambda^2}$ в данном случае равен $\overleftarrow{1/\lambda^2} = (1/\lambda_d^2) \overleftarrow{T}$, где \overleftarrow{T} — диагональный тензор с компонентами

$$T_{xx} = \frac{4}{\Delta} \frac{\gamma_s \alpha_{s+}^*}{\gamma_d \alpha_d} \frac{\tau_{s+}^* - \tau}{1 - \tau} + \frac{4}{\Delta} \frac{b_1 \alpha_{d+}^*}{b_2 \alpha_d} \frac{\tau_{d+}^* - \tau}{1 - \tau} - \text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \frac{8}{\Delta} \frac{\gamma_v \sqrt{b_1 \alpha_{s+}^* \alpha_{d+}^*}}{\gamma_d \sqrt{b_2 \alpha_d^2}} \sqrt{\frac{(\tau_{s+}^* - \tau)(\tau_{d+}^* - \tau)}{(1 - \tau)^2}},$$

$$T_{yy} = \frac{4}{\Delta} \frac{\gamma_s \alpha_{s+}^*}{\gamma_d \alpha_d} \frac{\tau_{s+}^* - \tau}{1 - \tau} + \frac{4}{\Delta} \frac{b_1 \alpha_{d+}^*}{b_2 \alpha_d} \frac{\tau_{d+}^* - \tau}{1 - \tau} + \text{sign}(A_y^2 - A_x^2) \frac{8}{\Delta} \frac{\gamma_v \sqrt{b_1 \alpha_{s+}^* \alpha_{d+}^*}}{\gamma_d \sqrt{b_2 \alpha_d^2}} \sqrt{\frac{(\tau_{s+}^* - \tau)(\tau_{d+}^* - \tau)}{(1 - \tau)^2}}.$$

Здесь

$$\alpha_{d+}^* = \alpha_d - \frac{(b_3 + 2b_4)\alpha_s}{2b_1}.$$

Мы не изучали задачу о нелинейном отклике для такого случая в разд. 2, поэтому сделаем это сейчас. Общий подход остается, разумеется, прежним. Прежде всего следует выразить линейный ток в пленке через амплитуду падающей волны. Затем необходимо выразить \mathbf{A} через \mathbf{j} в линейном приближении, затем подставить полученное значение \mathbf{A} в нелинейную часть материальной связи, тем самым найдя сторонний ток \mathbf{j}_e . После этого следует решить задачу об излучении этим током электромагнитных волн. Во время реализации этого плана будут появляться некоторые особенности, на которые мы будем обращать внимание по мере необходимости. Выразим \mathbf{j}_l через \mathbf{E}_{inc} . До этого момента мы считали, что линейный ток в пленке и электрическое поле в падающей волне параллельны и связаны соотношением (7). В случае анизотропной связи между \mathbf{j} и

\mathbf{E} это не очевидно. Мы решили задачу об отражении волны от пленки для такой материальной связи, и оказалось, что соотношение (7) верно всегда, когда коэффициент отражения близок по модулю к 1, независимо от тензора $\overleftarrow{1/\lambda^2}$. Поэтому можно по-прежнему оперировать с линейным током \mathbf{j}_l как с заданной величиной, которая с точностью до скалярного коэффициента повторяет \mathbf{E}_{inc} .

Итак, найдем нелинейный отклик. Нам нужно знать \mathbf{j}_e — источник в уравнении (9). Для этого необходимо в формуле для материальной связи выразить \mathbf{A} через \mathbf{j} в линейном приближении, а затем подставить полученное значение \mathbf{A} в нелинейную часть материальной связи. Получаем, что в линейном приближении справедливо соотношение $\mathbf{j}_l = -(c/4\pi\lambda_d^2) \overleftarrow{T} \mathbf{A}_l$. Нам будет удобно выразить \mathbf{A}_l через \mathbf{j}_l в следующем виде:

$$\mathbf{A}_l = -\frac{4\pi\lambda_d^2}{c} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2}} \mathbf{j}_l \mathbf{m}, \quad (46)$$

где α — угол между направлением поляризации падающей волны и осью x , \mathbf{m} — единичный вектор с координатами

$$m_x = \frac{1}{T_{xx} \sqrt{1/T_{xx}^2 + \text{tg}^2 \alpha / T_{yy}^2}},$$

$$m_y = \frac{\text{tg} \alpha}{T_{yy} \sqrt{1/T_{xx}^2 + \text{tg}^2 \alpha / T_{yy}^2}}. \quad (47)$$

Подставляя это выражение для \mathbf{A}_l в нелинейную часть материальной связи (45), получим следующее выражение для стороннего тока \mathbf{j}_e :

$$\mathbf{j}_e = B_1 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right)^{3/2} \frac{j_l^3}{j_{c1}^2(T)} \mathbf{m} +$$

$$+ B_2 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{j_l^3}{j_{c1}^2(T)} \mathbf{m} + B_3 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right)^{3/2} \frac{j_l^3}{j_{c1}^2(T)} \bar{\mathbf{m}} +$$

$$+ B_4 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} - \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right) \left(\frac{\sin^2 \alpha}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{T_{xx}^2} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{j_l^3}{j_{c1}^2(T)} \bar{\mathbf{m}}, \quad (48)$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — функции параметров теории Гинзбурга–Ландау,

$$B_1 = \frac{1}{\Delta} \left(2 \frac{b_3 + 2b_4}{b_2} \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 4 \frac{b_1}{b_2} \right) + \frac{1}{\Delta} \frac{\gamma_s}{\gamma_d} \left(2 \frac{b_3 + 2b_4}{b_2} - 4 \frac{\gamma_s}{\gamma_d} \right),$$

$$B_2 = \frac{\gamma_v}{\gamma_d} \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(2 \frac{b_3 + 2b_4}{b_2} - 4 \frac{\gamma_s}{\gamma_d} \right) \sqrt{\frac{b_1 \alpha_{d+}^* \tau_{d+}^* - \tau}{b_2 \alpha_{s+}^* \tau_{s+}^* - \tau}} + \left(2 \frac{b_3 + 2b_4}{b_2} \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 4 \frac{b_1}{b_2} \right) \sqrt{\frac{b_2 \alpha_{s+}^* \tau_{s+}^* - \tau}{b_1 \alpha_{d+}^* \tau_{d+}^* - \tau}} \right\},$$

$$B_3 = B_2,$$

$$B_4 = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_d^2} \frac{1}{\Delta} \left\{ 4 \frac{b_3 + 2b_4}{b_2} - 2 \frac{\alpha_{s+}^* \tau_{s+}^* - \tau}{\alpha_{d+}^* \tau_{d+}^* - \tau} - 2 \frac{b_1}{b_2} \frac{\alpha_{d+}^* \tau_{d+}^* - \tau}{\alpha_{s+}^* \tau_{s+}^* - \tau} \right\}.$$

Согласно разд. 2, необходимо найти $\mathbf{j}_{e3\omega}$ по формуле (12). Заметим, что в данном случае \mathbf{j}_e зависит от времени как $\sin^3 \omega t$. Поскольку

$$\frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \sin^3 \omega t \sin 3\omega t dt = -1/4,$$

во избежание переписывания громоздких выражений, запишем просто

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = -\frac{1}{4} \frac{\mathbf{j}_e}{\sin^3 \omega t}. \quad (49)$$

Таким образом, мы знаем сторонний ток, излучающий электромагнитную волну на третьей гармонике частоты падающей волны. Теперь следует найти амплитуду этой волны. В разд. 2 мы решили эту задачу для случая $\overleftarrow{1/\lambda^2} = (1/\lambda^2)\delta_{ik}$ и получили формулу (13). Нетрудно показать, что обобщение этой формулы на случай анизотропной материальной связи имеет вид

$$\mathbf{E}_{3\omega}^{rad} = -(12\pi i \omega / c^2) (\overleftarrow{1/\lambda^2})^{-1} \mathbf{j}_{e3\omega},$$

где $(\overleftarrow{1/\lambda^2})^{-1}$ — тензор, обратный к $\overleftarrow{1/\lambda^2}$. Фактически нам нужно обратить тензор $\overleftarrow{1/\lambda^2}$. Мы уже решали такую задачу, когда обращали зависимость $\mathbf{j}_l(\mathbf{A}_l)$, и получили формулу (46). Воспользовавшись этой формулой, можем сразу записать

$$\mathbf{E}_{3\omega}^{rad} = -i \frac{12\pi\omega\lambda_d^2}{c^2} \sqrt{\frac{\sin^2 \phi_{e3\omega}}{T_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \phi_{e3\omega}}{T_{xx}^2}} \mathbf{j}_{e3\omega} \mathbf{l}, \quad (50)$$

где \mathbf{l} — единичный вектор с координатами

$$l_x = \frac{1}{T_{xx} \sqrt{1/T_{xx}^2 + \text{tg}^2 \phi_{e3\omega}/T_{yy}^2}}, \quad (51)$$

$$l_y = \frac{\text{tg} \phi_{e3\omega}}{T_{yy} \sqrt{1/T_{xx}^2 + \text{tg}^2 \phi_{e3\omega}/T_{yy}^2}},$$

$\phi_{e3\omega}$ — угол наклона вектора $\mathbf{j}_{e3\omega}$ к оси x . Подставляя сюда найденное значение $\mathbf{j}_{e3\omega}$, можно записать соотношение для нелинейного отклика. Мы не будем здесь выписывать эти соотношения в силу их громоздкости.

Проанализируем полученные соотношения. Прежде всего отметим, что, как и следовало ожидать, полученные соотношения становятся неприменимы вблизи фазового перехода АВ, поскольку в коэффициентах B_2 и B_4 имеются величины, пропорциональные $1/(\tau_{s+}^* - \tau)$, а на линии фазового перехода $\tau = \tau_{s+}^*$. Вообще говоря, чтобы получить корректные формулы, необходимо учесть в системе для f_s'' и U'' кубические члены. Однако такой учет невозможно провести аналитически, поскольку при этом получается система шестого порядка, не имеющая аналитического решения. Мы сейчас хотим показать, что такой учет не принес бы качественно новой информации. Рассмотрим окрестность фазового перехода АВ. Справа от него хорошо выполняется формула (35), из которой получается возрастающая по температуре зависимость нелинейного отклика, причем с очень большим, но конечным наклоном (см. представленный ниже рис. 8а). Слева от линии фазового перехода справедливы только что полученные соотношения для нелинейного отклика, которые дают также растущую зависимость в окрестности фазового перехода, но перестают выполняться в самой точке фазового перехода. Сопоставляя эти два приближения, можно сказать, что точный учет кубических членов слева от перехода лишь дал бы более точное попадание температурной зависимости слева в температурную зависимость справа, а также более точное совпадение углов наклона этих зависимостей.

Обсудим вопрос о связи между поляризациями падающей, отраженной и переизлученной на третьей гармонике волн. В данном случае вектор \mathbf{j} неколлинеарен с \mathbf{E} уже в линейном приближении, однако расчет показывает, что из-за почти полного отражения падающей волны можно с хорошей степенью точности считать падающую и отраженную волны поляризованными одинаково. Нелинейный же отклик поляризован по-другому и это связано, во-первых, с тем, что вектор \mathbf{j}_e непараллелен \mathbf{j}_l , и, во-вторых, с тем, что вектор $\mathbf{E}_{3\omega}^{rad}$ непараллелен \mathbf{j}_e . Из-за того что зависимость $\mathbf{j}_e(\mathbf{j}_l)$ имеет вид (36), угол $\phi_{e3\omega}$ может быть найден по формуле (37). Затем, используя формулу (51), можно показать, что угол наклона электрического поля в нелинейном от-

клике, ϕ , может быть найден из формулы

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{T_{xx}}{T_{yy}} \operatorname{tg} \phi_{e3\omega}. \quad (52)$$

Перейдем теперь к поиску нелинейного отклика в следующей области фазовой диаграммы.

3.3. Нелинейный отклик в области $s \pm id$ -фазы

В этом случае нулевым приближением при решении системы для параметров порядка (19)–(21) было бы решение (iii). При этом $V \neq 0$. Однако мы не будем вести рассмотрение по теории возмущений, поскольку при $V \neq 0$ система может быть решена точно. Покажем это. В данном случае уравнение (21) может быть разделено на V , и из него получится следующая связь между V и f_s :

$$V^2 = -\frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} f_s^2 - \frac{a_d + 4e^2 c^{-2} \gamma_d \mathbf{A}^2}{2b_2} - \frac{e^4 \gamma_v^2 (A_y^2 - A_x^2)^2}{c^4 b_4^2 f_s^2}. \quad (53)$$

Подставив это выражение в (20), запишем связь между U и f_s в виде

$$U = -\frac{e^2 \gamma_v (A_y^2 - A_x^2)}{c^2 b_4 f_s}. \quad (54)$$

Подставляя V (53) и U (54) в первое уравнение системы (19), получим несложное уравнение для f_s , из которого имеем

$$f_s^2 = \frac{2|a_{s-}^*|}{\Delta b_2} + \frac{8e^2}{c^2 \Delta b_2^2} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} - \gamma_s \right) \mathbf{A}^2, \quad (55)$$

где

$$a_{s-}^* = a_s - \frac{(b_3 - 2b_4)a_d}{2b_2}.$$

Подставляя f_s обратно в (53) и (54), получим решение для V и U :

$$V^2 = \frac{2b_1}{\Delta b_2} \frac{|a_{d-}^*|}{b_2} + \frac{8e^2 b_1}{c^2 \Delta b_2^2} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} \gamma_s - \gamma_d \right) \mathbf{A}^2, \quad (56)$$

$$U = -\frac{e^2 \gamma_v (A_y^2 - A_x^2)}{c^2 b_4 f_s}, \quad (57)$$

где

$$a_{d-}^* = a_d - \frac{(b_3 - 2b_4)a_s}{2b_1}.$$

Таким образом, нам удалось точно решить систему уравнений для параметров порядка. Для нахождения материальной связи подставим полученные ответы в выражение для тока (18), тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & -\frac{8e^2}{c} \left(\frac{2b_1}{\Delta b_2^2} \gamma_d |a_{d-}^*| + \frac{2}{\Delta b_2} \gamma_s |a_{s-}^*| \right) \mathbf{A} - \\ & - \frac{64e^4}{c^4} \frac{b_1 \gamma_d}{\Delta b_2^2} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_1} \gamma_s - \gamma_d \right) \mathbf{A}^2 \mathbf{A} - \\ & - \frac{64e^4}{c^4} \frac{\gamma_s}{\Delta b_2} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} \gamma_d - \gamma_s \right) \mathbf{A}^2 \mathbf{A} + \\ & + \frac{16e^4 \gamma_v^2}{c^4 b_4} (A_y^2 - A_x^2) \bar{\mathbf{A}}. \quad (58) \end{aligned}$$

Итак, мы нашли материальную связь. Она состоит из четырех слагаемых. Первое дает линейную связь между \mathbf{j} и \mathbf{A} . Видно, что в данном случае интерференционный член не дает вклада в линейную часть материальной связи, что связано с тем, что $U = 0$ в нулевом приближении. Тогда в линейном приближении ток есть просто сумма токов d - и s -компонент. Поэтому \mathbf{j}_l параллелен \mathbf{A}_l , а тензор $\frac{1}{\lambda^2} = (1/\lambda_{sd}^2) \delta_{ik}$, где

$$\frac{1}{\lambda_{sd}^2} = \frac{32\pi e^2}{c^2} \left(\frac{2b_1}{\Delta b_2^2} \gamma_d |a_{d-}^*| + \frac{2}{\Delta b_2} \gamma_s |a_{s-}^*| \right).$$

Остальные слагаемые определяют нелинейную часть материальной связи.

Найдем нелинейный отклик. Прежде всего следует найти \mathbf{j}_e . Для этого воспользуемся рекомендациями, приведенными в разд. 2. Выразим \mathbf{A} через \mathbf{j} в линейном приближении. Из формулы (58) получим

$$\mathbf{A}_l = -\frac{4\pi \lambda_{sd}^2}{c} \mathbf{j}_l.$$

Подставляя это соотношение в нелинейную часть (58), запишем сторонний нелинейный ток в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e = & \left(\frac{4b_1 \alpha_{d-}^*}{\Delta b_2 \alpha_d} (\tau_{d-}^* - \tau) + \frac{4\gamma_s \alpha_{s-}^*}{\Delta \gamma_d \alpha_d} (\tau_{s-}^* - \tau) \right)^{-3} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{4b_1}{b_2 \Delta} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_d} \frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} - 1 \right) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{4\gamma_s}{\gamma_d \Delta} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_1} - \frac{\gamma_s}{\gamma_d} \right) \right] \frac{j_l^2}{j_{c1}^2(0)} \mathbf{j}_l - \\ & \left. - \frac{b_2 \gamma_v^2}{2b_4 \gamma_d^2} \frac{j_{ly}^2 - j_{lx}^2}{j_{c1}^2(0)} \bar{\mathbf{j}}_l \right\}. \quad (59) \end{aligned}$$

Теперь следует найти фурье-образ \mathbf{j}_e . Заметим, что \mathbf{j}_e зависит от времени как $\sin^3 \omega t$. Поэтому для нахождения $\mathbf{j}_{e3\omega}$ можно просто воспользоваться формулой (49), из которой следует, что с точностью до постоянного множителя $\mathbf{j}_{e3\omega}$ повторяет амплитуду \mathbf{j}_e . Затем, зная зависимость $\mathbf{j}_{e3\omega}(\mathbf{j}_0)$, можно найти зависимость амплитуды нелинейного отклика от амплитуды падающей волны. Мы не будем здесь приводить формулу для $\mathbf{E}_{3\omega}^{rad}(\mathbf{E}_{inc})$, из-за того что она фактически повторяет (59) и может быть получена умножением (59) на $-i12\pi\omega\lambda_{sd}^2/c^2$ (см. уравнение (13)) и подстановкой вместо \mathbf{j}_0 его выражения через \mathbf{E}_{ins} (см. уравнение (7)).

В данном случае отраженная волна поляризована так же, как и падающая, но нелинейный отклик имеет другую поляризацию. Поскольку нелинейный отклик поляризован так же, как и $\mathbf{j}_{e3\omega}$, для нахождения поляризации нелинейного отклика достаточно найти направление $\mathbf{j}_{e3\omega}$. Формула (59) для $\mathbf{j}_{e3\omega}$ имеет вид (36), поэтому для нахождения угла наклона электрического поля в нелинейном отклике к оси x можно воспользоваться формулой (37). Тогда получим

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{1 - p_2 \cos 2\alpha}{1 + p_2 \cos 2\alpha} \operatorname{tg} \alpha, \quad (60)$$

где

$$p_2 = -\frac{b_2\gamma_v^2}{2b_4\gamma_d^2} \left\{ \frac{4b_1}{b_2\Delta} \left(\frac{\gamma_s}{\gamma_d} \frac{b_3 - 2b_4}{2b_2} - 1 \right) + \frac{4\gamma_s}{\gamma_d\Delta} \left(\frac{b_3 - 2b_4}{2b_1} - \frac{\gamma_s}{\gamma_d} \right) \right\}^{-1} \quad (61)$$

— параметр, не зависящий от температуры и имеющий порядок 1.

Итак, мы нашли аналитическое выражение для нелинейного отклика на всей фазовой диаграмме. Полученные выражения достаточно громоздки и, пользуясь ими, трудно сказать, как ведет себя нелинейный отклик в различных точках фазовой диаграммы. Поэтому будем исследовать температурные зависимости нелинейного отклика при различных значениях b_4 , поскольку их можно представлять визуально в виде графиков. Таким образом, мы сможем определить нелинейный отклик во всех областях и вблизи всех фазовых переходов на фазовой диаграмме.

3.4. Температурная зависимость нелинейного отклика

В этом разделе мы рассмотрим температурные зависимости нелинейного отклика при различных

b_4 . Фактически мы будем исследовать, как изменяется нелинейный отклик вдоль линии постоянного значения b_4 . Поскольку линия постоянного значения b_4 может пересекать различные области фазовой диаграммы, необходимо использовать соответствующие этим областям ответы для нелинейного отклика. Чтобы охватить все области фазовой диаграммы, следует, вообще говоря, рассматривать изменение температуры от температур, больших T_d , до 0. При $T > T_d$ нелинейный отклик равен 0, поскольку параметр порядка в этом случае равен 0. В области температур, меньших, но весьма близких к T_d , наша теория работать не будет, поскольку главным ее приближением является то, что магнитное поле падающей волны слабо меняет параметр порядка по сравнению с его значением в отсутствие магнитного поля. Это заведомо не выполнено вблизи T_d , из-за того что параметр порядка мал в этой области. Поэтому наши ответы справедливы, начиная с температур, не слишком близких к T_d , и более низких. Из-за этого мы будем исследовать температурные зависимости нелинейного отклика для диапазона температур от 0 до температур, меньших, но близких к T_d . Из фазовой диаграммы следует, что есть три различных случая: первый соответствует такому b_4 , чтобы линия постоянного значения b_4 на рис. 3 не пересекает каких-либо линий фазового перехода; второй соответствует тому, что линия постоянного значения b_4 пересекает фазовый переход АВ; третий — тому, что линия постоянного значения b_4 пересекает фазовый переход СД.

Рассмотрим первый случай. Для поиска нелинейного отклика хорошо применима формула (34), поскольку на всем протяжении линии $b_4 = \text{const}$ нет областей, близких к фазовым переходам. Начертим температурную зависимость амплитуды электрического поля в нелинейном отклике. Для этого используем формулу (15). Заметим, что величина $\omega\lambda^2/cd$, входящая в эту формулу, в данном случае может быть представлена как

$$\frac{\omega\lambda^2}{cd} = \frac{\omega\lambda_d^2(0)}{cd} \frac{1}{1 - \tau}, \quad (62)$$

где $\lambda_d^2(0)$ — лондоновская глубина проникновения в d -сверхпроводник при температуре, равной 0. Поэтому, чтобы получить зависимость нелинейного отклика от температуры, нужно умножить формулу (34) на $(1 - \tau)^{-1}$ и на некий постоянный множитель. Предполагая, что $\omega\lambda_d^2(0)/cd = 10^{-5}$, мы построили график зависимости $\mathbf{E}_{3\omega}^{rad}$ от температуры. Мы полагали амплитуду падающей волны такой, что $j_0/j_{c1}(0) = 0.05$, т. е. $E_{inc} = 0.05j_{c1}(0) \cdot 2\pi d/c$. Кро-

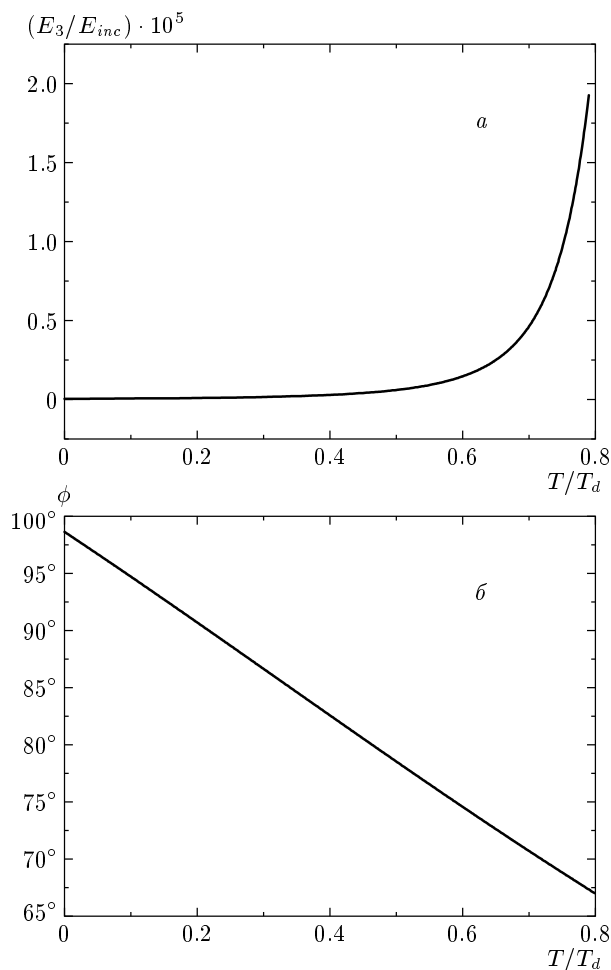


Рис. 7. Температурная зависимость амплитуды (а) и поляризации (б) нелинейного отклика в случае отсутствия пересечения линии, вдоль которой получен график, с линией фазового перехода. Амплитуда нелинейного отклика $E_{3\omega}^{rad}$ измеряется в амплитудах падающей волны E_{inc} . Значения параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $b_3/b_2 = 3$, $b_4/b_2 = -0.25$, $\gamma_s/\gamma_d = 1$, $\gamma_v/\gamma_d = 0.6$ (а), 1 (б), $T_s/T_d = 0.5$, $\alpha = 60^\circ$, $a - j_0/j_{c1}(0) = 0.05$, $\omega\lambda_d^2(0)/cd = 10^{-5}$

ме того, предполагалось, что падающая волна поляризована под углом 60° . Температурная зависимость оказалась плавно убывающей кривой (рис. 7а) без каких-либо резких изгибов. Пользуясь формулой (38), мы построили зависимость поляризации нелинейного отклика от температуры (рис. 7б). При температурах, близких к T_d , поляризация практически совпадает с поляризацией падающей волны α , затем по мере уменьшения температуры угол ϕ плавно увеличивается, проходит через 90° и уходит во второй квадрант. Таким образом, при некоей температуре нелинейный отклик поляризован вдоль оси

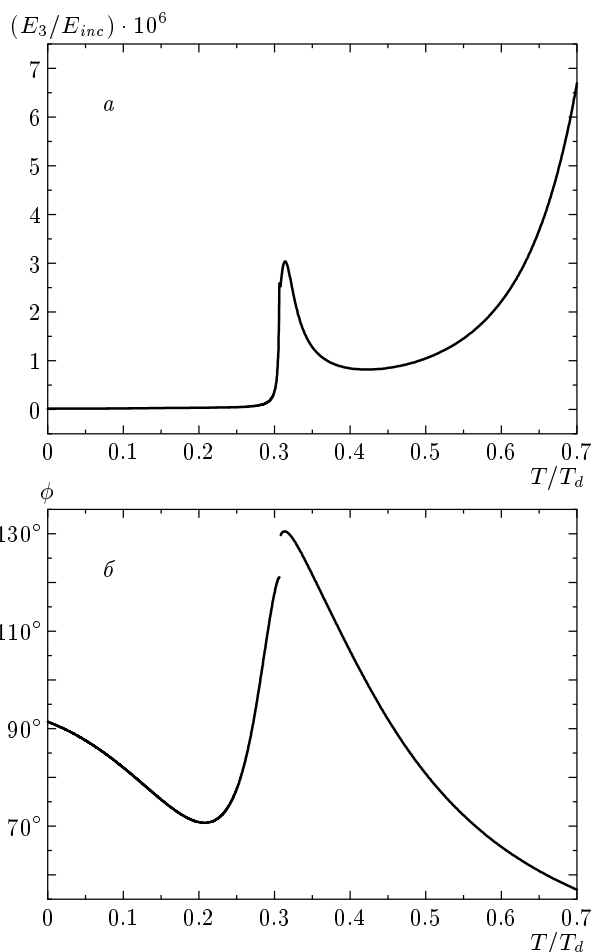


Рис. 8. Температурные зависимости амплитуды (а) и поляризации (б) нелинейного отклика в случае пересечения линии, вдоль которой получены графики, с линией фазового перехода АВ. Амплитуда нелинейного отклика $E_{3\omega}^{rad}$ измеряется в амплитудах падающей волны E_{inc} . Значения параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $b_3/b_2 = 3$, $b_4/b_2 = -1$ (а), -0.25 (б), $\gamma_s/\gamma_d = 1$, $\gamma_v/\gamma_d = 0.6$, $T_s/T_d = 0.5$, $\alpha = 60^\circ$, $a - j_0/j_{c1}(0) = 0.05$, $\omega\lambda_d^2(0)/cd = 10^{-5}$

кристалла, несмотря на то что падающая волна поляризована под углом к ней.

Рассмотрим второй случай, когда линия постоянного значения b_4 , вдоль которой мы строим температурные зависимости, пересекает линию фазового перехода АВ. В этом случае справа от линии фазового перехода следует воспользоваться формулой (31) для $\mathbf{j}_{e3\omega}$ и затем формулой (13) для нелинейного отклика, аналогично предыдущему случаю. Слева от линии фазового перехода следует использовать формулы (48) и (49) для $\mathbf{j}_{e3\omega}$ и затем формулу (50) для нелинейного отклика. Таким образом, мы получим

кривую, состоящую из двух кусков (рис. 8а). Видно, что температурная зависимость нелинейного отклика в данном случае имеет максимум, весьма близкий к фазовому переходу. С математической точки зрения этот максимум связан с расходимостью решения уравнения (27) в линейном по малому f_s приближении вблизи фазового перехода. При учете кубического члена расходимость исчезает и получается просто резкий максимум вблизи $a_{s+}^* = 0$. То, что этот максимум весьма острый, с математической точки зрения связано с неаналитичностью зависимости $\mathbf{j}_e(\mathbf{j}_0)$ вблизи фазового перехода АВ. Описанная ситуация вполне соответствует случаю резонанса в некой колебательной системе. Изменение температуры соответствует изменению собственной частоты колебательной системы, а учет нелинейных членов — ограничению амплитуды резонанса нелинейностью. Физически максимум связан с малостью возвращающей силы в системе в точке фазового перехода, поскольку разложение свободной энергии по параметру порядка начинается с членов четвертой степени в отличие от точек, не соответствующих фазовому переходу. На рис. 8б представлена зависимость угла поляризации нелинейного отклика от температуры. Видно, что эта зависимость имеет ярко выраженный максимум вблизи фазового перехода АВ. Таким образом, как амплитуда, так и поляризация нелинейного отклика оказываются чувствительными к фазовому переходу $d \leftrightarrow d \pm s$.

Рассмотрим третий случай — линия постоянного значения b_4 пересекает фазовый переход CD. При этом мы должны воспользоваться формулой (34) для нелинейного тока и формулой (15) для амплитуды нелинейного отклика справа от фазового перехода. Для области слева от фазового перехода следует использовать соотношение (59) для \mathbf{j}_e , затем (49) для $\mathbf{j}_{e3\omega}$ и (15) для нелинейного отклика. Таким образом, получим температурную зависимость нелинейного отклика, состоящую из двух кусков (рис. 9а). Видно, что амплитуда нелинейного отклика плавно уменьшается с уменьшением температуры, фактически никак не реагируя на фазовый переход. Отметим, что с математической точки зрения это обусловлено следующим обстоятельством. В отличие от ситуации с фазовым переходом АВ, формула (34) теряет применимость вблизи фазового перехода CD не из-за необходимости учета кубического члена в выражении (27), а из-за перехода системы в состояние с $V \neq 0$. Поэтому температурная зависимость справа от фазового перехода CD монотонно убывает при уменьшении температуры вплоть до очень близкой окрестности перехода. Ана-

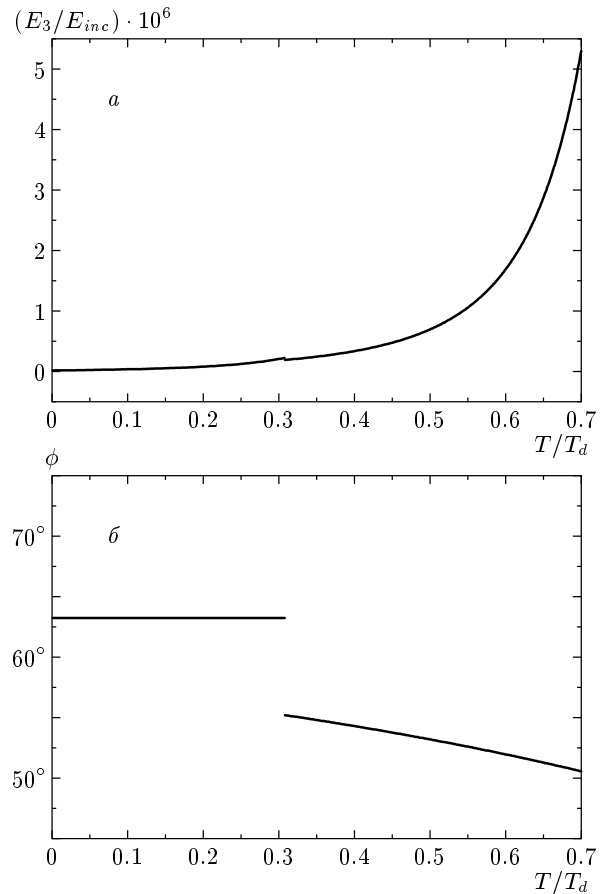


Рис. 9. Температурные зависимости амплитуды (а) и поляризации (б) нелинейного отклика в случае пересечения линии, вдоль которой получены графики, с линией фазового перехода CD. Амплитуда нелинейного отклика $E_{3\omega}^{rad}$ измеряется в амплитудах падающей волны E_{inc} . Значения параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.8$, $b_1/b_2 = 1$, $b_3/b_2 = 3$, $b_4/b_2 = 1$, $\gamma_s/\gamma_d = 1$, $\gamma_v/\gamma_d = 0.6$, $T_s/T_d = 0.5$, $\alpha = 60^\circ$, $a = j_0/j_{c1}(0) = 0.05$, $\omega\lambda_d^2(0)/cd = 10^{-5}$

логично, и слева от линии фазового перехода температурная зависимость будет монотонно возрастать при увеличении температуры вплоть до очень близкой окрестности перехода. Что происходит вблизи фазового перехода, мы не знаем, но указанные соображения, а также хорошая стыковка кривых на рис. 9а позволяют предполагать, что кривая не имеет всплесков или иных особенностей на линии фазового перехода. Таким образом, в данном случае амплитуда нелинейного отклика не чувствительна к фазовому переходу. Однако угол поляризации может быть чувствительным к фазовому переходу CD. Покажем это. В данном случае для угла поляризации можно пользоваться формулой (37), где H_2 и

H_1 должны быть определены из соотношения (59). Заметим, что из формулы (59) следует, что H_2 и H_1 не зависят от температуры. Поэтому и угол поляризации не будет зависеть от температуры при $T < T_{s-}^*$. В то же время при $T > T_{s-}$ поляризация зависит от температуры, как это следует из формулы (38). На рис. 9б приведена зависимость угла поляризации от температуры для тех же значений параметров, которые принимались при построении амплитуды нелинейного отклика. Отметим, что скачок на этой кривой связан с неприменимостью нашего рассмотрения вблизи фазового перехода. Очевидно, реальная температурная зависимость поляризации нелинейного отклика не должна иметь скачков или изломов. Поэтому следует ожидать, что в окрестности фазового перехода кривая непрерывным образом переходит из наклонной линии в горизонтальную прямую.

Итак, мы изучили температурную зависимость амплитуды нелинейного отклика, а также его поляризации в случаях, когда реализуются различные фазовые переходы. Оказалось, что и амплитуда нелинейного отклика, и его поляризация весьма чувствительны к фазовому переходу $d \leftrightarrow d \pm s$. Амплитуда нелинейного отклика оказалась нечувствительна к фазовому переходу $d \leftrightarrow d \pm is$, а поляризация — слабочувствительна. Обсудим теперь наши результаты с точки зрения их экспериментального наблюдения.

4. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы нашли нелинейный отклик сверхпроводника с двухкомпонентным s - и d -параметром порядка в рамках теории Гинзбурга–Ландау. Основным нашим результатом следует считать наличие резкого максимума нелинейного отклика вблизи фазового перехода $d \leftrightarrow d \pm s$. Мы показали, что этот максимум, равно как и изменение знака производной угла поляризации по температуре, связан с интерференционным членом в токе. Мы показали также, что амплитуда нелинейного отклика малочувствительна к фазовому переходу $d \leftrightarrow d \pm is$ и ведет себя в окрестностях этого перехода качественно так же, как нелинейный отклик простого d -сверхпроводника. Однако поляризация нелинейного отклика достаточно чувствительна и к этому фазовому переходу, поскольку слева от этого фазового перехода поляризация не зависит от температуры, тогда как справа зависимость достаточно сильная.

Обсудим полученные результаты с точки зрения их экспериментального наблюдения. Прежде всего рассмотрим абсолютные значения амплитуды нелинейного отклика. При построении графиков для амплитуды нелинейного отклика мы использовали значения величин из экспериментальной работы [17]. В этой работе измерялась амплитуда нелинейного отклика в зависимости от температуры, постоянного магнитного поля, а также амплитуды падающей волны. Поэтому есть возможность сравнить наши теоретические результаты с экспериментальными результатами этой работы. У нас получилось, что амплитуда нелинейного отклика меньше амплитуды линейного в 10^5 – 10^6 раз. Таким образом, характерное значение мощности нелинейного отклика в 10^{10} – 10^{12} раз меньше мощности падающей волны. В работе [17] при мощности падающей волны 0.1 Вт мощность нелинейного отклика при температурах, не слишком близких к критической температуре сверхпроводящего фазового перехода, имела порядок 10^{-11} Вт. Таким образом, имеем неплохое соответствие. Кроме того, в эксперименте наблюдалась температурная зависимость нелинейного отклика, имеющая максимум при температурах около 40 К. Наш результат также предсказывает наличие максимума нелинейного отклика вблизи фазового перехода $d \leftrightarrow d \pm s$, форма которого, однако, острее, чем наблюдаемая. Заметим, что острый в идеале максимум может быть размыт, например, вследствие неоднородностей образца или каких-либо других причин. Поэтому мы считаем, что есть основание предположить, во-первых, что нелинейный отклик при умеренных температурах связан с механизмом нелинейности Гинзбурга–Ландау, и, во-вторых, что в образце реализуется двухкомпонентный d - и s -параметр порядка.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с наблюдением поляризаций нелинейного отклика. Известно [14], что YBaCuO может быть как поликристаллом, так и монокристаллом. В случае идеального монокристалла все наши результаты справедливы без изменений. В случае же поликристалла, когда весь образец состоит из множества кристаллитов, у которых оси a и b разориентированы друг относительно друга, а ось c одна и та же, наши результаты также применимы, однако требуется их усреднение по всевозможным ориентациям осей a и b . При усреднении наших ответов следует полагать вектор \mathbf{E}_{inc} неизменным, а систему координат вращающейся с осью вращения z . Рассмотрим процедуру такого усреднения на примере формулы (34). Она имеет вид

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = s_1 \mathbf{j}_0 + s_2 \bar{\mathbf{j}}_0 \cos 2\alpha.$$

Усредняя такую формулу указанным выше образом, получим, что $\langle \mathbf{j}_{e3\omega} \rangle$ имеет проекцию на направление \mathbf{j}_0 и не имеет проекции на направление, ортогональное \mathbf{j}_0 . Проекция $\langle \mathbf{j}_{e3\omega} \rangle$ на направление \mathbf{j}_0 равна

$$\langle \mathbf{j}_{e3\omega} \rangle_{inc} = \left(s_1 - \frac{1}{2} s_2 \right) j_0. \quad (63)$$

Таким образом, усредненная формула (34) имеет вид

$$\mathbf{j}_{e3\omega} = \left\{ \frac{1}{4(1-\tau)^3} + \frac{1}{4} \frac{\alpha_d}{\alpha_{s+}^*} \frac{\gamma_v^2}{\gamma_d^2} \frac{1}{(\tau - \tau_{s+}^*)(1-\tau)^2} \right\} \frac{j_0^2}{j_{c1}^2(0)} \mathbf{j}_0. \quad (64)$$

Видно, что температурная зависимость амплитуды нелинейного отклика не сильно изменится по сравнению со случаем монокристалла. В то же время поляризация нелинейного отклика просто совпадает с поляризацией падающей волны в отличие от монокристалла. Физический смысл такого явления заключается в том, что в поликристалле единственным выделенным направлением остается направление поляризации падающей волны. Если нелинейный отклик отличен от 0, он может быть поляризован только вдоль направления электрического поля в падающей волне. Поэтому при усреднении все эффекты, связанные с различием поляризаций падающей волны и нелинейного отклика, исчезают. Из-за этого оказывается, что в случае поликристалла фазовый переход $d \leftrightarrow d \pm is$ не может быть наблюдаем с помощью исследования нелинейного отклика. В точке же фазового перехода $d \leftrightarrow d \pm s$ наблюдается максимум амплитуды нелинейного отклика как в случае монокристалла, так и в случае поликристалла, т. е. этот фазовый переход может быть наблюдаем при помощи нелинейного отклика и в случае поликристалла.

Интересен также вопрос о влиянии различных неоднородностей. Мы использовали модель однородного сверхпроводника, предполагая кристаллическую решетку идеальной. Однако реальные образцы ВТСП могут быть сильно неоднородными, что связано с тем, что вещество YBaCuO может образовывать несколько различных метастабильных фаз. Это ведет к появлению дополнительных механизмов нелинейности, обусловленных джозефсоновскими связями между гранулами, а также резким за-

теканием тока в гранулы при переходе их в сверхпроводящее состояние. Эти механизмы также могут приводить к появлению низкотемпературного максимума у нелинейного отклика, аналогичного максимуму, возникающему в нашей теории. Поэтому встает вопрос об экспериментальном способе разделения нелинейных откликов, обусловленных этими различными механизмами. Поскольку наша теория основывается на самой структуре кристалла, ее результаты качественно не должны зависеть от наличия или отсутствия, а также от положения крупномасштабных неоднородностей. Поэтому выделить часть нелинейного отклика, связанную со структурой параметра порядка, можно путем приготовления одинаковым способом нескольких образцов. Часть нелинейного отклика, связанная с неоднородностями, будет меняться, поскольку невозможно приготовить два образца с одинаковым распределением неоднородностей, тогда как часть, связанная с параметром порядка, меняться не будет.

В заключение обсудим сравнительные возможности линейной и нелинейной диагностики фазовых переходов. Мы выяснили, что нелинейный отклик чувствителен как к сверхпроводящему фазовому переходу, так и к другим фазовым переходам, которые могут существовать в сверхпроводнике со сложным параметром порядка. Сравним эти результаты с результатами для линейного отклика. Хорошо известно, что линейный отклик также весьма чувствителен к сверхпроводящему фазовому переходу. Изучим, чувствителен ли он к дополнительным фазовым переходам. Из формул, полученных нами в линейном приближении, нетрудно увидеть, что амплитуда отраженной волны никак не будет реагировать на дополнительные фазовые переходы. Поляризация отраженной волны в принципе чувствительна к фазовому переходу $d \leftrightarrow d \pm s$, однако, во-первых, этот эффект весьма слаб из-за почти полного отражения падающей волны и, во-вторых, скорее всего, совсем исчезнет после усреднения в случае поликристалла. Делая вывод, можно сказать, что нелинейная диагностика может выявить дополнительные фазовые переходы, а линейная — нет.

Авторы благодарят Ю. Н. Ноздрину и А. С. Мельникова за полезные обсуждения, а также Е. Е. Пестова за детальные объяснения техники эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-16533).

ЛИТЕРАТУРА

1. C. C. Tsuei and J. R. Kirtley, Rev. Mod. Phys. **72**, 969 (2000).
2. D. J. Van Harlingen, Rev. Mod. Phys. **67**, 515 (1995).
3. T. Strohm and M. Cardona, Sol. St. Comm. **104**, 233 (1997)
4. H. Srikanth, B. A. Willemsen, T. Jacobs et al., Phys. Rev. B **55**, 14733 (1997).
5. A. G. Sun, D. A. Gajewski, M. B. Maple, and R. C. Dynes, Phys. Rev. Lett. **72**, 2267 (1994).
6. J. Ma, C. Quitmann, R. J. Kelley et al., Science **267**, 862 (1995).
7. A. E. Ruckenstein, P. J. Hirschfeld, and J. Appel, Phys. Rev. B **36**, 857 (1987).
8. G. Kotliar, Phys. Rev. B **37**, 3664 (1988).
9. Q. P. Li, B. E. C. Koltenbah, and R. Joynt, Phys. Rev. B **48**, 437 (1993).
10. J. H. Xu et al., Phys. Rev. Lett. **73**, 2492 (1994).
11. J. F. Annett, Adv. Phys. **39**, 83 (1990).
12. R. Heeb, A. van Otterlo, M. Sigrist, and G. Blatter, Phys. Rev. B **54**, 9385 (1996).
13. A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov et al., Phys. Rev. B **62**, 11820 (2000).
14. Н. М. Плакида, *Высокотемпературные сверхпроводники*, Международная программа образования, Москва (1996).
15. Yong Ren, Ji-Hai Xu, and C. S. Ting, Phys. Rev. Lett. **74**, 3680 (1995).
16. M. Zapotovsky, D. L. Maslov, and P. M. Goldbart, Phys. Rev. B **55**, 6599 (1997).
17. А. Ю. Аладышкин, А. А. Андронов, Е. Е. Пестов и др., Изв. ВУЗов, радиофизика, т. XLVI, 123 (2003).