

ДИСКРЕТНАЯ КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ В ФОРМАЛИЗМЕ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ

*В. М. Хацимовский**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 17 марта 2005 г.

Обсуждается подход к дискретной квантовой гравитации в формализме исчисления Редже, развитый в ряде наших работ. Исчисление Редже представляет собой общую теорию относительности на подклассе римановых многообразий — кусочно-плоских многообразиях. Исчисление Редже оперирует дискретным набором переменных — длинами триангуляции — и содержит непрерывную общую теорию относительности в качестве предельного частного случая, когда длины стремятся к нулю. В нашем подходе квантовые средние этих длин отличны от нуля и порядка планковской длины 10^{-33} см, что означает дискретную структуру пространства-времени на этих масштабах.

PACS: 04.60.-m

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к формулировке общей теории относительности (ОТО) в дискретном виде обусловлен не в последнюю очередь сложностью теории. В классическом аспекте запись существенно нелинейных уравнений теории, уравнений Эйнштейна, в терминах дискретного набора физических величин, т. е. их дискретизация, облегчает применение численных методов для их решения. В квантовом аспекте дискретизация может быть введена, как и в любой другой теории поля, для регуляризации изначально расходящихся выражений. Однако в случае ОТО мы имеем две следующие отличительные особенности. Во-первых, согласно стандартной классификации, ОТО является неперенормируемой теорией, поэтому зависимость результата от конкретного выбора регуляризации не может быть устранена процессом перенормировок. Следовательно, в данном случае дискретизация должна быть не просто математическим приближением типа конечно-разностной аппроксимации изначально непрерывной теории, а представлять собой некую физическую реальность, конкретизирующую вид теории на малых расстояниях. Во-вторых, специфичной для ОТО является ковариантность теории относительно произвольных

преобразований координат, плохо согласующаяся с квантовой механикой, в формулировке которой время играет выделенную роль. Для преодоления этой трудности можно попытаться сформулировать ОТО в виде, не использующем какой-либо функциональной зависимости от координат вообще.

В рамках исчисления, предложенного Тулио Редже в 1961 г. [1], точная ОТО оперирует с частным случаем риманова пространства-времени — так называемыми кусочно-плоскими многообразиями, т. е. плоскими везде, за исключением множества точек меры нуль. Любое такое пространство можно представить состоящим из плоских четырехмерных симплексов, т. е. четырехмерных тетраэдров. В n -мерном случае в рассмотрение вводятся n -мерные симплексы σ^n . n -мерный симплекс σ^n (n -симплекс) состоит из $n + 1$ вершины, каждая из которых соединена ребрами с остальными n вершинами. Все геометрические характеристики n -симплекса однозначно определены длинами $n(n + 1)/2$ его ребер, которые задаются свободно. Геометрия пространства Редже определяется свободным заданием длин всех его ребер, т. е. 1-симплексов. При этом длины ребер двух n -симплексов, имеющих некоторый $(n - 1)$ -симплекс в качестве их общей грани, должны совпадать на этой грани. Если же рассмотреть совокупность всех n -симплексов, содержащих некоторый $(n - 2)$ -симплекс в качестве $(n - 2)$ -мерной

*E-mail: khatsym@inp.nsk.su

границы, то при свободном задании всех длин такую конструкцию, вообще говоря, нельзя вложить в плоское n -мерное пространство, поскольку сумма гипердвухгранных углов всех n -симплексов, сходящихся в этой $(n - 2)$ -мерной грани, равна $2\pi - \alpha$, где так называемый угловой дефект α не обязан равняться нулю. При параллельном переносе вектора по замкнутому контуру, содержащемуся в указанных n -симплексах и охватывающему данный $(n - 2)$ -симплекс, вектор повернется на угол α . Это соответствует δ -функциональному распределению кривизны с носителем на $(n - 2)$ -симплексах, пропорциональному угловым дефектам на этих симплексах. Действие для четырехмерного пространства-времени Редже пропорционально

$$\sum_{\sigma^2} \alpha_{\sigma^2} |\sigma^2|, \quad (1)$$

где $|\sigma^2|$ — площадь треугольника (двумерного симплекса) σ^2 , α_{σ^2} — угловой дефект на этом треугольнике, а суммирование идет по всем двумерным симплексам σ^2 . В работе [2] показано, что действие (1) может быть получено из выражения

$$\frac{1}{2} \int R \sqrt{g} d^4 x, \quad (2)$$

которому пропорционально действие Эйнштейна, путем предельного перехода к случаю δ -функционального распределения кривизны R . Таким образом, исчисление Редже представляет собой ОТО, в которой все степени свободы, за исключением дискретного их числа, заморожены, т. е. так называемую теорию минисуперпространства для ОТО. Тем самым удовлетворяется первое из упомянутых выше требований к дискретной ОТО, а именно, многообразие Редже представляет собой частный (хоть и отчасти сингулярный) случай многообразия Римана. Кроме того, взаимное расположение вершин (нульмерных симплексов σ^0), а значит, и геометрия, однозначно фиксированы свободным заданием инвариантов — длин ребер (одномерных симплексов σ^1), которые, таким образом, играют роль полевых переменных. Поэтому и второе требование — возможность бескоординатного описания — тоже выполнено.

Несмотря на то что исчисление Редже соответствует лишь некоторому подмножеству в конфигурационном пространстве ОТО, это подмножество плотно в этом пространстве. То есть каждое несингулярное многообразие Римана можно в некотором смысле аппроксимировать сколь угодно точно соответствующим образом выбранным многообразием

Редже. Построить такое многообразие Редже можно, если разбить риманово многообразие на достаточно малые области, топологически эквивалентные симплексам σ^4 , ребра которых — это геодезические. В качестве искомого кусочно-плоского многообразия можно взять многообразие этого типа с той же топологией, схемой соединения вершин и длинами ребер, что и данное разбиение риманова многообразия. В работе [3] показано, что действие Эйнштейна (2) получается как предел действия Редже (1) для таких аппроксимирующих пространств, когда характерная длина ребра (длина триангуляции) стремится к нулю. В работе [4] для случая n измерений доказано более общее утверждение, заключающееся в том, что при увеличении мелкости разбиения на n -симплексы к своим непрерывным аналогам стремятся так называемые кривизны Липшица–Киллинга, причем стремятся в смысле мер, т. е. сходятся интегралы от обсуждаемых величин по областям пространства. Частными случаями таких интегралов являются объем области, вклад области в действие Эйнштейна, а также в топологический член Гаусса–Боннэ.

Исчисление Редже обладает точными дискретными аналогами многих величин, которые могут быть определены в непрерывной ОТО. Первым примером служат уравнения Эйнштейна, дискретный аналог которых был получен Редже путем варьирования действия (1) по длинам ребер. При этом оказывается, что вариация α_{σ^2} в (1) не дает вклада, и уравнение, полученное вариацией длины конкретного ребра σ^1 , имеет вид

$$\sum_{\sigma^2 \supset \sigma^1} \alpha_{\sigma^2} \operatorname{ctg} \vartheta(\sigma^1, \sigma^2) = 0. \quad (3)$$

Здесь $\vartheta(\sigma^1, \sigma^2)$ — угол в треугольнике σ^2 , противолежащий стороне σ^1 , а суммирование идет по всем треугольникам, имеющим σ^1 в качестве ребра. Очевидно, дискретная бескоординатная формулировка в терминах физических величин (длин) идеально подходит для численных расчетов, и первоначально исчисление Редже было применено как раз для численного анализа классических уравнений Эйнштейна [5].

Однако наибольший интерес исчисление Редже вызвало именно в применении к квантовой гравитации. В этом аспекте основная задача состояла в построении гамильтонова формализма — аналога формализма Арновитта, Дезера и Мизнера в непрерывной ОТО [6]. В соответствии с их результатом, лагранжиан ОТО приводится к виду

$$L = \sum_A p_A \dot{q}_A - \sum_\alpha \lambda_\alpha \Phi_\alpha(p, q) \quad (4)$$

с каноническими переменными p_A , q_A и переменными λ_α , играющими при вариации роль множителей Лагранжа, значение и динамика которых не определяются из уравнений движения. Таким образом, ОТО — теория, описываемая совокупностью связей $\Phi_\alpha(p, q) = 0$ и нулевым гамильтонианом. В случае исчисления Редже, бескоординатной теории в своей основе, надо было частично вернуться к координатному описанию, но в отношении лишь одной координаты — времени t , причем перейти от дискретного распределения полей (в данном случае — длин и их функций) к распределению, гладкому по t . Переход к такому так называемому (3+1)-мерному исчислению Редже (дискретное трехмерное пространство плюс непрерывное время) и к гамильтонову формализму был предпринят в ряде работ [7–18]. В основном, тем или иным образом пытались определить дискретные аналоги переменных p_A , q_A и связей $\Phi_\alpha(p, q)$, причем основное внимание уделялось тому, чтобы алгебра скобок Пуассона для этих связей была близка к таковой в случае непрерывной ОТО. Если придерживаться стратегии, которая требует на каждом этапе иметь дело с частным случаем риманова многообразия, (3 + 1)-мерное исчисление Редже получается как предел четырехмерного исчисления, когда в некотором направлении, выбранном за направление времени, размеры 4-симплексов стремятся к нулю. Этот предельный переход изучался в работах [7, 8, 15, 16]. При этом, в частности, виден источник трудностей, не позволивших решить до конца поставленную задачу в цитированных работах: он заключается в сингулярном характере описания симплексов с помощью длин ребер, когда размеры вдоль некоторого направления стремятся к нулю. В качестве иллюстрации можно представить себе треугольник, одна из сторон которого бесконечно мала: тогда бесконечно малые изменения длин двух других сторон приводят к конечным изменениям углов. В результате не все степени свободы системы могут быть описаны в выбранных переменных типа длины несингулярным образом, и потому не все дискретные аналоги связей $\Phi_\alpha(p, q)$ могут быть найдены.

2. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕРЫ В ИСЧИСЛЕНИИ РЕДЖЕ

Сингулярный характер перехода к непрерывному времени связан, таким образом, с использованием в качестве фундаментального набора переменных

в исчислении Редже одних только длин. Пока мы изучаем квантовую меру на полностью дискретном многообразии Редже, это обстоятельство не имеет для нас значения. Однако исходным понятием, лежащим в основе квантовой теории, которым мы располагаем для построения квантовой меры, является каноническое квантование; последнее же определено как раз в непрерывном времени. Поэтому искомую квантовую меру следует определить из требования, чтобы в непрерывном пределе вдоль любой из координат эта мера в некотором смысле переходила бы в квантовую меру (фейнмановский интеграл по путям), соответствующую каноническому квантованию, причем непрерывная координата играет роль времени. Иначе говоря, переход к пределу непрерывного времени служит «пробником» при определении квантовой меры в полностью дискретном исчислении Редже.

Способ обойти сингулярности в пределе непрерывного времени состоит в расширении набора переменных теории путем добавления новых переменных, имеющих смысл углов, рассматриваемых как независимые. Такими переменными являются матрицы конечных вращений — дискретные аналоги связности в непрерывной ОТО.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ РЕДЖЕ В ТЕРМИНАХ МАТРИЦ КОНЕЧНЫХ ВРАЩЕНИЙ КАК ПЕРЕМЕННЫХ

Ситуация аналогична записи действия Эйнштейна (2) в форме Гильберта – Палатини:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int R \sqrt{g} d^4 x \Leftarrow \\ \Leftarrow \frac{1}{8} \int \epsilon_{abcd} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} e_\lambda^a e_\mu^b [\partial_\nu + \omega_\nu, \partial_\rho + \omega_\rho]^{cd} d^4 x, \quad (5) \end{aligned}$$

где тетрада e_λ^a и связность $\omega_\lambda^{ab} = -\omega_\lambda^{ba}$ — независимые переменные, причем (5) сводится к (2) в терминах $g_{\lambda\mu} = e_\lambda^a e_{a\mu}$ при подстановке в качестве ω_λ^{ab} решения уравнений движения для этих переменных в терминах e_λ^a . Латинские индексы a, b, c, \dots являются векторными относительно локально-евклидовых систем отсчета, вводимых в каждой точке x . Аналог представления (5) для исчисления Редже получается, если локально-евклидову систему отсчета ввести в каждом 4-симплексе. Тогда аналогами связностей являются определенные на 3-симплексах σ^3 матрицы преобразования Ω_{σ^3} между системами отсчета в двух 4-симплексах σ^4 , имеющих данный σ^3

в качестве своей трехмерной грани. Эти матрицы являются конечными $SO(4)$ -вращениями в евклидовом случае (или $SO(3, 1)$ -вращениями в лоренцевом случае), в отличие от непрерывных связностей ω_{λ}^{ab} , элементов алгебры Ли $so(4)$ ($so(3, 1)$) этой группы. При этом существенно указание направления, в котором действует связность Ω_{σ^3} (и, соответственно, $\Omega_{\sigma^3}^{-1} = \bar{\Omega}_{\sigma^3}$ — в противоположном направлении), т. е. связности Ω определены на ориентированных 3-симплексах σ^3 .

На каждом 2-симплексе σ^2 определены матрицы кривизны R_{σ^2} , представляющие собой произведения связностей $\Omega_{\sigma^3}^{\pm 1}$ на 3-симплексах σ^3 , содержащих σ^2 , действующих в определенном направлении вдоль замкнутого контура, охватывающего один раз σ^2 и содержащегося в этих 3-симплексах. Матрица R_{σ^2} должна представлять собой вращение вокруг σ^2 на угол α_{σ^2} . Наряду с направлением вдоль контура при определении кривизны R_{σ^2} необходимо задать 4-симплекс $\sigma^4 \supset \sigma^2$, в котором начинается и заканчивается контур, т. е. симплекс, в локально-евклидовой системе которого определена матрица

$$R_{\sigma^2} = \prod_{\sigma^3 \supset \sigma^2} \Omega_{\sigma^3}^{\pm 1}. \quad (6)$$

Дискретные аналоги связности и кривизны обсуждались Бандером [19–21] как функции длин. Наш подход основан на рассмотрении связностей как независимых переменных и изучении представления действия Редже (1), аналогичного действию Эйнштейна в форме Гильберта–Палатини (5). Для записи этого представления определим дуальный бивектор треугольника σ^2 по векторам его сторон l_1^a , l_2^a , определенным в некотором 4-симплексе, содержащем σ^2 :

$$v_{\sigma^2 ab} = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} l_1^c l_2^d. \quad (7)$$

Тогда дискретный аналог выражения (5), предложенный в нашей работе [22], запишется в виде

$$S(v, \Omega) = \sum_{\sigma^2} |v_{\sigma^2}| \arcsin \frac{v_{\sigma^2} \circ R_{\sigma^2}(\Omega)}{|v_{\sigma^2}|}, \quad (8)$$

где для двух тензоров A, B мы определили

$$A \circ B = \frac{1}{2} A^{ab} B_{ab}, \quad |A| = (A \circ A)^{1/2},$$

в частности, $|v_{\sigma^2}| = |\sigma^2|$ — площадь треугольника. Важно, чтобы v_{σ^2} и R_{σ^2} в (8) были определены в одном и том же из 4-симплексов, содержащих σ^2 . Как можно показать, если в уравнение движения для Ω_{σ^3}

с действием (8) подставить в качестве переменных Ω_{σ^3} реальные вращения, связывающие соседние локально-евклидовы системы отсчета и соответствующие реальным длинам Редже, то получится условие замыкания поверхности 3-симплекса σ^3 (равенство нулю суммы бивекторов его 2-граней), выраженное в системе отсчета одного из 4-симплексов, содержащих σ^3 , т. е. тождество. Это означает, что (8) — точное представление для (1).

4. ЕСТЕСТВЕННОСТЬ ПЕРЕХОДА К ИСЧИСЛЕНИЮ РЕДЖЕ С НЕЗАВИСИМЫМИ ТЕНЗОРАМИ ПЛОЩАДЕЙ

В представлении с использованием матриц вращений можно перейти к непрерывному времени и развить канонический формализм в исчислении Редже [23], в котором имеются связи второго рода (т. е. некоммутирующие). В результате фейнмановский интеграл по путям содержит в качестве фактора определитель скобок Пуассона связей второго рода, который сингулярен в плоской геометрии. Дело в том, что геометрия многообразия Редже изменяется, вообще говоря, при любом изменении ребер, за исключением плоского случая, для которого изменения длин являются преобразованиями симметрии. Иными словами, в плоском случае меняется разделение связей на связи первого и второго родов. Исключение составляет трехмерный случай. Вследствие локальной тривиальности трехмерной гравитации все динамические связи — связи первого рода, и интеграл по путям имеет простой вид. В этом случае поставленная в разд. 2 задача отыскания дискретной квантовой меры может быть решена, что приводит к простому виду этой меры [24].

Поставленные в разд. 2 условия на дискретную меру являются весьма ограничительными, и существование решения, вообще говоря, не очевидно. Сингулярность интеграла по путям в четырехмерном случае вблизи плоской геометрии сама по себе не препятствует существованию решения; критичным является наличие вышеупомянутого детерминантного фактора в интеграле по путям. Этот фактор зависит от переменных — решеточных артефактов, связанных с конкретной координатой, по которой берется непрерывный предел, и потому не может быть получен из какого-либо универсального выражения в результате перехода к пределу непрерывного времени.

Попробуем видоизменить четырехмерное исчисление Редже, чтобы оно напоминало по канониче-

ской структуре трехмерный случай. В трехмерном исчислении Редже в представлении, аналогичном (8), вместо тензоров площадок v_{σ^2} фигурируют векторы ребер \mathbf{l}_{σ^1} . Векторы ребер являются независимыми переменными, что и обуславливает локальную тривиальность трехмерной гравитации. В противоположность этому тензоры площадок не являются независимыми. Например, тензоры двух треугольников σ_1^2, σ_2^2 с общим ребром удовлетворяют соотношению

$$\epsilon_{abcd} v_{\sigma_1^2}^{ab} v_{\sigma_2^2}^{cd} = 0. \tag{9}$$

Идея состоит в том, чтобы построить квантовую меру сначала для системы, в которой тензоры площадок формально полагаются независимыми, т. е. кинематические соотношения типа (9) учесть на втором этапе, первоначально сосредоточившись на квантовании динамики.

В исчислении Редже с независимыми тензорами площадей задача отыскания дискретной квантовой меры может быть решена, что приводит к простому виду этой меры [25]. Рассмотрим евклидов случай. Как известно, действие Эйнштейна не является ограниченным снизу, поэтому евклидов функциональный интеграл сам требует доопределения. В частности, результат [25] для вакуумных средних функций наших полевых переменных v, Ω может быть записан с помощью интегрирования по мнимым площадям путем формальной замены для тензоров определенного класса площадок π , по которым ведется интегрирование,

$$\pi \rightarrow i\pi,$$

в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi(\{\pi\}, \{\Omega\}) \rangle &= \\ &= \int \Psi(-i\{\pi\}, \{\Omega\}) \exp \left(- \sum_{\substack{t\text{-like} \\ \sigma^2}} \tau_{\sigma^2} \circ R_{\sigma^2}(\Omega) \right) \times \\ &\times \exp \left(i \sum_{\substack{\text{not} \\ t\text{-like} \\ \sigma^2}} \pi_{\sigma^2} \circ R_{\sigma^2}(\Omega) \right) \prod_{\substack{\text{not} \\ t\text{-like} \\ \sigma^2}} d^6 \pi_{\sigma^2} \prod_{\sigma^3} \mathcal{D}\Omega_{\sigma^3} \equiv \\ &\equiv \int \Psi(-i\{\pi\}, \{\Omega\}) d\mu_{\text{area}}(-i\{\pi\}, \{\Omega\}), \tag{10} \end{aligned}$$

где для двух тензоров A, B мы определили

$$A \circ B = \frac{1}{2} A^{ab} B_{ab}.$$

Уравнение подразумевает определенное структурирование нашей решетки Редже, предполагающее конструирование ее из слоев — сходных по структуре трехмерных геометрий Редже. Слои нумеруются значениями некоторой координаты t . Аналогичные вершины в соседних слоях соединяются t -подобными ребрами, а также имеются диагональные ребра, соединяющие вершину с соседями аналогичной ей вершины в соседнем слое. Тогда естественны понятия t -подобных симплексов и симплексов слоя как симплексов, соответственно содержащих t -подобное ребро либо целиком лежащих в слое, а также диагональных симплексов как всех прочих. Тогда τ_{σ^2} — это v_{σ^2} , когда σ^2 t -подобен (t -like), а π_{σ^2} — это v_{σ^2} , когда σ^2 не t -подобен (not t -like), т. е. является симплексом слоя или диагональным. В исчислении Редже с независимыми тензорами площадей π_{σ^2} могут служить динамическими переменными, тогда τ_{σ^2} должны быть выбраны в качестве параметров.

Уравнение (10) во многом походит на интуитивно ожидаемое выражение для квантовой меры. В частности, следующая из симметричных соображений инвариантная мера на группе $SO(4)$ (мера Хаара) $\mathcal{D}\Omega$ возникает при формальном выписывании в пределе непрерывного времени интеграла по путям, соответствующего каноническому квантованию с кинетическим слагаемым $\pi_{\sigma^2} \circ \dot{\Omega}_{\sigma^2} \Omega_{\sigma^2}$ в лагранжиане (в пределе непрерывного времени динамические переменные типа связности Ω естественным образом соответствуют уже не тетраэдрам σ^3 , а треугольникам σ^2).

Специфическими особенностями квантовой меры являются, во-первых, отсутствие обратных тригонометрических функций \arcsin в выражении, стоящем в экспоненте, в то время как в действии Редже (8) такие символы имеются. Это связано с промежуточным использованием канонического квантования при выводе, которое в случае гравитации полностью определяется связями. Последние же эквивалентны таковым без \arcsin (так сказать, on-shell).

Кроме того, по части тензоров площадок, по τ_{σ^2} , интегрирований нет, и, тем самым, симметрия между разными треугольниками оказывается неполной. Тем не менее это нарушение симметрии может рассматриваться как спонтанное, когда выделенным оказывается некоторое, а priori произвольное направление, обозначенное в формуле (10) координатой t . Матрицы кривизны $R(\Omega)$ на всех, кроме t -подобных, треугольниках могут быть выбраны как независимые переменные, тогда эти матрицы на t -подобных треугольниках являются (посредством

тождеств Бианки) функциями остальных. Интегрирования по всем тензорам площадок привели бы к сингулярностям вида $[\delta(R - \bar{R})]^2$.

Эта особенность дискретной квантовой меры, неполная симметрия по отношению к разным координатным направлениям, согласуется с наложенными на нее выше (в разд. 2) условиями следующим образом. В непрерывном пределе вдоль какой-либо координаты x (необязательно совпадающей с t) отсутствие интегрирования по тензорам t -подобных треугольников будет означать простейшую фиксацию калибровки в предельной мере — фиксацию тензоров некоторого семейства треугольников [25].

С учетом свойств инвариантной меры Хаара и при пренебрежимо малых значениях τ_{σ^2} получаем факторизацию полученной квантовой меры на «элементарные» меры на отдельных площадках (что как раз соответствует локальной тривиальности теории) вида

$$\exp(i\pi \circ R) d^6\pi DR. \quad (11)$$

В свою очередь, используем групповое свойство

$$SO(4) = SU(2) \times SU(2),$$

для того чтобы расщепить переменные (π и генератор R) на само- и антисамодуальные части, в частности, π описывается двумя 3-векторами ${}^+\pi$, ${}^-\pi$ в присоединенном представлении $SO(3)$. В результате мера (11) равна произведению двух мер, каждая из которых действует в трехмерном пространстве векторов площадки:

$$\exp(i{}^+\pi \circ {}^+R) d^3{}^+\pi D{}^+R \times \exp(i{}^-\pi \circ {}^-R) d^3{}^-\pi D{}^-R. \quad (12)$$

В результате для среднего любой функции площадки можно получить выражение

$$\begin{aligned} \langle f(\pi) \rangle &= \int f(-i\pi) d^6\pi \int e^{i\pi \circ R} \mathcal{D}R = \\ &= \int f(\pi) \frac{\nu_2(|{}^+\pi|)}{|{}^+\pi|^2} \frac{\nu_2(|{}^-\pi|)}{|{}^-\pi|^2} \frac{d^3{}^+\pi}{4\pi} \frac{d^3{}^-\pi}{4\pi}, \quad (13) \\ \nu(l) &= \frac{l}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \exp\left(-\frac{l}{\sin\varphi}\right). \end{aligned}$$

В частности, средние степеней квадрата площади

$$|\pi|^2 = \pi \circ \pi = \frac{1}{2}({}^+\pi)^2 + \frac{1}{2}({}^-\pi)^2 \quad (14)$$

и дуального произведения

$$\pi * \pi = \frac{1}{2}({}^+\pi)^2 - \frac{1}{2}({}^-\pi)^2 \quad (15)$$

легко получаются из средних степеней ${}^\pm\pi$:

$$\langle ({}^\pm\pi)^{2k} \rangle = \frac{4^{-k}(2k+1)!(2k)!}{k!^2}. \quad (16)$$

5. ВОЗВРАТ К СТАНДАРТНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ РЕДЖЕ

Таким образом, мы получили конечные ненулевые средние площадей в исчислении Редже с независимыми тензорами площадок. Однако нам нужны средние длин в обычном исчислении Редже, которое получается при наложении условий однозначности этих длин, вычисленных в разных 4-симплексах. Эти условия эквивалентны условиям непрерывности индуцированной на трехмерных гранях метрики. В конфигурационном пространстве исчисления Редже с независимыми тензорами площадей эти условия выделяют некоторую гиперповерхность Γ_{Regge} . Квантовую меру можно рассматривать как линейный функционал $\mu_{area}(\Psi)$ на пространстве функционалов $\Psi(\{v\})$ на конфигурационном пространстве (для наших целей достаточно ограничиться зависимостью от множества тензоров площадок $\{v\}$). Физическое предположение состоит в том, что мы можем рассматривать обычное исчисление Редже как разновидность состояния этой более общей системы с независимыми тензорами площадок. Этому состоянию можно сопоставить функционал вида

$$\Psi(\{v\}) = \psi(\{v\}) \delta_{Regge}(\{v\}), \quad (17)$$

где $\delta_{Regge}(\{v\})$ — (многомерная) δ -функция с носителем на Γ_{Regge} . Производные δ_{Regge} имеют тот же самый носитель, но они нарушают положительность в нашей последующей конструкции. Если быть более точным, δ -функция — это распределение, а не функция, но может рассматриваться как таковая, будучи регуляризована. Если мера на таких функционалах существует в пределе снятия регуляризации, это позволяет определить квантовую меру на Γ_{Regge} :

$$\mu_{Regge}(\cdot) = \mu_{area}(\delta_{Regge}(\{v\}) \cdot). \quad (18)$$

Единственность конструкции δ_{Regge} получается при весьма естественном предположении о минимальности решеточных артефактов. Пусть система описывается метрикой $g_{\lambda\mu}$, постоянной в каждом из двух 4-симплексов σ_1^4, σ_2^4 , разделенных трехмерной гранью

$$\sigma^3 = \sigma_1^4 \cap \sigma_2^4,$$

образованной тремя 4-векторами l_a^λ . Эти векторы задают и метрику, индуцированную на грани,

$$g_{ab}^\parallel = l_a^\lambda l_b^\mu g_{\lambda\mu}.$$

Условие непрерывности индуцированной метрики выражается δ -функцией от разности:

$$\Delta_{\sigma^3} g_{ab}^{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ab}^{\parallel}(\sigma_1^4) - g_{ab}^{\parallel}(\sigma_2^4). \quad (19)$$

Сама же δ_{Regge} определена, естественно, с точностью до множителя — произвольной обычной (не обобщенной), ненулевой функцией при невырожденных конфигурациях функции полей. В духе упомянутого выше принципа «минимальности решеточных артефактов» естественно выбрать этот множитель так, чтобы результирующий δ -функциональный фактор зависел только от гиперплоскости, задаваемой трехмерной гранью, но не от формы этой грани, т. е. был инвариантным относительно произвольных невырожденных преобразований

$$l_a^\lambda \mapsto m_a^b l_b^\lambda.$$

Для этого δ -функцию надо домножить на квадрат определителя g_{ab}^{\parallel} , что дает

$$[\det(l_a^\lambda l_b^\mu g_{\lambda\mu})]^2 \delta^6(l_a^\lambda l_b^\mu \Delta_{\sigma^3} g_{\lambda\mu}) = V_{\sigma^3}^4 \delta^6(\Delta_{\sigma^3} S_{\sigma^3}). \quad (20)$$

Здесь S_{σ^3} — набор квадратов длин шести ребер трехмерной грани σ^3 , V_{σ^3} — объем этой грани.

Далее надо взять произведение факторов (20) по всем 3-граням. При этом для каждого ребра возникнут произведения δ -функций от скачков его длины при переходе от одного 4-симплекса к другому по замкнутым контурам,

$$\delta(s_1 - s_2) \delta(s_2 - s_3) \dots \delta(s_N - s_1),$$

содержащие сингулярность типа квадрата δ -функции. Иначе говоря, условия, приравнивающие (19) нулю на разных 3-гранях, не являются независимыми. Более детальное рассмотрение позволяет симметричным (относительно разных симплексов) образом сократить эту сингулярность (тем самым выделив среди этих условий неприводимые), причем результирующий δ -функциональный фактор остается инвариантным относительно произвольных деформаций граней разной размерности, не выводящих эти грани из определяемых ими плоскостей [26].

В качественном отношении важно то, что наш δ -функциональный фактор (в простейшем варианте — (20)) автоматически оказывается инвариантным относительно изменения масштаба длин. Напомним, однако, что динамическими и, следовательно, подлежащими усреднению переменными являются тензоры площадок π_{σ^2} , но не τ_{σ^2} . Более подробный анализ показывает, что, зафиксировав масштаб тензоров τ_{σ^2} на уровне $\varepsilon \ll 1$, можно считать δ -функциональный

фактор инвариантным и по отношению к изменениям масштаба одних лишь динамических переменных π_{σ^2} , а это означает качественный вывод о конечных ненулевых значениях вакуумных средних ребер в обычном исчислении Редже, коль скоро средние площадей конечны и отличны от нуля в исчислении Редже с независимыми тензорами площадей [27].

Строго говоря, при переходе от исчисления Редже с независимыми тензорами площадей к обычному исчислению Редже необходимо сначала наложить условия, гарантирующие, что в каждом конкретном 4-симплексе тензоры его двумерных граней определяют некоторую метрику в этом 4-симплексе. Эти условия типа (9) просто записать единообразно, если в данном 4-симплексе взять какую-либо из его вершин за начало координат, а исходящие из нее ребра считать линиями координат $\lambda, \mu, \nu, \rho, \dots = 1, 2, 3, 4$. Тогда (упорядоченная) пара $\lambda\mu$ обозначает (ориентированный) треугольник, образованный ребрами λ, μ . Искомые условия имеют вид

$$\epsilon_{abcd} v_{\lambda\mu}^{ab} v_{\nu\rho}^{cd} \sim \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}. \quad (21)$$

В 36-мерном конфигурационном пространстве шести антисимметричных тензоров¹⁾ $v_{\lambda\mu}^{ab}$ 20 уравнений (21) определяют 16-мерную гиперповерхность $\gamma(\sigma^4)$. Искомый фактор в квантовой мере — это произведение δ -функций с носителем на $\gamma(\sigma^4)$ по всем 4-симплексам σ^4 . Ковариантный вид связей (21) по отношению к мировому индексу означает, что эти δ -функции являются скалярными плотностями определенного веса по отношению к мировому индексу, т. е. скалярами с точностью до степеней объема 4-симплекса V_{σ^4} . Поэтому, вводя факторы вида $V_{\sigma^4}^\eta$, при некотором параметре η можно получить скаляр. Именно, произведение факторов

$$\prod_{\sigma^4} \int V_{\sigma^4}^\eta \delta^{21}(\epsilon_{abcd} v_{\lambda\mu|\sigma^4}^{ab} v_{\nu\rho|\sigma^4}^{cd} - V_{\sigma^4} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}) dV_{\sigma^4} \quad (22)$$

при $\eta = 20$ — масштабно-инвариантная величина, как того требует принцип минимальности решеточных артефактов (т. е., искомый фактор не должен зависеть от величины 4-симплекса). В результате заявленный в предыдущем абзаце вывод о конечных ненулевых значениях вакуумных средних ребер в обычном исчислении Редже, коль скоро средние площадей конечны и отличны от нуля в исчислении Редже с независимыми тензорами площадей, остается справедливым [27].

¹⁾ Имеются также линейные связи типа $\sum \pm v = 0$, обеспечивающие замыкание поверхностей 3-граней нашего 4-симплекса. Подразумевается, что эти связи уже разрешены.

6. ВЫВОДЫ

Таким образом, наш подход к квантованию исчисления Редже «из первых принципов» включает в себе нижеследующие шаги и условия.

1. Построение квантовой меры, в непрерывном пределе по любой из координат переходящей в Фейнмановский интеграл по путям, соответствующий каноническому квантованию, в котором роль времени играет эта координата.

2. Использование при этом (точного) представления действия Редже с помощью матриц вращений как независимых переменных.

3. Расширение при этом конфигурационного пространства теории путем рассмотрения тензоров площадок как независимых переменных.

4. Сужение квантовой меры из расширенного конфигурационного пространства на гиперповерхность, соответствующую исчислению Редже, с использованием принципа «минимальности решеточных артефактов», т. е. минимальной зависимости от формы и размеров симплексов.

В результате получены значения квантовых средних длин Редже порядка планковского масштаба 10^{-33} см. Если бы эти длины получились нулевыми, это просто означало бы, что квантовая мера насыщается бесконечно малыми длинами ребер Редже, то есть, гладкими римановыми многообразиями, и мы фактически вернулись бы к непрерывной ОТО. Здесь проявляется замечательным образом выделенное свойство исчисления Редже — то, что это теория минисуперпространства для ОТО, иными словами, точная ОТО для определенных (кусочно-плоских) пространств. Поэтому в квантовой теории исчисление Редже не означает отказ от непрерывной ОТО (оно содержит эту теорию в качестве предельной точки), а представляет собой скорее вариант описания системы с помощью альтернативного набора переменных — длин триангуляции. Наш результат — ненулевые средние этих длин — означает адекватность описания ОТО именно с помощью этих переменных, когда ОТО становится дискретной на планковских масштабах динамически, т. е. в результате конкуренции различных вкладов в функциональный интеграл, в том числе и вклада гладких многообразий.

Я благодарен И. Б. Хрипловичу за внимание к работе и обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Regge, *Nuovo Cimento* **19**, 568 (1961).

2. R. Friedberg and T. D. Lee, *Nucl. Phys. B* **242**, 145 (1984).

3. G. Feinberg, R. Friedberg, T. D. Lee, and M. C. Ren, *Nucl. Phys. B* **245**, 343 (1984).

4. J. Cheeger, W. Müller, and R. Shrader, *Commun. Math. Phys.* **92**, 405 (1984).

5. C.-Y. Wong, *J. Math. Phys.* **12**, 70 (1971).

6. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Phys. Rev.* **117**, 1595 (1960).

7. P. A. Collins and R. M. Williams, *Phys. Rev. D* **7**, 965 (1973).

8. P. A. Collins and R. M. Williams, *Phys. Rev. D* **10**, 3537 (1974).

9. R. M. Williams, *Class. Quantum Grav.* **3**, 853 (1986).

10. J. L. Friedman and I. J. Jack, *J. Math. Phys.* **27**, 2973 (1986).

11. T. Piran and R. M. Williams, *Phys. Rev. D* **33**, 1622 (1986).

12. J. Porter, *Class. Quantum Grav.* **4**, 375 (1987).

13. J. Porter, *Class. Quantum Grav.* **4**, 391 (1987).

14. J. Porter, *Class. Quantum Grav.* **4**, 651 (1987).

15. L. Brewin, *Class. Quantum Grav.* **4**, 899 (1987).

16. L. Brewin, *Class. Quantum Grav.* **5**, 839 (1988).

17. P. A. Tuckey and R. M. Williams, *Class. Quantum Grav.* **5**, 155 (1988).

18. P. A. Tuckey, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1 (1989).

19. M. Bander, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1825 (1986).

20. M. Bander, *Phys. Rev. D* **36**, 2297 (1987).

21. M. Bander, *Phys. Rev. D* **38**, 1056 (1988).

22. V. M. Khatsymovsky, *Class. Quantum Grav.* **6**, L249 (1989).

23. V. M. Khatsymovsky, *Gen. Rel. Grav.* **27**, 583 (1995), E-print archives, gr-qc/9310004.

24. V. M. Khatsymovsky, *Class. Quantum Grav.* **11**, 2443 (1994); E-print archives, gr-qc/9310040.

25. V. M. Khatsymovsky, *Phys. Lett. B* **560**, 245 (2003); E-print archives, gr-qc/0212110.

26. V. M. Khatsymovsky, *Phys. Lett. B* **567**, 288 (2003); E-print archives, gr-qc/0304006.

27. V. M. Khatsymovsky, *Phys. Lett. B* **586**, 411 (2004); E-print archives, gr-qc/0401053.