

# ТЕТРАКРИТИЧЕСКАЯ ТОЧКА И ТОКОВЫЕ ЦИРКУЛЯЦИИ В СВЕРХПРОВОДЯЩЕМ СОСТОЯНИИ

*В. И. Белявский\**, *Ю. В. Копеев\*\**, *М. Ю. Смирнов*

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 марта 2005 г.

Фазовая диаграмма, отражающая основные особенности типичной диаграммы купратных сверхпроводников, исследована в рамках феноменологии Гинзбурга – Ландау в окрестности тетракритической точки, возникающей из-за конкуренции сверхпроводящего и диэлектрического каналов спаривания. Сверхпроводящему спариванию при отталкивании соответствует двухкомпонентный параметр порядка, относительная фаза которого связана с орбитальным антиферромагнитным диэлектрическим упорядочением. При слабом допировании диэлектрический порядок сосуществует со сверхпроводимостью ниже температуры сверхпроводящего фазового перехода и проявляется как слабая псевдощель выше этой температуры. Часть области псевдощели, прилегающая к сверхпроводящему состоянию, соответствует развитым флуктуациям параметра порядка в виде квазистационарных состояний некогерентных сверхпроводящих пар и может интерпретироваться как область сильной псевдощели. При увеличении степени допирования имеет место фазовый переход из области сосуществования сверхпроводимости и орбитального антиферромагнетизма в обычное сверхпроводящее состояние, в котором имеется прилегающая к линии фазового перехода область развитых флуктуаций параметра порядка в виде квазистационарных состояний некоррелированных орбитальных циркулярных токов.

PACS: 78.47.+p, 78.66.-w

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Сверхпроводимость в купратах возникает при допировании родительского антиферромагнитного диэлектрика и имеет место в ограниченном снизу и сверху интервале концентрации введенных в результате допирования носителей,  $x_* < x < x^*$ . В граничных точках  $x_*$  и  $x^*$  этого интервала температура сверхпроводящего перехода  $T_C$  обращается в нуль. Как функция допирования, температура сверхпроводящего перехода  $T_C(x)$  достигает максимального значения при некотором оптимальном допировании  $x_{opt}$ . Спиновое антиферромагнитное упорядочение, присущее родительскому диэлектрику и характеризующееся температурой Нееля  $T_N(x)$ , быстро подавляется допированием, и при некотором уровне допирования  $x_N < x_*$  дальний антиферромагнитный порядок в виде волны спиновой плотности (SDW) исчезает. Ближний антиферромагнитный по-

рядок (флуктуации SDW) наблюдается вплоть до  $x \approx x_{opt}$  [1].

При повышении температуры фазовый сверхпроводящий переход в передопированной ( $x_{opt} \lesssim x < x^*$ ) области фазовой диаграммы имеет, как принято считать, черты сверхпроводящего перехода в обычных сверхпроводниках [1]. Это дает основание полагать, что нормальным состоянием, существующим выше  $T_C(x)$  в передопированной области, является ферми-жидкость, так что фазовый переход из сверхпроводящей фазы в нормальную в этой области может быть удовлетворительно описан в рамках стандартной теории среднего поля Бардина, Купера и Шриффера (BCS).

В недопированной ( $x_* < x \lesssim x_{opt}$ ) области фазовый переход из сверхпроводящего состояния происходит в фазу, в которой одночастичная плотность состояний оказывается сильно подавленной. Такое состояние характеризуется псевдощелью в спектре одночастичных возбуждений, и установление природы псевдощели рассматривается как одна из фун-

\*E-mail: vib@box.vsi.ru

\*\*E-mail: kopaev@lebedev.sci.ru

даментальных проблем физики купратов. Область псевдощелевого состояния проявляется в различных экспериментах, однако температурный диапазон ее проявления при заданном уровне допирования  $x$  из интервала  $x_* < x \lesssim x_{opt}$  целесообразно разделить на две части [1]. Низкотемпературная часть (область сильной псевдощели) при  $T_C(x) < T < T_{str}^*$  характеризуется усилением эффекта Нернста и может быть связана с существованием некогерентных сверхпроводящих пар, тогда  $T_{str}^*$  соответствует исчезновению таких пар, т. е. разрыву связи между частицами, образующими пару. В высокотемпературной части (область слабой псевдощели) при  $T_{str}^*(x) < T < T_w^*(x)$  аномалии физических свойств, связанные с подавлением одночастичной плотности состояний, сохраняются до тех пор, пока при  $T > T_w^*(x)$  система не оказывается в состоянии, соответствующем ферми-жидкости [1].

Вполне естественно предположить, что само существование псевдощелевого состояния обусловлено неким диэлектрическим упорядочением, связанным с основным антиферромагнитным состоянием родительского диэлектрика и выживающим при сравнительно низких концентрациях носителей, вводимых в кристалл при допировании [2]. Температуры  $T_{str}^*$  и  $T_w^*$ , при которых при понижении  $T$  возникает, соответственно, сильная и слабая псевдощель, в эксперименте проявляются не как температуры фазовых переходов, обнаруживающих характерные аномалии термодинамических величин, а, скорее, как температуры кроссовера, соответствующие непрерывному изменению физических свойств. Кроссовер вполне естественно согласуется с интерпретацией сильной псевдощели, тогда как объяснение слабой псевдощели, предполагающее диэлектрическое упорядочение, с необходимостью приводит к выводу о том, что температура  $T_w^*$  должна соответствовать фазовому переходу из упорядоченного диэлектрического состояния в состояние ферми-жидкости. Поэтому предполагается, что слабая псевдощель на самом деле является истинной энергетической щелью, соответствующей такому («скрытому») диэлектрическому упорядочению, которое трудно разрешимо экспериментально. Например, отсутствие аномалии теплоемкости при переходе из нормальной фазы в состояние псевдощели может быть обусловлено тем, что соответствующий фазовый переход является переходом бесконечного рода [3].

Анализ экспериментальных данных показывает, что псевдощель и сверхпроводящая щель имеют одну и ту же симметрию. Синглетному сверхпроводящему спариванию соответствует такая орбитальная

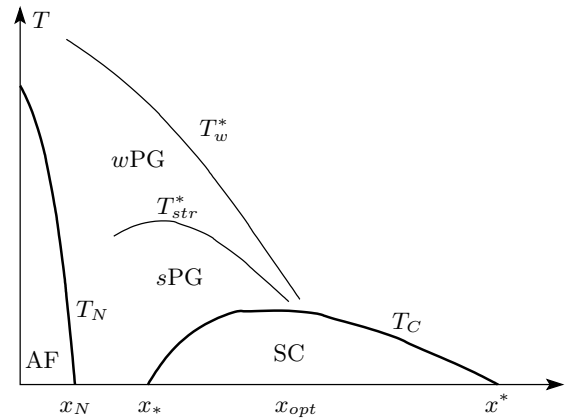


Рис. 1. Типичная фазовая диаграмма купратного соединения с дырочным допированием: AF — область дальнего спинового антиферромагнитного порядка, SC — область сверхпроводящего состояния, wPG и sPG — области соответственно слабой и сильной псевдощели

структура параметра порядка, которая может интерпретироваться в терминах как  $d$ -волновой симметрии ( $d_{x^2-y^2}$ -спаривание), так и «расширенной»  $s$ -волновой симметрии ( $(s+g)$ -спаривание) [4, 5]. Одинаковое распределение нулей сверхпроводящей щели и псевдощели делает весьма вероятным предположение о том, что в качестве диэлектрического канала спаривания, приводящего к состоянию слабой псевдощели, может выступать орбитальное антиферромагнитное упорядочение [6].

Особенности фазовой диаграммы купратов (рис. 1) приводят к необходимости рассматривать конкуренцию и сосуществование различных каналов диэлектрического и сверхпроводящего спаривания, следствием чего является весьма большое разнообразие упорядоченных состояний, которые могли бы проявиться как фазы в различных областях фазовой диаграммы [7, 8]. Орбитальный антиферромагнитный порядок, в трехмерных системах проявляющийся как тороидное магнитное состояние вещества [9], в квазидвумерных купратных соединениях приводит к состоянию фазы с потоком [10], которому соответствует упорядоченное в шахматном порядке распределение циркулярных орбитальных токов в купратных плоскостях. Оказывается, что шахматный порядок в распределении орбитальных токовых циркуляций выживает и в сверхпроводящем состоянии, как это следует из микроскопического анализа, выполненного в рамках  $t$ - $J$ -модели с учетом  $SU(2)$ -эквивалентности  $d$ -волнового сверхпрово-

дящего спаривания и орбитальной антиферромагнитной фазы с потоком [11]. Такие токовые циркуляции могут интерпретироваться либо как флуктуации орбитального антиферромагнитного порядка внутри обычной сверхпроводящей фазы, либо как особая сверхпроводящая фаза, в которой сосуществуют два типа (сверхпроводящее и орбитально-антиферромагнитное) упорядочения.

В случае, когда орбитальные токи циркулируют по химическим связям между атомами, орбитальному антиферромагнитному упорядочению соответствует соизмеримая волна плотности тока заряда [12]. Такая волна плотности [2], обладающая  $d$ -волновой симметрией (DDW), благодаря наличию нулей параметра порядка, должна быть более устойчивой по отношению к допированию, чем SDW, имеющая  $s$ -волновую симметрию [13]. Кроме того, в системах с сильным электрон-фононным взаимодействием, таких как допированные купраты, спиновое антиферромагнитное упорядочение в виде SDW, не имеющей нулей параметра порядка, оказывается еще более ослабленным. Напротив, в случае орбитального антиферромагнитного упорядочения электрон-фононное взаимодействие играет роль стабилизирующего фактора, благодаря которому область орбитального антиферромагнитного дальнего (в виде, например, DDW) [2] или ближнего (как флуктуации DDW) [14] порядка может распространяться до достаточно больших значений уровня допирования и температуры.

Можно предположить, что в купратах имеет место пересечение областей допирования, в которых существуют орбитально-антиферромагнитные и сверхпроводящие упорядоченные состояния. Поэтому с конкуренцией этих двух состояний могут быть связаны особенности фазовой диаграммы купратов, по крайней мере, в том интервале допирования, где существует сверхпроводимость.

В настоящей работе мы представляем феноменологию конкурирующих орбитально-антиферромагнитных и сверхпроводящих упорядоченных состояний, позволяющую качественно интерпретировать особенности фазовой диаграммы купратов. Макроскопическое описание [15] сверхпроводящего спаривания с большим суммарным импульсом пары (который может рассматриваться как «отголосок» близкого по энергии антиферромагнитного состояния, из которого при допировании и возникает сверхпроводящее состояние) при отталкивательном взаимодействии приводит к двухкомпонентному параметру порядка, который в области кинематического ограничения имеет линию нулей, пересекающую

контур Ферми [16]. При условии идеального зеркального нестинга контура Ферми [16, 17] асимптотически точное (уже при сколь угодно слабом отталкивании) нетривиальное решение уравнения самосогласования существует, если линейный оператор с ядром, определяемым потенциалом отталкивания, имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение [16]. Кроме того, потенциал отталкивания, обладающий подобным свойством, приводит к существованию квазистационарных состояний пар с большим импульсом [17], которые могут существовать в некоторой относящейся к псевдоцелевому состоянию области температур выше температуры сверхпроводящего перехода. Спаривание с большим импульсом при отталкивании допускает естественную интерпретацию двухкомпонентного параметра порядка, позволяющую рассматривать особенности фазовой диаграммы купратов как результат конкуренции и сосуществования сверхпроводящей и орбитально-антиферромагнитной фаз. Особенности формы контура Ферми и его эволюции при допировании, обусловленные возникновением орбитально-антиферромагнитного диэлектрического состояния [18], обеспечивают выполнение условия зеркального нестинга, необходимого для сверхпроводящего спаривания.

## 2. СПАРИВАНИЕ С БОЛЬШИМ ИМПУЛЬСОМ

Диэлектрическое синглетное орбитально-антиферромагнитное упорядочение характеризуется некоторым зависящим от уровня допирования вектором  $\mathbf{K}$ , имеющим смысл импульса связанного состояния электронно-дырочной пары и определяющим пространственную периодичность возникающей в купратной плоскости магнитной структуры. В качестве конкурирующего с орбитально-антиферромагнитным порядком рассмотрим синглетный сверхпроводящий канал спаривания с большим импульсом, равным вектору  $\mathbf{K}$ . В таком случае в орбитальной структуре сверхпроводящего параметра порядка сохраняется память об антиферромагнетизме родительского соединения, из которого в результате допирования возникло как диэлектрическое орбитально-антиферромагнитное, так и сверхпроводящее состояние.

Рассмотрение сверхпроводящего спаривания в рамках модели Хаббарда ( $\eta$ -спаривание) показывает [19], что при половинном заполнении существует множество собственных состояний гамильтониана Хаббарда, которые соответствуют синглетным ку-

перовским парам с нулевым суммарным импульсом ( $\eta_0$ -пары) или парам с импульсом  $(\pi, \pi)$  в двумерной квадратной решетке ( $\eta_\pi$ -пары). Допирование приводит к тому, что импульс пары, который при половинном заполнении равен  $(\pi, \pi)$ , отклоняется от  $(\pi, \pi)$  и оказывается, вообще говоря, несоизмеримым [2], поэтому соответствующий сверхпроводящий канал спаривания естественно назвать  $\eta_K$ -спариванием.

К сверхпроводящему спариванию с отличным от нуля (но малым) импульсом пары приводит также задача о сосуществовании сверхпроводимости и ферромагнетизма [20, 21]. При  $\mathbf{K} \neq 0$  возникает кинематическое ограничение на область определения импульса относительного движения пары  $\mathbf{k}$ , т.е. уменьшение числа одночастичных состояний, дающих вклад в волновую функцию пары. Следует заметить, что при соизмеримом импульсе  $\mathbf{K} = (\pi, \pi)$ , соответствующем половинному заполнению, площадь области кинематического ограничения обращается в нуль. Если импульс пары  $\mathbf{K} \neq 0$ , то, как правило, кинетическая энергия пары частиц обращается в нуль не на всем контуре Ферми, как это было бы в отсутствие кинематического ограничения в случае  $\mathbf{K} = 0$ , а лишь в отдельных точках контура Ферми, принадлежащих области кинематического ограничения (плотность состояний относительного движения на контуре Ферми обращается в нуль). Следствием этого является устранение логарифмической сингулярности в уравнении самосогласования, так что сверхпроводящее спаривание при сколь угодно малой величине эффективной константы связи оказывается невозможным.

При особой форме контура Ферми оказывается возможной ситуация, когда энергия квазичастицы обращается в нуль на конечных отрезках контура Ферми в пределах области кинематического ограничения, приводя к конечной величине плотности состояний относительного движения на контуре Ферми. Для этого при данном импульсе пары  $\mathbf{K}$  необходимо, чтобы закон дисперсии электронов  $\varepsilon(\mathbf{k})$  удовлетворял условию зеркального нестинга [16],

$$\varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{k}\right) + \varepsilon\left(\frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{k}\right) - 2\mu = 0, \quad (1)$$

где  $\mu$  — химический потенциал электронов. Благодаря тому что контур Ферми в купратах располагается в протяженной окрестности седловой точки электронного закона дисперсии, условие (1), восстанавливающее логарифмическую сингулярность в уравнении самосогласования, может быть (хотя бы приближенно) выполнено, чем обеспечивается возможность получения асимптотически точного (уже при

сколь угодно малой константе связи) решения для сверхпроводящей щели [22].

В случае спаривания с нулевым суммарным импульсом пары условие зеркального нестинга (1) тривиально выполняется на всем контуре Ферми благодаря общему свойству электронного закона дисперсии  $\varepsilon(-\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})$ . При произвольном  $\mathbf{K} \neq 0$  и произвольном законе дисперсии условие (1) как уравнение для импульса относительного движения  $\mathbf{k}$  приводит к решению, определяющему две точки контура Ферми, симметричные относительно направления  $\mathbf{K}$ . Однако имеется несколько причин [16], в силу которых двумерный закон дисперсии может приводить к такой структуре изоэнергетических линий, что для определенным образом подобранных импульсов пары условие (1) удовлетворяется на конечных отрезках этих изолиний или даже на некоторых замкнутых изолиниях. При изменении допирования контур Ферми переходит с одной изолинии на другую; при этом, вообще говоря, меняется и импульс  $\mathbf{K}$ , наилучшим образом обеспечивающий выполнение условия зеркального нестинга.

Простейший пример зеркального нестинга контура Ферми реализуется в типичном для купратов случае наблюдаемого в экспериментах по фотоэмиссии с угловым разрешением (ARPES) контура Ферми в виде квадрата со скругленными углами [16]. В этом случае некоторое изменение знака кривизны почти прямолинейных участков контура Ферми, обусловленное их близостью к седловой точке закона дисперсии, приводит к увеличению длины участков контура Ферми, удовлетворяющих условию (1). В соединениях с двухзонным электронным спектром условие (1) достаточно естественно удовлетворяется для конечных отрезков контура Ферми, принадлежащих разным энергетическим зонам [16]. Возникновение квазиодномерной пространственно-неоднородной страйп-структуры также приводит к деформации изолиний, способствующей выполнению условия (1) на конечных отрезках контура Ферми.

Из экспериментов ARPES следует, что односвязный контур Ферми наблюдается в передопированных купратах, тогда как в недодопированных соединениях из-за возникновения диэлектрической щели в электронном спектре контур Ферми проявляется в виде дырочных карманов, симметричных относительно направлений типа  $[\pi, \pi]$ . Для каждого дырочного кармана условие зеркального нестинга выполняется идеально на всем контуре Ферми при суммарном импульсе пары, направленном вдоль  $[\pi, \pi]$ , если величина импульса вдвое превышает расстоя-

ние до центра кармана [16].

Отметим, что идеальному зеркальному нестингу (в отличие от идеального обычного нестинга, приводящего к диэлектрической неустойчивости) соответствует совмещение заполненной области импульсного пространства с заполненной же областью, а вакантной — с вакантной. Обычному нестингу соответствует совмещение заполненной и вакантной областей при смещении контура Ферми на вектор нестинга. Контур Ферми в виде дырочных карманов обнаруживает и обычный нестинг, причем вектор нестинга фактически совпадает с суммарным импульсом сверхпроводящей пары.

### 3. СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ СПАРИВАНИЕ ПРИ ОТТАЛКИВАНИИ

Вопрос о доминирующем механизме спаривающего взаимодействия в купратах остается открытым, и наряду с традиционным спариванием, обусловленным электрон-фононным взаимодействием [23–25], рассматривается взаимодействие, связанное с обменом антиферромагнитными магнонами [26], а также чисто электронный (кулоновский) механизм спаривания.

Учет кулоновского отталкивания в купратах как системах с сильными внутрицентровыми электронными корреляциями является принципиальным [27]. Качественное рассмотрение кулоновского отталкивания и обусловленного электрон-фононным взаимодействием притяжения в рамках схемы BCS приводит к выводу о том, что куперовское спаривание возникает, когда эффективная константа связи электрон-фононного взаимодействия превышает не соответствующую кулоновскую константу, а ее ослабленное «толмачевским логарифмом» значение [28].

Кулоновское отталкивание может приводить к сверхпроводящему спариванию и в отсутствие притяжения, обусловленного электрон-фононным взаимодействием [29]. Возникающий при этом сверхпроводящий параметр порядка не может быть знакопостоянной функцией импульса относительного движения пары и имеет линию нулей, пересекающую контур Ферми в нескольких точках, отражающих симметрию кристалла [16]. Симметрия сверхпроводящего параметра порядка в зависимости от числа и расположения нулей на контуре Ферми может быть условно отнесена либо к  $d$ -волновой (в случае четырех нулей; при этом поворот в импульсном пространстве на угол  $\pi/2$  приводит к изменению знака параметра порядка), либо к расширенной  $s$ -волновой симметрии.

Сверхпроводящий параметр порядка как функцию импульса относительного движения пары  $\mathbf{k}$  удобно представить в виде разложения по полной ортонормированной системе собственных функций  $\varphi_s(\mathbf{k})$  линейного оператора с ядром  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , равным фурье-образу спаривающего экранированного кулоновского отталкивания. Здесь индекс  $s$  нумерует собственные функции, которые являются решениями линейного интегрального уравнения

$$\varphi_s(\mathbf{k}) = \lambda_s \int U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \varphi_s(\mathbf{k}') d^2 k', \quad (2)$$

в котором  $\lambda_s$  — собственные значения оператора спаривающего взаимодействия, а интегрирование проводится по области кинематического ограничения.

Максимальная площадь области кинематического ограничения при  $\eta_K$ -спаривании соответствует импульсу пары  $\mathbf{K}$  вдоль одного из симметричных направлений в импульсном пространстве. Такая область при больших  $\mathbf{K}$  составляет относительно малую часть двумерной зоны Бриллюэна. Поэтому истинное ядро  $U(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$  можно заменить вырожденным, соответствующим первым членам разложения в ряд по степеням аргумента [16]:

$$U_d(k) = U_0 r_0^2 \left( 1 - \frac{k^2 r_0^2}{2} \right); \quad (3)$$

здесь  $r_0$  имеет смысл характерного радиуса экранирования, а  $U_0 \sim e^2/r_0$  — характерная константа взаимодействия. Такое вырожденное ядро имеет две четные и две нечетные по отношению к преобразованию  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  собственные функции, первые из которых соответствуют собственным значениям разного знака [17].

Наличие хотя бы одного отрицательного собственного значения оператора взаимодействия с необходимостью приводит к существованию нетривиального решения уравнения самосогласования [16]. Таким образом, экранированное кулоновское отталкивание между электронами может приводить к сверхпроводящему упорядочению с необычной (отличной от  $s$ -волновой симметрии, имеющей место в модели BCS с притяжением) симметрией параметра порядка. Отметим, что в диэлектрическом (электронно-дырочном) канале спаривания это же взаимодействие соответствует притяжению между электроном и дыркой, приводя, в частности, к орбитально-антиферромагнитному упорядочению.

В случае отталкивания в полной системе собственных функций оператора спаривающего взаимодействия имеется не менее двух функций, четных по

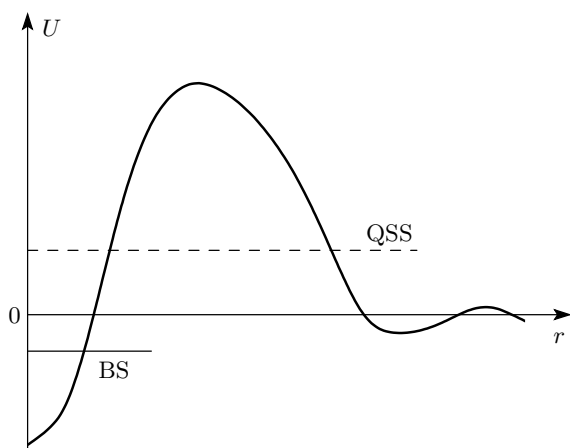


Рис. 2. Спаривающий потенциал отталкивания как функция расстояния между частицами, составляющими пару (схематически). Показаны энергетические уровни, соответствующие связанному состоянию (BS) и квазистационарному состоянию (QSS) пары

отношению к преобразованию  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  [16]. Следовательно, и сверхпроводящий параметр порядка характеризуется не менее чем двумя компонентами (коэффициентами разложения по этой системе функций). Заметим, что в случае спаривающего притяжения достаточно всего одной собственной функции (соответствующей единственному отрицательному собственному значению), как это и имеет место в модели BCS.

Потенциал отталкивания, допускающий  $\eta_K$ -спаривание, как функция расстояния между частицами, составляющими пару, схематически показан на рис. 2. Подобную координатную зависимость, в частности, обнаруживает (благодаря фриделевским осцилляциям) экранированный кулоновский потенциал в вырожденной электронной системе кристалла. Помимо связанного состояния  $\eta_K$ -пары, соответствующего сверхпроводящему конденсату, такой потенциал допускает возникновение квазистационарных состояний  $\eta_K$ -пар [17], которые как некогерентные парные возбуждения могут существовать в некоторой области температур выше температуры сверхпроводящего перехода. Спаривающее притяжение очевидным образом не допускало бы возникновения подобных квазистационарных состояний.

#### 4. $\eta_K$ -ФУНКЦИОНАЛ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

Зависящий от импульса относительного движения сверхпроводящий параметр порядка удобно представить в таком виде, который бы явно отражал симметрию кристалла. Область кинематического ограничения  $\Xi$ , в которой определен импульс  $\mathbf{k}$ , можно представить в виде объединения областей  $\Xi_j$ , каждая из которых является областью кинематического ограничения для одного из кристаллографически эквивалентных импульсов пары  $\mathbf{K}_j$ . Индекс  $j$  нумерует такие импульсы, и в случае квадратной решетки, когда вектор  $\mathbf{K}_j$  параллелен одному из симметричных направлений, принимает значения от 1 до 4. При больших  $\mathbf{K}_j$  области  $\Xi_j$ , как правило, перекрываются слабо и в первом приближении их перекрытием можно пренебречь. В таком случае решения уравнения самосогласования могут быть получены в каждой из таких областей независимо друг от друга. Эти решения  $\Psi_j(\mathbf{k})$  одинаковы и различаются лишь областью определения импульса относительного движения.

Параметр порядка можно представить в виде линейной комбинации функций  $\Psi_j(\mathbf{k})$ :

$$\Psi(\mathbf{k}) = \sum_j \gamma_j \Psi_j(\mathbf{k}), \tag{4}$$

где коэффициенты  $\gamma_j$ , нормированные условием  $\sum_j |\gamma_j|^2 = 1$ , определяются взаимодействием, перемешивающим импульсы в разных кристаллографически эквивалентных областях кинематического ограничения  $\Xi_j$ , задавая, таким образом, одномерное неприводимое представление группы симметрии кристалла, по которому преобразуется параметр порядка.

Для каждого импульса  $\mathbf{K}_j$  может быть определена полная ортонормированная система собственных функций  $\varphi_{sj}(\mathbf{k})$  оператора спаривающего взаимодействия, по которой может быть разложен параметр порядка в области  $\Xi_j$ :

$$\Psi_j(\mathbf{k}) = \sum_s \Psi_s \varphi_{js}(\mathbf{k}). \tag{5}$$

Величины  $\Psi_s$ , одинаковые для всех  $j$ , играют роль компонент параметра порядка, вся зависимость которого от импульса относительного движения в формуле (5) перенесена на собственные функции  $\varphi_{js}(\mathbf{k})$ , определяемые из формулы (2) независимо от уравнения самосогласования. В случае простейшего вырожденного ядра  $U_d(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , описывающего экранированное кулоновское отталкивание, таких компонент

две ( $s = 1, 2$ ). Следует отметить, что минимальное число компонент параметра порядка, необходимое для описания спаривающего притяжения, равно единице, тогда как для описания спаривающего отталкивания необходимо не менее двух компонент.

Линия нулей параметра порядка делит область кинематического ограничения на две части, в каждой из которых функция  $\Psi_j(\mathbf{k})$  является знакопостоянной. Разные знаки параметра порядка по разные стороны линии нулей позволяют описать его приближенно [30, 31], задав средние значения (разного знака) в обеих частях области кинематического ограничения [16]. Такое приближенное описание формально соответствует изменению собственных функций в формуле (5): одна из них, соответствующая положительному собственному значению, становится просто константой, тогда как соответствующая отрицательному собственному значению функция оказывается кусочно-постоянной с разрывом на линии нулей. Определенные таким образом собственные функции задают некоторое новое вырожденное ядро, приближенно описывающее экранированное кулоновское отталкивание [32]. Средние значения параметра порядка, имеющие разные знаки и заданные по обе стороны линии нулей как вещественные решения уравнения самосогласования, оказываются эквивалентны двум комплексным компонентам  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  при условии, что их относительная фаза равна  $\pi$ .

Не связывая себя подобным ограничением, т. е. допуская комплексные решения для амплитуд  $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$  преобразования Боголюбова, приводящего к уравнению самосогласования, запишем параметр порядка в виде

$$\Psi(\mathbf{k}) = \sum_s \Psi_s \varphi_s(\mathbf{k}), \quad (6)$$

где

$$\varphi_s(\mathbf{k}) = \sum_j \gamma_j \varphi_{js}(\mathbf{k}) \quad (7)$$

— собственные функции оператора спаривающего взаимодействия, определенные во всей области кинематического ограничения  $\Xi$ . Эти функции отражают полную симметрию купратной плоскости, поэтому из коэффициентов  $\gamma_j$ , определяющих соответствующее симметрии параметра порядка (6) неприводимое представление, удобно выделить «блоховский» фазовый множитель,  $\gamma_j \rightarrow \gamma_j \exp(-i\mathbf{K}_j \cdot \mathbf{R})$ , где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра масс пары, а  $\gamma_j$  — не зависящие от  $\mathbf{R}$  вещественные численные множители. Поскольку параметр порядка является скаляр-

ной функцией, определенной в инвариантной области  $\Xi$  зоны Бриллюэна, его контравариантные по отношению к функциям  $\varphi_s(\mathbf{k})$  компоненты должны быть записаны как

$$\Psi_s(\mathbf{R}) = \Psi_s^{(0)} \sum_j \gamma_j e^{i\mathbf{K}_j \cdot \mathbf{R}}, \quad (8)$$

где величины  $\Psi_s^{(0)}$ , определяющие амплитуду параметра порядка, являются (в случае слабой пространственной неоднородности системы) медленно (на масштабе элементарной ячейки) меняющимися функциями  $\mathbf{R}$ . Параметр порядка, записанный в виде (8), по свойствам симметрии аналогичен возникающему в обобщенном состоянии Фулде–Феррела–Ларкина–Овчинникова.

Амплитуды  $\Psi_1^{(0)}(\mathbf{R})$  и  $\Psi_2^{(0)}(\mathbf{R})$  имеют смысл компонент волновой функции, описывающей движение центра масс пары, и могут рассматриваться как компоненты возникающего при спаривающем отталкивании сверхпроводящего параметра порядка при макроскопическом описании системы в рамках феноменологической схемы Гинзбурга–Ландау [15]. Как функции температуры обе амплитуды обращаются в нуль при одном и том же значении  $T = T_s$ , при котором в приближении среднего поля исчезает сверхпроводящий параметр порядка (6). В связи с этим отметим, что состояниям смешанной симметрии типа  $d_{x^2-y^2} + e^{i\theta}\chi$ , где  $\chi$  представляет вклад состояний, например, с  $s$ - или  $d_{xy}$ -симметрией, а  $\theta$  — относительная фаза компонент параметра порядка, соответствуют, вообще говоря, разные температуры среднего поля для фазовых переходов в состоянии с  $d_{x^2-y^2}$ - и  $\chi$ -симметрией (в частности, для одного из таких состояний фазовый переход может вовсе отсутствовать) [33, 34].

Сверхпроводящему фазовому переходу в случае спаривающего притяжения в модели BCS соответствует однокомпонентный комплексный параметр порядка, с фазой которого связывается установление фазовой когерентности в системе куперовских пар при спонтанном удвоении заряда носителей, а модуль определяется энергией связи в относительном движении пары. Поэтому наличие второй комплексной компоненты параметра порядка в случае спаривающего отталкивания может быть связано с другой степенью свободы, связанной с относительным движением пары, например, с возникновением спонтанного орбитального тока. Тогда относительная фаза компонент параметра порядка определяет вклад каждой из степеней свободы (зарядовой и токовой) в сверхпроводящий параметр порядка.

Плотность свободной энергии, определяющая функционал Гинзбурга–Ландау, представим в виде [15]

$$f = f_0 + f_g + f_m, \quad (9)$$

где первое слагаемое представляет собой разложение по степеням параметра порядка и в общем случае может быть записано в виде

$$f_0 = \sum_{ss'} A_{ss'} \Psi_s^* \Psi_{s'} + \frac{1}{2} \sum_{ss'tt'} B_{ss'tt'} \Psi_s^* \Psi_{s'}^* \Psi_t \Psi_{t'}. \quad (10)$$

Здесь суммирование по индексам, нумерующим компоненты параметра порядка, производится от 1 до 2, а матрицы  $A_{ss'}$  и  $B_{ss'tt'}$  являются функциями температуры и допирования и имеют соответственно три и пять независимых компонент. Второе (градиентное) слагаемое в формуле (9) может быть записано в виде [15]

$$f_g = \frac{\hbar^2}{4m} \sum_{ss'} [\hat{\mathbf{D}}\Psi_s]^\dagger M_{ss'} [\hat{\mathbf{D}}\Psi_{s'}], \quad (11)$$

где положительно определенная матрица  $M_{ss'}$ , являющаяся функцией температуры и допирования, имеет три независимые компоненты. Оператор ковариантного дифференцирования по координатам радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  центра масс пары имеет вид

$$\hat{\mathbf{D}} = -i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал, определяющий индукцию усредненного по относительному движению магнитного поля  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$  (которое включает вклады как внешнего поля, так и поля, связанного с возникновением спонтанных токов). Последнее слагаемое в формуле (9) представляет изменение плотности энергии среды при возникновении магнитного поля,

$$f_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} / 8\pi. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$  — напряженность магнитного поля,  $\mu \approx 1$  — магнитная проницаемость несверхпроводящей фазы. При  $\eta_K$ -спаривании матрицы, усредненные по относительному движению пары и определяющие вклады (10) и (11) в свободную энергию, представляются интегралами по области кинематического ограничения, соответствующей импульсам  $\mathbf{K}_j$  кристаллографически эквивалентных пар сверхпроводящего конденсата [15].

Свободная энергия инвариантна по отношению к унитарному преобразованию компонент параметра порядка, осуществляемого матрицами  $2 \times 2$ , принадлежащими группе  $SU(2)$ . Специальным выбором

такого преобразования можно диагонализировать матрицы  $A_{ss'}$  и  $M_{ss'}$ . Предполагая, что такая диагонализация уже выполнена, можно считать, что в (10) и (11)  $A_{ss'} = A_s \delta_{ss'}$ ,  $M_{ss'} = M_s \delta_{ss'}$ , где  $A_s$  и  $M_s$  — функции температуры и допирования.

Температура сверхпроводящего фазового перехода  $T_s(x)$ , соответствующая приближению среднего поля, определяется из условия  $\det A_{ss'}(T, x) = 0$ , которое после диагонализации матрицы  $A_{ss'}$  принимает вид  $A_1(T, x)A_2(T, x) = 0$ . Поскольку, как уже отмечалось, обе компоненты параметра порядка обращаются в нуль при одной и той же температуре, необходимо, чтобы одновременно удовлетворялись два условия,  $A_1(T, x) = 0$ ,  $A_2(T, x) = 0$ , что и имеет место в случае  $\eta_K$ -спаривания при отталкивательном взаимодействии [15]. Таким образом, вблизи линии фазового перехода можно положить  $A_s(T, x) = -\tau_1 A_s^{(0)}(x)$ , где  $A_s^{(0)}(x)$  — положительные функции допирования,  $\tau_1 = (T_s - T) / T_s$ , причем предполагается, что  $|\tau_1| \ll 1$ . Матрицы  $B_{ss'tt'}$  и  $M_{ss'}$  не обращаются в нуль при  $T = T_s$ , поэтому вблизи линии фазового перехода их аргумент  $T$  можно заменить на  $T_s$ , рассматривая эти матрицы только как функции  $x$ . Следует особо отметить, что подобная аппроксимация оказывается достаточной только в случае, когда температура сверхпроводящего перехода  $T_C(x)$  совпадает с температурой перехода в приближении среднего поля  $T_s(x)$ , что в купратах имеет место, как это принято считать, лишь в передопирированной области [1].

## 5. ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНОЕ $\eta_K$ -СОСТОЯНИЕ

В отсутствие внешнего магнитного поля и структурных неоднородностей состояние системы с дальним сверхпроводящим порядком определяется из условия минимума плотности свободной энергии  $f_0$ . Комплексные компоненты параметра порядка характеризуются своими модулями, которые мы обозначим  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , относительной фазой  $\beta$  и фазой  $\Phi$ , соответствующей сверхпроводящему конденсату и не входящей в разложение (10). Таким образом, можно положить

$$\Psi_1 \equiv \psi_1 e^{i\Phi}, \quad \Psi_2 \equiv \psi_2 e^{i\beta} e^{i\Phi}. \quad (14)$$

Минимуму свободной энергии при  $\tau_1 < 0$  отвечает очевидное тривиальное решение  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  с неопределенной относительной фазой. При  $\tau_1 > 0$  существуют нетривиальные решения, для которых термодинамически равновесные значения трех пара-



метров  $\psi_1, \psi_2, \beta$  определяются зависящими от допирования элементами матриц  $A_{ss'}$  и  $B_{ss'tt'}$  и поэтому сами являются функциями  $x$ .

Отношение модулей компонент  $\psi_1/\psi_2$ , определяющее степень асимметрии параметра порядка, является непрерывной функцией  $x$ . Поэтому при качественном исследовании сверхпроводящего упорядочения без ограничения общности можно положить  $\psi_1 = \psi_2 \equiv \psi$ , сведя, таким образом, минимизацию свободной энергии к вариационной задаче с двумя неизвестными,  $\psi$  и  $\beta$ . Плотность свободной энергии (10) принимает вид

$$f_0 = a_1\psi^2 + \frac{1}{2}(B + 2C\cos\beta + D\cos^2\beta)\psi^4, \quad (15)$$

где  $a_1 = A_1 + A_2 \equiv -a\tau_1$ ,  $B \equiv B_{1111} + 2B_{1122} + B_{2222}$ ,  $C = 2(B_{1112} + B_{1222})$ ,  $D = 4B_{1122}$ . Здесь коэффициенты  $a \equiv A_1^{(0)} + A_2^{(0)}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$  и  $B_{2222}$  определены положительно, а  $B_{1112}$  и  $B_{1222}$ , в принципе, могут иметь любой знак. Для определенности положим  $C > 0$ , поскольку такой выбор никак не влияет на качественные выводы относительно характера сверхпроводящих состояний, которые допускает свободная энергия (15).

Исследование функции (15) на экстремум показывает, что при  $\tau_1 < 0$ , т.е. при  $T > T_s$ , минимуму свободной энергии соответствует решение  $\psi = 0$  при произвольной относительной фазе. При  $\tau_1 > 0$  ( $T < T_s$ ) минимум достигается при  $\beta = \pi$  и  $\psi \neq 0$  при условии, что  $C \geq D$ . В противном случае, когда  $C \leq D$ , нетривиальному решению  $\psi \neq 0$  соответствует относительная фаза  $\beta \leq \pi$ , определяемая соотношением  $\cos\beta = -C/D$ .

Поскольку коэффициенты  $C$  и  $D$  являются функциями  $x$ , равенство  $C(x) = D(x)$  может рассматриваться как уравнение, определяющее тот уровень допирования  $x = x_0$ , при котором имеет место качественное изменение сверхпроводящего упорядочения. Обозначим  $C/D \equiv c(x)$  и в малой окрестности точки  $x = x_0$  представим  $c(x)$  в виде

$$c(x) = 1 + c'(x_0)(x - x_0). \quad (16)$$

Предположим, что сверхпроводящему состоянию с относительной фазой  $\beta = \pi$  соответствует допирование  $x > x_0$ ; в этом случае  $c'(x_0) > 0$ . Тогда при  $x < x_0$  относительная фаза  $\beta(x) < \pi$ , причем  $\beta(x)$  есть непрерывная функция своего аргумента, такая что  $\beta(x) \rightarrow \pi$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Параметр порядка, с помощью которого различаются две термодинамически равновесные сверхпроводящие фазы с  $\beta < \pi$  ( $\beta$ -фаза) и  $\beta = \pi$  ( $\pi$ -фаза), естественно определить как  $\alpha = \pi - \beta$ , так что при

$x > x_0$  имеем  $\alpha = 0$ , а при  $x < x_0$  введенный таким образом параметр порядка  $\alpha \neq 0$  и при сделанном выше предположении о том, что  $C > 0$ , определен в интервале  $0 < \alpha < \pi/2$ . Вблизи точки перехода  $x = x_0$  параметр порядка  $\alpha$  мал и плотность свободной энергии может быть представлена в виде разложения по четным степеням  $\alpha$ :

$$f_0 = f_\pi + \frac{1}{2} D c'(x_0)(x - x_0)\psi^4 \alpha^2 + \frac{1}{8} D \psi^4 \alpha^4. \quad (17)$$

Здесь  $f_\pi = -a\tau_1\psi^2 + (B - D)\psi^4/2$  — плотность свободной энергии  $\pi$ -фазы.

Минимум свободной энергии достигается при  $\alpha = 0$ , если  $c'(x_0)(x - x_0) > 0$ , что соответствует  $\pi$ -фазе ( $x > x_0$ ), и при

$$\alpha^2 = 2c'(x_0)(x_0 - x), \quad (18)$$

если  $c'(x_0)(x - x_0) < 0$ , т.е. в  $\beta$ -фазе ( $x < x_0$ ). Квадрат модуля равновесного параметра порядка в малой окрестности точки фазового перехода  $x = x_0$  равен  $\psi^2 = a\tau_1/(B - D)$ , поэтому выражение (17) для плотности свободной энергии  $\beta$ -фазы можно переписать как

$$f_0 \equiv f_\beta = f_\pi - \nu\tau_1^2(x - x_0)^2. \quad (19)$$

Здесь  $\nu = a^2D/(B - D)^2 > 0$ .

## 6. $\eta_K$ -СПАРИВАНИЕ И СПОНТАННЫЕ ТОКИ

Разные знаки вещественных компонент параметра порядка (что соответствует относительной фазе, равной  $\pi$ ) с необходимостью возникают в случае сверхпроводящего спаривания при отталкивательном взаимодействии [16]. Отклонение относительной фазы от  $\pi$  соответствует решению уравнения самосогласования с комплексными множителями когерентности и допускает достаточно наглядную интерпретацию. Действительно, изменение фазы оператора уничтожения электрона со спином  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  на узле кристаллической решетки с радиус-вектором  $\mathbf{n}$  может быть связано [35] с векторным потенциалом некоторого магнитного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ ,

$$\hat{c}_{\mathbf{n}\sigma} \rightarrow \hat{c}_{\mathbf{n}\sigma} \exp \left[ i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \right]. \quad (20)$$

Тогда фаза  $\beta(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  аномального среднего  $\langle \hat{c}_{\mathbf{n}\uparrow} \hat{c}_{\mathbf{n}'\downarrow} \rangle$ , записанного в узельном представлении и определяющего сверхпроводящий параметр порядка, принимает вид

$$\beta(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \pi - \frac{e}{\hbar c} [\mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{A}(\mathbf{n}') \cdot \mathbf{n}']. \quad (21)$$

Выражая  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  через радиус-векторы центра масс  $\mathbf{R} = (\mathbf{n} + \mathbf{n}')/2$  и относительного движения пары  $\mathbf{r} = \mathbf{n} - \mathbf{n}'$ , из формулы (21) можно выделить зависящий только от  $\mathbf{R}$  вклад в фазу сверхпроводящего конденсата  $\Phi(\mathbf{R}) = (2e/\hbar c)\mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}$ , от которого разложение плотности свободной энергии (10) не зависит.

Добавка к  $\Phi(\mathbf{R})$  в формуле (21), зависящая от радиуса-вектора относительного движения, определяет относительную фазу  $\alpha$  компонент параметра порядка, которую вблизи точки фазового перехода  $x = x_0$ , где  $\alpha \ll 1$ , можно оценить как

$$\alpha \approx -\frac{e}{2\hbar c} \frac{\partial A_k}{\partial x_l} x_k x_l. \quad (22)$$

Здесь по повторяющимся индексам, нумерующим двумерные координаты  $x_k$  радиуса-вектора относительного движения  $\mathbf{r}$ , подразумевается суммирование от 1 до 2.

Можно предположить, что возникновение отличной от  $\pi$  фазы сверхпроводящего параметра порядка, являющееся естественным следствием  $\eta_K$ -спаривания, связано с орбитальным антиферромагнитным упорядочением, которое проявляется в сверхпроводящем состоянии как антиферромагнитно коррелированные циркуляции орбитальных токов [11] и может выживать выше температуры сверхпроводящего перехода в виде дальнего [2] или ближнего [14] орбитального антиферромагнитного порядка. В таком случае реальное магнитное поле в (22), обусловленное орбитальными токами, может рассматриваться как некое калибровочное поле, устанавливающее связь между сверхпроводящей и орбитально-антиферромагнитной степенями свободы (соответственно  $\psi$  и  $\alpha$ ) и подобное калибровочным полям, которые вводятся в функционал Гинзбурга–Ландау, например, в бозонной версии схемы разделения заряда и спина [36].

Параметр порядка (6) имеет пространственную структуру, которая соответствует делению купратной плоскости на ячейки с периодом  $2\pi/K_j$  (в общем случае несоизмеримым). В соседних ячейках токовые циркуляции должны иметь противоположные знаки. В феноменологии Гинзбурга–Ландау параметр порядка следует понимать как усредненный по относительному движению пары, поэтому с учетом шахматного порядка в распределении орбитальных токов, среднеквадратичное (в пределах ячейки) значение параметра орбитального антиферромагнитного упорядочения может быть оценено как

$$\alpha^2 \simeq \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{e}{2\hbar c} \right)^2 \frac{B^2}{K_j^2}, \quad (23)$$

где  $B$  — среднее по ячейке значение магнитной индукции поля орбитальных токов.

Возникновение орбитальных токов в сверхпроводящем состоянии приводит к необходимости учитывать в функционале Гинзбурга–Ландау вклад, связанный с энергией их магнитного поля. Формально этот вклад  $f_m(\alpha)$ , внешний по отношению к зарядовой степени свободы  $\psi$ , учитывается в формуле (13), если понимать  $\mathbf{V}$  как магнитную индукцию поля орбитальных токов.

Можно убедиться в том, что простое добавление к  $f_0$  слагаемого вида  $f_m(\alpha) = \kappa\alpha^2$  с положительным коэффициентом пропорциональности  $\kappa$  исключает возможность появления минимума плотности свободной энергии  $f_0 + f_m(\alpha)$  при  $\alpha \neq 0$ . Это естественным образом приводит к необходимости рассматривать конкуренцию двух каналов спаривания: сверхпроводящее  $\eta_K$ -спаривание и диэлектрическое орбитально-антиферромагнитное спаривание с параметром порядка  $\alpha$ , который в  $\eta_K$ -функционале Гинзбурга–Ландау (9) проявляется как токовая степень свободы двухкомпонентного параметра порядка.

## 7. КОНКУРЕНЦИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО И ОРБИТАЛЬНО-АНТИФЕРРОМАГНИТНОГО КАНАЛОВ СПАРИВАНИЯ

Спонтанные орбитальные токи могут возникать и в отсутствие сверхпроводящего порядка. Соответствующий диэлектрический орбитально-антиферромагнитный порядок в двумерной системе характеризуется единственным параметром, имеющим смысл модуля разности намагниченностей двух подрешеток орбитального антиферромагнетика. Эта разность пропорциональна  $\alpha$ , поэтому плотность свободной энергии (в отсутствие сверхпроводимости) вблизи орбитального антиферромагнитного перехода может быть представлена в виде разложения по четным степеням  $\alpha$ ,

$$f_d = a_2\alpha^2 + \frac{1}{2}b_2\alpha^4, \quad (24)$$

где  $b_2$  — положительная функция допирования, а коэффициент  $a_2$  при  $\alpha^2$ , также зависящий от  $x$ , обращается в нуль при соответствующей приближению среднего поля температуре  $T_d(x)$  диэлектрического фазового перехода. Вблизи фазового перехода коэффициент  $a_2$  может быть записан как  $a_2 = -a'\tau_2$ , где  $a'$  — положительная функция  $x$ ,  $\tau_2 = (T_d - T)/T_d$  (предполагается, что  $|\tau_2| \ll 1$ ). Отметим, что энергия магнитного поля спонтанных токов  $f_m(\alpha)$ , входящая в  $\eta_K$ -функционал Гинзбурга–Ландау и про-

порциональная  $\alpha^2$ , естественным образом включается в первое слагаемое в формуле (24), просто переопределяя температуру диэлектрического фазового перехода  $T_d(x)$ .

Столь же естественно устанавливается связь между двумя типами упорядочения. По-прежнему ограничиваясь рассмотрением пространственно-однородного случая в отсутствие внешнего магнитного поля, когда  $\psi$  и  $\alpha$  не зависят от радиуса-вектора центра масс  $\mathbf{R}$ , в градиентном слагаемом (11) в  $\eta_K$ -функционале Гинзбурга–Ландау следует сохранить вклад только поля спонтанных орбитальных токов. Поскольку векторный потенциал этого поля  $\mathbf{A} \sim \alpha$ , как непосредственно видно из формулы (11), усредненное по относительному движению пары градиентное слагаемое (в пространственно-однородной системе содержащее только векторный потенциал, связанный с магнитным полем спонтанных токов) может быть записано как  $f_{12} = b_{12}\psi^2\alpha^2$ , где  $b_{12}$  — зависящий от  $x$  феноменологический параметр. При  $\psi \ll 1$  и  $\alpha \ll 1$  (что предполагается) вклад  $f_{12}$  в плотность свободной энергии имеет четвертый порядок малости.

Таким образом, плотность свободной энергии, описывающая конкуренцию сверхпроводящего и орбитально-антиферромагнитного упорядоченных состояний, с точностью до членов четвертого порядка включительно принимает вид

$$f = a_1\psi^2 + a_2\alpha^2 + \frac{1}{2}b_1\psi^4 + b_{12}\psi^2\alpha^2 + \frac{1}{2}b_2\alpha^4. \quad (25)$$

Разложение плотности свободной энергии (25) имеет смысл в малой окрестности обоих фазовых переходов, т. е. в той относительно малой области фазовой диаграммы, в которой графики зависимостей  $T_s(x)$  и  $T_d(x)$  либо пересекаются, либо проходят близко друг к другу.

Допирование приводит к подавлению как орбитального антиферромагнетизма, так и сверхпроводимости. Температуры соответствующих фазовых переходов  $T_d(x)$  и  $T_s(x)$ , определяемые в приближении среднего поля в отсутствие связи между орбитальным антиферромагнитным и сверхпроводящим упорядоченными состояниями, т. е. при  $b_{12} = 0$  в (25), естественно считать монотонно убывающими функциями  $x$ . Учитывая особенности типичной фазовой диаграммы купратов (рис. 1), можно предположить, что при малых  $x$  доминирует орбитальное антиферромагнитное состояние, которое с ростом  $x$  подавляется быстрее по сравнению со сверхпроводящим упорядочением, что делает возможным пересечение графиков функций  $T_d(x)$  и  $T_s(x)$  в некоторой точ-

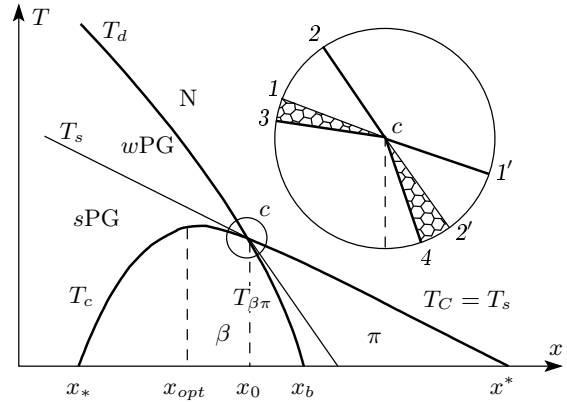


Рис. 3. Область фазовой диаграммы, соответствующая сосуществованию орбитальной антиферромагнитной и сверхпроводящей фаз в окрестности тетракритической точки  $c$  (в увеличенном масштабе на вставке). Кривые фазовых переходов показаны жирными линиями. Области развитых флуктуаций сверхпроводящих пар (сектор  $1c3$ ) и орбитальных токов (сектор  $4c2'$ ) выделены

ке, соответствующей, как следует из формулы (19),  $x = x_0$ , как схематически показано на рис. 3. Заметим, что вполне допустимо и предположение о том, что при слабом допировании  $T_s > T_d$ ; однако такое предположение приводит к фазовой диаграмме, качественно отличающейся от приведенной на рис. 1. Поскольку разложение плотности свободной энергии (25) имеет место лишь в малой окрестности точки пересечения этих графиков (выделенной на рис. 3 и в увеличенном масштабе представленной на вставке), показанное на рис. 3 продолжение линий за пределы этой окрестности является весьма условным.

При  $T > \max(T_d, T_s)$  минимум свободной энергии достигается при  $\psi = 0$ ,  $\alpha = 0$  (сектор  $2c1'$  на рис. 3), что соответствует нормальной фазе. Участок  $2c$  границы этого сектора является линией фазового перехода из нормальной в орбитально-антиферромагнитную фазу ( $\alpha$ -фазу), в которой  $\psi = 0$ ,  $\alpha^2 = -a_2/b_2$ . Диэлектрическая  $\alpha$ -фаза существует внутри сектора  $2c3$ , часть  $1c3$  которого проникает в область температур, меньших  $T_s(x)$ . Нижняя граница сектора  $2c3$ , линия  $c3$ , определяется условием  $b_2a_1 - b_{12}a_2 = 0$ . Участок  $c1'$  границы нормальной фазы представляет линию фазового перехода между нормальной и сверхпроводящей  $\pi$ -фазой, которой соответствует сектор  $1'c4$ . Часть  $2'c4$  этого сектора проникает в область температур, меньших  $T_d(x)$ . Сектору  $3c4$ , в котором

$$\psi^2 = -\frac{b_2 a_1 - b_{12} a_2}{b_1 b_2 - b_{12}^2}, \quad \alpha^2 = -\frac{b_1 a_2 - b_{12} a_1}{b_1 b_2 - b_{12}^2}, \quad (26)$$

соответствует сверхпроводящая  $\beta$ -фаза, где сверхпроводимость сосуществует со спонтанным орбитальным антиферромагнетизмом. Отметим, что при  $b_{12} = 0$  диэлектрической  $\alpha$ -фазе соответствовал бы сектор  $2c1$ , сверхпроводящий  $\pi$ -фаза — сектор  $1'c2'$ , а сверхпроводящий  $\beta$ -фаза — сектор  $1c2'$ .

Температура сверхпроводящего перехода  $T_C(x)$  представляется линией  $3c1'$ , причем участку  $c1'$  соответствует переход из нормальной фазы в сверхпроводящую ( $\pi$ ) при температуре  $T_C(x) \equiv T_s(x)$ , а участку  $3c$  — переход из орбитально-антиферромагнитной фазы в сверхпроводящую ( $\beta$ ) при температуре

$$T_C = T_s \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda T_s / T_d}, \quad (27)$$

меньшей по сравнению с  $T_s(x)$ . Здесь  $\lambda = b_{12} a' / b_2 a$ , а поскольку при  $x > x_0$  имеет место неравенство  $T_s > T_d$ , в точке  $c$  функция  $T_C(x)$  имеет излом, т. е. возникает тенденция к уменьшению температуры сверхпроводящего перехода по сравнению с температурой среднего поля  $T_s(x)$ .

Линия  $c4$  фазового перехода между двумя сверхпроводящими состояниями,  $\pi \leftrightarrow \beta$ , определяет температуру

$$T_{\beta\pi} = T_d \frac{1 - \lambda'}{1 - \lambda' T_d / T_s}, \quad (28)$$

которой как функции допирования  $T_{\beta\pi}(x)$  соответствует линия, начинающаяся в точке  $c$  и заканчивающаяся на оси  $x$  в некоторой точке  $x = x_b$ ; здесь  $\lambda' = b_{12} a / b_1 a'$ . Таким образом, точка  $c$  является тетракритической точкой, в которой сходятся четыре линии фазовых переходов [37].

Топология изолиний свободной энергии  $f(\psi, \alpha) = \text{const}$  показана на рис. 4. В секторе  $2c1'$ , соответствующем N-фазе, свободная энергия имеет минимум при  $\psi = 0, \alpha = 0$  (рис. 5), который при переходе через линию  $2c$  в  $\alpha$ -фазу смещается по оси  $\alpha$  в точку  $\psi = 0, \alpha = \sqrt{-a_2/b_2}$  (рис. 6). Этот минимум, однако, является единственной особой точкой свободной энергии не во всей области существования диэлектрической  $\alpha$ -фазы (сектор  $2c3$ ), а лишь в ее верхней части в секторе  $2c1$ . При переходе через линию  $1c$  к минимуму, определяющему термодинамически устойчивое диэлектрическое состояние, добавляется седловая точка при  $\psi = \sqrt{-a_1/b_1}, \alpha = 0$ , в которой свободная энергия имеет минимум по переменной  $\psi$

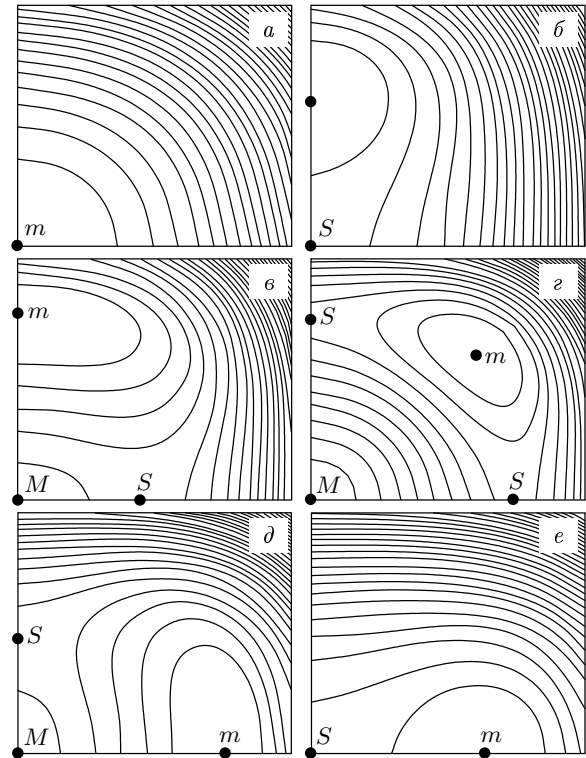


Рис. 4. Топология изолиний свободной энергии в координатах  $\psi$  (горизонтальная ось) и  $\alpha$  (вертикальная ось). Цифрами обозначены секторы фазовой диаграммы вблизи тетракритической точки  $c$ :  $2c1'$  (а),  $2c1$  (б),  $1c3$  (в),  $3c4$  (г),  $4c2'$  (д),  $2'c1'$  (е). Максимумы (М), минимумы (m) и седловые точки (S) свободной энергии обозначены жирными точками

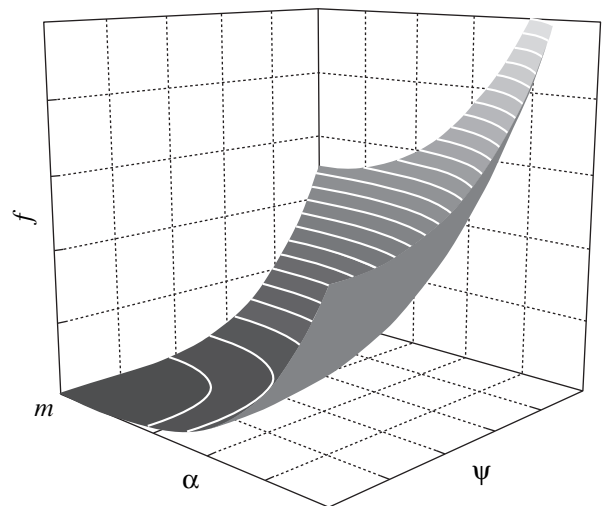
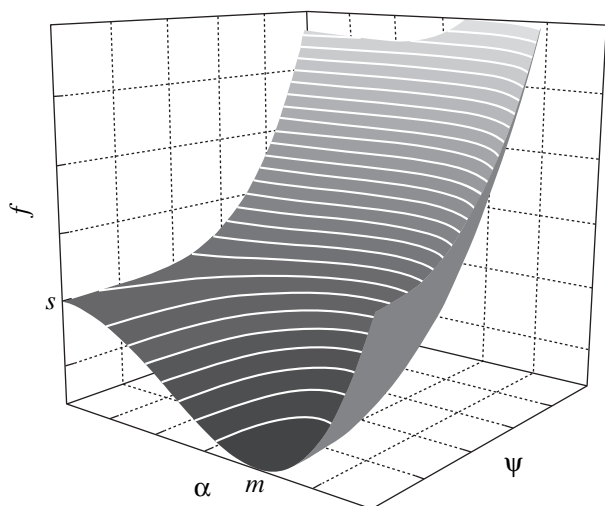
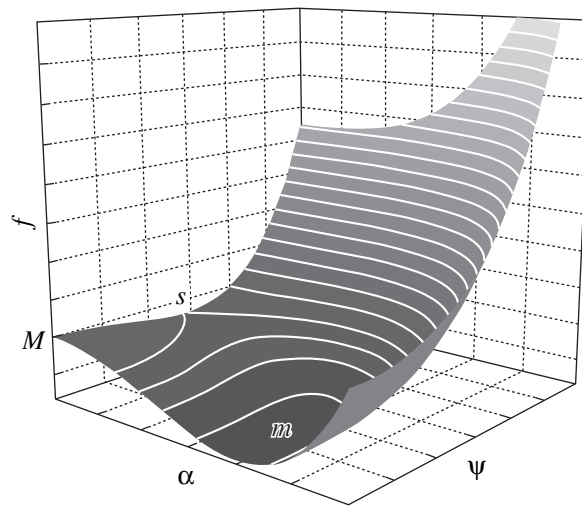


Рис. 5. Плотность свободной энергии нормальной фазы: минимум (m) соответствует  $\psi = \alpha = 0$



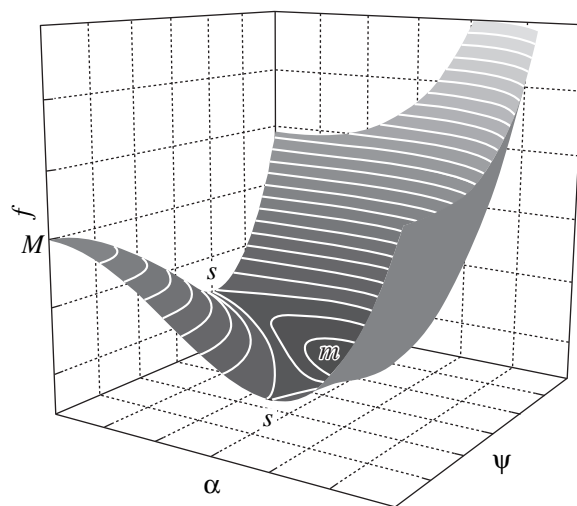
**Рис. 6.** Плотность свободной энергии  $\alpha$ -фазы: минимум смещен из начала координат по оси  $\alpha$ . В начале координат зарождается седловая точка



**Рис. 7.** Плотность свободной энергии в области развитых флуктуаций в  $\alpha$ -фазе. Седловая точка ( $S$ ) смещена из начала координат по оси  $\psi$

при  $\alpha = 0$  (рис. 7). Сектору  $3c4$  ( $\beta$ -фаза) соответствует область сосуществования орбитального антиферромагнетизма и сверхпроводимости. Плотность свободной энергии (рис. 8) имеет абсолютный минимум при  $\alpha \neq 0, \psi \neq 0$  и две седловые точки (на обеих координатных осях). На линии  $c4$  фазового перехода  $\beta \rightarrow \pi$  происходит совмещение минимума с одной из седловых точек (на оси  $\psi$ ), а при переходе через линию  $c2'$  оставшаяся седловая точка (на оси  $\alpha$ ) перемещается в начало координат (как показано на рис. 7 и рис. 6, если на этих рисунках изменить обозначения координатных осей:  $\psi \leftrightarrow \alpha$ ).

В окрестности тетракритической точки состояния из сектора  $1c3$  (на вставке к рис. 3 выделены), соответствующие абсолютному минимуму и седловой точке, имеют близкие значения свободной энергии. Поэтому вероятность флуктуационного возникновения некогерентных долгоживущих квазистационарных состояний сверхпроводящих пар с относительной фазой  $\pi$  (которым как раз и соответствует состояние седловой точки  $\psi = \sqrt{-a_1/b_1}, \alpha = 0$ ) в интервале температур  $T_C(x) < T < T_s(x)$  достаточно велика. Распад такого квазистационарного состояния, сопровождающийся уменьшением модуля сверхпроводящего параметра порядка  $\psi$  от значения  $\psi = \sqrt{-a_1/b_1}$  до нуля при возрастании относительной фазы  $\alpha$  от нуля до равновесного значения  $\alpha = \sqrt{-a_2/b_2}$ , может рассматриваться как рождение несвязанных пар противоположно ориентированных циркулярных токов или как несвязанных пар вихрь – антивихрь [38]. Промежуточны-



**Рис. 8.** Плотность свободной энергии  $\beta$ -фазы: минимум при  $\alpha \neq 0, \psi \neq 0$ , седловые точки на обеих координатных осях. С возникновением второй седловой точки связано появление локального максимума в начале координат

ми состояниями в процессе распада квазистационарных состояний являются флуктуационные состояния  $\beta$ -фазы, принадлежащие одной и той же изолинии (или близким изолиниям), проходящей из окрестности седловой точки в окрестность абсолютного минимума свободной энергии.

Таким образом, температура  $T_s(x)$  при  $x < x_0$  (линия  $1c$ ), ограничивающая сверху область развитых флуктуаций модуля сверхпроводящего парамет-

ра порядка, не связана с каким-либо фазовым переходом. Она может рассматриваться как верхняя граница области фазовой диаграммы, в которой, благодаря возникновению и распаду квазистационарных сверхпроводящих пар с относительной фазой  $\pi$ , существуют вихревые орбитальные токи. Такие токи могут приводить к значительному усилению эффекта Нернста, наблюдаемому в купратах в области сильной псевдощели [39]. Поэтому температура  $T_s(x)$  при  $x < x_0$  может быть отождествлена с кроссовером, ограничивающим сверху эту область:  $T_s(x) \approx T_{str}^*(x)$ . Следует отметить, что сильная псевдощель может проникать в область предельно слабого допирования  $x < x_*$ .

При  $x_* < x < x_0$  фазовый переход из диэлектрической  $\alpha$ -фазы в сверхпроводящую фазу может быть формально описан с помощью единственного параметра порядка  $\psi$  при условии, что величина  $\tau = (T_C - T)/T_C$  мала,  $|\tau| \ll 1$ . Плотность свободной энергии (25) при подстановке в нее равновесного значения относительной фазы  $\alpha$ , определенного в формуле (26), приводит к разложению плотности свободной энергии по степеням  $\psi$  вида

$$f_s = -\frac{1}{2} \frac{a_2^2}{b_2} + \left( a_1 - \frac{b_{12}a_2}{b_2} \right) \psi^2 + \frac{1}{2} b_1 \psi^4. \quad (29)$$

Вблизи кривой фазового перехода  $\alpha \leftrightarrow \beta$  можно положить  $(a_1 - b_{12}a_2/b_2) = -\tilde{a}\tau$ , где  $\tilde{a} = a - b_{12}a'/b_2$  — положительная функция  $x$ . Коэффициент при  $\psi^2$  в разложении плотности свободной энергии (29) определяется величиной  $\tilde{a} < a$ , поскольку температура  $T_C$  фазового перехода при  $x_* < x < x_0$  меньше той температуры  $T_s$ , которая соответствует приближению среднего поля и совпадает с  $T_C$  только в передоприванной области  $x_0 < x < x^*$ . Поскольку именно коэффициент при  $\psi^2$  определяет степень пологости минимума свободной энергии, можно заключить, что в секторе  $3c4$ , соответствующем  $\beta$ -фазе, по мере удаления от тетракритической точки в область слабого допирования имеет место тенденция к возрастанию флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка  $\psi$ . Этот вывод можно рассматривать как аргумент в пользу того, что теория среднего поля с однокомпонентным параметром порядка оказывается недостаточной для описания сверхпроводящего фазового перехода в недоопрированной области фазовой диаграммы. Напротив, двухкомпонентный параметр порядка, естественно вытекающий из концепции  $\eta_K$ -спаривания и учитывающий как зарядовую, так и токовую степени свободы, с необходимостью приводит к картине развитых флуктуаций параметра порядка.

При переходе через линию  $c1'$  из нормальной фазы (сектор  $2c1'$ ) в  $\pi$ -фазу (сектор  $1'c4$ ) минимум свободной энергии смещается из точки  $\psi = 0, \alpha = 0$  в точку  $\psi = \sqrt{-a_1/b_1}, \alpha = 0$ . Этот минимум является абсолютным во всей области существования  $\pi$ -фазы (сектор  $1'c4$ ), однако в выделенном на рис. 3 секторе  $2'c4$  возникает еще одна особая точка — седловая точка с координатами  $\psi = 0, \alpha = \sqrt{-a_2/b_2}$ . В окрестности тетракритической точки с значения свободной энергии в минимуме и седловой точке близки друг к другу, поэтому в секторе  $2'c4$  велика вероятность флуктуационного рождения квазистационарных орбитальных циркулярных токов. Распад таких квазистационарных состояний, т. е. уменьшение относительной фазы параметра порядка от его значения в седловой точке  $\alpha = \sqrt{-a_2/b_2}$  до нуля при одновременном росте модуля параметра порядка  $\psi$  от нуля до термодинамически равновесного значения  $\psi = \sqrt{-a_1/b_1}$ , происходит через состояния с  $\alpha \neq 0$  и  $\psi \neq 0$ , т. е. через неравновесные состояния  $\beta$ -фазы. Температура  $T_s(x)$ , соответствующая приближению среднего поля, при  $x_0 < x < x^*$  является температурой фазового перехода из нормальной фазы в  $\pi$ -фазу,  $T_s(x) = T_C(x)$ . Поэтому сверхпроводящий фазовый переход из нормальной в  $\pi$ -фазу в передоприванной области фазовой диаграммы может быть удовлетворительно описан в рамках теории Ландау фазовых переходов с однокомпонентным параметром порядка, т. е. имеет черты перехода, соответствующего теории BCS.

Следует отметить, что уровень оптимального допирования, формально определяемый по положению максимума зависимости  $T_C(x)$ , заведомо ниже уровня допирования в тетракритической точке,  $x_{opt} < x_0$ , поэтому линия  $c4$ , соответствующая нижней границе  $\pi$ -фазы, после ее продолжения в область низких температур заканчивается в некоторой точке  $x = x_b$ , причем,  $x_0 < x_b < x^*$ . Поэтому в интервале допирования  $x_0 < x < x_b$  дальнейшее понижение температуры после фазового перехода из нормальной в  $\pi$ -фазу сначала переводит систему в область развитых флуктуаций в виде квазистационарных орбитальных циркулярных токов, после чего она испытывает фазовый переход при температуре  $T_{\beta\pi}(x)$  между двумя сверхпроводящими состояниями из  $\pi$ -фазы в  $\beta$ -фазу, в которой сверхпроводимость сосуществует с орбитальным антиферромагнетизмом. Такой фазовый переход внутри сверхпроводящего состояния мог бы быть зарегистрирован, например, по аномалии температурной зависимости теплоемкости. При температуре фазового перехода  $T_{\beta\pi}$  модуль параметра порядка  $\psi$  остается непрерыв-

ным, а относительная фаза  $\alpha$ , равная нулю в  $\pi$ -фазе, становится отличной от нуля при  $T < T_{\beta\pi}(x)$ .

В заключение этого раздела в соответствии с работой [40] укажем схему подчинения групп симметрии фаз в окрестности тетракритической точки. Если купратной плоскости соответствует квадратная решетка с двумерным кристаллическим классом  $G = C_{4v}$ , то расширенная точечная группа симметрии наиболее симметричной нормальной фазы представляется как прямое произведение  $G_N = G \times R \times U(1)$ , где  $R$  обозначает группу, состоящую из тождественного преобразования и преобразования  $R$  обращения времени (изменяющего направления токов на противоположные),  $U(1)$  — группа калибровочных преобразований.

Переходу из нормальной в сверхпроводящую  $\pi$ -фазу соответствует потеря калибровочной симметрии, так что точечной группой симметрии  $\pi$ -фазы является немагнитный кристаллический класс  $G_\pi = G \times R$ .

При переходе из нормальной в диэлектрическую  $\alpha$ -фазу из-за возникновения спонтанных циркулярных токов теряются некоторые элементы кристаллической симметрии, которой теперь соответствует группа  $H$ , являющаяся одной из подгрупп индекса 2 группы  $G$ . Точечной группой симметрии  $\alpha$ -фазы является сверхпроводящий магнитный класс с множеством элементов  $G_\alpha = (H + RgH) \times U(1)$ , где  $g$  — некоторый элемент из  $G$ , не принадлежащий  $H$ .

Потеря калибровочной симметрии при переходе из  $\alpha$ -фазы в  $\beta$ -фазу приводит к тому, что точечной группой симметрии  $\beta$ -фазы является магнитный класс  $G_\beta = H + RgH$ .

Группа  $G_\beta$  является одновременно одной из подгрупп групп  $G_\alpha$  и  $G_\pi$ , которые, в свою очередь, являются подгруппами группы  $G_N$ .

У группы  $G = C_{4v}$  имеются две подгруппы индекса 2:  $H = C_4$  и  $H = C_{2v}$ . Однако первой из этих возможностей соответствует ферромагнитный кристаллический класс  $C_{4v}(C_4)$ , тогда как второй соответствует антиферромагнитный класс  $C_{4v}(C_{2v})$ , в точности отвечающий распределению токов в двумерной фазе с потоком.

## 8. $\eta_K$ -СВЕРХПРОВОДНИК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Внешнее магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , которая, как и векторный потенциал внешнего поля  $\mathbf{A}$ , является медленно (на межатомном расстоянии) меняющейся функцией пространственных ко-

ординат, легко может быть включено в общее определение (9) функционала Гинзбурга–Ландау. Кроме того, плотность свободной энергии (24) орбитального антиферромагнетика должна быть дополнена зависящими от  $\mathbf{B}$  слагаемыми, за исключением изменения плотности свободной энергии при включении внешнего магнитного поля  $f_m(\alpha)$ , уже входящей в функционал Гинзбурга–Ландау. Выделив из векторного потенциала вклад поля спонтанных орбитальных токов, плотность энергии магнитного поля  $f'_m$  можно представить в виде

$$f'_m = \kappa\alpha^2 + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}/8\pi. \quad (30)$$

Здесь и далее обозначения  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}$  относятся к внешнему магнитному полю. Первое слагаемое в формуле (30), обусловленное спонтанными токами, должно быть объединено с первым членом в плотности свободной энергии (24) орбитального антиферромагнетика. Линейные по  $\mathbf{B}$  (как и по  $\mathbf{A}$ ) члены выпадают, поскольку при определении параметра порядка в феноменологии Гинзбурга–Ландау предполагается усреднение по относительному движению  $\eta_K$ -пары.

Аналогичным образом может быть преобразовано градиентное слагаемое (11):  $f_g = b_{12}\psi^2\alpha^2 + f'_g$ , где

$$f'_g = \frac{\hbar^2}{4m} \sum_s M_s |\hat{\mathbf{D}}\Psi_s|^2. \quad (31)$$

Здесь предполагается, что матрица  $M_{ss'}$ , входящая в определение (11), диагонализирована вместе с  $A_{ss'}$  в (10); в определении (12) оператора ковариантного дифференцирования учитывается только векторный потенциал внешнего поля.

Чтобы дополнить свободную энергию орбитального антиферромагнетика зависящими от внешнего магнитного поля членами, заметим, что орбитальный антиферромагнитный параметр порядка в случае двух орбитальных антиферромагнитных подрешеток (которым мы ограничимся) имеет вид  $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ , где  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  — намагнитченности подрешеток, равные друг другу по модулю в отсутствие внешнего поля [41]. Эти намагнитченности обусловлены орбитальными токами, циркулирующими в купратной плоскости, поэтому  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  (следовательно, и  $\mathbf{L}$ ) перпендикулярны этой плоскости. Поэтому в такой двумерной системе как купратные соединения для определения орбитального антиферромагнитного параметра порядка оказывается достаточным задать всего одну величину, т. е.  $L = |\mathbf{L}|$ , которая в соответствии с принятой интерпретацией относительной фазы сверхпроводящего порядка

должна быть пропорциональна  $\alpha$ :  $L \propto \alpha$ . Угол  $\theta$  между  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{B}$ , таким образом, не является вариационным параметром, поскольку он просто определяется ориентацией внешнего магнитного поля по отношению к нормали к купратной плоскости. Таким образом, две скалярные комбинации векторов  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{B}$  четвертого порядка малости,  $L^2 B^2$  и  $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{B})^2$ , входящие в свободную энергию антиферромагнетика, могут быть записаны как

$$f_d = d\alpha^2 B^2, \quad (32)$$

где феноменологический параметр  $d = d_1 + d_2 \cos^2 \theta$  определяется двумя положительными функциями допирования,  $d_1(x)$  и  $d_2(x)$ .

Свободная энергия принимает вид

$$F = \int d^3 R \left[ \sum_s \frac{\hbar^2 M_s}{4m} |\hat{\mathbf{D}}\Psi_s|^2 + f + p(\alpha) B^2 \right], \quad (33)$$

где  $p(\alpha) = (\mu^{-1} + 8\pi d\alpha^2)/8\pi$ ,  $f$  определяется выражением (25), а векторный потенциал внешнего поля и параметры  $\psi$  и  $\alpha$  являются вариационными функциями радиуса-вектора центра масс пары  $\mathbf{R}$ , медленно меняющимися на масштабе элементарной ячейки.

Вариация свободной энергии по векторному потенциалу приводит к уравнению

$$\frac{2e^2 M}{mc^2} \psi^2 \mathbf{A}' + 2p(\alpha) \text{rot rot } \mathbf{A}' + 4d\alpha [\nabla \alpha \times \text{rot } \mathbf{A}'] = 0, \quad (34)$$

где  $M = M_1 + M_2$  — след матрицы  $M_{ss'}$ , векторный потенциал определен с точностью до калибровочного преобразования,  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} - (\hbar c/2e)\nabla\Phi$ , в котором  $\Phi$  — фаза сверхпроводящего конденсата.

Варьирование функционала (33) по  $\psi$  и  $\alpha$  дает еще два уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{4m} M \left( i\nabla + \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}' \right)^2 \psi + a_1 \psi + b_1 \psi^3 + b_{12} \alpha^2 \psi + \\ + \frac{\hbar^2}{4m} M_2 (\nabla \alpha)^2 \psi = 0, \quad (35) \\ - \frac{\hbar^2}{4m} M_2 (\psi^2 \nabla^2 \alpha + 2\psi \nabla \psi \nabla \alpha) + a_2 \alpha + b_2 \alpha^3 + \\ + b_{12} \psi^2 \alpha + d\alpha (\text{rot } \mathbf{A}')^2 = 0, \quad (36) \end{aligned}$$

которые, вместе с формулой (34), составляют полную систему уравнению Гинзбурга–Ландау, описывающую (в окрестности тетракритической точки) конкуренцию и сосуществование  $\eta_K$  и орбитального антиферромагнитного упорядоченного состояния.

Даже при сделанных упрощающих предположениях система уравнений (34)–(36) оказывается существенно более сложной по сравнению с системой двух уравнений, описывающих обычный сверхпроводник во внешнем магнитном поле. Поэтому здесь мы ограничимся рассмотрением некоторых простейших следствий, вытекающих из системы (34)–(36).

Прежде всего в отсутствие упорядочения ( $\psi = 0$ ,  $\alpha = 0$ ) из формулы (34) следует, что  $\mu$  имеет смысл, как уже упоминалось выше, магнитной проницаемости нормальной фазы,  $\mu = \mu_N = 1 + 4\pi\chi_N$  ( $\chi_N$  — магнитная восприимчивость нормальной фазы).

Однородному состоянию  $\alpha$ -фазы в магнитном поле соответствует параметр порядка, определяемый как

$$\alpha^2 = -(a_2 + d B^2)/b_2, \quad (37)$$

поэтому магнитная восприимчивость  $\alpha$ -фазы в слабом магнитном поле может быть представлена в виде

$$\chi_{\parallel}^{(\alpha)} \approx \chi_N + \frac{2(d_1 + d_2)}{b_2} a_2, \quad \chi_{\perp}^{(\alpha)} \approx \chi_N + \frac{2d_1}{b_2} a_2. \quad (38)$$

Здесь  $\chi_{\parallel}^{(\alpha)}$  ( $\chi_{\perp}^{(\alpha)}$ ) — продольная (поперечная) по отношению к внешнему полю восприимчивость  $\alpha$ -фазы; в формуле (37) учтено, что магнитные проницаемости нормальной и  $\alpha$ -фаз мало отличаются от единицы в окрестности тетракритической точки (где  $a_2 = -a'\tau_2 < 0$  и  $\tau_2 \ll 1$ ):  $\mu_N \approx \mu_{\alpha} \approx 1$ . Поскольку  $|\chi_N| \ll 1$ , в случае парамагнитной нормальной фазы переход в состояние  $\alpha$ -фазы с гигантским диамагнетизмом, наблюдаемым в области сильной псевдощели в магнитном поле [42], происходит при температуре

$$\tilde{T}_d = T_d(1 - b_2\chi_N/2\tilde{d}a'), \quad (39)$$

где  $\tilde{d} = d_1 + d_2$  для поля поперек купратной плоскости, и  $\tilde{d} = d_1$  для поля вдоль этой плоскости.

Для сверхпроводящей  $\pi$ -фазы ( $\psi \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ) уравнения (34) и (35) приводят к обычному эффекту Мейсснера. Глубина проникновения магнитного поля в  $\pi$ -фазу определяется формулой

$$\lambda_{\pi} = \sqrt{\frac{mc^2 b_1}{8\pi M e^2 |a_1|}}. \quad (40)$$

В случае сверхпроводящей  $\beta$ -фазы, соответствующей сосуществованию сверхпроводимости и орбитального антиферромагнетизма, координатные зависимости как магнитного поля, так и обоих параметров  $\psi$  и  $\alpha$ , могут оказаться достаточно сложными. В частности, пространственная неоднородность одного из параметров влечет за собой неоднородность и другого параметра.



## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопрос о микроскопическом механизме сверхпроводимости купратных соединений имеет принципиальное значение, поэтому, учитывая то, что кулоновское отталкивание в купратах является одним из наиболее существенных факторов, определяющих их особые свойства, естественно предположить, что именно это взаимодействие лежит в основе механизма сверхпроводимости этих соединений.

Если возникновение сверхпроводящего состояния обусловлено синглетным спариванием с большим суммарным импульсом пары  $\mathbf{K}$ , то симметрия энергетической щели  $\Delta(\mathbf{k})$  естественно образом определяется кристаллической симметрией купратной плоскости. Асимптотически точное (уже при сколь угодно малой интенсивности взаимодействия) нетривиальное решение уравнения самосогласования при  $\eta_K$ -спаривании существует при идеальном зеркальном нестинге контура Ферми, а малое отклонение от идеального зеркального нестинга приводит к тому, что сверхпроводящее решение возникает, начиная с конечной (но достаточно малой) величины эффективной константы связи. В купратах в достаточно широком интервале допирования форма контура Ферми близка к той, которая соответствует идеальному зеркальному нестингу при некоторых больших (вообще говоря, несоизмеримых) импульсах  $\mathbf{K}$ .

Возникновение мнимой части параметра порядка с относительной фазой, отличной от  $\pi$ , позволяет интерпретировать это как появление вклада волны плотности тока заряда, связанной с относительным движением пары. Можно предположить, что подобное упорядочение связано с образованием диэлектрической антиферромагнитной структуры орбитальных токов, а отклонение относительной фазы от  $\pi$  играет роль соответствующего параметра порядка. Следует отметить, что такой параметр диэлектрического упорядочения естественно возникает в схеме  $\eta_K$ -спаривания при отталкивании.

Область на фазовой диаграмме, которая соответствует сверхпроводимости, разделяется, таким образом, на две фазы, одна из которых ( $\pi$ -фаза) существует в передопированных, а вторая ( $\beta$ -фаза) — в недодопированных соединениях. Линия  $T_{\beta\pi}$  перехода между этими фазами, начинающаяся в тетра критической точке (при  $x = x_0$ ), заканчивается на оси  $T = 0$  в некоторой точке  $x = x_b > x_0$ . Поэтому при  $x_0 < x < x_b$  после фазового перехода из нормальной фазы в  $\pi$ -фазу дальнейшее понижение температуры приводит ко второму фазовому переходу из  $\pi$ -фазы в  $\beta$ -фазу. Этому переходу, как и в случае

перехода  $\alpha \rightarrow \beta$  в недодопированных соединениях, предшествует область развитых флуктуаций параметра порядка, обусловленных возникновением седловой точки в семействе изолиний свободной энергии (рис. 4) при ее абсолютном минимуме, соответствующем  $\pi$ -фазе. С этой седловой точкой могут быть связаны некоторые квазистационарные состояния как некоррелированные состояния орбитальных циркулярных токов. Таким образом, фазовая диаграмма обладает определенной симметрией по отношению к преобразованию параметров  $\psi \leftrightarrow \alpha$ .

В заключение отметим, что термодинамический анализ фазовой диаграммы в окрестности тетра критической точки, учитывающий конкуренцию сверхпроводящего и орбитально-антиферромагнитного состояний (которая является естественным следствием  $\eta_K$ -спаривания при отталкивании), позволяет сделать вполне определенные выводы относительно основных особенностей фазовой диаграммы в целом для интервалов температуры и допирования, соответствующих области сверхпроводимости. Эти выводы не противоречат известным экспериментальным фактам, относящимся к особенностям поведения купратов в указанных интервалах температуры и допирования. В частности, качественное объяснение находит усиление эффекта Нернста в области сильной псевдощели (кроссовер от сильной к слабой псевдощели, связанный с исчезновением седловой точки на оси  $\psi$ , естественно объясняется [17] размытием уровня квазистационарного состояния при его приближении к вершине потенциального барьера, показанного на рис. 2), а также уменьшение сверхтекучей плотности [1] и увеличение отношения  $2\Delta/T_C$  (по сравнению с универсальным значением 3.52 в теории Бардина–Купера–Шриффера) [43] в недодопированном режиме. Отметим, что анализ сверхпроводящего фазового перехода с помощью теории Бардина–Купера–Шриффера эффективен только в передопированных соединениях, поскольку описание фазового перехода в сверхпроводящую  $\beta$ -фазу с помощью однокомпонентного параметра порядка оказывается недостаточным.

Переход  $\beta \leftrightarrow \pi$  между двумя сверхпроводящими состояниями, который является фазовым переходом второго рода и имеет место в относительно небольшом интервале допирования  $x_0 < x < x_b$ , может быть обнаружен, например, в экспериментах по измерению скачка теплоемкости. Заметим также, что максимум температуры  $T_C(x)$  сверхпроводящего перехода, которому соответствует  $x = x_{opt}$ , вообще говоря, не совпадает с положением  $x = x_0$  тетра критической точки:  $x_{opt} < x_0$  (рис. 3), на что так-

же указывают имеющиеся экспериментальные данные [44]. Поэтому, если передопирированная область определяется, как обычно, условием  $x_{opt} < x < x^*$ , то вполне естественно, что внутри этой области при  $x_{opt} < x < x_b$  могут проявляться сильные флуктуации параметра порядка. Такие флуктуации как вихревые возбуждения в виде квазистационарных некоррелированных орбитальных циркулярных токов могли бы быть обнаружены в экспериментах по туннельной микроскопии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17133).

### ЛИТЕРАТУРА

1. P. A. Lee, N. Nagaosa, and X.-G. Wen, E-print archives, cond-mat/0410445.
2. S. Chakravarty, R. B. Laughlin, D. K. Morr, and C. Nayak, Phys. Rev. **63**, 094503 (2001).
3. S. Chakravarty, Phys. Rev. **66**, 224505 (2002).
4. G. Zhao, Phys. Rev. **64**, 024503 (2002).
5. B. H. Brandow, Phys. Rev. **65**, 054503 (2002).
6. B. I. Halperin and T. M. Rice, Sol. St. Phys. **21**, 115 (1968).
7. S. Sachdev, Science **288**, 475 (2000).
8. M. Guidry, L.-A. Wu, Y. Sun, and C.-L. Wu, Phys. Rev. **63**, 134516 (2001).
9. Б. А. Волков, А. А. Горбацевич, Ю. В. Копаев, В. В. Тугушев, ЖЭТФ **81**, 729 (1981).
10. J. B. Marston and I. Affleck, Phys. Rev. **39**, 11538 (1989).
11. D. A. Ivanov, P. A. Lee, and X.-G. Wen, Phys. Rev. Lett. **84**, 3958 (2000).
12. C. Nayak, Phys. Rev. **62**, 4880 (2000).
13. Б. А. Волков, О. А. Панкратов, ЖЭТФ **75**, 1362 (1978).
14. P. A. Lee, N. Nagaosa, T.-K. Ng, and X.-G. Wen, Phys. Rev. **57**, 6003 (1998); P. A. Lee, E-print archives, cond-mat/0201052.
15. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, ЖЭТФ **127**, 45 (2005).
16. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, В. М. Софронов, С. В. Шевцов, ЖЭТФ **124**, 1149 (2003).
17. В. И. Белявский, Ю. В. Копаев, Ю. Н. Тогушова, С. В. Шевцов, ЖЭТФ **126**, 672 (2004).
18. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, Письма в ЖЭТФ **81**, 650 (2005).
19. C. N. Yang, Phys. Rev. Lett. **63**, 2144 (1989).
20. P. Fulde and R. A. Ferrel, Phys. Rev. **135**, A550 (1964).
21. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **47**, 1136 (1964).
22. В. И. Белявский, В. В. Капаев, Ю. В. Копаев, Письма в ЖЭТФ **76**, 51 (2002).
23. А. А. Abrikosov, Physica C **341-348**, 97 (2000).
24. Е. Г. Максимов, УФН **170**, 1033 (2000).
25. A. S. Alexandrov and P. E. Kornilovitch, J. Phys.: Condens. Matter **14**, 5337 (2002).
26. A. V. Chubukov, D. Pines, and J. Schmalian, in *The Physics of Conventional and Unconventional Superconductors*, ed. by K. H. Bennemann and J. B. Ketterson, Springer-Verlag (2002).
27. P. W. Anderson, Science **237**, 1196 (1987).
28. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, АН СССР, Москва (1958).
29. W. Kohn and J. M. Luttinger, Phys. Rev. Lett. **15**, 524 (1965).
30. V. I. Belyavsky and Yu. V. Kopaev, Phys. Rev. B **67**, 024513 (2003).
31. V. I. Belyavsky and Yu. V. Kopaev, Phys. Lett. A **322**, 244 (2004).
32. V. I. Belyavsky, Yu. V. Kopaev, and Yu. N. Togushova, Phys. Lett. A **338**, 69 (2005).
33. Y. Ren, J.-H. Xu, and C. S. Ting, Phys. Rev. Lett. **74**, 3680 (1995).
34. A. Ghosh and S. K. Adhikari, Phys. Rev. B **60**, 10401 (1999).
35. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. II, Наука, Москва (2001).
36. V. N. Muthukumar and Z. Y. Weng, Phys. Rev. B **65**, 174511 (2002).
37. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, ч. I, Наука, Москва (1995).
38. M. Franz, Z. Tešanović, and O. Vafek, Phys. Rev. B **66**, 054535 (2002).

39. Z. A. Xu, N. P. Ong, Y. Wang, T. Kakeshita, and S. Uchida, *Nature* **406**, 486 (2000).
40. Г. Е. Воловик, Л. П. Горьков, *ЖЭТФ* **88**, 1412 (1985).
41. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1992).
42. Y. Wang, L. Li, M. J. Naughton, G. D. Gu, S. Uchida, and N. P. Ong, E-print archives, cond-mat/0503190.
43. M. Oda, T. Matsuzaki, N. Momono, and M. Ido, *Physica C* **341–348**, 847 (2000).
44. G. Zheng, P. L. Kuhns, A. P. Reyes, B. Liang, and C. T. Lin, E-print archives, cond-mat/0502117.