ЖЭТФ, 2005, том 128, вып. 2 (8), стр. 344–350

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО КРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ФЕРРОМАГНИТНОГО ГАДОЛИНИЯ

А. К. Муртазаев[*], *В. А. Мутайламов*

Институт физики Дагестанского научного центра Российской академии наук
367003, Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 4 февраля 2005 г.

С помощью численного эксперимента, основанного на совместном использовании метода Монте-Карло и метода молекулярной динамики, впервые исследована критическая динамика сложных моделей ферромагнитного гадолиния, в которых наряду с сильными обменными взаимодействиями учитываются и добавочные релятивистские взаимодействия разных типов. В рамках теории динамического конечно-размерного скейлинга рассчитаны их динамические критические индексы. Определены роль изотропных диполь-дипольных взаимодействий и степень их влияния на характер критического поведения гадолиния. Полученные результаты позволяют объяснить аномальный характер динамического критического поведения гадолиния.

PACS: 75.40.Cx, 75.40.Gb, 75.40.Mg, 75.50.Cc

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамических критических свойств является одной из актуальных задач современной статистической физики и физики фазовых переходов [1–3]. К настоящему времени в этой области достигнуты существенные успехи, обусловленные главным образом теоретическими и экспериментальными исследованиями. Тем не менее построение строгой и последовательной теории динамических критических явлений на основе микроскопических гамильтонианов является одной из центральных проблем современной теории фазовых переходов и критических явлений, и она все еще далека от своего решения [1, 4].

Существующие в настоящее время представления о критической динамике были получены в основном в рамках теорий взаимодействующих мод и динамического скейлинга [1–3]. Эти две теории развивались независимо друг от друга и основаны на совершенно различных идеях. Однако значительное число результатов, полученных на их основе, достаточно хорошо согласуется друг с другом. В рамках теории динамического скейлинга Халпериным и Хоэнбергом [3] были предложены классы универсальности динамического критического поведения. Динамические классы универсальности, как оказалось, зависят не только от размерности d пространства, числа n компонент параметра порядка, радиуса характерного взаимодействия и симметрии гамильтониана, но и от законов сохранения энергии и параметра порядка [3]. Введенная ими классификация сыграла важную роль в понимании критической динамики и используется до сих пор. Гипотеза динамического скейлинга, на котором основана эта классификация, достаточно хорошо описывает картину динамического критического поведения, однако она не лишена недостатков: ее основополагающие принципы практически ничем не подтверждены, хотя предсказания, сделанные на ее основе, согласуются со многими экспериментами (но не со всеми), и, кроме того, данная классификация не является полной.

В то же время критическая динамика магнитоупорядоченных кристаллов, особенно ферромагнетиков, отличается большим разнообразием и сложностью, которая обусловлена необходимостью учета наряду с обменными взаимодействиями более слабых добавочных релятивистских взаимодействий (анизотропии, дипольного взаимодействия и др.). Наиболее существенными из них являются дипольные взаимодействия, роль которых возрастает при приближении к критической точке. Отметим, что

[*]E-mail: m_akai@iwt.ru

упомянутая классификация классов универсальности динамического критического поведения вообще не учитывает фактор влияния, обусловленный дипольными взаимодействиями. В последующем Малеев в своих известных работах [5–7] показал, что учет дипольных взаимодействий в теории приводит к двум вариантам динамики, обычной и жесткой, каждая из которых характеризуется своим набором критических параметров.

Экспериментальная ситуация пока не ясна из-за противоречивости имеющихся данных [4]. В действительности ситуация еще более сложная, так как в реальном материале одновременно могут существовать все факторы, влияющие на критическую динамику. В таком случае очевидно, что характер критической динамики в значительной мере зависит от соотношения действующих сил — обменных, анизотропных и дипольных. Кроме того, не следует забывать, что вблизи критической точки не только формируется то или иное критическое поведение, обусловленное соответствующими силами, но и существуют кроссоверные области, вследствие чего характер критического поведения может меняться в зависимости от того, насколько близко удалось приблизиться к критической точке. Очевидно, что реальная ситуация еще более разнообразна, так как релятивистские силы могут быть разных типов. Например, анизотропия может быть одноосной, кубической и т. д., а дипольные взаимодействия могут быть как изотропными, так и анизотропными. По-видимому, влияние совокупности всех этих факторов и является одной из серьезных причин противоречивости экспериментальных данных по исследованию динамических критических свойств магнитоупорядоченных материалов.

Очевидно, что экспериментальные исследования вряд ли смогут в ближайшее время прояснить сложившуюся противоречивую ситуацию, когда теория предсказывает одно, а эксперимент дает другое поведение, так как высокоточные исследования в критической области чрезвычайно трудно выполнить. Кроме того, почти всегда экспериментальные результаты являются суммой действия всех сил одновременно, вследствие чего практически невозможно определить вклад и степень влияния того или иного фактора. Строгое теоретическое исследование этого вопроса также маловероятно из-за чрезмерных математических трудностей.

В последнее время значительную роль в прояснении таких сложных вопросов стали играть методы вычислительной физики. По крайней мере при изучении статических критических явлений методы вычислительной физики позволяют рассчитать критические параметры с очень высокой степенью точности и надежности [8]. Методы вычислительной физики, такие как метод Монте-Карло и метод молекулярной динамики, обладают рядом ценных преимуществ, связанных не только с их строгой математической обоснованностью и возможностью контроля за погрешностью в рамках самих методов, но и с тем, что они позволяют определить степень влияния на результаты того или иного параметра.

Основными параметрами, определяющими критическую динамику, являются критический индекс w времени релаксации τ и динамический критический индекс z:

$$\tau \propto |\varepsilon|^{-w}, \quad \tau \propto \xi^z,$$

где

$$\varepsilon = |T - T_c|/T_c, \quad \xi = (T/T_c - 1)^{-\nu}.$$

В середине 90-х годов прошлого столетия появился метод, позволяющий с использованием теории динамического конечно-размерного скейлинга [9] и специальной схемы определения характеристической частоты ω_c рассчитать динамический критический индекс z [10–12].

В данной работе методами вычислительной физики исследована критическая динамика моделей ферромагнитного гадолиния. При этом основные вопросы, на которые мы хотели получить ответы, можно сформулировать следующим образом:

1) как влияют изотропные диполь-дипольные взаимодействия на характер динамического критического поведения?

2) различается ли критическая динамика вдоль разных направлений в некубических кристаллах?

3) способна ли используемая методика расчета критических параметров выявить влияние на критическую динамику столь слабых факторов, как диполь-дипольные взаимодействия?

Выбор для исследования моделей гадолиния обусловлен следующими факторами:

1) на характер статического критического поведения гадолиния существенное влияние оказывают изотропные диполь-дипольные взаимодействия [13, 14];

2) существует довольно обширный ряд экспериментальных работ по изучению критической динамики ферромагнитного гадолиния [4, 15–18], но результаты этих работ столь противоречивы, что на их основе нельзя сделать каких-либо однозначных выводов;

3) имеется ряд работ теоретического плана, в которых сделана попытка объяснить сложный характер динамического критического поведения гадолиния [19, 20];

4) динамическое критическое поведение гадолиния представляет серьезный интерес и само по себе, так как оно формируется под действием трех факторов одновременно: обменных взаимодействий, магнитной кристаллографической анизотропии и изотропных диполь-дипольных взаимодействий;

5) статическое критическое поведение гадолиния хорошо изучено как экспериментально [13], так и численно [14], что может служить хорошей базой для изучения критической динамики.

Отметим, что использованная в настоящей работе методика исследования критической динамики была ранее использована нами при изучении динамического критического поведения классической модели Гейзенберга [21] и моделей сложного реального многоподрешеточного антиферромагнетика Cr_2O_3 [21, 22].

2. МОДЕЛЬ

Гадолиний представляет собой редкоземельный металл с плотноупакованной гексагональной структурой. Фазовый переход второго рода типа порядок–беспорядок из ферромагнитного в парамагнитное состояние в гадолинии происходит при температуре Кюри $T_C = 293$ К. Ранее нами были предложены модели ферромагнитного гадолиния, которые учитывают все основные особенности этого материала [14], и тщательно изучены их статические критические свойства. Гамильтониан модели гадолиния может быть представлен следующим образом [14]:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j) - D\sum_i (\mathbf{S}_i^z)^2 - \\ - D_{dip}\sum_i \langle\mathbf{M}\rangle\cdot\mathbf{S}_i, \quad |\mathbf{S}_i| = 1, \quad (1)$$

где первый член учитывает обменное взаимодействие каждого из ионов гадолиния с двенадцатью ближайшими соседями с параметром взаимодействия $J > 0$, второй — одноосную анизотропию типа «легкая ось» в направлении гексагональной оси с константой анизотропии D, третий — изотропное диполь-дипольное взаимодействие с постоянной взаимодействия D_{dip}, $\mathbf{M}$ — намагниченность. Нами были рассмотрены две модели: модель I, учитывающая обменное взаимодействие и анизотропию, и модель II, которая дополнительно учитывает и диполь-дипольное взаимодействие.

Согласно данным лабораторных экспериментов [13], соотношение между анизотропией и обменом составляет $D/J = 1.41\cdot 10^{-4}$, а между постоянной диполь-дипольного взаимодействия и обменом — $D_{dip}/J = 1.35\cdot 10^{-2}$. Система координат выбирается таким образом, чтобы ось z совпадала с направлением оси анизотропии, т. е. с гексагональной осью кристалла. Температуры фазового перехода брались из результатов исследования статического критического поведения данных моделей методом Монте-Карло [14].

3. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Использованная нами методика основана на теории динамического скейлинга [1] и расчете пространственно-временных спиновых корреляционных функций для проекций спинов $k = x, y, z$:

$$C^k(\mathbf{r}_{12}, t) = \langle S^k_{\mathbf{r}_1}(t) S^k_{\mathbf{r}_2}(0)\rangle - \langle S^k_{\mathbf{r}_1}(t)\rangle\langle S^k_{\mathbf{r}_2}(0)\rangle, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $S^k_{\mathbf{r}_1}(t)$ — спин, локализованный на узле $\mathbf{r}_1$ в момент времени t, $S^k_{\mathbf{r}_2}(0)$ — спин, локализованный на узле $\mathbf{r}_2$ в начальный момент времени ($t = 0$), угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Вторым слагаемым в правой части выражения (2) при $T \approx T_C$ и достаточно больших временах наблюдения можно пренебречь [11].

Фурье-образ по пространству и времени корреляционной функции (2) определяет динамический структурный фактор

$$S^k(\mathbf{q}, \omega) = \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} C^k(\mathbf{r}, t)\times \\ \times \exp\left[-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\right] dt, \quad (3)$$

где $\mathbf{q}$ — волновой вектор, ω — частота. Отметим, что динамический структурный фактор может непосредственно измеряться в экспериментах по рассеянию нейтронов. В общем случае он пропорционален интенсивности спектральной плотности рассеянного излучения нейтронов и смещен от него по частоте на постоянную величину [1].

В соответствии с гипотезой динамического скейлинга определяется характеристическая частота как частота, которая делит пополам всю интегрируемую площадь, ограниченную кривой динамического структурного фактора, рассматриваемого в зависимости от частоты:

$$\int_{-\omega_c(\mathbf{q},\xi)}^{\omega_c(\mathbf{q},\xi)} S^k(\mathbf{q},\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S^k(\mathbf{q},\omega)\,d\omega. \qquad (4)$$

В общем случае характеристическая частота зависит от волнового вектора $\mathbf{q}$ и радиуса корреляции ξ. Согласно основному положению теории динамического скейлинга [1], имеем

$$\omega_c(\mathbf{q},\xi) = q^z\Omega(q\xi), \qquad (5)$$

где z — динамический критический индекс, Ω — однородная скейлинговая функция, зависящая от произведения $q\xi$; ее вид неизвестен.

Для рассматриваемых нами моделей в точке фазового перехода при конечных линейных размерах L системы и конечных временах t_{cutoff} наблюдения за системой выражение (3) для проекций спинов $k = x, y, z$ может быть представлено в виде [10]

$$S^k(\mathbf{q},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2}\exp\left[i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right]\times$$
$$\times\int_{-t_{cutoff}}^{t_{cutoff}}\exp(i\omega t)C^k(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t)\,dt, \qquad (6)$$

а уравнение (5) преобразуется к виду

$$\omega_c \propto L^{-z}\Omega'(qL), \qquad (7)$$

где $q = 2\pi m/L$ ($m = \pm1, \pm2, \ldots, \pm L$). В силу того что пространство в нашем случае является дискретной величиной (определяется узлами решетки), интегрирование по пространству в преобразовании Фурье (6) заменено суммированием. Соотношение (7) используется на практике для вычисления значения индекса z. Хотя вид функции Ω' неизвестен, но, поскольку она зависит не от q и L по отдельности, а от их произведения, то, сохраняя его постоянным для всех линейных размеров, можно вычислить значение динамического критического индекса.

В нашем исследовании рассматриваются случаи, когда волновой вектор направлен только вдоль кристаллографических осей. Кроме того, корреляции учитываются не между отдельными спинами, а между усредненными по плоскостям значениями спинов. Если волновой вектор направить вдоль одной кристаллографической оси, то две другие оси образуют чередующиеся плоскости спинов. Значения спинов по этим плоскостям усредняются и рассматриваются корреляции между этими усредненными значениями спинов. Так, для простой кубической решетки спиновые плоскости совпадают с кристаллографическими плоскостями. В случае гексагональной кристаллической решетки гадолиния картина носит более сложный характер.

Для расчета корреляционных функций используется система дифференциальных уравнений, описывающая движения спинов в узлах кристаллической решетки:

$$\frac{\partial\mathbf{S}_i}{\partial t} = \mathbf{S}_i\times\mathbf{h}_{loc}, \quad t = t'\frac{g\mu_B}{J\gamma}, \quad |\mathbf{S}_i| = 1, \qquad (8)$$

где g — множитель Ланде, γ — гиромагнитное соотношение, $\mathbf{h}_{loc}$ — локальное поле, действующее на i-й спин и определяемое гамильтонианом (1). Очевидно, что прежде чем решать систему уравнений (8), ансамбль необходимо привести в состояние термодинамического равновесия (в нашем случае это происходит при температуре фазового перехода), для чего использовался стандартный алгоритм метода Монте-Карло (алгоритм Метрополиса) [23].

Нами рассматривались системы с периодическими граничными условиями, с линейными размерами от $L = 4$ до $L = 18$, содержащие от $N = 128$ до $N = 11664$ спинов. Волновой вектор $\mathbf{q}$ направлялся вдоль трех кристаллографических осей, при этом рассчитывались все три проекции спинов. Отметим, что при направлении волнового вектора вдоль оси a (или вдоль оси b) расстояния между спиновыми плоскостями не равны друг другу, тогда как в направлении оси c расстояния одинаковы и равны $c/2$. Общее время наблюдения за системой доходило до $t_{cutoff} = 130$ (здесь и далее время в условных единицах), а шаг интегрирования дифференциальных уравнений брался равным $\Delta t = 0.01$. Для численного решения системы дифференциальных уравнений (8) использовался метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности. Число усреднений при расчете корреляционных функций (2) достигало $n = 350$. Контрольный расчет показал, что изменение ключевых параметров (например, $\Delta t = 0.005$ и $n = 700$) не оказывает заметного влияния на точность получаемых результатов.

Для каждой системы с линейными размерами L дифференциальные уравнения движения спинов решались для различных начальных равновесных конфигураций. Число таких конфигураций достигало десяти. Полученные в результате значения характеристической частоты ω_c усреднялись между собой.

Отметим, что при расчете корреляционных функций (2) нормировка нами не проводилась.

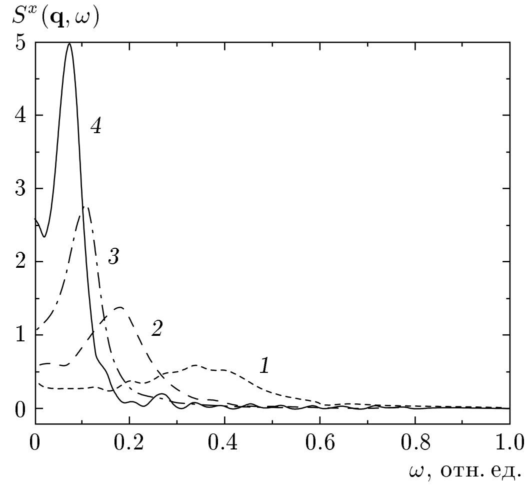

Рис. 1. Зависимость динамического структурного фактора от частоты для систем с различным числом N спинов для модели I ($qL = 2\pi$): *1* — $N = 432$; *2* — $N = 1024$; *3* — $N = 2000$; *4* — $N = 3456$

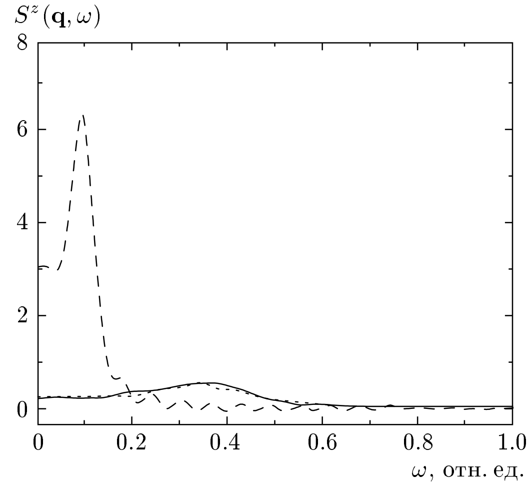

Рис. 2. Динамический структурный фактор для модели I ($N = 432$, $qL = 2\pi$) при r направлениях волнового вектора вдоль кристаллографических осей a (пунктирная кривая), b (сплошная), c (штриховая)

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 показана характерная зависимость динамического структурного фактора $S^k(\mathbf{q},\omega)$ от частоты ω для систем с различным числом N спинов, полученная для модели I. Значение $S^k(\mathbf{q},\omega)$ рассчитано при направлении волнового вектора $\mathbf{q}$ вдоль оси a по x-проекциям спинов. Из рисунка видно, что увеличение числа спинов в системе приводит к смещению максимума динамического структурного фактора в сторону меньших значений частоты ω. При этом абсолютное значение максимума возрастает. Этот рост, по-видимому, связан с отсутствием нормировки при расчете корреляционных функций (2), однако на определение характеристической частоты влияет не абсолютное значение, а форма динамического структурного фактора.

Зависимость динамического структурного фактора для модели I при различных направлениях волнового вектора $\mathbf{q}$, рассчитанная по z-проекциям спинов, представлена на рис. 2. Как и можно было ожидать, формы структурных факторов при направлении волнового вектора $\mathbf{q}$ вдоль осей a и b практически полностью совпадают друг с другом. В то же время они значительно отличаются от случая, когда волновой вектор направлен вдоль гексагональной оси c.

Как меняется характеристическая частота ω_c в зависимости от линейных размеров L системы для модели I при различных направлениях волнового вектора $\mathbf{q}$, показано на рис. 3. Эти данные представляют собой усредненные по различным начальным конфигурациям значения характеристической частоты ω_c и рассчитаны по x-проекциям спинов. Они наглядно демонстрируют идентичность структурных факторов, а соответственно и характеристических частот ω_c, полученных при направлении волнового вектора $\mathbf{q}$ вдоль осей a и b, и их существенное отличие от значений ω_c, полученных в случае, когда

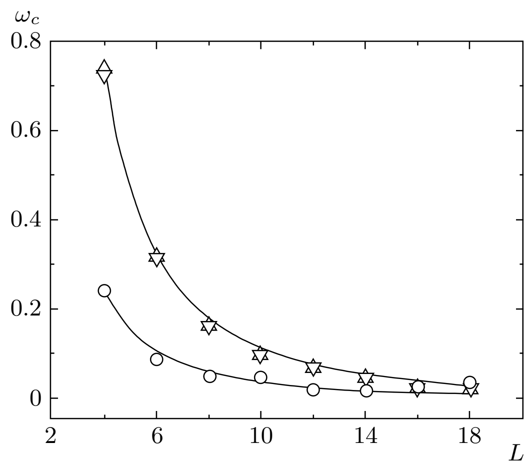

Рис. 3. Зависимость характеристической частоты от линейных размеров системы для модели I ($qL = 2\pi$) при направлениях волнового вектора вдоль кристаллографических осей a ($\triangle$), b (∇) и c ($\circ$)

Значения динамического критического индекса z для моделей ферромагнитного гадолиния для трех направлений волнового вектора и трех проекций спинов

	$\mathbf{q} \parallel a$	$\mathbf{q} \parallel b$	$\mathbf{q} \parallel c$
Модель I			
$k = x$	2.07 ± 0.06	2.11 ± 0.06	2.28 ± 0.06
$k = y$	2.06 ± 0.06	2.08 ± 0.06	2.36 ± 0.06
$k = z$	2.30 ± 0.06	2.24 ± 0.06	2.37 ± 0.06
Модель II			
$k = x$	2.29 ± 0.06	2.25 ± 0.06	2.47 ± 0.06
$k = y$	2.26 ± 0.06	2.27 ± 0.06	2.49 ± 0.06
$k = z$	2.35 ± 0.06	2.35 ± 0.06	2.54 ± 0.06

вектор $\mathbf{q}$ параллелен оси c.

Аналогичные зависимости для модели II качественно повторяют результаты, представленные на рис. 1–3, но количественные различия имеются.

По данным, представленным на рис. 3, с использованием соотношения (7) легко найти значение динамического критического индекса z. Определенные таким образом значения индекса z при всех возможных направлениях волнового вектора $\mathbf{q}$ вдоль кристаллографических осей и для трех проекций спинов представлены в таблице для обеих моделей.

Для модели I значения z, вычисленные по x- и y-проекциям спинов при $\mathbf{q} \parallel a$ и $\mathbf{q} \parallel b$, хорошо согласуются с теоретически предсказанным значением для анизотропных магнетиков ($z = 2$, модель A [3]). В то же время величина динамического критического индекса, определенная по z-проекциям спинов (как при $\mathbf{q} \parallel a$, так и при $\mathbf{q} \parallel b$), принимает промежуточное значение между теоретически предсказанными значениями для анизотропных магнетиков $z = 2$ (модель A) и для изотропных ферромагнетиков $z = 2.5$ (модель J [3]). Существенно другая картина наблюдается при $\mathbf{q} \parallel c$. В этом случае величина z для всех трех проекций спинов принимает значение, лежащее между $z = 2$ (модель A) и $z = 2.5$ (модель J).

Учет изотропных диполь-дипольных взаимодействий приводит к тому, что для модели II все соответствующие значения z, рассчитанные по x- и y-проекциям спинов, увеличились примерно на 0.2, а по z-проекциям спинов — на величину от 0.05 до 0.2.

Совершенно очевидно, что различие значений динамического критического индекса z для моделей I и II обусловлено учетом в модели II изотропных диполь-дипольных взаимодействий, так как все расчеты были выполнены с соблюдением единой методики. Обратим внимание и на то, что все данные, полученные для критического индекса z, имеют вполне разумные значения.

Конечно, если придерживаться только схемы, предложенной в работе [3], то часть наших результатов трудно объяснить. Такая же ситуация возникает и с экспериментальными данными, полученными при изучении критической динамики гадолиния [4, 15–20]. Во Введении уже отмечалось, что классификация классов универсальности, предложенная в [3], не учитывает ряда факторов, влияющих на динамику магнетиков, например, наличия дипольных взаимодействий, вследствие чего возможно образование новых классов универсальности. Ситуация еще более усложняется, когда добавочных взаимодействий несколько, они разных видов и действуют одновременно на фоне сильных обменных взаимодействий. Именно такая ситуация складывается в реальном случае и в нашем случае для модели II.

Кроме того, с нашей точки зрения, в некубических кристаллах должно наблюдаться различие в динамических критических свойствах в зависимости от выбранного направления в кристалле, что и видно из данных, представленных в таблице. Это также подтверждается и в работе [20], в которой показано, что скейлинговая функция типа Ω (см. выражение (5)) имеет продольную и поперечную компоненты. Авторы работы [20] показали, что поведение продольной и поперечной компонент этой функции совершенно разное и зависит от того, в какой температурной (или кроссоверной области) находится система. Ими описаны сценарии изменения характера динамического критического поведения гейзенберговских моделей магнетиков в зависимости от температурного режима и влияния анизотропных или дипольных сил. Из-за чрезмерных теоретических трудностей рассмотрены случаи влияния анизотропных и дипольных сил только по отдельности. В нашем случае модель II учитывает их одновременно и является более сложной.

По-видимому, многие особенности наших данных являются результатом суммарного действия всех факторов одновременно. Отметим также, что аномальный характер динамического критического поведения реального гадолиния, возможно, также объясняется именно этим. Для классификации динамического критического поведения гадолиния даже предлагался новый класс универсальности J^* [19].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе подхода, использующего совместно метод Монте-Карло и метод молекулярной динамики, изучены динамические критические свойства двух моделей реального ферромагнитного гадолиния. При этом показано, что

1) критическая динамика в некубических кристаллах зависит от направления волнового вектора в кристалле;

2) изотропные диполь-дипольные взаимодействия оказывают существенное влияние на критическую динамику магнетиков;

3) по-видимому, труднообъяснимый с точки зрения теоретических представлений характер критического поведения гадолиния обусловлен одновременным действием анизотропных и дипольных сил на фоне сильных обменных взаимодействий;

4) очевидно, что методы вычислительной физики, которые делают только первые шаги в изучении такой сложной области физики, как динамические критические явления, позволяют не только получать ценную информацию, но и обнаруживать влияние столь слабых возмущающих факторов, как диполь-дипольные взаимодействия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16487), Программы по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-2253.2003.2), Федеральной целевой программы «Интеграция» (грант И0228). Один из авторов (А. К. М.) благодарен Фонду содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Стенли, *Фазовые переходы и критические явления*, Наука, Москва (1982).

2. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).

3. P. C. Hohenberg and B. I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).

4. И. К. Камилов, Х. К. Алиев, УФН **168**, 953 (1998).

5. С. В. Малеев, Препринт ЛИЯФ АН СССР № 1038 (1985).

6. С. В. Малеев, Препринт ЛИЯФ АН СССР № 1039 (1985).

7. С. В. Малеев, ЖЭТФ **66**, 1810 (1974).

8. И. К. Камилов, А. К. Муртазаев, Х. К. Алиев, УФН **169**, 773 (1999).

9. M. Suzuki, Progr. Theor. Phys. **58**, 1142 (1977).

10. K. Chen and D. P. Landau, Phys. Rev. B **49**, 3266 (1994).

11. D. P. Landau, Physica A **205**, 41 (1994).

12. D. P. Landau and M. Krech, J. Phys.: Condens. Matter **11**, R179 (1999).

13. Х. К. Алиев, И. К. Камилов, О. М. Омаров, ЖЭТФ **94**, 153 (1988).

14. А. К. Муртазаев, И. К. Камилов, М. А. Магомедов, ЖЭТФ **120**, 1535 (2001).

15. Х. К. Алиев, И. К. Камилов, Х. И. Магомедгаджиев, М.-Г. К. Омаров, ЖЭТФ **95**, 1896 (1989).

16. A. R. Chowdhury, G. S. Collins, and C. Hohenemser, Phys. Rev. B **30**, 6277 (1984).

17. G. S. Collins, A. R. Chowdhury, and C. Hohenemser, Phys. Rev. B **33**, 4747 (1986).

18. A. R. Chowdhury, G. S. Collins, and C. Hohenemser, Phys. Rev. B **33**, 5070 (1986).

19. E. Frey, F. Schwabl, S. Hennenberg et al., Phys. Rev. Lett. **79**, 5142 (1997).

20. S. Hennenberg, E. Frey, P. G. Maier et al., Phys. Rev. B **60**, 9630 (1999).

21. A. K. Murtazaev, V. A. Mutailamov, I. K. Kamilov et al., J. Magn. Magn. Mat. **258–259**, 48 (2003).

22. А. К. Муртазаев, В. А. Мутайламов, К. Ш. Хизриев, Изв. РАН, сер. физ. **68**, 734 (2004).

23. К. Биндер, *Методы Монте-Карло в статистической физике*, Мир, Москва (1982).