ЖЭТФ, 2005, том 127, вып. 5, стр. 1017–1025

ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ПРОЗРАЧНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. И. Жмогинов*[*], *Г. М. Фрайман

Институт прикладной физики Российской академии наук
603600, Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 22 ноября 2004 г.

Проанализирован спектральный состав релятивистски сильной однородной нелинейной электромагнитной волны в прозрачной бесстолкновительной плазме. Показано, что вихревая компонента поля волны содержит только нечетные гармоники, а потенциальная — только четные, причем, в прозрачной плазме волна остается квазимонохроматической, поскольку интенсивности гармоник спадают экспоненциально с ростом их номера. Выведено уравнение для описания распространения волновых пакетов, учитывающее дифракционные эффекты. Проведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными.

PACS: 52.38.Ph

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время с развитием фемтосекундных лазеров стало возможным получение лазерных импульсов с интенсивностью, достигающей 10^{19}–10^{21} Вт/см^2, и длительностью меньше пикосекунды. В полях таких импульсов в прозрачной плазме скорость колебательного движения электронов приближается к скорости света и как движение одиночной частицы, так и коллективные движения становятся существенно нелинейными, что, в свою очередь, делает нелинейным и процесс распространения лазерного импульса в плазме.

Нелинейное взаимодействие высокоинтенсивного лазерного излучения с плазмой стало темой многих экспериментальных и теоретических работ последнего десятилетия. К ним относятся, например, обзор [1], статьи [2–7]. Одной из тем, рассматриваемых в этих работах, является возбуждение плазменных колебаний после прохождения через плазму высокоинтенсивного лазерного импульса. В работе [7], например, показано, что лишь короткие импульсы (пространственный масштаб импульса должен быть много меньше длины плазменной волны) могут при правильной фазировке эффективно возбуждать плазменные колебания.

Однако наиболее интересным и богатым возможным приложением является анализ излучения на гармониках в поле такого высокоинтенсивного лазерного импульса. Неожиданно высокая эффективность процесса излучения гармоник, обнаруженная в эксперименте [1], дает основания полагать, что на базе этого явления возможно создание источников излучения ультрафиолетового и рентгеновского диапазонов длин волн. Так, в работе [2] теоретически анализируется некогерентное излучение гармоник в обратном к распространению импульса направлении. Полученные результаты, в частности, свидетельствуют о высокой эффективности процесса генерации гармоник. Основываясь на этом, авторы предлагают конструкцию лазерного синхротронного источника рентгеновского излучения, который отличается от известных аналогов рядом существенных преимуществ.

Излучение гармоник в направлении распространения лазерного импульса рассмотрено, в частности, в ряде статей [3–7]. Здесь исследуется как эффективность генерации гармоник в зависимости от длительности импульса, так и спектральный состав отклика плазмы, его зависимость от продольной координаты. Однако в работе [5], например, для нахождения спектра излучения плазмы рассматривается движение электронов лишь в поле падающей

[*]E-mail: azhmogin@princeton.edu

строго монохроматической волны без учета поля излучения самой плазмы. Такой подход позволяет получить верный результат лишь для гармоник не старше третьей.

Данная работа также посвящена анализу спектрального состава высокоинтенсивного электромагнитного возмущения, распространяющегося в плазме. Здесь рассмотрена задача об однородной бегущей нелинейной собственной волне прозрачной плазмы (электронная плотность n_e много меньше критической плотности n_{cr}). В рамках исследования однородной волны мы находим дисперсионное соотношение для нее и вычисляем приближенные значения амплитуд ее гармоник. Знание дисперсионного соотношения, в свою очередь, позволяет анализировать и динамику плавно-неоднородных волновых пакетов путем получения из него укороченных уравнений для огибающей импульса.

Идея рассмотрения данной задачи связана со сравнительно недавно опубликованным экспериментальным обзором [1], посвященным исследованию излучения вперед высших гармоник в прозрачной плазме при распространении в ней релятивистски сильного лазерного импульса. Оказалось, в частности, что высшие гармоники, имеющие частоту, в значительное число раз превосходящую частоту падающей волны, довольно ярко представлены в индуцированном излучении вперед. Кроме того, там присутствуют и четные гармоники, становящиеся одного порядка с нечетными при циркулярной поляризации исходной волны. Первое же простое «объяснение» авторами работы наблюдаемых результатов связано со сложной траекторией электронов в поле релятивистской волны. Как известно, в поле высокоинтенсивной монохроматической волны электрон описывает сложную траекторию формы «8», характеризующуюся богатым спектром, который, казалось бы, и должен порождать спектрально богатое электромагнитное излучение. Однако при рассмотрении ансамбля электронов оказывается, что их коллективное излучение в поле релятивистской волны не имеет такого богатого спектра. Оказывается, что искомая нелинейная волна представляет собой высокоинтенсивную монохроматическую волну и множество слабых сопровождающих ее поперечно-поляризованных гармоник, а также продольных электромагнитных колебаний. Спектр такой волны чрезвычайно беден, поскольку каждая гармоника оказывается слабее гармоники с меньшим на двойку номером в число раз, по порядку равное n_e/n_{crit}.

Причину такой квазимонохроматичности плазменной волны легко объяснить. Сложная траектория электрона формы «8» в поле высокоинтенсивной квазимонохроматической волны характеризуется наличием продольного движения заряженных частиц. Такое движение при учете релятивизма приводит и к существенной неоднородности концентрации электронов. В результате оказывается, что хотя поперечная скорость движения электронов в релятивистски сильных полях имеет много гармоник, поперечная составляющая макроскопического тока, пропорциональная произведению концентрации на поперечную скорость электрона, содержит, фактически, только одну гармонику [9]. Именно вследствие этого однородная нелинейная волна в плазме представляет собой монохроматическую волну, сопровождаемую гармониками, каждая следующая из которых значительно слабее предыдущей. При этом следует отметить, что поляризации гармоник совпадают с поляризацией первой гармоники.

Для решения поставленной задачи мы воспользуемся гидродинамическим описанием холодной плазмы, записав для поля в ней вакуумные уравнения Максвелла. Связь же макроскопического тока и пространственной плотности заряда с потенциалами электромагнитного поля находится из рассмотрения задачи о движении одного электрона в поле волны. В результате мы получаем самосогласованную систему уравнений, содержащую векторный и скалярный потенциалы поля. Эта система, как оказывается, описывается функцией Лагранжа, которая в новых переменных зависит лишь от одного малого параметра. Факт описания такой задачи лагранжианом уже обсуждался в работе [10], однако там, в отличие от данной работы, он получался для компонент импульса электрона, а не потенциалов электромагнитного поля нелинейной волны. Кроме того, в работе [10] анализ задачи останавливался на получении лагранжиана, не затрагивая, как в данной статье, вопроса определения излучения на гармониках. После анализа спектрального состава нелинейной волны мы рассмотрим вопрос о когерентности излучения плазмы, после чего из полученной системы найдем дисперсионное соотношение для нелинейной волны и далее укороченное уравнение, описывающее распространение огибающей плавно-неоднородного волнового пакета.

2. МАТЕРИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Выясним связь потенциалов электромагнитного поля в плазме с током результирующего движения заряженных частиц. Для этого рассмотрим задачу о движении релятивистского электрона в поле суперпозиции плоских однородных монохроматических поперечных волн с частотами $m\omega$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и волновыми векторами

$$m\mathbf{k} = \mathbf{z}_0 \omega n m / c$$

$(n = \omega/ck$ — неизвестный показатель преломления среды, близкий к 1; таким образом, $\chi = 1 - n$ — малый параметр задачи) и продольных электромагнитных возмущений на тех же частотах и с теми же волновыми векторами. Делая переход в лагранжиане такой задачи к новому «времени» $\theta = \omega t - kz$, в качестве которого выбирается фаза первой гармоники, несложно получить гамильтониан задачи (в случае отсутствия скалярного потенциала гамильтониан был вычислен в работе [9]):

$$H(\theta, \mathbf{w}, u) = \\ = -\frac{\sqrt{(u - nf)^2 + (1 - n^2)\left(1 + (\mathbf{a} + \mathbf{w})^2\right)}}{1 - n^2} - \frac{cf}{\omega} + \\ + \frac{cn\,(u - nf)}{\omega(1 - n^2)} = -\frac{c}{\omega}\,(\gamma + f)\,. \quad (1)$$

Здесь

$$u = -p_z/mc + n\gamma(\theta) + nf(\theta),$$
$$\mathbf{w} = -\mathbf{p}_\perp/mc - \mathbf{a}(\theta)$$

— новые импульсы задачи,

$$\mathbf{a}(\theta) = e\mathbf{A}/mc^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_l e^{il\theta},$$

$$f(\theta) = e\varphi/mc^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l e^{il\theta}$$

— нормированные векторный и скалярный потенциалы поля, γ — гамма-фактор электрона. Теперь, зная гамильтониан, можно получить выражения для скорости (по новому времени) электрона, т. е. определить тем самым траекторию его движения.

Поскольку гамильтониан не зависит явно от координат, импульсы u и $\mathbf{w}$ в процессе движения электрона не изменяются. Исходя из описанных выше свойств решения для потенциалов волны, несложно получить связь этих интегралов движения с его дрейфовыми импульсами $\mathbf{p}^{dr}$:

$$\mathbf{w} = -\langle \mathbf{p}_\perp \rangle_\theta / mc = -\mathbf{p}_\perp^{dr}/mc, \quad (2)$$

$$u - nf_0 \approx -\frac{p_z^{dr}}{mc} + \sqrt{1 + \frac{(\mathbf{p}^{dr})^2}{m^2c^2} + \langle a^2 \rangle_\theta} + O(\chi). \quad (3)$$

В системе отсчета, где электрон в среднем покоится, эти выражения упрощаются до (здесь и в дальнейшем полагаем $f_0 = 0$):

$$\mathbf{w} = 0, \quad (4)$$

$$u = \mathcal{E} \approx \sqrt{1 + \langle a^2 \rangle}. \quad (5)$$

Соотношения (1)–(3) позволяют, в принципе, найти траекторию движения отдельного электрона в поле волны. Перейдем теперь к вычислению тока в плазме. Для поиска пространственного распределения тока проинтегрируем выражение для тока одного электрона, имеющего дрейфовый импульс $\mathbf{p}$ $(|\mathbf{p}| \ll mc)$ по координате дрейфового центра его траектории $\mathbf{r}_0$ в начальный момент времени (применение такого подхода требует возможности осуществления перехода от суммы по частицам к интегралу по дрейфовым центрам, что возможно при условии когерентности индуцированного излучения). Будем считать, что движение электрона описывается выражением

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t),$$

где отклонение $\delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$ выбрано таким образом, чтобы $\delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, 0) = 0$, т. е. $\mathbf{r}_0$ — положение электрона в начальный момент времени, которое характеризует траекторию частицы в дальнейшие моменты времени. Тогда для полного тока в плазме будем иметь общее выражение:

$$\mathbf{j}_\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = en_e \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}_0', t) \times \\ \times \left| \frac{D(x_0' + \delta x(\mathbf{r}_0', t),\, y_0' + \delta y,\, z_0' + \delta z)}{D(x_0', y_0', z_0')} \right|^{-1}, \quad (6)$$

где $D(\ldots)/D(\ldots)$ — якобиан перехода, а $\mathbf{r}_0'$ — начальное положение электрона, находящегося в данный момент в точке $\mathbf{r}$, которое может быть определено из равенства

$$\mathbf{r}_0' + \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}_0', t) = \mathbf{r}.$$

В полученном выражении $e\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}_0', t)$ играет роль тока, создаваемого одним электроном, а оставшаяся часть $n_e|\ldots|^{-1}$ имеет смысл концентрации электронов в данной точке пространства.

Воспользовавшись тем, что в данной задаче во всех выражениях присутствует лишь зависимость от z_0, и выразив скорость электрона и частную производную отклонения частицы от начального положения через $d\mathbf{r}/d\theta$, получим

$$\mathbf{j}_\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = en_e \omega \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}, \quad (7)$$

откуда для отдельных компонент имеем

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}\perp}(\mathbf{r},t) = = -\frac{en_e c(\mathbf{w}+\mathbf{a})}{\sqrt{(u-nf)^2+(1-n^2)\left(1+(\mathbf{w}+\mathbf{a})^2\right)}}, \quad (8)$$

$$j_{\mathbf{p}z}(\mathbf{r},t) = \frac{en_e c}{1-n^2} \times \times \left(n - \frac{u-nf}{\sqrt{(u-nf)^2+(1-n^2)\left(1+(\mathbf{w}+\mathbf{a})^2\right)}}\right). \quad (9)$$

Рассмотрим теперь, как изменятся эти выражения, если учесть тепловое движение, полагая что оно существенно нерелятивистское, т. е. что тепловая энергия электрона мала по сравнению с его осцилляторной энергией в поле волны. Пусть известна изотропная функция распределения электронов по дрейфовым скоростям при данной температуре $g_0(\mathbf{p}) = g(p)$. Найдем полное выражение для пространственного распределения токов с точностью до членов порядка $(p_T/mca)^2 \ll 1$ (p_T — характерный тепловой разброс импульсов электронов):

$$\mathbf{j}_\perp(\mathbf{r},t) = \int \mathbf{j}_{\mathbf{p}\perp}(\mathbf{r},t) g(p)\, d^3p \approx \approx \mathbf{j}_{0\perp} - \frac{en_e c\eta \mathbf{a}}{3\left((\mathcal{E}-nf)^2+(1-n^2)(1+a^2)\right)^{3/2}}, \quad (10)$$

$$j_z(\mathbf{r},t) = \int j_{\mathbf{p}z}(\mathbf{r},t) g(p)\, d^3p \approx j_{0z}, \quad (11)$$

где

$$\eta = \int 4\pi p^4 g(p)\, dp/(mc)^2 \sim kT_e/mc^2,$$

$\mathbf{j}_0$ — ток, соответствующий нулевой температуре (может быть найден из соотношений (8) и (9) подстановкой $\mathbf{p} = 0$). Из формул для компонент вектора $\mathbf{j}$ видно, что выражение для $\mathbf{j}_\perp$ содержит исключительно нечетные гармоники, а выражение для $\mathbf{j}_z$ — лишь четные (если бы функция распределения частиц по дрейфовым скоростям была неизотропна, то в выражениях для токов присутствовали бы в общем случае все гармоники).

Следует особо отметить, что предположение о малости очередных гармоник $\mathbf{a}_{m+2}$ и φ_{m+2} относительно предыдущих $\mathbf{a}_m$ и φ_m позволяет сделать вывод о том, что в формулах для токов будет наблюдаться та же характерная особенность спектра, т. е. следующие по порядковому номеру гармоники будут слабее предыдущих.

3. САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЗАДАЧА

Ранее мы нашли выражение для плотности макроскопического тока, создаваемого лазерным пучком. Рассмотрим теперь задачу об излучении такой системы токов и получим вид самосогласованного электромагнитного возмущения, а также связь скорости распространения рассматриваемых нами возмущений в плазме с их амплитудой и концентрацией плазмы.

Будем рассматривать разреженную плазму, в которой концентрация электронов много меньше критической, но $n_e^{1/3}\lambda \gg 1$, т. е. можно пользоваться гидродинамическим приближением. Запишем уравнения Максвелла в рассматриваемой среде:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho_e - \rho_0), \\ &c\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \partial\mathbf{E}/\partial t, \\ &c\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{H}/\partial t. \end{aligned} \quad (12)$$

Делая переход к новому «времени» задачи $\theta = wt - kz$ и подставляя вместо полей производные потенциалов, получим

$$\begin{aligned} &\omega k \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = -4\pi j_\parallel, \\ &c\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\frac{d^2\mathbf{A}}{d\theta^2} = 4\pi\mathbf{j}_\perp. \end{aligned} \quad (13)$$

Приводя потенциалы полей $\mathbf{A}$ и φ к безразмерному виду и подставляя выражения для тока и плотности заряда (8), (9) с учетом (4) и (5), получим

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{n}\frac{d^2 f}{d\theta^2} = -1 + \frac{n(\mathcal{E}-nf)}{\sqrt{(\mathcal{E}-nf)^2+(1-n^2)(1+a^2)}}, \\ &\frac{\mu}{n^2}\frac{d^2\mathbf{a}}{d\theta^2} = -\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathcal{E}-nf)^2+(1-n^2)(1+a^2)}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\mu = \frac{mc^2k^2(1-n^2)}{4\pi e^2 n_e}. \quad (15)$$

Нас интересуют только старшие члены в разложении амплитуд гармоник по малому параметру χ. Нетрудно убедиться, что фигурирующие в левых частях этих уравнений множители μ/n и μ/n^2 можно приближенно заменить на μ, поскольку n близко к единице, а значит, его учет как множителя изменит спектры искомых функций на величины высшего порядка малости по χ. Заметим, кроме того, что в выражении $\mathcal{E} - nf$ можно сделать ряд приближений. Так, мы можем пренебречь константой n, а для $\mathcal{E}$ учитывать зависимость не от всех искомых амплитуд гармоник потенциалов, а (в предположении квазимонохроматичности электромагнитных полей) оставить лишь первую гармонику, считая

$$\mathcal{E} \approx \sqrt{1 + 2a_1^2}.$$

Введем малый параметр

$$\nu = 2\chi/\mathcal{E}^2.$$

Тогда полученную систему (14) с учетом сказанного выше можно описать в новых переменных

$$f_* = f/\mathcal{E} \ll 1, \quad \mathbf{a}_* = \sqrt{\nu}\mathbf{a} \ll 1, \quad \eta = \theta/\sqrt{\mathcal{E}\mu}$$

с помощью лагранжиана следующего вида:

$$L = \frac{f_*'^2}{2} + \frac{\mathbf{a}_*'^2}{2} - \sqrt{(1-f_*)^2 + \nu + \mathbf{a}_*^2} - f_*. \tag{16}$$

Заметим, что теперь задача характеризуется всего одним малым параметром ν, значение которого и определяет полностью вид нелинейного решения.

Из лагранжиана несложно получить законы сохранения энергии и момента импульса, т. е. два интеграла задачи:

$$E = \frac{f_*'^2}{2} + \frac{\mathbf{a}_*'^2}{2} + \\ + \sqrt{(1-f_*)^2 + \nu + \mathbf{a}_*^2} + f_* = \text{const}, \tag{17}$$

$$M_u = a_{*x}a'_{*y} - a_{*y}a'_{*x} = \text{const}. \tag{18}$$

Возможность описания самосогласованной задачи об однородных плазменных волнах с помощью лагранжиана и несложное выделение двух интегралов движения были уже отмечены в работе [10], однако там этот результат получался для нормированного импульса электрона. Кроме того, авторы работы [10] не интересовались амплитудами высших гармоник отклика плазмы, поскольку в момент написания работы этот вопрос еще не представлял такого интереса.

В ходе дальнейшего анализа оказывается, что даже если мы интересуемся амплитудами гармоник с точностью до старшего члена по малому параметру ν, в полученном лагранжиане при разложении нельзя отбрасывать члены высшего порядка малости по нему. Таким образом, раскладывая в лагранжиане (16) корень в ряд Тейлора, получим эквивалентную систему для самосогласованного поля:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_*}{d\eta^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \frac{(\nu + a_*^2)^k}{(1-f_*)^{2k}}, \\ \frac{d^2 a_*}{d\eta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(\nu + a_*^2)^{(k-1)} a_*}{(1-f_*)^{2k-1}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$c_k = \frac{(-1)^k (2k-3)!!}{(2k-2)!!}.$$

Из полученной системы следует одно важное свойство искомого решения: полагая, что $\mathbf{a}_*$ является нечетной функцией, т. е. содержит только нечетные гармоники, легко получить, что f_* — четная функция, т. е. содержит только четные гармоники. Кроме того, оказывается, что при рассмотрении случая не линейной, а циркулярной поляризации стационарной волны гармоники ни векторного, ни скалярного потенциалов возбуждаться не будут, поскольку движение электронов в поле циркулярно поляризованой волны строго поперечно и оно не может сопровождаться возникновением неоднородности электронной плотности.

Полученная система оказывается все еще достаточно сложной для анализа, поэтому воспользуемся еще одним упрощением. После записи уравнений для гармоник потенциалов оказывается, что если не учитывать слагаемое ν в сумме $\nu + a^2$, то это искажает результаты для амплитуд гармоник лишь на величины высших порядков малости по ν. Это можно пояснить, раскрыв скобки в выражении $(\nu + a_*^2)^k$. Действительно,

$$(\nu + a_*^2)^k = \nu^k (1 + a^2)^k = \nu^k (a^{2k} + C_k^1 a^{2k-2} + \ldots + 1).$$

В предположении о квазимонохроматичности потенциалов ($a_{2k+1} \sim \nu^k a_1$, $f_{2k} \sim \nu^k a_1$) заметим, что в первом слагаемом суммы гармоника с номером $2m$ будет иметь порядок ν^m, во втором — ν^{m+1} и т. д. А это говорит о том, что в выписанной сумме учет слагаемых помимо a^{2k} не обязателен. Таким образом, окончательно рассматриваемая система принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_*}{d\eta^2} &= -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \frac{a_*^{2k}}{(1-f_*)^{2k}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{a}_*}{d\eta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{a_*^{2k-2} \mathbf{a}_*}{(1-f_*)^{2k-1}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что эта система уравнений соответствует лагранжиану

$$L = \frac{f_*'^2}{2} + \frac{\mathbf{a}_*'^2}{2} - \sqrt{(1-f_*)^2 + \mathbf{a}_*^2} - f_*. \tag{21}$$

Теперь, рассматривая уравнения для отдельных гармоник потенциалов, легко понять, что упрощенная система (20) действительно имеет квазимонохроматическое решение искомого вида, что согласуется со сделанным нами ранее предположением

$$a_{2m+1} \sim \nu^m, \quad f_{2m} \sim \nu^m. \tag{22}$$

Этот важный вывод показывает, что амплитуда гармоник в разреженной плазме экспоненциально убывает с их номером. И потому возможность наблюдения высших гармоник когерентного излучения кажется сомнительной.

Формально для нахождения самосогласованного поля нам необходимо решить систему уравнений (20) с периодическими граничными условиями на некотором заранее неизвестном периоде переменной η, который определяется из условия наличия невырожденного решения. Учитывая, что период искомых возмущений по переменной θ равен 2π, легко получить выражение для ν, а значит, определить и скорость волны. Сделаем это, рассмотрев второе уравнение системы (20) для первой гармоники, учитывая квазимонохроматичность волны:

$$\nu = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \mathcal{E}^3}, \tag{23}$$

$$v = c\,(1+\chi) \approx c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2 \mathcal{E}}\right), \tag{24}$$

где $\mathcal{E} = \sqrt{1+2a_1^2}$. Теперь, поочередно выписывая уравнения для различных гармоник скалярного и векторного потенциалов, найдем их амплитуды:

$$f_2 \approx \mathcal{E}\,\frac{\nu a_1^2}{8}, \quad a_3 \approx -\frac{3\nu a_1^3}{64}, \tag{25}$$

$$f_4 \approx -\mathcal{E}\,\frac{19\nu^2 a_1^4}{2^{10}}, \quad a_5 \approx \frac{61\nu^2 a_1^5}{2^{13}}, \tag{26}$$

$$f_{2m} \sim \mathcal{E}\nu^m a_1^{2m} O(1), \tag{27}$$

$$a_{2m+1} \sim \nu^m a_1^{2m+1} O(1). \tag{28}$$

Выражение для третьей гармоники совпадает с полученным в работе [3], однако отличается от неверного, с нашей точки зрения, результата работы [5]. Таким образом, мы нашли не только фазовую скорость распространения нелинейной плоской волны в плазме, но и определили ее спектральный состав.

Учитывая, что в процессе анализа нами был использован целый ряд приближений, мы проверили полученные результаты с помощью численного эксперимента. Исходная система нелинейных дифференциальных уравнений решалась численно, и полученное самосогласованное решение сравнивалось с выписанным выше. Оказалось, что с предполагаемой степенью точности результаты совпадают.

Следует особо отметить, что в разреженной плазме свойства волны определяются только частотой, плотностью плазмы и амплитудой первой гармоники. Заметим также, что выражение (24) представляет собой не что иное, как приближенное дисперсионное соотношение для найденных нами нелинейных волн:

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2\sqrt{1+\langle a^2\rangle}}\right). \tag{29}$$

Важно отметить, что полученное дисперсионное соотношение можно использовать как для однородных волн в плазме, так и для нахождения укороченного уравнения для плавно неоднородных нелинейных волн в среде. В такой волне нас интересует изменение первой гармоники волны, все высшие гармоники будут локально связаны с ней уже известным нам образом. Укороченное уравнение для огибающей волнового пакета, получающееся из (29), выглядит следующим образом:

$$c\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{c^2\Delta_\perp \mathbf{a}}{2\omega} + \frac{\omega_p^2 \mathbf{a}}{2\omega\sqrt{1+aa^*/2}} = 0. \tag{30}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в ходе рассмотрения задачи об однородной бегущей релятивистски сильной нелинейной электромагнитной волне в прозрачной плазме была получена система уравнений для скалярного и векторного потенциалов самосогласованного электромагнитного поля такой волны. Как оказалось, эта система описывается лагранжианом, упрощая который удается оставить всего один параметр задачи. В итоге было показано, что искомая нелинейная волна квазимонохроматична, т. е. наиболее сильно в ней представлена первая гармоника. Для такой волны было найдено дисперсионное соотношение, установлен ее спектральный состав. Основной характеристикой полученного спектра оказалось то, что интенсивности гармоник быстро убывают с ростом их номера:

$$a_{2m+1} \sim (n_e/n_{crit})^m, \quad f_{2m} \sim (n_e/n_{crit})^m.$$

В заключение скажем несколько слов об условиях применимости используемого подхода. Проанализируем условия осуществления перехода при вычислении макроскопического тока от точного суммирования дельта-функций по частицам к интегрированию плотности частиц по физически бесконечно малому объему. Такой переход возможен, если значение поля излучения тока отдельных электронов в волновой зоне мало флуктуирует вокруг своего среднего значения при небольшом изменении положения частиц, т. е., если излучение когерентно.

Будем исходить из выражения для фурье-компонент вектор-потенциала поля излучения движущегося заряда в волновой зоне [8] (в нашем случае в связи с тем, что траектория движения частицы периодична, A_Ω будет иметь вид суммы дельта-функций от разности частот $\Omega - n\omega$, где ω — частота падающей волны):

$$\mathbf{A}_\Omega = e\frac{\exp(ikR_0)}{cR_0}\int \exp(i(\Omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))\,d\mathbf{r}, \qquad (31)$$

где $\mathbf{r}(t)$ — траектория движения частицы (начало координат выбирается внутри излучающего объема), $\mathbf{R}_0 = R_0\mathbf{n}$ — положение точки наблюдения, $\mathbf{k} = \mathbf{n}\Omega/c$.

Пусть электроны в среднем покоятся, тогда траектория движения единичного электрона характеризуется исключительно его начальным положением и для нее можно записать

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_\sim(\theta), \qquad (32)$$

где $\mathbf{r}_0$ — положение дрейфового центра траектории электрона. Подставляя следующее отсюда выражение для зависимости

$$t(\theta) = \omega^{-1}(\theta + hz_0 + hz_\sim(\theta))$$

($h = \omega/c$ — волновой вектор падающей волны) в (31), получаем

$$\mathbf{A}_\Omega = e\frac{\exp(ikR_0)}{cR_0}\times \\ \times\int \exp\left(i\left(\frac{\Omega}{\omega}(\theta+hz_0+hz_\sim(\theta))-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\sim(\theta)\right)\right)\times \\ \times\frac{d\mathbf{r}_\sim(\theta)}{d\theta}\,d\theta, \qquad (33)$$

откуда для системы зарядов с положениями дрейфовых центров $\mathbf{r}_m$ получим

$$\mathbf{A}_\Omega^\Sigma = e\frac{\exp(ikR_0)}{cR_0}\times \\ \times\int \exp\left(i\left(\frac{\Omega\theta}{\omega}+kz_\sim(\theta)-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\sim(\theta)\right)\right)\times \\ \times\frac{d\mathbf{r}_\sim(\theta)}{d\theta}\,d\theta\sum_{m=1}^{N}\exp\left(i\left(kz_m - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_m\right)\right), \qquad (34)$$

где N — полное число частиц. В этом выражении интеграл представляет поле излучения единичного электрона, а сумма описывает коллективные эффекты. Таким образом, задача свелась к анализу возможных отклонений этой суммы от своего среднего значения при различных флуктуациях электронной плотности.

Прежде чем строго рассматривать поставленную задачу, проведем качественный анализ суммы в выражении (34). Эта сумма представляет собой не что иное, как фурье-спектр плотности дрейфовых центров электронов по всему объему излучения. Рассмотрим для начала простейшую ситуацию, когда электроны расположены в объеме регулярно. В этом случае понятно, что фурье-спектр плотности дрейфовых центров представляет собой серию «пиков» толщиной $2\pi/L$ в узлах решетки с периодом $2\pi/l$, где l — межчастичное расстояние, а L — характерный размер объема излучения. Это значит, что в силу малости волнового числа падающего излучения по сравнению с $2\pi/l$ мы можем отбросить все высшие гармоники спектра в (34), т. е. учитывать только нулевую гармонику, соответствующую усредненному значению электронной плотности. Однако ясно, что если угол наблюдения довольно велик, сумма в выражении (34) будет близка к нулю, в силу того что волновые векторы интересующих нас гармоник значительно меньше $2\pi/l$, но превосходят $2\pi/L$. А в этом случае небольшие флуктуации положений дрейфовых центров электронов могут привести к флуктуациям амплитуды гармоники, очень заметным на фоне близкого к нулю среднего ее значения, что соответствует некогерентному излучению. Лишь при малых углах наблюдения и не слишком больших размерах излучающего объема (что увеличивает ширину линий спектра плотности дрейфовых центров) возможна ситуация, при которой волновой вектор $k\mathbf{z}_0 - \mathbf{k}$ будет лежать достаточно близко к нулю, чтобы среднее значение амплитуды искомой гармоники заметно превышало ее флуктуации, т. е. чтобы излучение было когерентным.

Точный статистический анализ фурье-спектра плотности дрейфовых центров электронов требует задания модели среды и конфигурации электромагнитного импульса. Для оценок будем рассматривать самую простую модель однородной холодной плазмы с невзаимодействующими электронами и предполагать импульс резким, с характерным масштабом r. В этом случае условие когерентности приобретает следующий вид [14]:

$$\lambda_0^3 n_e \gg 100\frac{r}{\lambda_0}l^4\alpha^4, \qquad (35)$$

где λ_0 — длина волны падающего излучения, α — угол между направлением распространения и направлением наблюдения, l — номер наблюдаемой гармоники.

Оценки, проведенные для экспериментальной работы [1], показали, что характерное значение угла, под которым можно наблюдать когерентное излучение гармоник вплоть до 10, составляет несколько градусов.

Обсудим теперь связь полученных результатов с экспериментальными данными, приведенными в экспериментальном обзоре [1]. В обзоре показано, что высшие гармоники, имеющие частоту, в значительное число раз превосходящую частоту падающей волны, довольно ярко представлены в индуцированном излучении вперед (эффективность порядка 10^{-7}–10^{-6}). Кроме того, в нем присутствовали и четные гармоники, становящиеся одного порядка с нечетными при циркулярной поляризации исходной волны. В работе было также показано, что интенсивность всех наблюдаемых нечетных гармоник пропорциональна квадрату концентрации плазмы, а степень для четных гармоник лежит в диапазоне 1.2–1.4. Кроме того, было обнаружено, что, например, восьмая гармоника вообще пропадает при понижении интенсивности падающего на плазму пучка ниже 10^{17} Вт $\cdot$ см$^{-2}$, причем положение этого порога не зависит от плотности плазмы. Авторы считали, что эти и другие наблюдаемые эффекты, существенно отличающие данную ситуацию от классического приближения слабых полей, могут быть объяснены сложной траекторией электрона (формы «8»), движущегося в поле релятивистской монохроматической волны.

Однако в рамках данной работы был сделан ряд выводов, применимых к условиям обсуждаемого эксперимента (излучение вперед в прозрачной плазме), но никак не согласующихся с наблюдаемыми эффектами: отсутствие излучения на высших гармониках при циркулярной поляризации лазерного импульса, чрезвычайно низкая эффективность генерации четных гармоник по сравнению с нечетными (излучение четных гармоник происходит лишь в окрестности границ импульса, в случае однородной волны четные гармоники вообще не представлены в излучении плазмы), быстрое убывание амплитуд гармоник с ростом их номера,

$$a_{2m+1} \sim (n_e/n_{crit})^m, \quad f_{2m} \sim (n_e/n_{crit})^m.$$

Так, например, для условий, обсуждаемых в работе [1], эффективность генерации третьей гармоники должна быть порядка 10^{-12}, что значительно меньше значений, наблюдаемых в эксперименте. Для более высоких гармоник это отличие должно быть еще более сильным в связи с экспоненциальной зависимостью (27), (28) гармоник излучения от плотности плазмы. Даже если предположить, что имеется некоторый механизм, разрушающий «сфазированность» излучения электронов, что сказывается на том, что излучение плазмы «вперед» перестает быть когерентным, и наш подход, основанный на вычислении излучения токов, становится неоправданным, легко провести оценки некогерентного излучения плазмы под небольшим углом к направлению распространения лазерного импульса. Для условий эксперимента, приведенных в [1], оказывается, что эффективность генерации третей и пятой гармоник не превосходит 10^{-12}–10^{-11}, что значительно меньше эффективностей, полученных в ходе эксперимента.

Таким образом, для успешного описания наблюдаемых в эксперименте результатов необходимо найти какой-то иной механизм генерации высших гармоник. Подробное обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашей работы. Однако отметим, что одним из таких механизмов могло бы быть когерентное тормозное излучение электронов, появившихся в результате фотоионизации в поле лазерного импульса, подробно рассмотренное в работе [15] (здесь следует также упомянуть обзор [16]). Авторами этой работы обсуждается излучение электронов, появившихся в результате ионизации атомов волной в режиме подавления ионизационного потенциала. Известно, что характерные интенсивности, при которых осуществляется фотоионизация и достигается оптимум модели [15] не превышают по порядку величины 10^{15}–10^{16} Вт $\cdot$ см$^{-2}$. Однако интенсивности, обсуждаемые в рамках как нашей работы, так и обзора [1] находятся в диапазоне релятивистских интенсивностей порядка 10^{18}–10^{21} Вт $\cdot$ см$^{-2}$.

Другим возможным механизмом, объясняющим наблюдаемые эффекты, может быть столкновительное излучение плазмы, подробно рассмотренное в работах [11, 12]. В этих работах плазма считается полностью ионизованной, т. е. ограничение по интенсивности снимается. В пользу того, что такое объяснение возможно, говорит, например, то обстоятельство, что в работе [12], как и в экспериментальном обзоре [1], обнаружена сложная зависимость интенсивности когерентного излучения столкновительного тока от концентрации плазмы. Такое излучение на гармониках должно быть максимально на границе некоего малоуглового конуса, ось которого совпадает с направлением распространения лазерного импульса. Приведенная в обзоре [1] зависимость интенсивности гармоник от угла наблюдения не имеет локального минимума в направлении распространения импульса, что, однако, может быть объяснено невысокой разрешающей способностью регистрирующего прибора. Главным же основанием считать, что теория столкновительного излучения может объяснить наблюдаемые зависимости, является сходство полученной в рамках этой модели эффективности генерации третьей гармоники с наблюдаемой в эксперименте. Для более детального выяснения возможности объяснения обнаруженных закономерностей разработанной теорией необходимо проводить дальнейшие исследования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17275).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banerjee, A. R. Valenzuela, R. C. Shah, A. Maksimchuk, and D. Umstadter, Phys. Plasmas **9**, 2393 (2002).

2. E. Esarey, S. K. Ride, and P. Sprangle, Phys. Rev. E **48**, 3003 (1993).

3. W. B. Mori, C. D. Decker, and W. P. Leemans, IEEE Trans. Plasma Sci. **21**, 110 (1993).

4. G. Zeng, B. Shen, W. Yu, and Z. Xu, Phys. Plasmas **3**, 4220 (1996).

5. E. Esarey, A. Ting, P. Sprangle, D. Umstadter, and X. Liu, Trans. Plasma Sci. **21**, 95 (1993).

6. P. Sprangle, E. Esarey, and A. Ting, Phys. Rev. **41**, 4463 (1990).

7. J. M. Rax and N. J. Fisch, Phys. Fluids B **5**, 2578 (1993).

8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва(1988).

9. М. Д. Токман, Физика плазмы, **25**, № 2, 160 (1999).

10. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).

11. G. M. Fraiman, V. A. Mironov, and A. A. Balakin, Phys. Rev. Lett. **82**, 319 (1999).

12. А. А. Балакин, Г. М. Фрайман, ЖЭТФ **120**, 797 (2001).

13. A. I. Zhmoginov and G. M. Fraiman, in *30th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys.*, St. Petersburg (July 2003), Vol. 27A, p. 58.

14. S. M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskij, *Principles of Statistical Radiophysics*: *Vol. 2*, Springer-Verlag, Berlin (1988), p. 231.

15. В. П. Силин, ЖЭТФ **121**, 291 (2002).

16. G. L. Yudin and M. Yu. Ivanov, Phys. Rev. A **63**, 033404 (2001).