

# О РАСПРОСТРАНЕНИИ УЛЬТРАКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ СВЕТА ПРИ УПРАВЛЕНИИ РЕЗОНАНСНЫМИ УСЛОВИЯМИ

*А. М. Башаров\**

*Российский научный центр «Курчатовский институт»  
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 31 мая 2005 г.

Задача о распространении поляризованного ультракороткого импульса света при условии задания в начальный момент времени пространственного профиля импульса, состояния среды и «включения» резонансного взаимодействия с атомами среды рассмотрена на основе метода обратной задачи рассеяния. Учтено вырождение атомных уровней по проекциям полного углового момента. Найдена гамильтонова форма уравнений Максвелла–Блоха без переопределения пространственно-временных переменных. В основу метода обратной задачи рассеяния положена новая спектральная задача. Получены уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко, солитонное решение и законы преобразования параметров солитонов при их столкновении. Обсуждена возможная экспериментальная реализация предложенной постановки задачи.

PACS: 42.65.Tg

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение процессов резонансного распространения импульсов света давно привлекает внимание как экспериментаторов, так и теоретиков разнообразием режимов распространения и сопровождающих эффектов, имеющих практическую значимость, многообразием математических приемов и методов для аналитического решения задачи, необъятным полем для численного моделирования. Среди этих задач — исследования распространения резонансных ультракоротких импульсов (УКИ) света либо самих по себе, либо одновременно с импульсами волн других несущих частот, либо на фоне более протяженного импульса. Они интересны как реальные пути осуществления режимов распространения импульсов с групповой скоростью, существенно меньшей фазовой скорости света, и одновременно как яркие демонстрации солитона в оптике. В простейшем случае распространения одночастотного импульса в резонансной среде благодаря процессам поглощения и индуцированного переизлучения квантов формируется стационарная форма импульса, который распространяется с групповой скоростью, меньшей (в

ряде случаев существенно) фазовой скорости света в среде, и описывается солитонными решениями уравнений Максвелла–Блоха. Это явление принято называть самоиндуцированной прозрачностью [1].

До сих пор традиционная постановка и экспериментальных, и теоретических исследований самоиндуцированной прозрачности состояла в следующем [2, 3]. На вход в резонансную среду, занимающую область пространства  $z \geq 0$ , подавался импульс света, имеющий в точке  $z = 0$  входа в резонансную среду временной профиль  $\mathcal{E}_0(t)$  (с вычетом профиля отраженного импульса). Этот профиль служил начальным условием для задачи Коши соответствующих уравнений Максвелла–Блоха, а эволюция импульса в глубь среды в рамках метода обратного рассеяния выглядела как его временная эволюция. Заметим, что при этом уравнения Максвелла–Блоха записываются через полукунозные переменные  $z$  и  $t - z/c$ . Историю вопроса, изложение метода обратной задачи рассеяния и его применения к различным математическим моделям самоиндуцированной прозрачности, как и разнообразные решения, можно найти в монографии [4].

В данной работе предлагается задачу о распространении УКИ ставить следующим образом. Пусть УКИ распространяется в глубь среды в пере-

\*E-mail: bash@online.ru, basharov@gmail.com

зонансном режиме. Когда он уже находится вдали от границ среды и его пространственный профиль описывается функцией  $\mathcal{E}_0(z)$ , в момент времени  $t = 0$  включается резонансное взаимодействие импульса со средой. Таким образом, пространственный профиль  $\mathcal{E}_0(z)$  служит начальным условием для задачи Коши тех же самых уравнений Максвелла–Блоха, записанных в исходных пространственно-временных переменных  $z$  и  $t$ . Эволюция профиля импульса рассматривается теперь по переменной  $t$ .

С математической точки зрения предлагаемая постановка и традиционная задача — это существенно разные задачи, хотя исходные уравнения при этом могут быть и одинаковыми. Это аналогично тому, как различаются разные краевые задачи для одного и того же оператора. С точки зрения решения этих задач в рамках метода обратной задачи рассеяния обсуждаемое различие состоит в следующем. Пусть операторы  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  (операторы Лакса) реализуют представление нулевой кривизны исходных уравнений. Тогда в одном случае в качестве спектральной задачи (в методе обратной задачи рассеяния) служит задача на основе оператора  $\hat{L}$ , а в другом случае — на основе  $\hat{A}$ . В случае распространения волн в керровской среде такое различие в постановке задач и их решении обсуждалось в работе [5].

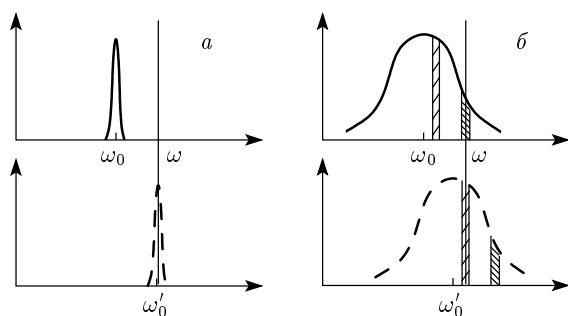
Анализ возможных физических реализаций предлагаемой постановки задачи о распространении ультракоротких импульсов в резонансной среде приводит к выводу о перспективности использования для этих целей широко известной техники штарковских импульсов [6]. Однако до сих пор эта техника применялась лишь для исследования таких когерентных явлений как фотонное эхо, оптические нутации и индукции. Идея техники штарковских импульсов в этих исследованиях состояла в следующем. Вместо того чтобы пускать УКИ в среду, среда помещалась в конденсатор и в поле стационарной электромагнитной волны. Кратковременное включение импульса электрического поля в конденсаторе приводило к сдвигу энергетических уровней атомов среды за счет эффекта Штарка, и атомы становились резонансными стационарной электромагнитной волне. С точки зрения атомов это выглядело как облучение атомов резонансным ультракоротким импульсом. Таким образом, прохождение и взаимодействие возбуждающих световых импульсов заменялось на кратковременное включение и выключение электрического поля в конденсаторе, которое за счет эффекта Штарка управляло условиями резонансного взаимодействия.

Если теперь обратиться к задаче о самоиндуцированной прозрачности в предлагаемой постановке, то при использовании техники штарковских импульсов роль штарковского поля состоит во «включении» резонансного взаимодействия среды с уже проходящим через нее ультракоротким импульсом, т. е., как и в случае других когерентных переходных процессов, в управлении резонансными условиями. Это можно реализовать разными путями. Например, среда, резонансная по отношению к проходящему УКИ света, помещена в конденсатор с уже приложенным постоянным электрическим полем. За счет эффекта Штарка созданы условия для нерезонансного распространения этого УКИ. Тогда выключение штарковского поля приведет к началу резонансного распространения УКИ в среде.

Таким образом, с физической точки зрения предлагаемую постановку задачи о распространении УКИ в резонансной среде можно рассматривать как задачу о распространении ультракоротких импульсов света при управлении резонансными условиями, или, другими словами, как своеобразную технику штарковских импульсов применительно к задаче о самоиндуцированной прозрачности.

В работе изучается распространение ультракоротких импульсов света в условиях управления резонансным взаимодействием, учитываются произвольная поляризация УКИ и вырождение резонансных энергетических уровней по различным ориентациям полного углового момента. Новизна математической постановки такой более конкретной задачи заключается в следующем. Как показано в работе [7], уравнения Максвелла–Блоха, обобщенные на случай учета поляризации УКИ и вырождения энергетических уровней, интегрируемы методом обратной задачи рассеяния. При этом в традиционной постановке в качестве спектральной задачи выступает спектральная задача Манакова [8]. В предлагаемом подходе для решения поставленной задачи Коши методом обратной задачи рассеяния необходимо использовать новую спектральную задачу. В работе для этой новой задачи проанализированы свойства матриц Йоста и получены необходимые уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко для решения обратной задачи рассеяния.

Подчеркнем, что предлагаемый подход помимо описания распространения одночастотных УКИ в условиях однофотонного резонанса можно использовать и для описания эффектов в других условиях резонансного распространения УКИ: аналогично можно обсуждать распространение двухчастотных поляризованных УКИ в условиях двойного резонанса с



**Рис. 1.** Управление условиями резонансного взаимодействия штарковским импульсом в случае узкой (*a*) и широкой (*б*) спектральных линий. Колоколообразный график показывает распределение числа атомов по частотам перехода между парой рассматриваемых энергетических уровней. Величины  $\omega_0$  и  $\omega'_0$  представляют центральные частоты этих распределений в отсутствие и при приложенном штарковском поле. Частота  $\omega_0$  отвечает частоте проходящего УКИ. Штриховкой отмечены группы атомов, которые при включении и/или выключении штарковского поля участвуют в резонансном взаимодействии с УКИ. Возможна и обратная ситуация — величины  $\omega'_0$  и  $\omega_0$  представляют центральные частоты распределений в отсутствие и при приложенном штарковском поле

вырожденными уровнями, распространение УКИ на фоне протяженной волны в условиях либо двойного, либо комбинационного резонансов и т. п. В данной работе для определенности подробно рассматривается случай распространения поляризованного УКИ в среде двухуровневых атомов, энергетические уровни которых вырождены по проекциям полного углового момента 0 и 1. Задача в отсутствие вырождения и в пренебрежении поляризационными свойствами рассмотрена в работе [9]. Следует отметить, что в предлагаемой постановке можно также рассмотреть и задачу о сверхфлуоресценции, которая обычно рассматривается на основе традиционной спектральной задачи [10].

Наконец, представленный подход позволяет на основе исследованной спектральной задачи корректно описать квантовые солитоны обобщенных уравнений Максвелла–Блоха, не прибегая к переопределению пространственных и временных переменных, поскольку использование полуконусных переменных [11], строго говоря, отвечает квантованию несколько иной задачи.

Необходимо также отметить следующее. Реальная ситуация резонансного прохождения УКИ обычно осложняется неоднородным уширением

линий спектральных переходов. Это значит, что при включении штарковского поля одна группа атомов, взаимодействующих первоначально с внешней электромагнитной волной, перестает быть резонансной волне, тогда как другая группа атомов в пределах неоднородно уширенной спектральной линии становится резонансной (см. рис. 1). В результате при недостаточно большом штарковском сдвиге частоты атомных переходов та или иная группа атомов будет всегда находиться в условиях резонансного взаимодействия с УКИ. Это существенно усложняет картину взаимодействия УКИ со средой в технике штарковских импульсов. В случае фотонного эха такая картина обусловила, по сути дела, формирование нового эффекта [12, 13]. Постановка и решение задачи о самоиндуцированной прозрачности здесь сводится к уравнениям Максвелла–Блоха с отстройками, зависящими от пространственно-временных координат. Однако и в этом случае имеем две различные математические задачи Коши. Решение их можно также искать в рамках метода обратной задачи рассеяния со спектральным параметром, зависящим от времени (или координаты). Известны случаи успешного применения такого подхода к ряду задач [14–17], однако для обсуждаемой задачи этот вопрос остается открытым. Причем здесь можно было бы объединить рассмотрение фотонных эхо [12, 13] с задачей о распространении УКИ в оптически плотных средах аналогично работе [18]. Однако в данной статье рассматривается простейшая ситуация, отвечающая рис. 1а, в которой можно обойти отмеченную зависимость от пространственно-временных координат коэффициентов уравнения Максвелла–Блоха предлагаемым в разд. 2 способом.

В разд. 2 дана постановка задачи, выведены необходимые обобщенные уравнения Максвелла–Блоха и выписано их представление нулевой кривизны. В разд. 3 обобщенные уравнения Максвелла–Блоха представлены в гамильтоновой форме без переопределения пространственно-временных переменных. В разд. 4 определены фундаментальные скобки Пуассона. В разд. 5 исследована новая спектральная задача для простейших краевых условий, отвечающих термодинамически равновесному состоянию среды, и получено уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко. В разд. 6 обсуждены другие случаи резонансного распространения УКИ, для которых решение может быть получено на основе рассмотренной спектральной задачи. Рассматривается также, к какой задаче приводят неравновесные краевые условия. В разд. 7 приведены односолитон-

ное решение и результаты столкновения поляризованных солитонов новой спектральной задачи.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть несущая частота  $\omega = kc$  ультракоротких импульсов света напряженности электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(z, t) \exp[i(kz - \omega t)] + \text{с.с.}$$

близка (резонансна) к частоте  $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$  некоторого оптически разрешенного перехода между энергетическими уровнями  $|E_a, j_a, m_a\rangle$  и  $|E_b, j_b, m_b\rangle$  частиц среды, которые помимо энергии  $E_a$  и  $E_b$  характеризуются также величиной полного углового момента  $j_a$  и  $j_b$  и его проекцией  $m_a$  и  $m_b$  на ось квантования и вырождены по различной ориентации полного углового момента (квантовому числу  $m$ ). Эти частицы помещены внутрь конденсатора, электрическое поле которого (штарковское поле) таким образом сдвигает и расщепляет энергетические уровни вследствие эффекта Штарка, что нет ни одного оптически разрешенного перехода, который в присутствии штарковского поля был бы резонансен УКИ.

Считаем, что УКИ входят внутрь рассматриваемой среды в условиях действия штарковского поля и поэтому распространяются в нерезонансном режиме с фазовой скоростью  $c$ . В некоторый момент времени, который будем считать начальным,  $t = 0$ , электрическое поле в конденсаторе выключается и распространяющиеся УКИ оказываются резонансными частицам среды, которые с этого момента можно рассматривать как двухуровневые частицы с вырожденными уровнями  $|E_a, j_a, m_a\rangle$  и  $|E_b, j_b, m_b\rangle$  (рис. 2). Такое распространение УКИ описывается уравнениями Максвелла для огибающих УКИ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E} = i2\pi k N \sum_{m_a, m_b} Q_{m_a}^{a*} \mathbf{d}_{m_a m_b} Q_{m_b}^b, \quad (1)$$

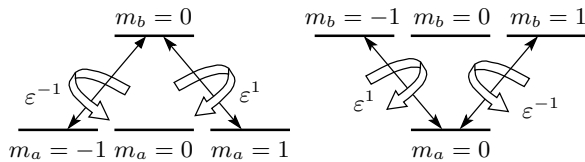


Рис. 2. Структура зеемановских подуровней резонансных уровней в случае двухуровневой системы и значений углового момента 0 и 1

и уравнением Шредингера для волновой функции

$$|\Psi\rangle = \sum_{m_a} Q_{m_a}^a |E_a, j_a, m_a\rangle \exp\left(-\frac{iE_a t}{\hbar}\right) + \sum_{m_b} Q_{m_b}^b |E_b, j_b, m_b\rangle \exp(-i\Delta t) \exp\left(-\frac{iE_b t}{\hbar}\right)$$

резонансных частиц, записанным для амплитуд вероятности:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial Q_{m_a}^a}{\partial t} &= - \sum_{q, m_b} d_{m_a m_b}^q \mathcal{E}^{q*} Q_{m_b}^b, \\ i\hbar \frac{\partial Q_{m_b}^b}{\partial t} + \hbar \Delta Q_{m_b}^b &= - \sum_{q, m_a} (-1)^q \mathcal{E}^q d_{m_b m_a}^{-q} Q_{m_a}^a. \end{aligned} \quad (2)$$

Динамическим эффектом Штарка пренебрегли. Сферические компоненты вектора  $\mathbf{A}$  определены обычным образом:

$$A^{\pm 1} = \mp 2^{-1/2} (A_x \pm iA_y), \quad A_0 = A_z.$$

Тогда матричные элементы сферических компонент оператора дипольного момента выражаются через приведенный дипольный момент  $d$  следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{m_b m_a}^q &= (-1)^{j_b - m_b} \begin{pmatrix} j_b & 1 & j_a \\ -m_b & q & m_a \end{pmatrix} d, \\ d_{m_a m_b}^q &= (-1)^{j_b - m_a} \begin{pmatrix} j_a & 1 & j_b \\ -m_a & q & m_b \end{pmatrix} d^*. \end{aligned}$$

В случае малых значений углового момента имеем

$$d_{m_b m_a}^q = (-1)^{1 - m_b} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -m_b & q & 0 \end{pmatrix} d = \frac{d}{\sqrt{3}} \delta_{q m_b},$$

$$d_{m_a m_b}^q = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & q & m_b \end{pmatrix} d^* = -\frac{d^*}{\sqrt{3}} \delta_{q - m_b},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathcal{E}^q = -i2\pi k N Q_{m_a}^{a*} \frac{d^*}{\sqrt{3}} Q_{m_b}^b,$$

$$i\hbar \frac{\partial Q_{m_b}^b}{\partial t} = \sum_{m_a} \frac{d^*}{\sqrt{3}} \mathcal{E}^{-q*} Q_{m_a}^a,$$

$$i\hbar \frac{\partial Q_{-q}^b}{\partial t} + \hbar \Delta Q_{-q}^b = \mathcal{E}^q \frac{d}{\sqrt{3}} Q_{m_a}^a$$

— для  $j_b = 1, j_a = 0$ ;

$$d_{m_b m_a}^q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & q & m_a \end{pmatrix} d = \frac{d}{\sqrt{3}} \delta_{q - m_a},$$

$$d_{m_a m_b}^q = (-1)^{m_a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -m_a & q & 0 \end{pmatrix} d^* = -\frac{d^*}{\sqrt{3}} \delta_{q m_a},$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}^q = -i2\pi k N Q_q^{a*} \frac{d^*}{\sqrt{3}} Q^b,$$

$$i\hbar \frac{\partial Q_q^a}{\partial t} = \frac{d^*}{\sqrt{3}} \mathcal{E}^{q*} Q^b, \quad i\hbar \frac{\partial Q^b}{\partial t} + \hbar \Delta Q^b = \sum_{q, m_a} \mathcal{E}^q \frac{d}{\sqrt{3}} Q_q^a$$

— для  $j_b = 0, j_a = 1$ . Эти уравнения можно записать в единой форме, если ввести вектор поляризации  $\mathcal{P}$  и матрицы населенностей  $\mathcal{N}$  и  $\mathcal{M}_{q'q}$  следующим образом:

$$\mathcal{P}^q = \frac{d^*}{\sqrt{3}} Q^{a*} Q_{-q}^b, \quad \mathcal{N} = Q^{a*} Q^a, \quad \mathcal{M}_{q'q} = Q_{-q'}^{b*} Q_{-q}^b$$

для  $j_b = 1, j_a = 0$ ;

$$\mathcal{P}^q = \frac{d^*}{\sqrt{3}} Q_q^{a*} Q^b, \quad \mathcal{N} = -Q^{b*} Q^b, \quad \mathcal{M}_{q'q} = -Q_{q'}^{a*} Q_q^{a*}$$

для  $j_b = 0, j_a = 1$ . Тогда уравнения (1) и (2) принимают единый вид (обобщенные уравнения Максвелла–Блоха):

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E} = -i2\pi k N \mathcal{P}, \quad (3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{P}^q}{\partial t} = -\hbar \Delta \mathcal{P}^q - \sum_{q'} \frac{|d|^2}{3} \mathcal{E}^{q'} \mathcal{M}_{q'q} + \mathcal{E}^q \frac{|d|^2}{3} \mathcal{N}, \quad (4)$$

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \sum_q (\mathcal{E}^{q*} \mathcal{P}^q - \mathcal{E}^q \mathcal{P}^{q*}), \quad (5)$$

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{M}_{q'q}}{\partial t} = \mathcal{P}^{q'*} \mathcal{E}^q - \mathcal{E}^{q'*} \mathcal{P}^q.$$

Для простоты мы пренебрегли неоднородным уширением атомного перехода.

Начальными условиями к уравнениям (3)–(5), отвечающими включению в момент времени  $t = 0$  штарковского импульса и началу резонансного распространения УКИ, служат уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, 0) &= \mathcal{E}_0(z), & \mathcal{P}(z, 0) &= \mathcal{P}_0(z), \\ \mathcal{N}(z, 0) &= \mathcal{N}_0(z), & \mathcal{M}_{qq'}(z, 0) &= \mathcal{M}_{0qq'}(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Мы будем рассматривать следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &\rightarrow 0, & \mathcal{P}(z, t) &\rightarrow 0, & \mathcal{N}(z, t) &\rightarrow \mathcal{N}^0, \\ \mathcal{M}_{qq'}(z, t) &\rightarrow \mathcal{M}_{qq'}^0 \end{aligned} \quad (7)$$

при  $z \rightarrow \pm\infty$  или  $t \rightarrow \infty$ .

Считаем, что при нерезонансном распространении состояние атомов среды, которые в поле штарковского импульса окажутся резонансными, не менялось. Для пренебрежения отраженной волной при

выключении штарковского поля полагаем выполненным условие газовой среды

$$\frac{LN\omega|d_{ba}|}{c} \ll 1, \quad (8)$$

где  $L$  — пространственная протяженность вдоль оси  $z$  УКИ, а  $N$  — плотность двухуровневых атомов с частотой перехода  $\omega_{ba}$ .

Запишем обобщенные уравнения Максвелла–Блоха (3)–(5) в безразмерном виде:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial l} \right) \boldsymbol{\varepsilon} = -i\mathbf{p}, \quad (9)$$

$$i \frac{\partial}{\partial l} p^q = -\delta p^q - \sum_{q'} \varepsilon^{q'} \mathcal{M}_{q'q} + \varepsilon^q \mathcal{N}, \quad (10)$$

$$i \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial l} = \sum_q (\varepsilon^{q*} p^q - \varepsilon^q p^{q*}), \quad (11)$$

$$i \frac{\partial \mathcal{M}_{q'q}}{\partial l} = p^{q'*} \varepsilon^q - \varepsilon^{q'*} p^q,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = t_0 \frac{d}{\sqrt{3}} \boldsymbol{\mathcal{E}} \hbar^{-1}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{P}}{d}, \quad t_0^2 = \frac{3\hbar}{2\pi k N |d|^2 c},$$

$$\delta = (\omega - \omega_{ba}) t_0, \quad \zeta = \frac{z}{ct_0}, \quad l = \frac{t}{t_0}.$$

Имея в виду пример  $j_b = 0, j_a = 1$  (для определенности) вспомним, что атомная матрица плотности и матрица, описывающая взаимодействие с электромагнитным полем в резонансном приближении, пропорциональны матрицам

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= - \begin{pmatrix} \mathcal{N} & p^{-1} & p^1 \\ p^{-1*} & \mathcal{M}_{-1-1} & \mathcal{M}_{-11} \\ p^{1*} & \mathcal{M}_{1-1} & \mathcal{M}_{11} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{V} &= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^1 \\ \varepsilon^{-1*} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{1*} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Это позволяет записать уравнения (9)–(11) в виде

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial l} \right) \mathcal{V} &= \frac{1}{2} [\mathcal{R}, J_3], \\ i \frac{\partial}{\partial l} \mathcal{R} &= [\mathcal{R}, \mathcal{V}] + \frac{\delta}{2} [\mathcal{R}, J_3], \end{aligned} \quad (13)$$

где введена диагональная матрица  $J_3 = \text{diag}(1, -1, -1)$ .

Уравнения (9)–(11) можно также переписать в виде, аналогичном исходному (1) и (2):

$$\left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial l} \right) \varepsilon^q = -i Q_q Q^*, \quad (14)$$

$$i \frac{\partial Q_q}{\partial l} + \delta Q_q = -\varepsilon^q Q, \quad i \frac{\partial Q}{\partial l} = -\varepsilon^{q*} Q_q, \quad (15)$$

где связь с переменными уравнений (9)–(11) устанавливают соотношения

$$p^q = Q_q Q_q^*, \quad \mathcal{N} = -Q Q^*, \quad \mathcal{M}_{q'q} = -Q_q Q_{q'}^*.$$

Напомним, что индекс  $q = \pm 1$  и для вектора амплитуды напряженности электрического поля  $\varepsilon$ , и для вектора амплитуды поляризации  $\mathbf{p}$  нумерует сферические компоненты. Иногда удобно использовать индекс  $j = 0, 1, -1$ , полагая, что

$$Q_j \Big|_{j=0} = Q, \quad Q_j \Big|_{j=\pm 1} = Q_{\pm}.$$

Тогда

$$R_{jj'} = (-1)^{j+j'} Q_j^* Q_{j'},$$

причем

$$\sum_j Q_j Q_j^* = \text{const.}$$

Уравнения (13) можно легко записать в виде условия совместности решений вспомогательных систем линейных уравнений:

$$\partial_l q = Lq, \quad (16a)$$

$$(\partial_\zeta + \partial_l)q = \hat{A}q, \quad (16b)$$

где

$$\hat{L} = L^{(0)} + \lambda L^{(1)}, \quad \hat{A} = \lambda^{-1} A^{(-1)}. \quad (17)$$

Условие совместности (13) дает уравнение

$$(\partial_\zeta + \partial_l)\hat{L} = \partial_l \hat{A} + [\hat{A}, \hat{L}]$$

или

$$(\partial_\zeta + \partial_l) \left( L^{(0)} + \lambda L^{(1)} \right) = \partial_l \lambda^{-1} A^{(-1)} + \left[ \lambda^{-1} A^{(-1)}, \left( L^{(0)} + \lambda L^{(1)} \right) \right],$$

которое в предположении (17) распадается на уравнения

$$(\partial_\zeta + \partial_l)L^{(0)} = \left[ A^{(-1)}, L^{(1)} \right],$$

$$(\partial_\zeta + \partial_l)L^{(1)} = 0, \quad 0 = \partial_l A^{(-1)} + \left[ A^{(-1)}, L^{(0)} \right].$$

Видно, что для совпадения этих уравнений с уравнениями (13) достаточно положить

$$\hat{L} = i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} \right) J_3 + i\mathcal{V}, \quad \hat{A} = -i(2\lambda)^{-1} \mathcal{R}. \quad (18)$$

Уравнения (16) перепишем в виде

$$\partial_l q = \hat{L}q, \quad (19a)$$

$$\partial_\zeta q = \hat{A}'q, \quad \hat{A}' = \hat{A} - \hat{L}. \quad (19b)$$

Еще раз сформулируем начальные условия. В начальный момент времени  $l = 0$  задаются распределения поля и амплитуд вероятностей (или атомной матрицы плотности) в пространстве:

$$\varepsilon(\zeta, 0) = \varepsilon_0(\zeta), \quad Q_j(\zeta, 0) = Q_{j0}(\zeta),$$

и затем изучается их динамика со временем. Предельным случаем такой формулировки является задание пространственного распределения амплитуд вероятности (или матрицы плотности) атомов в отсутствие поля и рассмотрение возникновения поля. Это так называемая задача о сверхфлюоресценции, которая в обычной формулировке описана в работе [10].

### 3. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА – БЛОХА

Представим уравнения (14) и (15) в гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial \varepsilon^q}{\partial l} = \{ \varepsilon^q(\zeta), H \}, \quad \frac{\partial Q_j}{\partial l} = \{ Q_j(\zeta), H \}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^{q*}}{\partial l} = \{ \varepsilon^{q*}(\zeta), H \}, \quad \frac{\partial Q_j^*}{\partial l} = \{ Q_j^*(\zeta), H \},$$

где  $\{, \}$  и  $H$  — обобщенные скобки Пуассона (скобки Дирака) и функция Гамильтона. Скобки Пуассона удовлетворяют свойству антисимметричности:

$$\{ A, B \} = -\{ B, A \},$$

тождеству Якоби:

$$\{ A, \{ B, C \} \} + \{ B, \{ C, A \} \} + \{ C, \{ A, B \} \} = 0,$$

и являются дифференцированием по каждому из аргументов:

$$\{ AB, C \} = A\{ B, C \} + \{ A, C \}B.$$

Естественно искать функцию Гамильтона в виде

$$H = \int d\zeta \left( i \varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \delta \sum_{q=\pm 1} Q_q Q_q^* - \varepsilon^* \cdot \mathbf{p} - \varepsilon \cdot \mathbf{p}^* \right) \quad (21)$$

и потребовать выполнения простых соотношений (для одного и того же момента времени):

$$\begin{aligned} \{ \varepsilon^q(\zeta), \varepsilon^{q'}(\zeta') \} &= i \delta_{qq'} \delta(\zeta - \zeta'), \\ \{ Q(\zeta), Q^*(\zeta') \} &= -i \delta(\zeta - \zeta'), \\ \{ Q_q(\zeta), Q_{q'}^*(\zeta') \} &= -i \delta_{qq'} \delta(\zeta - \zeta'). \end{aligned} \quad (22)$$

Остальные скобки Пуассона равны нулю. Нетрудно непосредственным вычислением убедиться, что уравнения (20) с учетом (21) и (22) тождественны уравнениям (14) и (15). Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^q}{\partial l} &= \{\varepsilon^q(\zeta), H\} = \left\{ \varepsilon^q(\zeta), \right. \\ &\left. \int d\zeta \left( i\varepsilon^* \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \delta Q_q Q_q^* - \varepsilon^* \cdot \mathbf{p} - \varepsilon \cdot \mathbf{p}^* \right) \right\} = \\ &= \left\{ \varepsilon^q(\zeta), \int d\zeta \left( i\varepsilon^{q'*} \frac{\partial \varepsilon^{q'}}{\partial \zeta} - \varepsilon^{q'*} p^{q'} \right) \right\} = \\ &= -\frac{\partial \varepsilon^q}{\partial \zeta} - ip^q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial l} &= \{Q(\zeta), H\} = \left\{ Q(\zeta), \right. \\ &\left. \int d\zeta \left( i\varepsilon^* \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} - \delta Q_q Q_q^* - \varepsilon^* \cdot \mathbf{p} - \varepsilon \cdot \mathbf{p}^* \right) \right\} = \\ &= \left\{ Q(\zeta), \int d\zeta (-\varepsilon^{q'*} Q_q Q_q^* - \varepsilon^q p^{q*}) \right\} = i\varepsilon^{q*} Q_q, \dots \end{aligned}$$

#### 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА

Скобки Пуассона  $\{A'_{ij}(\zeta, \lambda), A'_{km}(\zeta', \lambda')\}$  между элементами матрицы  $A'$  с разными  $\lambda$  и  $\zeta$ , определяющими уравнение (19б), играют фундаментальную роль [19]. Чтобы их записать и вычислить, удобно пользоваться тензорными обозначениями. Поскольку для произвольных квадратных матриц одного порядка  $A$  и  $B$  по определению  $(A \otimes B)_{km}^{ij} = A_{ij} B_{km}$ , для скобок Пуассона будем использовать выражение  $\{A \otimes, B\}_{km}^{ij} = \{A_{ij}, B_{km}\}$ . Имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \{A'(\zeta, \lambda) \otimes, A'(\zeta'', \lambda'')\} &= \\ &= -(2\lambda)^{-1} (2\lambda'')^{-1} \{ \mathcal{R}(\zeta) \otimes, \mathcal{R}(\zeta'') \} - \\ &\quad - \{ \mathcal{V}(\zeta, \lambda) \otimes, \mathcal{V}(\zeta'', \lambda'') \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{R}(\zeta) \otimes, \mathcal{R}(\zeta'') \} &= \\ &= [\Pi, I \otimes \mathcal{R}] i\delta(\zeta - \zeta'') = [\mathcal{R} \otimes I, \Pi] i\delta(\zeta - \zeta''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \hat{A}(\zeta, \lambda) \otimes, \hat{A}(\zeta'', \lambda'') \} &= \\ &= -(2\lambda)^{-1} (2\lambda'')^{-1} [\Pi, I \otimes \mathcal{R}] i\delta(\zeta - \zeta'') = \\ &= -(2\lambda)^{-1} (2\lambda'')^{-1} [\mathcal{R} \otimes I, \Pi] i\delta(\zeta - \zeta''), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \hat{A}(\zeta, \lambda) \otimes, \hat{A}(\zeta'', \lambda'') \} &= \\ &= \frac{1}{2(\lambda - \lambda'')} [\Pi, (\hat{A}(\zeta, \lambda) \otimes I + I \otimes \hat{A}(\zeta, \lambda''))] \delta(\zeta - \zeta''). \end{aligned}$$

Нетрудно окончательно получить

$$\begin{aligned} \{A'(\zeta, \lambda) \otimes, A'(\zeta', \lambda')\} &= \frac{1}{2(\lambda - \lambda')} \times \\ &\times [\Pi, (A'(\zeta, \lambda) \otimes I + I \otimes A'(\zeta, \lambda'))] \delta(\zeta - \zeta'). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь квадратные скобки обозначают коммутатор и через  $\Pi$  обозначена матрица перестановки со следующими свойствами:

$$\Pi^2 = I, \quad \Pi(A \otimes B)\Pi = B \otimes A.$$

Таким образом, классическая  $r$ -матрица  $r(\lambda) = \Pi/2\lambda$ , определяющая скобки Пуассона элементов матриц перехода (см. ниже (25) и [18]), для спектральной задачи (19б) совпадает с  $r$ -матрицей традиционной спектральной задачи (19а) теории самоиндуцированной прозрачности, обобщенной на случай учета поляризации электромагнитной волны и вырождения резонансных уровней. Это, по-видимому, означает, что гамильтоновы структуры уравнений Максвелла–Блоха в полуконусных переменных и исходных переменных являются одинаковыми с чисто алгебраической точки зрения, по крайней мере, для простейшей ситуации, рассмотренной в следующем разделе. Это вполне аналогично случаю уравнения синус-Гордона, записанного в исходных и конусных переменных [19].

#### 5. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим уравнение (19б) с измененным оператором  $A'$  (к матрице  $A'$  добавлена постоянная матрица, пропорциональная единичной):

$$\begin{aligned} \partial_\zeta q &= \hat{A}' q, \quad \hat{A}' = -i(2\lambda)^{-1} \hat{\mathcal{R}}' - i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} \right) J_3 - i\mathcal{V}, \\ \hat{\mathcal{R}}'_{jj'} &= (-1)^{j+j'} Q_j^* Q_{j'} + N \delta_{jj'}. \end{aligned} \quad (24)$$

В зависимости от краевых условий выбираем  $N$  таким образом, чтобы в случае  $\mathcal{M}_{qq'}^0 \sim \delta_{qq'}$  асимптотики матрицы  $\hat{A}'$  имели вид

$$U(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \hat{A}'(\zeta, \lambda) = -i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) J_3. \quad (25)$$

При этом для  $j_b = 1, j_a = 0$  и  $\mathcal{M}_{11}^0 = \mathcal{M}_{-1-1}^0 = N_b/3, \mathcal{M}^0 = N_a$ :

$$n_0 = N_a - \frac{N_b}{3}, \quad N = \frac{N_a}{2} + \frac{N_b}{6},$$

для  $j_b = 0$ ,  $j_a = 1$  и  $\mathcal{M}_{11}^0 = \mathcal{M}_{-1-1}^0 = -N_a/3$ ,  $\mathcal{N}^0 = -N_b$ :

$$n_0 = \frac{N_a}{3} - N_b, \quad N = -\frac{N_a}{6} - \frac{N_b}{2}.$$

Введем матрицу перехода на интервале  $(\zeta_2, \zeta_1)$ :

$$T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = \overleftarrow{\exp} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \hat{A}' d\zeta \quad (26)$$

как решение уравнения

$$\partial_{\zeta_2} T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = \hat{A}' T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) \quad (27)$$

с начальными условиями  $T_{\zeta}^{\zeta}(\lambda) = I$ . Имеем очевидные свойства:

$$\left(T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda)\right)^{-1} = T_{\zeta_2}^{\zeta_1}(\lambda), \quad T_{\zeta_2}^{\zeta_3}(\lambda) T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = T_{\zeta_1}^{\zeta_3}(\lambda),$$

$$\det T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = 1, \quad \partial_{\zeta_2} T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = \hat{A}'(\zeta_2) T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda),$$

$$\partial_{\zeta_1} T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) = -T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) \hat{A}'(\zeta_1).$$

Для быстроубывающих функций  $\varepsilon^q$  и  $p^q$  и для асимптотик  $\mathcal{M}_{qq'}^0 \sim \delta_{qq'}$  при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  введем матрицы  $e(\zeta, \lambda)$  как решение уравнения

$$\partial_{\zeta} e(\zeta, \lambda) = U(\lambda) e(\zeta, \lambda)$$

с начальным условием  $e(0, \lambda) = I$ :

$$e(\zeta, \lambda) = \exp \left[ -i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) J_3 \zeta \right],$$

и матрицы Йоста (для действительных  $\lambda$ )

$$T_{\pm}(\zeta, \lambda) = \lim_{\zeta_1 \rightarrow \pm\infty} T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) e(\zeta_1, \lambda)$$

с очевидными асимптотиками:

$$T_{\pm}(\zeta, \lambda) = e(\zeta, \lambda) + o(1) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \pm\infty.$$

Матрицы Йоста удовлетворяют уравнению (27) и допускают треугольные представления:

$$\begin{aligned} T_+(\zeta, \lambda) &= e(\zeta, \lambda) + \\ &+ \int_{\zeta}^{\infty} \left( \Gamma_{1+}(\zeta, \zeta') + \frac{1}{\lambda} \Gamma_{2+}(\zeta, \zeta') \right) e(\zeta', \lambda) d\zeta', \\ T_-(\zeta, \lambda) &= e(\zeta, \lambda) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\zeta} \left( \Gamma_{1-}(\zeta, \zeta') + \frac{1}{\lambda} \Gamma_{2-}(\zeta, \zeta') \right) e(\zeta', \lambda) d\zeta', \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} e(\zeta, \lambda) &= \exp \left( -i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \sigma_3 \zeta \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp \left[ -i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \zeta \right] & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \zeta \right] \begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ \exp \left[ i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \zeta \right] & & \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_3 \Gamma_{1+}(\zeta, \zeta) - \Gamma_{1+}(\zeta, \zeta) J_3 &= i J_3 \hat{\mathcal{V}}, \\ \Gamma_{2+}(\zeta, \zeta) J_3 - J_3 \Gamma_{2+}(\zeta, \zeta) &= \\ = -i J_3 \frac{2R' + n_0 J_3}{4} + J_3 \frac{2R' + n_0 J_3}{n_0} J_3 \Gamma_{2+}(\zeta, \zeta). \end{aligned} \quad (29)$$

Справедливость треугольных представлений (28) можно доказать путем сведения уравнений для ядер треугольных представлений к задаче типа задачи Гурса.

Из треугольных представлений следуют свойства аналитичности. Если обозначить через  $T_{\pm}^{(1)}(\zeta, \lambda)$ ,  $T_{\pm}^{(2)}(\zeta, \lambda)$  и  $T_{\pm}^{(3)}(\zeta, \lambda)$  первый, второй и третий столбцы матриц Йоста, то при  $n_0 > 0$  в верхнюю полуплос-

кость комплексной переменной  $\lambda$  аналитически продолжаемы  $T_+^{(2)}(\zeta, \lambda)$ ,  $T_+^{(3)}(\zeta, \lambda)$  и  $T_-^{(1)}(\zeta, \lambda)$ , тогда как  $T_+^{(1)}(\zeta, \lambda)$ ,  $T_-^{(2)}(\zeta, \lambda)$  и  $T_-^{(3)}(\zeta, \lambda)$  аналитически продолжаемы в нижнюю полуплоскость  $\lambda$ .

Введем матрицу монодромии

$$T(\lambda) = \lim_{\substack{\zeta_1 \rightarrow -\infty \\ \zeta_2 \rightarrow \infty}} e(-\zeta_2, \lambda) T_{\zeta_1}^{\zeta_2}(\lambda) e(\zeta_1, \lambda), \quad (30)$$

которая связывает матрицы Йоста:

$$T_-(\zeta, \lambda) = T_+(\zeta, \lambda) T(\lambda),$$



$$T_{-}^{(1)}(\zeta, \lambda)_{11} = T_{+}^{(1)}(\zeta, \lambda)T_{11}(\lambda) + T_{+}^{(2)}(\zeta, \lambda)T_{21}(\lambda) + T_{+}^{(3)}(\zeta, \lambda)T_{31}(\lambda). \quad (31)$$

Здесь вместо индексов  $j = 0, 1, -1$  использованы обычные индексы 1, 2, 3.

Нули функции  $T_{11}(\lambda)$  в верхней полуплоскости  $\lambda$  определяют ограниченные решения спектральной задачи. Обозначим эти нули как  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . Тогда

$$T_{-}^{(1)}(\zeta, \lambda_s) = \gamma_s^{(2)}T_{+}^{(2)}(\zeta, \lambda_s) + \gamma_s^{(3)}T_{+}^{(3)}(\zeta, \lambda_s).$$

Перепишем формулу (31) в виде

$$\frac{1}{T_{11}(\lambda)}T_{-}^{(1)}(\zeta, \lambda) = T_{+}^{(1)}(\zeta, \lambda) + T_{+}^{(2)}(\zeta, \lambda)\frac{T_{21}(\lambda)}{T_{11}(\lambda)} + T_{+}^{(3)}(\zeta, \lambda)\frac{T_{31}(\lambda)}{T_{11}(\lambda)}.$$

Поскольку левая часть равенства аналитически про-

должаема в верхнюю полуплоскость  $\lambda$ , можно применить преобразование вида

$$\frac{1}{2\pi} \int \exp \left[ i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \eta \right] d\lambda,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\lambda} \exp \left[ i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \eta \right] d\lambda.$$

Тогда с учетом условий полноты

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \exp \left[ i \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) x \right] = 2\pi\delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \exp \left[ i \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) x \right] = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \exp \left[ i \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) x \right] = 2\pi\delta(x)$$

получаем

$$-\Gamma_{1+}^{(1)}(\zeta, \eta) = \sum_{s=2,3} F_{0,s}(\zeta + \eta)g^{(s)} + \sum_{s=2,3} \int_{\zeta}^{\infty} \left( \Gamma_{1+}^{(s)}(\zeta, \zeta')F_{0,s}(\zeta' + \eta) + \Gamma_{2+}^{(s)}(\zeta, \zeta')F_{1,s}(\zeta' + \eta) \right) d\zeta', \quad (32)$$

$$-\Gamma_{2+}^{(1)}(\zeta, \eta) = \sum_{s=2,3} F_{1,s}(\zeta + \eta)g^{(s)} + \sum_{s=2,3} \int_{\zeta}^{\infty} \left( \Gamma_{1+}^{(s)}(\zeta, \zeta')F_{1,s}(\zeta' + \eta) + \Gamma_{2+}^{(s)}(\zeta, \zeta')F_{2,s}(\zeta' + \eta) \right) d\zeta',$$

где

$$F_{0,s}(Y) = - \sum_j i \frac{T_{s1}(\lambda_j)}{T'_{11}(\lambda_j)} \exp \left[ iY \left( \lambda_j + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda_j} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{s1}(\lambda)}{T_{11}(\lambda)} \exp \left[ iY \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \right] d\lambda,$$

$$F_{1,s}(Y) = - \sum_j i \frac{T_{s1}(\lambda_j)}{\lambda_j T'_{11}(\lambda_j)} \exp \left[ iY \left( \lambda_j + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda_j} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{s1}(\lambda)}{\lambda T_{11}(\lambda)} \exp \left[ iY \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \right] d\lambda, \quad (33)$$

$$F_{2,s}(Y) = - \sum_j i \frac{T_{s1}(\lambda_j)}{\lambda_j^2 T'_{11}(\lambda_j)} \exp \left[ iY \left( \lambda_j + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda_j} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{s1}(\lambda)}{\lambda^2 T_{11}(\lambda)} \exp \left[ iY \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) \right] d\lambda,$$

$$g^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{1+,1}^{(2)} = -\Gamma_{1+,2}^{(1)*}, \quad \Gamma_{1+,1}^{(3)} = -\Gamma_{1+,3}^{(1)*}, \quad \Gamma_{2+,1}^{(2)} = -\Gamma_{1+,2}^{(1)*}, \\ \Gamma_{2+,1}^{(3)} = -\Gamma_{1+,3}^{(1)*}, \quad s = 2, 3.$$

В заключение раздела выпишем уравнения, которым удовлетворяют данные рассеяния в ходе временной эволюции:

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\lambda) = i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} \right) [J_3, T(\lambda)]. \quad (34)$$

**6. ОБОБЩЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ**

Уравнения Гельфанда – Левитана – Марченко (32), (33) допускают естественное обобщение на случай спектральной задачи вида (24) общей размерности  $(K + 1) \times (K + 1)$ , когда асимптотики матрицы  $\hat{A}'$  имеют вид

$$U(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \hat{A}'(\zeta, \lambda) = -i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} - \frac{n_0}{4\lambda} \right) J_3, \quad (35)$$

где

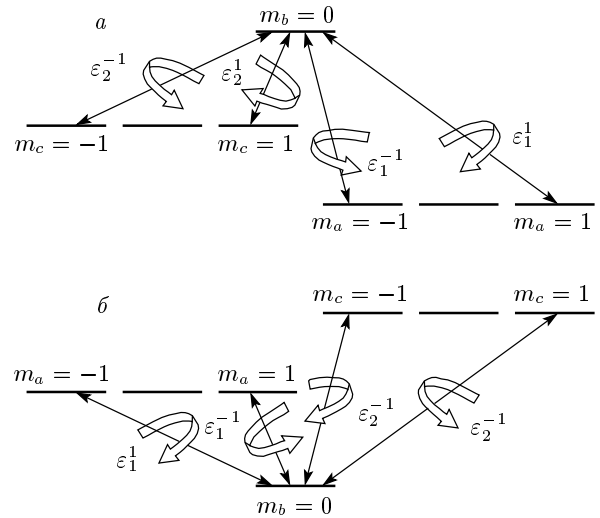
$$J_3 = \text{diag} \left( 1, \underbrace{-1, \dots, -1}_K \right).$$

Тогда суммирование по  $s$  в уравнении (32) происходит от 2 до  $K + 1$ ,  $\Gamma_{1+,1}^{(1)*} = -\Gamma_{1+,s}^{(1)*}$ ,  $\Gamma_{2+,1}^{(s)*} = -\Gamma_{1+,s}^{(1)*}$ ,  $s = 2, 3, \dots, K + 1$  и  $g_i^{(s)} = \delta_{is}$ . При  $K = 4$  такая спектральная задача отвечает распространению двухчастотного поляризованного импульса — симултона — в среде трехуровневых частиц  $V$ - или  $\Lambda$ -конфигурации с угловым моментом общего уровня  $b$ , равным 0, и моментами уровней на смежных оптически разрешенных переходах  $a$  и  $c$ , равными 1 (см. рис. 3). Дополнительно предполагается, что отстройки от точного резонанса  $\delta$  для атомных переходов  $b \leftrightarrow a$  и  $b \leftrightarrow c$ , как и силы осцилляторов этих переходов, равны. При этом основные матрицы (18) представления нулевой кривизны определяются матрицами [4, 20]

$$\mathcal{R} = - \begin{pmatrix} \mathcal{N} & p_1^{-1} & p_1^1 & p_2^{-1} & p_2^1 \\ p_1^{-1*} & \mathcal{M}_{-1-1} & \mathcal{M}_{-11} & \mathcal{T}_{-1-1} & \mathcal{T}_{-11} \\ p_1^{1*} & \mathcal{M}_{1-1} & \mathcal{M}_{11} & \mathcal{T}_{1-1} & \mathcal{T}_{11} \\ p_2^{-1*} & \mathcal{T}_{-1-1}^* & \mathcal{T}_{1-1}^* & \mathcal{K}_{-1-1} & \mathcal{K}_{-11} \\ p_2^{1*} & \mathcal{T}_{-11}^* & \mathcal{T}_{11}^* & \mathcal{K}_{1-1} & \mathcal{K}_{11} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1^{-1} & \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^{-1} & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^{-1*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1^{1*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2^{-1*} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2^{1*} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Здесь векторы амплитуды  $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^{-1}, \varepsilon_i^1)$  электрического поля соответствуют волнам, резонансным переходам  $b \leftrightarrow a$  ( $i = 1$ ) и  $b \leftrightarrow c$  ( $i = 2$ ), векторы  $\mathbf{p}_i = (p_i^{-1}, p_i^1)$  отвечают амплитудам поляризации указанных переходов,  $\mathcal{N}$  — населенность уровня  $b$ , матрицы  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{K}$  описывают распределения по зеемановским подуровням уровней  $a$  и  $c$ , матрица  $\mathcal{T}$



**Рис. 3.** Структура зеемановских подуровней резонансных уровней в случае двойного резонанса с трехуровневой системой и значений углового момента 0 и 1

дает представление о когерентности двухфотонного перехода  $a \leftrightarrow c$ .

Рассмотренная в предыдущем разделе спектральная задача отвечает крайевым условиям, соотношению  $\mathcal{M}_{qq'}^0 \sim \delta_{qq'}$  и быстроубывающим функциям  $\varepsilon^q$  и  $p^q$  при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$ . Эти условия описывают равновесное состояние среды до и после прохождения УКИ. Если предположить, что до и после прохождения импульса среда стремится к неравновесному стационарному состоянию, например, при  $\zeta \rightarrow \pm\infty$  матрица  $\mathcal{M}_{qq'}$  имеет вид

$$\mathcal{M}_{qq'}^0 = \begin{pmatrix} m & ir \\ -ir & m \end{pmatrix}, \quad (37)$$

то вместо (25) будем иметь

$$U(\lambda) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \hat{A}'(\zeta, \lambda) = -\frac{i}{2\lambda} \begin{pmatrix} \mathcal{N}^0 & 0 & 0 \\ 0 & m^0 & ir \\ 0 & -ir & m \end{pmatrix} - i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь положительная постоянная  $m$  характеризует заселенность зеемановских подуровней, между которыми наведена когерентность, описываемая параметром  $r$ :  $|r| \leq m$ . Такая неравновесная ситуация может быть смоделирована дополнительными стационарными электромагнитными полями, которые,

однако, не являются резонансными по отношению к рассматриваемому переходу. При помощи канонического преобразования

$$q = S^{-1}\tilde{q}, \quad \tilde{A}(\zeta, \lambda) = S\hat{A}'(\zeta, \lambda)S^{-1},$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix},$$

получаем уравнение спектральной задачи с асимптотиками:

$$\partial_\zeta \tilde{q} = \tilde{A}\tilde{q}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\lambda) &= \lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \tilde{A}(\zeta, \lambda) = \\ &= -\frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} N^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m - 2r & 0 \\ 0 & 0 & 2m + 2r \end{pmatrix} - \\ &- i \left( \lambda + \frac{\delta}{2} \right) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

Эта задача требует отдельного изучения и не сводится к рассмотренной. Аналогичная спектральная задача возникает, когда нет когерентности между зеемановскими подуровнями, но стационарное заселение зеемановских подуровней различно.

**7. ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ. СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ СОЛИТОНОВ**

Вернемся к рассмотрению случая, в котором стационарное состояние среды отвечает равновесному. Чтобы найти односолитонное решение, возьмем в функциях  $F$  только одно слагаемое из дискретного спектра, т.е. положим  $\lambda_1 = i\sigma + \xi$ ,  $T_{21}(\lambda) = T_{31}(\lambda) = 0$ . После несложных стандартных вычислений находим

$$\varepsilon(\zeta, l) = \frac{2\sigma\mathbf{1}}{\text{ch} \left\{ 2\sigma \left( l - \zeta \left( 1 + \frac{1}{4\sigma^2} \right) - l_0 \right) \right\}}, \tag{40}$$

где  $\mathbf{1}$  — единичный вектор поляризации,  $l_0$  — константа и для простоты положено  $n_0 = 1$ . Таким образом, и в новой спектральной задаче (24) односолитонное решение имеет стандартный секансный вид. Другими характеристиками солитона являются его скорость, вектор поляризации  $\mathbf{1}$  и положение («фаза»  $l_0$ ). Скорость солитона (40)

$$\frac{4|\sigma|^2}{1 + 4|\sigma|^2}$$

определяется величиной  $\sigma$ , и поэтому в случае распространения в среде двух солитонов возможна ситуация, когда один из них догонит другой и произойдет взаимодействие солитонов. Подчеркнем, что отличительной особенностью (40) является произвольная поляризация, описываемая единичным вектором  $\mathbf{1}$ . Это является следствием начальных и краевых условий, отвечающих термодинамически равновесному состоянию, и при отклонении от них произвольно поляризованного солитона нет.

Пусть в среде распространяются два импульса секансной формы и в начальный момент времени «включения» резонансного взаимодействия амплитуда импульсов имела вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(\zeta, l = 0) &= \frac{2\sigma_1\mathbf{1}_1}{\text{ch} \left( \zeta \left( 2\sigma_1 + \frac{1}{2\sigma_1} \right) + l_{01} \right)} + \\ &+ \frac{2\sigma_2\mathbf{1}_2}{\text{ch} \left( \zeta \left( 2\sigma_2 + \frac{1}{2\sigma_2} \right) + l_{02} \right)}. \end{aligned} \tag{41}$$

Если  $\sigma_2 > \sigma_1$  и  $l_{02} > l_{01}$ , то в ходе распространения в резонансной среде второй солитон обгонит первый, в результате чего их векторы поляризации изменятся и общая амплитуда электрического поля будет равна

$$\begin{aligned} \varepsilon(\zeta, l) &= \frac{2\sigma_1\mathbf{I}'_1}{\text{ch} \left[ 2\sigma_1 \left( l - \zeta \left( 1 + \frac{1}{4\sigma_1^2} \right) - l'_{01} \right) \right]} + \\ &+ \frac{2\sigma_2\mathbf{I}'_2}{\text{ch} \left[ 2\sigma_2 \left( l - \zeta \left( 1 + \frac{1}{4\sigma_2^2} \right) - l'_{02} \right) \right]}, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{I}'_1 &= f \left[ -\mathbf{1}_1 + \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \mathbf{1}_2 (\mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_2^*) \right], \\ \mathbf{I}'_2 &= f \left[ -\mathbf{1}_2 + \frac{2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \mathbf{1}_1 (\mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{1}_1^*) \right], \end{aligned} \tag{43}$$

$$f = \left[ 1 + \frac{4\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2} |\mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_2^*|^2 \right]^{-1/2}, \quad \mathbf{1}'_1 \cdot \mathbf{1}'_2^* = \mathbf{1}_1 \cdot \mathbf{1}_2^*,$$

$$l'_{01} = l_{01} + \frac{1}{2\sigma_1} \ln \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} f,$$

$$l'_{02} = l_{02} - \frac{1}{2\sigma_2} \ln \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} f.$$

Согласно формуле (43), если до столкновения солитоны имели линейную поляризацию, то после

столкновения их поляризация будет также линейной. При этом векторы поляризации первого и второго солитона поворачиваются на разные углы:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}'_1 \cdot \mathbf{I}_1 &= \cos \theta_1 = -(1 + B_{12} \cos^2 \theta) \times \\ &\quad \times (1 - B_{12} B_{21} \cos^2 \theta)^{-1/2}, \\ \mathbf{I}'_2 \cdot \mathbf{I}_2 &= \cos \theta_2 = -(1 + B_{21} \cos^2 \theta) \times \\ &\quad \times (1 - B_{12} B_{21} \cos^2 \theta)^{-1/2}, \\ B_{12} &= \frac{2\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}, \quad B_{21} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}, \\ \cos \theta &= \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2. \end{aligned} \tag{44}$$

Представляется неудивительным, что эти законы совпадают с законами преобразования векторов поляризации солитонов спектральной задачи Манаква [8].

Заметим, что при обобщении задачи на случай двойного резонанса в системе, изображенной на рис. 3а, также возникает произвольно поляризованный солитон — двухчастотный импульс, характеризуемый единым вектором поляризации. Его называют симултоном [4]. Их столкновения сопровождаются взаимно зависимыми поворотом векторов поляризации и перераспределением энергии между частотными составляющими симултона, которые совпадают с найденным в работе [20].

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время модно рассматривать различные явления, включая оптические, в так называемых искусственных средах, к которым относятся фотонные кристаллы и «левые» среды, квантовые точки и проволоки, атомы в магнитооптических ловушках и оптических решетках. К искусственным средам можно отнести и среды, необходимые оптические свойства которых формируются при помощи разного рода электромагнитных и акустических полей. Представляется, что прогресс технологий создания искусственных сред позволит на практике реализовать ситуацию, когда можно эффективно управлять резонансными условиями и осуществлять, таким образом, контроль процессов нелинейного распространения оптических импульсов. Техника штарковских импульсов здесь выступает лишь как наиболее доступная из традиционных арсеналов экспериментаторов. Однако уже простая модификация резонансных условий, как показано в настоящей работе, приводит к формулировке новых математических задач.

Особенность обобщенных уравнений Максвелла–Блоха состоит в том, что они допускают представление нулевой кривизны и могут быть решены при помощи метода обратной задачи рассеяния, основу которого составляет спектральная задача для подходящего линейного оператора [4]. Традиционная и предложенная в данной работе формулировки задачи о распространении УКИ для своего решения методом обратной задачи рассеяния используют спектральные задачи для разных операторов. Эти спектральные задачи не являются калибровочно эквивалентными, так что для спектральной задачи с новым оператором в статье выведены необходимые уравнения типа Гельфанда–Левитана–Марченко (32), (33). Полученные уравнения совместно с уравнением эволюции (34) позволяют полностью описать резонансное распространение УКИ с заданным в начальный момент времени пространственным профилем импульса. При этом двухуровневые атомы среды характеризуются энергетическими уровнями, выродженными по различным ориентациям полного углового момента. Для простоты в статье найдено только солитонное решение (40) и его преобразование при взаимодействии солитонов — их «столкновении». Как и большинство солитонных решений, импульс самоиндуцированной прозрачности в новой постановке задачи имеет стандартный секансный вид. Это довольно естественно в случае исходного равновесного состояния среды — импульс самоиндуцированной прозрачности распространяется в такой среде в условиях, когда на переднем фронте происходит поглощение импульса и возбуждение среды, среда индуцировано излучает в задний фронт импульса, а сам импульс не меняет своей формы. Начальные условия входа импульса в среду отражаются лишь на амплитудном значении импульса самоиндуцированной прозрачности через «теорему площадей» и не зависят от того, задан временной профиль входного импульса или пространственный профиль. К тому же, оператор спектральной задачи определяет класс операторов изоспектральной деформации [21], и этим, по-видимому, обуславливается обсуждаемая связь солитонных решений калибровочно неэквивалентных спектральных задач.

Только в случае нестандартного приготовления состояния среды во всем объеме или только в узкой области, охватывающей начальный момент «включения» резонансного взаимодействия с проходящим УКИ, можно ожидать каких-либо существенных отличий в решениях между разными постановками задач. Но неравновесное состояние среды во всем объеме требует решения спектральной задачи (38) с

асимптотиками (39), отличными от (25), что выходит за рамки данной работы.

Развитый подход служит также основой для канонического квантования уравнений Максвелла–Блоха без переопределения пространственно-временных переменных. Найденные в статье фундаментальные скобки Пуассона (23) определяют коммутационные соотношения для элементов квантовой матрицы монодромии  $T(\lambda)$  и дальнейшее квантование осуществляется в рамках канонического подхода [22].

Автор выражает благодарность И. Р. Габитову, А. И. Маймистову, Э. А. Маныкину и А. В. Рыбину за полезные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
2. M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, and A. C. Newell, J. Math. Phys. **15**, 1852 (1974).
3. R. K. Bullough, P. M. Jack, P. W. Kitchenside, and R. Saunders, Phys. Scripta **20**, 364 (1979).
4. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).
5. T. Iizuka, M. Wadati, and T. Yajima, J. Phys. Soc. Jpn. **60**, 2862 (1991).
6. R. G. Brewer and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. **27**, 631 (1971); R. L. Shoemaker and R. G. Brewer, Phys. Rev. A **6**, 2001 (1972).
7. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, ЖЭТФ **87**, 1594 (1984).
8. С. В. Манаков, ЖЭТФ **65**, 505 (1973).
9. А. М. Башаров, О. В. Кашурникова, Опт. и спектр. **99**, 820 (2005).
10. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ТМФ **63**, 11 (1985).
11. В. И. Рупасов, ЖЭТФ **83**, 1711 (1982).
12. А. И. Алексеев, А. М. Башаров, ЖЭТФ **77**, 537 (1979); A. I. Alekseev and A. M. Basharov, J. Phys. B **15**, 4269 (1982).
13. A. Schenzle, N. C. Wong, and R. G. Brewer, Phys. Rev. A **21**, 887 (1980).
14. W. L. Chan and K. S. Li, J. Phys. A **27**, 883 (1994).
15. Tong-ke Ning, Deng-yuan Chen, and D.-j. Da-jun Zhang, Physica A **339**, 248 (2004).
16. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **120**, 749 (2001).
17. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).
18. С. М. Захаров, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ **82**, 397 (1982).
19. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
20. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **68**, 1112 (1990).
21. И. М. Гельфанд, Л. А. Дикий, Функциональный анализ **11**, вып. 2, 11 (1977).
22. Е. К. Склянин, Записки научных семинаров ЛОМИ **95**, 55 (1980).