

ЭФФЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУНЫ С ТОКОМ

*П. О. Казинский**

*Томский государственный университет
634 050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 21 февраля 2005 г.

Получены уравнения движения электрически заряженной струны с током во внешнем электромагнитном поле с учетом первой поправки от самодействия. Показано, что репараметризационная инвариантность свободного действия струны накладывает ограничения на возможный вид тока. Найдены эффективные уравнения движения абсолютно эластичной заряженной струны, имеющей форму кольца (окружности). Получены уравнения для внешних электромагнитных полей, при которых возможны стационарные состояния такого кольца. Найдены решения эффективных уравнений движения абсолютно эластичного заряженного кольца в отсутствие внешних полей, а также во внешнем постоянном однородном магнитном поле. В последнем случае дана оценка частоты, на которой можно наблюдать излучение, создаваемое кольцом. Предложена модель абсолютно нерастяжимой заряженной струны с током, в рамках которой получены эффективные уравнения движения и найден класс их решений.

PACS: 03.50.De, 11.27.+d

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание эффективной динамики электрически заряженных низкоразмерных объектов таких как частицы, струны и мембраны является одной из традиционных задач классической электродинамики. Использование таких моделей позволяет значительно упростить решение системы интегродифференциальных уравнений Максвелла–Лоренца. Для нерелятивистской заряженной частицы эффективные уравнения движения были получены еще Лоренцем [1]. Релятивистское обобщение уравнений Лоренца было получено Дираком [2]. В настоящее время известны эффективные уравнения движения для точечного заряда на фоне искривленного пространства-времени [3], спиновой частицы [4, 5], массивной частицы в высших измерениях [6, 7] и безмассовой заряженной частицы в четырехмерном пространстве-времени [8]. Общая схема описания самодействия электрических токов в струнных моделях была дана в [9]. В работе [10] описана общая теория двигающихся электрически заряженных релятивистских мембран.

В данной работе получено приближенное (без учета эффекта радиационного трения) пуанкаре-инвариантное описание эффективной динамики тонкой электрически заряженной струны с током. Важность изучения эффективной динамики таких струн несомненна, ввиду многочисленных приложений, как на практике, так и в теоретических моделях протяженных заряженных и/или проводящих ток объектов, поперечными размерами которых можно пренебречь. Так, полученные в разд. 2 эффективные уравнения движения применяются в разд. 3, 4 для двух конкретных моделей струны. В разд. 3 рассматривается эффективная динамика абсолютно эластичной заряженной струны¹⁾, имеющей форму кольца. Такая модель описывает динамику высокоточного пучка заряженных частиц, двигающихся по окружности. В разд. 4

¹⁾ Абсолютно эластичной струной будем называть такую струну, которая не оказывает существенного сопротивления воздействию как внешнему, так и вызванному собственными полями. Такой струной может быть, например, мысленная линия, вдоль которой течет ток. Не следует путать это понятие с известной моделью струны Намбу–Гото в пределе нулевого натяжения (см., например, [11]), где струна все же имеет собственную динамику.

*E-mail: kpo@phys.tsu.ru

изучается эффективная динамика абсолютно нерастяжимой заряженной струны с током. В разд. 2 приведен вывод эффективных уравнений движения заряженной струны с током, а также обсуждаются некоторые их свойства и, в частности, в случае репараметризационно-инвариантного свободного действия струны найдены генераторы калибровочных преобразований и ограничения на возможный вид тока, текущего по струне.

Заряженную струну будем описывать в рамках модели идеально тонкой струны. Как известно, учет самодействия для такой струны дает расходящееся выражение для силы самодействия, поскольку бесконечно близкие точки заряженной идеально тонкой струны взаимодействуют друг с другом с бесконечной силой. Процедура регуляризации, физический смысл которой состоит в «размазывании» сингулярного источника электромагнитного поля, позволяет представить силу самодействия в виде асимптотического ряда по параметру регуляризации — радиусу сечения струны, — который содержит одно логарифмически расходящееся слагаемое. Чем меньше радиус сечения струны, тем больший вклад вносит эта расходимость в силу самодействия. Для достаточно тонкой струны можно пренебречь остальными членами асимптотического ряда и получить эффективные уравнения движения тонкой заряженной струны в виде системы дифференциальных уравнений, а не интегродифференциальных, которые мы имели бы при учете всех членов асимптотического ряда. Аналогичные уравнения получаются при описании эффективной динамики космических струн (см. обзор [12]).

2. ЗАРЯЖЕННАЯ СТРУНА С ТОКОМ

В этом разделе найден ведущий вклад от самодействия электрически заряженной струны с током и получены уравнения движения струны во внешнем поле с учетом этой поправки. Показано, что условие репараметризационной инвариантности свободного действия струны накладывает ограничения на возможный вид тока, текущего по струне.

Пусть задана замкнутая струна N с координатами $\{\tau, \sigma\}$, $\sigma \in [0, 2\pi)$, вложенная при помощи гладкого отображения $x(\tau, \sigma)$ в пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$ с координатами $\{x^\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ и метрикой $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, и пусть на N задана векторная плотность $e(\tau, \sigma)$, характеризующая электрический ток, текущий по струне. Тогда плотность то-

ка с точки зрения объемлющего пространства имеет вид (см., например, [10])

$$j^\mu(x) = c \int \delta^4(x - x(\tau, \sigma)) e^i(\tau, \sigma) \times \partial_i x^\mu(\tau, \sigma) d\tau d\sigma, \quad (1)$$

где c — скорость света, причем легко видеть, что закон сохранения заряда $\partial_\mu j^\mu = 0$ немедленно влечет $\partial_i e^i = 0$. Здесь и далее латинские индексы пробегают значения 0, 1 и отвечают, соответственно, τ и σ .

Введем невырожденное симметричное скалярное произведение на линейном пространстве n -форм на $\mathbb{R}^{3,1}$ следующим образом:

$$\langle X, Y \rangle = n! \int_{\mathbb{R}^{3,1}} X \wedge *Y = \int_{\mathbb{R}^{3,1}} X_{\mu_1 \dots \mu_n} Y^{\mu_1 \dots \mu_n} d^4x, \quad (2)$$

здесь $*$ — оператор Ходжа, переводящий n -формы в $(4 - n)$ -формы, а \wedge обозначает внешнее умножение форм. В этих терминах действие рассматриваемой модели запишется как

$$S[A, x] = -\frac{1}{8\pi c} \langle A, \delta dA \rangle - \frac{1}{c^2} \langle j, A \rangle + S_0[x], \quad (3)$$

где d — внешний дифференциал, $\delta = *d*$, A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля, а $S_0[x]$ — действие, описывающее собственную динамику струны. Уравнения движения для действия (3) имеют вид

$$\delta F = -\frac{4\pi}{c} j, \quad \frac{\delta S_0[x]}{\delta x^\mu} = \frac{1}{c^2} \left\langle \frac{\delta j[x]}{\delta x^\mu}, A \right\rangle = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} e^i \partial_i x^\nu, \quad (4)$$

где $F = dA$ — напряженность электромагнитного поля.

Для того чтобы получить эффективные уравнения движения струны, необходимо решить уравнения Максвелла для произвольной конфигурации струны и подставить их решение в выражение для силы Лоренца. После подстановки получим плохо определенное (расходящееся) выражение для силы самодействия струны:

$$F_\mu^{rr}[x] = -\frac{4\pi}{c^3} \left\langle \frac{\delta j[x]}{\delta x^\mu}, G j[x] \right\rangle, \quad (5)$$

где G — оператор, ядром которого является запаздывающая функция Грина. Применяя к этому выражению процедуру регуляризации [13], получим для

него асимптотический ряд по параметру регуляризации, в котором будет одна логарифмическая расходимость. Параметр регуляризации имеет смысл радиуса сечения струны, при стремлении которого к нулю сила реакции излучения расходится. Если же сечение струны имеет конечный, но малый характерный радиус, то полученная расходимость будет вносить наиболее существенный вклад в силу самодействия, причем, чем меньше радиус сечения, тем большим будет этот вклад.

Используя разработанный в работе [13] формализм, легко получить, что появляющаяся в выражении для силы самодействия логарифмическая расходимость может быть получена варьированием действия с лагранжианом²⁾

$$L^{sing} = -\frac{1}{c} \frac{e^i \partial_i x_\mu e^j \partial_j x^\mu}{\sqrt{|h|}} \times \times 2 \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = -\frac{1}{c} \frac{e^2}{\sqrt{|h|}} 2 \ln \frac{\Lambda}{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}, \quad (6)$$

где $e^2 = e^i e^j h_{ij}$, $h_{ij} = \partial_i x_\mu \partial_j x^\mu$ — индуцированная метрика на струне, $h = \det h_{ij}$, параметр Λ характеризует обрезание интеграла на верхнем пределе, его величина имеет порядок длины струны, а ε , параметр обрезания интеграла на нижнем пределе, — порядок радиуса сечения струны.

Введем векторное поле $V^i = e^i / \sqrt{|h|}$ и 1-форму $v_i = h_{ij} V^j$. Тогда, пренебрегая конечной частью силы реакции излучения, получаем следующие эффективные уравнения движения струны:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_0[x]}{\delta x^\mu} &= \frac{\chi}{c} (T^{ij} \nabla_{ij} x_\mu + \nabla_i T^{ij} \partial_j x_\mu) \sqrt{|h|} + \\ &+ \frac{1}{c} F_{\mu\nu} e^i \partial_i x^\nu, \\ T^{ij} &= V^2 h^{ij} - 2V^i V^j, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\chi = 2 \ln(\Lambda/\varepsilon)$ — безразмерная постоянная, $F_{\mu\nu}$ — напряженность внешнего электромагнитного поля, ∇_i — связность, согласованная с метрикой h_{ij} . Бесследовый тензор T^{ij} является плотностью тензора энергии-импульса, отвечающего лагранжиану (6), т. е.

$$T_{\mu\nu}^{sing} = = \frac{\chi}{c} \int \delta^4(x - x(\tau, \sigma)) T^{ij} \partial_i x_\mu \partial_j x_\nu \sqrt{|h|} d\tau d\sigma. \quad (8)$$

Бесследовость тензоров T^{ij} и $T_{\mu\nu}^{sing}$ является следствием конформной инвариантности лагранжиана (6).

Если свободное действие струны $S_0[x]$ репараметризационно-инвариантно, то уравнения движения (7) обладают «остаточной» репараметризационной инвариантностью, следствием которой является ортогональность уравнений вектору $V^i \partial_i x^\mu$. Кроме того, мы имеем

$$\nabla_k T_i^k = -2i_V dv_i = -\chi^{-1} \partial_i x^\mu F_{\mu\nu} V^k \partial_k x^\nu. \quad (9)$$

В частности, в случае отсутствия внешнего поля последнее равенство и закон сохранения заряда, $\nabla_i V^i = 0$, влекут

$$dv = 0, \quad \delta v = 0, \quad (10)$$

т. е. v — гармоническая 1-форма. Если замкнутая струна не имеет самопересечений, уравнения (10) легко решить. Накладывая конформную калибровку

$$\dot{x}_\mu x'^\mu = 0, \quad \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = -x'_\mu x'^\mu, \quad (11)$$

где точка означает производную по τ , а штрих — по σ , получаем общее решение уравнений (10) в виде

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau), \\ I &= I_0 - f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь введены более привычные обозначения $\lambda = e^0$ и $I = e^1$, λ_0, I_0 — произвольные константы, а f и g — произвольные 2π -периодические функции. Другими словами, при отсутствии внешнего поля требование сохранения энергии-импульса приводит к тому, что линейная плотность заряда и ток связаны между собой и имеют вид (12).

Уравнения (10) являются в рамках нашего приближения математической записью условия сверхпроводимости струны: одно из них выражает закон сохранения заряда, а другое говорит о том, что в отсутствие внешних полей изменение тока со временем в заданной точке струны обусловлено только градиентом линейной плотности заряда. Выполнение этих уравнений следует из требования репараметризационной инвариантности свободного действия $S_0[x]$. Верно и обратное, т. е. из выполнения условий сверхпроводимости (10) для произвольной конфигурации струны следует репараметризационная инвариантность ее свободного действия.

²⁾ Этот же результат можно получить, и не используя общую ковариантную процедуру регуляризации реакции излучения в теориях с сингулярными источниками, предложенную в [13]. Ведущая расходимость однозначно фиксируется из соображений пуанкаре-инвариантности и репараметризационной инвариантности, а также вида выражения, стоящего при δ -функции в формуле (1). Эти соображения часто используются для получения ведущих расходимостей [14, 9, 15].

Используя закон сохранения энергии-импульса (9), можно записать уравнения движения струны во внешнем поле в виде

$$\frac{\delta S_0[x]}{\delta x^\mu} = \frac{\chi}{c} T^{ij} \nabla_{ij} x_\mu \sqrt{|h|} + \frac{1}{c} \gamma_\mu^\rho F_{\rho\nu} e^i \partial_i x^\nu, \quad (13)$$

где

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h^{ij} \partial_i x_\mu \partial_j x_\nu.$$

Таким образом, если свободное действие электрически заряженной струны с током репараметризационно-инвариантно, то ее эффективная динамика во внешнем электромагнитном поле описывается системой уравнений (9), (13).

В том случае, когда сингулярный вклад достаточно велик, т. е. струна является достаточно тонкой ($\chi \gg 1$) и текущий по ней ток либо линейная плотность заряда велики, можно пренебречь левой частью уравнений (7), при этом свободная эффективная динамика струны будет полностью определяться ведущим вкладом силы самодействия заряженной струны. Мы называем такую струну абсолютно эластичной, ввиду того что ее внутренняя структура не оказывает существенного сопротивления воздействию.

Дальнейшее увеличение плотности тока приведет к тому, что можно будет пренебречь также и воздействием внешнего поля, и тогда эффективная динамика струны будет описываться уравнением

$$T^{ij} \nabla_{ij} x_\mu = 0 \quad (14)$$

при условии, что v — гармоническая 1-форма.

Далее будем решать систему уравнений (9), (13) для модели абсолютно эластичной струны, имеющей форму кольца, во внешнем электромагнитном поле, а также рассмотрим модель абсолютно нерастяжимой заряженной струны с током, для которой получим эффективные уравнения движения и некоторые их частные решения.

3. ЗАРЯЖЕННОЕ КОЛЬЦО

Как уже отмечалось во Введении, модель абсолютно эластичной заряженной струны описывает высокоточный пучок заряженных частиц, поэтому представляет интерес рассмотреть ее эффективную динамику во внешнем электромагнитном поле. В этом разделе мы рассмотрим эффективную динамику абсолютно эластичной заряженной струны, имеющей форму кольца (окружности). Далее получим уравнения для внешних электромагнитных полей,

при которых возможны стационарные состояния такого кольца. Затем найдем решения свободных уравнений движения, а также решим уравнения движения равномерно заряженного кольца во внешнем постоянном однородном магнитном поле. Последняя модель описывает поведение высокоточного пучка заряженных частиц в синхротроне.

Рассмотрим удобную для последующих вычислений калибровку. Введем координаты $\{\tau, \sigma\}$ так, чтобы в них векторная плотность e^i выпрямлялась, т. е. имела вид $e = (1, 0)$. Покажем, что такие координаты можно ввести, не изменяя координаты τ .

Пусть в исходных координатах $\{t, l\}$ векторная плотность e имела компоненты (λ, I) , тогда в системе координат $\{\tau, \sigma\}$ получаем

$$e^0 = \frac{\dot{\tau}\lambda + \tau'I}{\dot{\tau}\sigma' - \tau'\dot{\sigma}}, \quad e^1 = \frac{\dot{\sigma}\lambda + \sigma'I}{\dot{\tau}\sigma' - \tau'\dot{\sigma}}, \quad (15)$$

здесь точки и штрихи означают, соответственно, производные по t и l . Полагая $e^0 = 1, e^1 = 0$ и $\dot{\tau} = 1, \tau' = 0, \sigma' \neq 0$ для координаты σ имеем

$$\dot{\sigma} = -I, \quad \sigma' = \lambda \quad (16)$$

при условии, что в рассматриваемой точке $\lambda \neq 0$. Условие интегрируемости уравнений (16) выполняется в силу сохранения заряда. Например, если $dl = \sqrt{\partial_\sigma \mathbf{x} \partial_\sigma \mathbf{x}} d\sigma$ — элемент длины струны, то линейная плотность заряда запишется как

$$|\lambda| = (\partial_\sigma \mathbf{x} \partial_\sigma \mathbf{x})^{-1/2}. \quad (17)$$

Другими словами, координата σ отсчитывает заряд на струне. Далее будем предполагать, что $\lambda \neq 0$ во всех точках струны.

Дополнительно к указанной выше калибровке потребуем, чтобы

$$x^0(\tau, \sigma) = c\tau \Rightarrow \tau = t. \quad (18)$$

Тогда метрика, индуцированная на мировом листе кольца,

$$x^0 = ct, \quad \mathbf{x}(t, \sigma) = r(t)(\cos \varphi(t, \sigma), \sin \varphi(t, \sigma), 0), \quad (19)$$

и обратная к ней имеют вид

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} c^2 - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 & -r^2 \dot{\varphi} \varphi' \\ -r^2 \dot{\varphi} \varphi' & -r^2 \varphi'^2 \end{bmatrix},$$

$$h^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c^2 - \dot{r}^2} & -\frac{\dot{\varphi}}{\varphi'(c^2 - \dot{r}^2)} \\ -\frac{\dot{\varphi}}{\varphi'(c^2 - \dot{r}^2)} & -\frac{c^2 - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2}{r^2 \varphi'^2 (c^2 - \dot{r}^2)} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Здесь и далее штрихи означают производные по σ . Детерминант индуцированной метрики равен $h = -r^2\varphi'^2(c^2 - \dot{r}^2)$. Функции $\dot{\varphi}(t, \sigma)$ и $\varphi'(t, \sigma)$ — гладкие Q -периодические по переменной σ функции, где $Q = \text{const}$ — полный заряд кольца. Линейная плотность заряда равна $\lambda = 1/r\varphi'$, здесь мы согласовали знаки λ и φ' . Нулевая гармоника $\varphi'(t, \sigma)$ по переменной σ равна $2\pi/Q$, в частности, если кольцо равномерно заряжено, то $\varphi' = 2\pi/Q$.

Условие абсолютной эластичности струны означает, что свободное действие струны $S_0[x] \equiv 0$. В этом случае уравнения (13) запишутся как

$$T^{ij}\nabla_{ij}x_\mu\sqrt{|h|} = -\gamma_\mu^\rho F_{\rho\nu}e^i\partial_ix^\nu, \quad (21)$$

где переопределено внешнее поле $F_{\mu\nu} \rightarrow \chi F_{\mu\nu}$. Во всех дальнейших формулах этого раздела электромагнитные поля будут содержать χ^{-1} . Также будем предполагать, что внешнее поле обладает цилиндрической симметрией и $E_z = H_r = H_\varphi = 0$, где, как обычно, нижний индекс означает проекцию вектора на соответствующий орт. Тогда уравнения (9) и (21) эквивалентны следующим двум

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} - 2\frac{\dot{\varphi}'\dot{\varphi}}{\varphi'} - \varphi''\frac{c^2 - \dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2}{r^2\varphi'^2} + \\ + \frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r}\frac{c^2 - \dot{r}^2 + r\ddot{r}}{c^2 - \dot{r}^2} = \frac{\varphi'}{2}(c^2 - \dot{r}^2)^{1/2}(cE_\varphi - H_z\dot{r}), \\ \frac{(c^2 - \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)(c^2 - \dot{r}^2 - r\ddot{r})}{r^2\varphi'(c^2 - \dot{r}^2)^{3/2}} = \\ = \frac{r\dot{\varphi}}{c}(E_\varphi\dot{r} - cH_z) - \frac{E_r}{c}(c^2 - \dot{r}^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Из первого уравнения, в частности, следует уравнение, определяющее закон изменения эффективного момента импульса абсолютно эластичного заряженного кольца:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^Q d\sigma\frac{r\dot{\varphi}}{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2}}\right] = \pi r(cE_\varphi - H_z\dot{r}). \quad (23)$$

Исследуем стационарные положения заряженного кольца во внешнем поле, т. е. положим в уравнениях (22) $r(t) = \text{const}$. Получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} - 2\frac{\dot{\varphi}'\dot{\varphi}}{\varphi'} - \varphi''\frac{c^2 - r^2\dot{\varphi}^2}{r^2\varphi'^2} = \frac{c^2\varphi'}{2}E_\varphi, \\ \frac{c^2 + r^2\dot{\varphi}^2}{r^2c\varphi'} = -r\dot{\varphi}H_z - cE_r, \end{aligned} \quad (24)$$

где внешние поля являются, вообще говоря, некото-

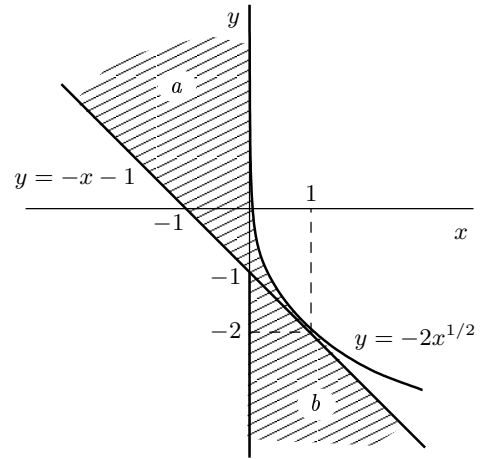


Рис. 1. Здесь заштрихована область, в которой возможны стационарные положения положительно ($\varphi' > 0$) заряженного кольца. $y = r^2\varphi'H_z$, $x = 1 + r^2\varphi'E_r$ и мы выбрали $\dot{\varphi} \geq 0$. Область a , ограниченная снизу прямой $y = -x - 1$, отвечает ситуации, когда в выражении (26) берется знак «+», а область b , ограниченная осью y и кривой $y = -2x^{1/2}$, отвечает ветви со знаком «-». В области пересечения a и b возможны стационарные положения кольца, имеющие различные угловые скорости при одинаковых внешних полях, заряде и радиусе кольца

рыми функциями от t . Формула (23) переписется как

$$\frac{d}{dt}\int_0^Q d\sigma\dot{\varphi} = \pi c^2 E_\varphi. \quad (25)$$

Из второго уравнения в (24) следует, что

$$\frac{r\dot{\varphi}}{c} = -\frac{r^2\varphi'H_z}{2} \pm \sqrt{\frac{r^4\varphi'^2H_z^2}{4} - (1 + r^2\varphi'E_r)}. \quad (26)$$

Требования неотрицательности подкоренного выражения, а также того, чтобы скорость движения струны была меньше скорости света, приводят к ограничениям на поля H_z и E_r , при которых могут существовать устойчивые состояния кольца. Эти требования отражены графически на рис. 1. Например, если электрическое поле отсутствует и кольцо радиуса r равномерно заряжено, то магнитное поле может удерживать такое кольцо, только если

$$|H_z(r)| \geq \frac{|Q|}{\pi r^2}, \quad (27)$$

где Q — полный заряд кольца.

Уравнения (24) в общем случае довольно сложны, поэтому ограничимся ситуацией равномерно заряженного кольца ($\varphi'' = 0$) при $E_r = 0$. Тогда имеем

$$\ddot{\varphi} = \frac{c^2 \varphi'}{2} E_\varphi, \quad \varphi' = \frac{2\pi}{Q},$$

$$\frac{r\dot{\varphi}}{c} = -\frac{\pi r^2 H_z}{Q} - \sqrt{\frac{\pi^2 r^4 H_z^2}{Q^2} - 1},$$
(28)

где мы воспользовались тем, что равенство нулю $\varphi'' = 0$ влечет равенство $\dot{\varphi}' = 0$. Подстановка выражения для $\dot{\varphi}$ в уравнение для $\ddot{\varphi}$ из формул (28) дает уравнения для полей, при которых возможны такие стационарные конфигурации.

Например, в нерелятивистском пределе, $r^2 \dot{\varphi}^2 \ll c^2$, получаем следующее решение (28):

$$\frac{r\dot{\varphi}(t)}{c} = -\frac{Q}{2\pi r^2 H_z(t)}, \quad \varphi'(\sigma) = \frac{2\pi}{Q},$$

$$2\pi^2 r^3 c^2 E_\varphi(t) = Q^2 \frac{\dot{H}_z(t)}{H_z^2(t)},$$
(29)

а в ультрарелятивистском пределе, $r^2 \dot{\varphi}^2 \approx c^2$, уравнения (28) приводят к равенствам

$$\frac{r\dot{\varphi}(t)}{c} = -\frac{Q}{\pi r^2 H_z(t)}, \quad \varphi'(\sigma) = \frac{2\pi}{Q},$$

$$\dot{H}_z(t) = -c \frac{E_\varphi(t)}{r} \left(1 + \frac{\pi r^2}{Q} H_z(t)\right).$$
(30)

Таким образом, равномерно заряженное кольцо не изменяет своего радиуса, только если внешние поля подчиняются уравнениям (28), либо (29) и (30), соответственно, в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях при условии, конечно, что $E_r = 0$.

Перейдем теперь к решению динамических уравнений (22). Рассмотрим случай, когда внешние поля отсутствуют. Решение второго уравнения в системе (22) дает

$$r(t) = \sqrt{\rho^2 + c^2(t + \tau)^2},$$

$$\rho = r(0) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2(0)}{c^2}},$$

$$\tau = \frac{r(0)\dot{r}(0)}{c^2}.$$
(31)

Тогда первое уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} - 2 \frac{\dot{\varphi}' \dot{\varphi}}{\varphi'} - \frac{\varphi''}{\varphi'^2} \left(\frac{c^2 \rho^2}{r^4} - \dot{\varphi}^2 \right) + 2 \frac{\dot{r} \dot{\varphi}}{r} = 0,$$
(32)

откуда

$$\frac{d}{dt} \int_0^Q d\sigma r^2 \dot{\varphi} = 0.$$
(33)

Если дополнительно наложить условие $\dot{\varphi}' = 0$, что с физической точки зрения соответствует требованию, чтобы все точки кольца вращались с одной скоростью, то получим решение

$$r^2(t) \dot{\varphi}(t) = r^2(0) \dot{\varphi}(0), \quad \varphi'(\sigma) = \frac{2\pi}{Q}.$$
(34)

Как и следовало ожидать, уравнение для φ выражает закон сохранения момента импульса.

Из решения (31) видно, что кольцо по прошествии определенного времени будет расширяться со скоростью, близкой к скорости света, поэтому имеет смысл рассмотреть ультрарелятивистский предел уравнения (32), т. е. потребовать, чтобы $c^2 - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \approx 0$. В этом случае имеем следующий закон сохранения:

$$\frac{r^2(t) \dot{\varphi}(t, \sigma)}{\varphi'^2(t, \sigma)} = \frac{r^2(0) \dot{\varphi}(0, \sigma)}{\varphi'^2(0, \sigma)}.$$
(35)

Это уравнение можно решить методом характеристик (см., например, [16]). В частном случае, когда

$$\frac{\dot{\varphi}(0, \sigma)}{\varphi'^2(0, \sigma)} = \lambda^2(0, \sigma) r^2(0) \dot{\varphi}(0, \sigma) = b = \text{const},$$

т. е. линейная плотность эффективного момента импульса кольца одинакова во всех точках струны, получаем

$$\dot{\varphi}(t, \sigma) = \frac{br^2(0)}{r^2(t)} \varphi'^2(0, \sigma_0(t, \sigma)),$$

$$\sigma = \sigma_0(t, \sigma) - \frac{2br^2(0)}{\rho c} \times$$

$$\times \left(\text{arctg} \frac{c(t + \tau)}{\rho} - \text{arctg} \frac{c\tau}{\rho} \right) \varphi'(0, \sigma_0(t, \sigma)).$$
(36)

Последнее выражение нужно рассматривать как уравнение для $\sigma_0(t, \sigma)$ при некоторой заданной Q -периодической функции $\varphi'(0, \sigma_0)$, нулевая гармоника которой равна $2\pi/Q$.

В заключение этого раздела рассмотрим эффективную динамику заряженного кольца, все точки которого двигаются с одинаковой угловой скоростью ($\dot{\varphi}' = 0$) в постоянном однородном магнитном поле $H_z = \text{const}$. В этом случае из (22), (23) имеем систему уравнений

$$\frac{(c^2 - \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)(c^2 - \dot{r}^2 - r\ddot{r})}{r^2 \varphi'(c^2 - \dot{r}^2)^{3/2}} = -r\dot{\varphi} H_z,$$

$$\frac{r\dot{\varphi}}{\sqrt{c^2 - \dot{r}^2}} + \frac{\pi H_z}{2Q} r^2 = M,$$
(37)

где M — некоторая константа, определяемая начальными данными. Из первого уравнения, в частности,

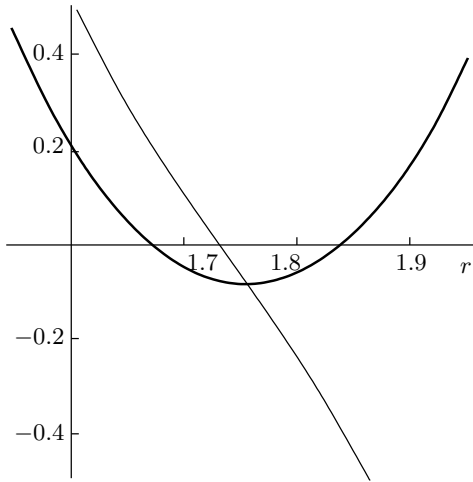


Рис. 2. Зависимости потенциала $U(r)$ (жирная линия), угловой скорости $r\dot{\varphi}(r)$ (тонкая линия). Графики отвечают начальным данным $r(0) \approx 1.844$, $v(0) = 0.1$, $M = 3$, $\text{sign}(H_z/Q) = 1$. Потенциал достигает минимума в точке $r_{ext} \approx 1.755$

следует, что $\varphi' = 2\pi/Q$. Подставляя выражение для $r\dot{\varphi}$ из второго уравнения в первое, получим уравнение только для функции $r(t)$, которое имеет вид

$$\sqrt{c^2 - v^2} = \frac{k}{r} \left[1 + \left(M - \frac{\pi H_z}{2Q} r^2 \right)^2 \right], \quad (38)$$

где $v(r(t)) \equiv \dot{r}(t)$ и k — константа интегрирования. Запишем уравнения движения в безразмерных величинах. Введем $r_0 = |\pi H_z / 2Q|^{-1/2}$ и переопределим $r \rightarrow r_0 r$, $t \rightarrow t r_0 / c$. Например, скорость в этих величинах измеряется в единицах скорости света. Тогда уравнения движения заряженного кольца запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \left[k^2 \frac{(1 + L^2)^2}{r^2} - 1 \right] &= 0, \\ \dot{\varphi} &= k \frac{L(1 + L^2)}{r^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $L = M - \text{sign}(H_z/Q)r^2$.

Первое уравнение в (39) напоминает уравнение движения частицы единичной массы в потенциальном поле

$$U(r) = [k^2 r^{-2} (1 + L^2)^2 - 1] / 2,$$

полная энергия которой равна нулю, с той лишь разницей, что вид $U(r)$ зависит от начальных данных $r(0)$, $v(0)$ и $\dot{\varphi}(0)$ (см. рис. 2). Потенциал имеет единственный экстремум в точке

$$r_{ext}^2 = \frac{1}{3} \left(\text{sign} \left(\frac{H_z}{Q} \right) M + \sqrt{4M^2 + 3} \right) \quad (40)$$

и неограниченно растет при $r \rightarrow 0$ и при $r \rightarrow \infty$, поэтому система при любых начальных данных будет совершать колебания около положения равновесия r_{ext} . Заметим, что минимальное значение r_{ext} равно $\sqrt{2}/2$, что согласуется с предыдущим анализом стационарных положений заряженного кольца (27).

Можно оценить отношение частоты колебаний ω заряженного кольца в окрестности положения равновесия r_{ext} к средней угловой частоте его вращения ω_0 . В гармоническом приближении первая задается $U''(r_{ext})$, а вторая — $|\dot{\varphi}(r_{ext})|$, следовательно, имеем

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{r} \frac{(4r^2 - \sqrt{4r^4 - 1})^{1/2}}{(2r^2 - \sqrt{4r^4 - 1})^{3/2}}, \quad (41)$$

где $r = r_{ext}$. Это отношение с увеличением r_{ext} равномерно возрастает от двух до бесконечности, причем при больших r_{ext} оно растет как $8\sqrt{2}r_{ext}^3$. К примеру, увеличение линейных размеров синхротрона в три раза приведет к увеличению частоты колебаний в девять раз при одинаковых средних угловых скоростях высокоточного пучка частиц и сохранении неизменными прочих характеристик, таких как H_z , Q и χ .

Таким образом, абсолютно эластичное равномерно заряженное кольцо, находящееся в постоянном однородном магнитном поле, будет совершать колебания около положения равновесия r_{ext} , $\dot{\varphi}_{ext}$ согласно уравнениям (39) с частотой ω , отношение которой к угловой частоте вращения кольца задается формулой (41). Поэтому можно ожидать, что при подкачке энергии, компенсирующей энергетические потери, высокоточный пучок заряженных частиц в синхротроне будет создавать излучение также и на данной частоте, помимо хорошо известного синхротронного излучения. Так, например, если бы удалось разделить эти два излучения по некоторым характеристикам и измерить отношение ω/ω_0 , то это позволило бы определить с помощью формулы (41) положение равновесия r_{ext} в единицах r_0 .

К недостаткам модели абсолютно эластичной заряженной струны, примененной к описанию высокоточного пучка заряженных частиц, можно отнести то, что она не учитывает эффекта радиационной отдачи за счет синхротронного излучения, который становится существенным при больших угловых скоростях.

4. АБСОЛЮТНО НЕРАСТЯЖИМАЯ СТРУНА

В этом разделе мы рассмотрим динамику тонкой абсолютно нерастяжимой заряженной струны³⁾ с током с учетом первой поправки от самодействия. Получим уравнения движения такой струны, исследуем ее стационарные состояния в отсутствие внешнего электромагнитного поля и найдем класс решений уравнений движения для незаряженной струны с током и равномерно заряженной струны.

Пусть задана замкнутая струна N с координатами $\{\tau, \sigma\}$, $\sigma \in [0, L)$, вложенная при помощи гладкого отображения $x(\tau)$ в пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$. В релятивистской механике понятие нерастяжимости имеет смысл только в некоторой выделенной системе отсчета. Введем единичный 4-вектор n^μ , $n^2 = 1$, характеризующий такую систему отсчета, тогда действие, описывающее собственную динамику абсолютно нерастяжимой струны, имеет вид

$$S_0[x, \varkappa, \kappa^0, \kappa^1] = \int_N d\tau d\sigma (\varkappa(h_{00} + h) + \kappa^0(n^\mu \dot{x}_\mu - c) + \kappa^1 n^\mu x'_\mu), \quad (42)$$

где \varkappa , κ^0 и κ^1 — лагранжевы множители при связях, обеспечивающих нерастяжимость струны. Очевидно, что действие (42) не инвариантно относительно замены координат $\{\tau, \sigma\}$, и, следовательно, в данном случае не возникает ограничений на вид линейной плотности заряда и тока (9).

Эффективные уравнения движения (7) для абсолютно нерастяжимой тонкой заряженной струны с током в выделенной системе отсчета $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ запишутся как

$$\begin{aligned} -\partial_i(L^{ij}\partial_j x_\mu + \kappa^i \delta_\mu^0) &= \frac{1}{c} F_{\mu\nu} e^i \partial_i x^\nu, \\ L^{ij} &\equiv \frac{\chi}{c} \frac{h_{kl} e^k e^l h^{ij} - 2e^i e^j}{\sqrt{|h|}} + 2\varkappa(\delta_0^i \delta_0^j + h h^{ij}), \quad (43) \\ h_{00} &= -h, \quad \dot{x}^0 = c, \quad x'^0 = 0. \end{aligned}$$

Последние три уравнения (43) выражают условие «релятивистской нерастяжимости». Действительно, уравнение $h_{00} = -h$ имеет вид

$$\mathbf{x}'^2 = 1 - \frac{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}')^2}{c^2 - \dot{\mathbf{x}}^2}, \quad (44)$$

³⁾ Возможно, более привычное название модели абсолютно нерастяжимой струны, известное из механики, — идеальная невесомая нить. Подробное изложение теории абсолютно гибкой нити можно найти, например, в монографии [17].

откуда немедленно следует, что координата σ является натуральным параметром на струне с поправкой на релятивистское сжатие. Так как σ пробегает значения от 0 до L , выполнение (44) во всех точках струны автоматически дает нерастяжимую струну длиной L .

Ввиду того что мы рассматриваем замкнутую струну, все функции, входящие в уравнение (43), должны быть периодическими по переменной σ . Для открытой струны со свободными концами условие периодичности заменяется требованием выполнения на концах струны равенства

$$L^i \partial_i x_\mu + \kappa^1 \delta_\mu^0 = 0. \quad (45)$$

Мы будем рассматривать эффективную динамику замкнутой струны в отсутствие внешних электромагнитных полей. Неизвестные поля κ^i можно выразить из двух первых уравнений (43), положив $\mu = 0$. В результате останется четыре уравнения для четырех неизвестных функций $\mathbf{x}(t, \sigma)$ и $\varkappa(t, \sigma)$:

$$L^{ij} \partial_{ij} \mathbf{x} + \partial_i L^{ij} \partial_j \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}'^2 = 1. \quad (46)$$

Условие совместности этой системы позволяет получить уравнение для $\varkappa(t, \sigma)$. Физический смысл поля $\varkappa(t, \sigma)$ состоит в том, что оно компенсирует силы, действующие на растяжение (сжатие) струны.

Найдем стационарные конфигурации струны, совместные с уравнениями (46), т. е. положим в уравнениях движения $\dot{\mathbf{x}} \equiv 0$. Несложно получить, что в этом случае уравнения движения сводятся к следующей системе⁴⁾:

$$\begin{aligned} 2\varkappa' + \frac{(\lambda^2)'}{c} + 2\frac{\lambda \dot{I}}{c^3} &= 0, \\ 2\varkappa + \frac{\lambda^2}{c} + \frac{I^2}{c^3} &= 0, \quad \mathbf{x}'^2 = 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Учитывая закон сохранения заряда, $\dot{\lambda} + I' = 0$, имеем

$$\varkappa = -\frac{c^2 \lambda^2 + I^2}{2c^3}, \quad \dot{\lambda} I + \lambda \dot{I} = 0, \quad \mathbf{x}'^2 = 1. \quad (48)$$

Таким образом, если произведение плотности заряда на ток не зависит от времени и в начальный момент времени все точки струны покоились, то можно указать $\varkappa(t, \sigma)$ такое, что струна будет сохранять свою начальную конфигурацию. Вопрос об устойчивости таких решений остается открытым.

⁴⁾ Здесь и далее мы переопределили лагранжевы множитель $\varkappa \rightarrow -\varkappa \chi / c$.

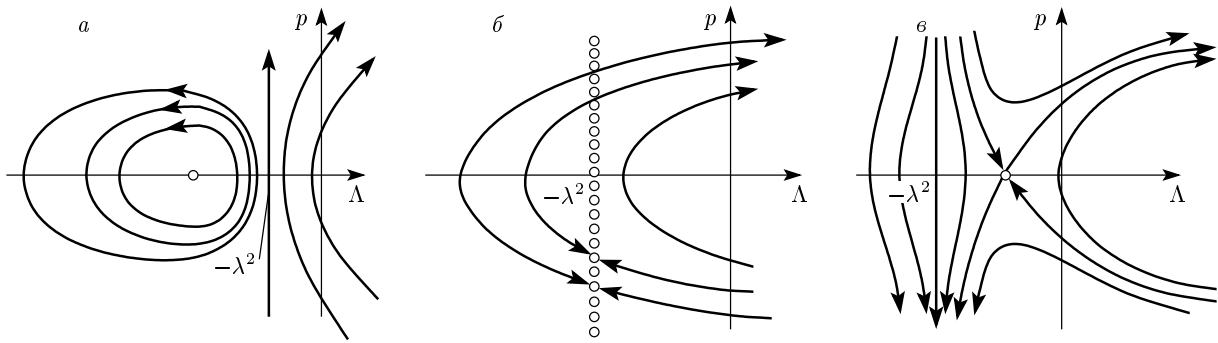


Рис. 3. Мгновенный фазовый портрет для уравнения (52), где $p = \Lambda' / (\lambda^2 + \Lambda)$. Знаком \circ отмечены особые точки векторного поля. Случай, когда $\dot{x}^{\prime 2} / c^2 > x''^2$ (а), можно назвать случаем малой кривизны струны, $\dot{x}^{\prime 2} / c^2 = x''^2$ (б), $\dot{x}^{\prime 2} / c^2 < x''^2$ (в)

Далее рассмотрим нерелятивистскую динамику струны, описываемую уравнениями (46), в случае отсутствия тока $I = 0$ (заряженный диэлектрик), а также при $\lambda = 0$ (незаряженный проводник). Нерелятивистский предел понимается в следующем смысле. Пусть l — характерный масштаб изменений поля $\mathbf{x}(t, \sigma)$, например, длина струны, тогда формально определим порядок малости следующим образом:

$$\left[\frac{\dot{\mathbf{x}}}{c} \right] \ll 1, \quad [l^k \partial_\sigma^{k+1} \mathbf{x}] = \left[\frac{l \dot{\mathbf{x}}'}{c} \right] = \left[\frac{l \ddot{\mathbf{x}}}{c^2} \right] = 1. \quad (49)$$

При таком выборе порядок малости \varkappa определяется из уравнений (46).

Для заряженного диэлектрика, $I = 0, \dot{\lambda} = 0$, в нерелятивистском пределе из формулы (46) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\lambda^2}{c^2} \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda \mathbf{x}'' + \left[\Lambda' + \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'}{c^2} \Lambda \right] \mathbf{x}' = 0, \quad \mathbf{x}'^2 = 1, \quad (50)$$

где $\Lambda = 2c\varkappa + \lambda^2$. Заметим, что данные уравнения инвариантны относительно преобразований Галилея. Уравнения (50) можно разрешить относительно старшей производной, только если $\Lambda \neq -\lambda^2$. В этом случае имеем

$$\frac{\lambda^2}{c^2} \ddot{\mathbf{x}} + \Lambda \mathbf{x}'' + \frac{\lambda^2 \Lambda'}{\lambda^2 + \Lambda} \mathbf{x}' = 0, \quad \mathbf{x}'^2 = 1. \quad (51)$$

Условие совместности системы (51) приводит к уравнению для $\Lambda(t, \sigma)$:

$$\left(\frac{\Lambda'}{\lambda^2 + \Lambda} \right)' - \frac{\Lambda \mathbf{x}''^2}{\lambda^2} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^{\prime 2}}{c^2} = 0. \quad (52)$$

Таким образом, задавая $\Lambda(t, 0)$ и $\Lambda'(t, 0)$, а также $\mathbf{x}(0, \sigma)$ и $\dot{\mathbf{x}}(0, \sigma)$, подчиненные условиям

$$\mathbf{x}'(0, \sigma) \cdot \mathbf{x}'(0, \sigma) = 1, \quad \dot{\mathbf{x}}(0, \sigma) \cdot \mathbf{x}'(0, \sigma) = 0,$$

можно построить единственное решение $\mathbf{x}(t, \sigma)$, удовлетворяющее уравнениям (51). Напомним, что все функции должны быть L -периодическими по переменной σ . Это условие накладывает ограничения на возможный выбор граничных условий для функции $\Lambda(t, \sigma)$.

Для уравнения (52) можно нарисовать «мгновенный» фазовый портрет (см. рис. 3), из которого, в частности, видно, что если $\Lambda(t, 0) \neq -\lambda^2$, то $\Lambda(t, \sigma) \neq -\lambda^2, \forall \sigma \in [0, L]$, т. е. величина $1 + \Lambda/\lambda^2$ не меняет знака.

Для равномерно заряженной струны, $\lambda = \text{const}$, уравнения (51), (52) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{c^2} - \left(1 - \text{sign} \left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda^2} \right) e^\Theta \right) \mathbf{x}'' + \Theta' \mathbf{x}' &= 0, \\ \Theta'' + \left(1 - \text{sign} \left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda^2} \right) e^\Theta \right) \mathbf{x}''^2 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^{\prime 2}}{c^2} &= 0, \end{aligned} \quad (53)$$

где $\Theta = \ln |1 + \Lambda/\lambda^2|$.

Проводя аналогичные рассуждения для незаряженного проводника с током, $\lambda = 0, I' = 0$, получаем при $\varkappa \neq 0$ (это условие является аналогом возникшего в случае заряженного диэлектрика требования $\Lambda \neq -\lambda^2$) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{c^2} + (1 + \text{sign}(\varkappa) e^\Theta) \mathbf{x}'' + \Theta' \mathbf{x}' &= 0, \\ \Theta'' - (1 + \text{sign}(\varkappa) e^\Theta) \mathbf{x}''^2 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^{\prime 2}}{c^2} &= 0, \end{aligned} \quad (54)$$

где $\Theta = \ln |2c^3 \varkappa / I^2|$. Мгновенный фазовый портрет для второго уравнения в формуле (54) всегда имеет такой же вид (с очевидными переопределениями), как и мгновенный фазовый портрет в случае слабо искривленного заряженного диэлектрика (рис. 3а). Поэтому периодические по переменной σ решения

второго уравнения в (54) могут существовать только при $\varkappa(t, 0) < 0$.

Найдем некоторые частные решения полученных уравнений. Положим в уравнениях (53) или (54) $\Theta'(t, \sigma) = 0$. Получим систему

$$\ddot{\mathbf{x}} - u^2(t)\mathbf{x}'' = 0, \quad \dot{\mathbf{x}}'^2 = u^2(t)\mathbf{x}''^2, \quad \mathbf{x}'^2 = 1. \quad (55)$$

В данном случае динамика равномерно заряженного диэлектрика и незаряженного проводника описывается одной и той же системой уравнений. Упростим ситуацию и будем считать, что $u(t) = \text{const}$. Тогда можно сразу указать класс решений вида

$$\mathbf{x}(t, \sigma) = \mathbf{V}t + \mathbf{x}_0(\sigma + ut), \quad (56)$$

где \mathbf{V} — некоторый постоянный вектор, а $\mathbf{x}_0(\sigma)$ задает начальную конфигурацию струны, причем $\mathbf{x}_0'^2 = 1$. Можно показать, подставляя общее решение волнового уравнения в оставшиеся два, что это единственно возможные решения уравнений (55) при $u = \text{const}$. Решения (56) описывают струну, «текущую» вдоль себя со скоростью u .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась эффективная динамика тонкой электрически заряженной струны с током с учетом ведущего вклада от самодействия. Такое приближение позволило описать эффективную динамику струны во внешнем электромагнитном поле в виде дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и получить их точные решения для некоторых простых моделей струны в электромагнитном поле специального вида.

Мы не исследовали вопрос устойчивости полученных решений. Эта проблема может стать одним из возможных направлений дальнейших исследований. Другим направлением исследований может являться изучение характеристик излучения абсолютно эластичного заряженного кольца (высокоточного пучка заряженных частиц) во внешнем постоянном однородном магнитном поле, наличие такого излучения обсуждалось в конце разд. 3. Кроме того, было бы интересно найти другие решения эффективных уравнений движения струны либо провести численный анализ этих уравнений.

Автор выражает глубокую признательность И. В. Горбунову и А. А. Шарарову за внимательное прочтение и конструктивную критику черновой версии этой работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-02-17657), гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-1743.2003.2, Федерального агентства по образованию (грант № А04-2.9-740), фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики в Москве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Лоренц, *Theory of electrons*, В. G. Teubner, Leipzig (1909); Г. А. Лоренц, *Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения*, Гостехтеориздат, Москва (1956).
2. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **167**, 148 (1938).
3. B. S. DeWitt and R. W. Brehme, Ann. Phys. **9**, 220 (1960).
4. A. O. Barut, N. Unal, Phys. Rev. A **40**, 5404 (1989).
5. P. E. G. Rowe and G. T. Rowe, Phys. Rep. **149**, 287 (1987).
6. Б. П. Косяков, ТМФ **119**, 119 (1999).
7. P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D **66**, 025017 (2002).
8. P. O. Kazinski and A. A. Sharapov, Class. Quant. Grav. **20**, 2715 (2003).
9. B. Carter, Phys. Lett. B **404**, 246 (1997).
10. A. O. Barut and P. A. Pavšič, Phys. Lett. B **331**, 45 (1994).
11. J. Isburg, U. Lindström, B. Sundborg, and G. Theodoridis, Nucl. Phys. B **411**, 122 (1994).
12. M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, Rep. Progr. Phys. **58**, 477 (1995).
13. П. О. Казинский, А. А. Шараров, ТМФ **143**, 375 (2005).
14. E. Witten, Nucl. Phys. B **249**, 557 (1985).
15. A. Buonanno and T. Damour, Phys. Lett. B **432**, 51 (1998).
16. В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, МЦНМО (2002).
17. Д. Р. Меркин, *Введение в механику гибкой нити*, Наука, Москва (1980).