

ЭКСИТОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ. СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В РЕЖИМЕ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ХОЛЛА. СПИНОВЫЙ БИЭКСИТОН

С. М. Дикман, В. М. Жилин, Д. В. Кулаковский*

*Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 25 декабря 2004 г.

Метод экситонного представления для описания коллективных возбуждений в режиме квантового эффекта Холла позволяет упростить расчет спектров и получить новые результаты в пределе сильного магнитного поля, когда $E_C \ll \hbar\omega_c$ (ω_c — циклотронная частота, E_C — характерная кулоновская энергия). При целочисленном нечетном факторе заполнения ν больше единичного (т.е. при $\nu = 3, 5, 7, \dots$) рассчитаны спектры одноциклотронных магнитоплазменных возбуждений. При единичном заполнении доказано существование спинового биэкситона — связанного состояния двух спиновых волн, — соответствующего возбуждению с изменением спина $\delta S = \delta S_z = -2$. В термодинамическом пределе $N_\phi \rightarrow \infty$ (N_ϕ — степень вырождения системы) получено точное уравнение, определяющее основное состояние биэкситона. Обменная энергия этого состояния меньше, чем у одной спиновой волны (с $\delta S = \delta S_z = -1$) при том же значении двумерного волнового вектора q . В пределе $q \rightarrow \infty$, соответствующем распаду биэкситона на пару квазичастиц, одна из которых «трион» со спином $-3/2$, энергия оказывается меньше, чем энергия $(e^2/\epsilon l_B)\sqrt{\pi/2}$, необходимая в строго двумерном случае для возбуждения электрон-дырочной пары (l_B — магнитная длина, ϵ — диэлектрическая постоянная), хотя и больше, чем другой «классический» результат $(e^2/2\epsilon l_B)\sqrt{\pi/2}$, который отвечает возбуждению пары скирмион-антискирмион ($|\delta S| = |\delta S_z| \gg 1$). В результате решения точного уравнения найдены энергия связи триона и активационная щель для квазичастиц, возбуждение которых отвечает изменению полного спина на величину $\delta S = \delta S_z = -3$. Рассчитана энергия спинового биэкситона при значениях волнового вектора $ql_B \gg 1$.

PACS: 73.43.Cd, 73.43.Lp, 71.35.Pq

1. ВВЕДЕНИЕ

Кулоновское взаимодействие является одним из основных факторов, влияющих на поведение электронной системы в режиме квантового эффекта Холла [1]. В тех случаях, когда двумерный электронный газ является диэлектриком, оно определяет или существенным образом перенормирует активационную щель при возбуждении диссипативного тока. Типичным примером является дробный квантовый эффект Холла, при котором щель для заполнений $\nu = 1/3, 1/5, \dots$ целиком связана с взаимодействием [1, 2]. В то же время и при целочисленном заполнении уже существующие в отсутствие корреляций зеэмановская щель ($\nu = 1, 3, 5, \dots$, полный спин

равен числу электронов на верхнем уровне Ландау: $S = N_\phi/2$, где $N_\phi = L^2/2\pi l_B^2$, $L \times L$ — площадь системы) и циклотронная щель ($\nu = 2, 4, \dots$, система неполяризована: $S = 0$) реально оказываются из-за взаимодействия намного больше.

Во всех подобных квантово-холловских диэлектриках низколежащие возбуждения представляют собой беззарядовые коллективные возбуждения типа волн электронной плотности [3], экситонов [2, 4–10] или экситонных комплексов [6, 10–14], причем появление в системе фермиевских квазичастиц [15] есть результат предельного перехода к бесконечно большим значениям волнового вектора в спектрах этих возбуждений [4–7]. Рождение носителей тока (а следовательно, и вопрос об активационной щели) оказывается, таким обра-

*E-mail: dickmann@issp.ac.ru

зом, тесно связанным с вопросом о нижней части спектра двумерного электронного газа.

Заметим, что эта задача до сих пор остается актуальной. Аналитическое решение даже при целочисленном заполнении и даже в первом приближении по малому параметру $r_C = E_C/\hbar\omega_c$ ($E_C = \alpha e^2/\epsilon l_B$, α — формфактор, определяемый конечной толщиной электронного газа, причем всегда $\alpha < 1$) оказывается возможным только для трех простейших возбуждений. А именно, циклотронной магнитоплазменной волны, соответствующей переходу электрона на один уровень Ландау вверх без изменения спина [5–7] ($\delta n = 1$, спиновое состояние не меняется: $\delta S = \delta S_z = 0$), спиновой волны при нечетном заполнении [4–7] (в этом случае $\delta S = \delta S_z = -1$ и $\delta n = 0$) и спин-циклотронного экситона при четном заполнении ($\delta S = \delta S_z = -1$ и $\delta n = 1$) [7]. В остальных случаях кулоновские поправки к экситонным спектрам вычислялись не точно, а лишь в рамках модели редуцированного кулоновского взаимодействия, которая представляет собой разновидность приближения среднего поля, используемого применительно к экситонным возбуждениям [7–9].

В предлагаемой работе мы используем аппарат экситонного представления для расчета кулоновских поправок как в простых и уже изученных случаях, так и в более сложных. Мы рассмотрим двумерный электронный газ с целочисленным заполнением ν и ограничимся первым порядком приближения по параметру r_C . Такая система является диэлектриком, а при нечетном ν квантово-холловским ферромагнетиком. (В последнем случае в основном состоянии все спины электронов на верхнем заполненном наполовину уровне Ландау выстроены вдоль магнитного поля в силу отрицательности фактора Ланде в арсенид-галлиевых структурах.) Простейшими возбуждениями в системе являются экситоны, образованные электроном, перемещенным на незаполненный или заполненный наполовину уровень Ландау с переворотом спина или без, и эффективной дыркой, появляющейся при этом на прежнем уровне.

Оператор рождения экситона определяется следующей формулой [10–13, 16–21]:

$$\hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_p \exp(-iq_x p l_B) b_{p+qy l_B/2}^\dagger a_{p-ky l_B/2}, \quad (1.1)$$

$$\hat{Q}_{ab\mathbf{q}} \equiv \hat{Q}_{ba-\mathbf{q}}^\dagger,$$

где a_p (a_p^\dagger) и b_p (b_p^\dagger) — операторы уничтожения (рождения) электрона в состояниях, отвечающих ка-

либровке Ландау, индексы « a » и « b » обозначают одноэлектронные состояния с различными номерами n уровней Ландау и спиновыми подуровнями σ ,

$$a = (n_a, \sigma_a), \quad (1.2)$$

p — внутреннее квантовое число уровня Ландау. Соответствующая индексу « a » (или « b ») одноэлектронная энергия $E_{a(b)}$ равна

$$E_a = \hbar\omega_c(n_a + 1/2) - |g\mu_B B|\sigma_a, \quad (1.3)$$

g — фактор Ланде. Кроме обозначения (1.2) мы будем использовать для подуровней и другое: индексы $a = n$ и $a = \bar{n}$ соответствуют $n = (n, \uparrow)$ и $\bar{n} = (n, \downarrow)$.

Базис одноэкситонных состояний определяется с помощью операторов (1.1):

$$|ab; \mathbf{q}\rangle = \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle, \quad (1.4)$$

где основное состояние $|0\rangle$ задано в нулевом приближении. При целочисленном заполнении это означает, что состояния (1.4) существуют, если в основном состоянии подуровень a полностью заполнен, тогда как b совершенно пуст. Тогда состояния (1.4) взаимно ортогональны и нормированы:

$$\langle \mathbf{q}_2; b_2 a_2 | a_1 b_1; \mathbf{q}_1 \rangle = \delta_{a_1, a_2} \delta_{b_1, b_2} \delta_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2},$$

здесь $\delta_{a,b} \equiv \delta_{n_a, n_b} \delta_{\sigma_a, \sigma_b}$. Для оценки энергий $\epsilon(\mathbf{q})$ одноэкситонных возбуждений можно рассмотреть секулярное уравнение

$$\det \left\{ \langle 0 | \hat{Q}_{a'b'\mathbf{q}} [\hat{H}, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger] | 0 \rangle - \epsilon(\mathbf{q}) \delta_{a,a'} \delta_{b,b'} \right\} = 0. \quad (1.5)$$

Вообще говоря, этот подход не дает правильного результата, поскольку система уравнений (1.5) соответствует приближению среднего поля для экситонов, о котором мы упоминали выше. Но для некоторых важных случаев низколежащих возбуждений (т. е. для конкретных наборов пар ab) полный гамильтониан, включающий кулоновское взаимодействие, может быть в первом приближении по r_C диагонализирован в базисе одноэкситонных состояний (1.4). В этом случае коммутатор в уравнениях (1.5) определяется только одноэлектронными членами гамильтониана и упомянутым выше редуцированным взаимодействием, т. е. той частью \hat{H}_{int}^{ED} кулоновского гамильтониана \hat{H}_{int} , которая диагонализуется в базисе всевозможных одноэкситонных состояний для произвольных пар ab . В уравнениях (1.5) при этом можно подставить

$\hat{H}_{int} \rightarrow \hat{H}_{int}^{ED}$. Как было сказано, для некоторых простейших возбуждений это уравнение дает точный результат для спектра $\epsilon = \epsilon_{ab}(\mathbf{q})$ в первом приближении по r_C . Заметим, что при замене \hat{H}_{int} на \hat{H}_{int}^{ED} сохраняющейся величиной является не только зеемановская энергия $g\mu_B B \hat{S}_z$ (поскольку всегда $[\hat{S}_z, \hat{H}_{int}] = [\hat{S}_z, \hat{H}_{int}^{ED}] \equiv 0$), но и одноэлектронная орбитальная энергия, отвечающая оператору

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\omega_c}{2} \sum_{a,p} a^\dagger a_p.$$

Иными словами, в этой модели игнорируется эффект «смешивания уровней Ландау», так как $[\hat{H}_1, \hat{H}_{int}^{ED}] \equiv 0$ (хотя, вообще говоря, $[\hat{H}_1, \hat{H}_{int}] \neq 0$). Тот факт, что для некоторых наборов ab ответ получается точным в первом порядке по r_C , означает, что смешивание уровней Ландау для этих возбуждений приводит только к поправкам второго или более высокого порядка по взаимодействию. Изменения орбитальной и зеемановской энергий определяются значениями $\hbar\omega_c \delta n$ и $g\mu_B B \delta S_z$, где квантовые числа δn и δS_z равны

$$\begin{aligned} \delta n &= n_b - n_a = n'_b - n'_a = \dots, \\ \delta S_z &= \sigma_b - \sigma_a = \sigma'_b - \sigma'_a = \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Условия (1.6) должны выполняться для всех пар $a'b'$, учитываемых в уравнениях (1.5). Другие пары $a'b'$ либо просто не войдут в это уравнение, либо отвечают случаю $n'_b - n'_a \neq \delta n$ и поэтому приводят к поправкам более высокого порядка по r_C . В результате всегда можно записать, что

$$\epsilon(\mathbf{q}) = \hbar\omega_c \delta n - |g\mu_B B| \delta S_z + E_{\delta n, -\delta S_z}(\mathbf{q}), \quad (1.7)$$

где $E_{\delta n, -\delta S_z}(\mathbf{q})$ — энергия, связанная с кулоновским взаимодействием.

2. ЭКСИТОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Далее будем использовать переменные размерности длины и волнового вектора в единицах соответственно l_B и $1/l_B$. Полный гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = g\mu_B B \hat{S}_z + \hat{H}_1 + \hat{H}_{int}, \quad (2.1)$$

где кулоновская часть может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \frac{1}{2N_\phi} \sum_{\substack{p,p',\mathbf{q} \\ a,b,c,d}} V_{bdca}(\mathbf{q}) \times \\ &\times \exp[iq_x(p-p')] b_{p-q_y}^\dagger d_{p'}^\dagger c_{p'-q_y} a_p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь операторы уничтожения a_p, b_p, c_p, d_p соответствуют своим бинарным индексам (1.2). Множители

$$\begin{aligned} V_{bdca}(\mathbf{q}) &= \\ &= \frac{e^2 V(q)}{2\pi\epsilon l_B} h_{n_a n_b}(-\mathbf{q}) h_{n_c n_d}(\mathbf{q}) \delta_{\sigma_a, \sigma_b} \delta_{\sigma_c, \sigma_d} \end{aligned} \quad (2.3)$$

выражаются через безразмерную фурье-компоненту $V(q)$ кулоновского потенциала (в идеально двумерном случае $V(q) = 2\pi/q$) и через «рабочие» функции экситонного представления (см., например, [6, 7, 9, 13, 17]):

$$\begin{aligned} h_{kn}(\mathbf{q}) &= \\ &= \sqrt{\frac{k!}{n!}} \exp\left(-\frac{q^2}{4}\right) (q_-)^{n-k} L_k^{n-k}\left(\frac{q^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $q_- = i(q_x - iq_y)/\sqrt{2}$, а L_n^j — обобщенные полиномы Лагерра. Заметим, что функции (2.4) встречаются также при описании взаимодействия экситона с внешним полем [12, 14, 16–18].

Прежде чем рассмотреть экситонное представление гамильтониана (2.2), мы выпишем коммутационные соотношения для операторов (1.1):

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_{cd\mathbf{q}_1}^\dagger, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}_2}^\dagger] &\equiv \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{i}{2}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)_z\right] \delta_{b,c} \hat{Q}_{ad\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2}^\dagger - \right. \\ &\left. - \exp\left[\frac{i}{2}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2)_z\right] \delta_{a,d} \hat{Q}_{cb\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2}^\dagger \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В иной формулировке и применительно лишь к одному уровню Ландау, когда a, b, c, d — это только $(0, \uparrow)$ или $(0, \downarrow)$, часть этих соотношений была приведена в работе [19] (см. также [12–14, 16–18]). Правила коммутации (2.5) составляют, таким образом, алгебру Ли. Если в состоянии $|0\rangle$ подуровень a заполнен, а b совершенно пуст, то $a_p^\dagger|0\rangle = b_p|0\rangle \equiv 0$. В терминах экситонных операторов эти равенства соответствуют следующим:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle = \delta_{0,\mathbf{q}}|0\rangle, \quad \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle = 0, \quad (2.6)$$

где мы ввели операторы «смещения» внутри подуровней:

$$\hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \hat{Q}_{aa\mathbf{q}}^\dagger, \quad \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \hat{Q}_{bb\mathbf{q}}^\dagger.$$

Теперь, используя определение (1.1) и коммутационные соотношения (2.5), выпишем гамильтониан (2.2) в экситонном представлении:

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, a, b, c, d} V_{dca}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{cd-\mathbf{q}}^\dagger - \sum_{\substack{\mathbf{q}, a, b \\ (n_a \leq n_b)}} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{a,b}\right) V_{baba}(\mathbf{q}) \hat{B}_0^\dagger. \quad (2.7)$$

Заметим, что одноэлектронная часть гамильтониана (2.1) в этом представлении имеет вид

$$g\mu_B B \hat{S}_z + \hat{H}_1 = \frac{1}{2} |g\mu_B B| \sum_n (\hat{N}_{\bar{n}} - \hat{N}_n) + \hbar\omega_c \sum_n \left(n + \frac{1}{2}\right) (\hat{N}_n + \hat{N}_{\bar{n}}), \quad (2.8)$$

где $\hat{N}_n = \sqrt{N_\phi} \hat{Q}_{nn0}^\dagger$ и $\hat{N}_{\bar{n}} = \sqrt{N_\phi} \hat{Q}_{\bar{n}\bar{n}0}^\dagger$.

Следующим шагом является выделение из выражения (2.7) экситонно-диагонализуемой части \hat{H}_{int}^{ED} . Этот оператор не должен по крайней мере менять одноэлектронную энергию (т. е. он должен коммутировать с гамильтонианом (2.8)), поэтому в (2.7) удержим только члены, для которых $n_a + n_c = n_b + n_d$. Часть из них составляют оператор, для которого состояния (1.4) являются собственными. Эта диагональная часть есть

$$\hat{H}_{ED}^{di} = \sum_a \hat{H}_a + \sum_{\substack{a, b \\ (a \neq b, n_a \leq n_b)}} \hat{H}_{ab}, \quad (2.9)$$

где

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} V_{aaaa}(\mathbf{q}) \left(N_\phi \hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{A}_{\mathbf{q}} - \hat{A}_0^\dagger\right), \quad (2.10)$$

$$\hat{H}_{ab} = \sum_{\mathbf{q}} \left[V_{abba}(\mathbf{q}) N_\phi \hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} + V_{baba}(\mathbf{q}) \left(\hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{ab\mathbf{q}} - \hat{B}_0^\dagger\right) \right]. \quad (2.11)$$

Чтобы найти вклад в энергию возбуждений, необходимо для избранной пары ab вычислить действие коммутатора $[\hat{H}_{ED}^{di}, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger]$ на основное состояние $|0\rangle$.

При этом не следует в \hat{H}_{ED}^{di} удерживать члены, которые в силу (2.5) заведомо коммутируют с $\hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger$. С помощью правил (2.5) и (2.6) также легко проверить, что коммутатор $[\hat{H}_b, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger]$ хотя и не равен нулю, но его действие на состояние $|0\rangle$ всегда нуль. В результате нетрудно показать, что всегда

$$\begin{aligned} & \left[\hat{H}_{ED}^{di}, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \right] |0\rangle \equiv \\ & \equiv \left[\hat{H}_a + \hat{H}_{ab} + \sum_{c \neq a, b} \left(\hat{H}_{ac} + \hat{H}_{bc} \right), \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \right] |0\rangle = \\ & = \mathcal{E}_{ab}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle. \quad (2.12) \end{aligned}$$

В то же время, если $\nu > 1$ и рассматриваются возбуждения с $\delta n = n_b - n_a > 0$, то в выражении для \hat{H}_{int}^{ED} существенна и недиагональная часть. Эта недиагональная часть, действуя на состояние (1.4), приводит к линейной комбинации других одноэкситонных состояний $|a'b'; \mathbf{q}\rangle$, но с тем же спином $\delta S_z = \sigma_b - \sigma_a$ и той же величиной δn . Итак,

$$\hat{H}_{ED} = \hat{H}_{ED}^{di} + \sum_{a, b} \hat{H}_{ab}^{off-di}. \quad (2.13)$$

В отличие от определения (2.9), суммирование в этой формуле выполняется только по таким параметрам ab , для которых в состоянии $|0\rangle$ подуровень a занят, а подуровень b пуст. Члены, составляющие сумму (2.13), таковы:

$$\hat{H}_{ab}^{off-di} = \sum_{\substack{c, d \neq a, b \\ n_a + n_d = n_b + n_c}} \sum_{\mathbf{q}} \left[V_{adcb}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{cd\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{ab\mathbf{q}} + V_{adbc}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{ca\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{db\mathbf{q}} \right]. \quad (2.14)$$

Нетрудно проверить, что

$$\left[\hat{H}_{ab}^{off-di}, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \right] |0\rangle = \sum_{a', b' \neq a, b} \mathcal{E}_{a'b'}^{(ab)}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{a'b'\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle. \quad (2.15)$$

Здесь суммирование проводится по таким параметрам $a'b'$, что для них $\delta n = n_b - n_a = n_{b'} - n_{a'} = \dots$, $\delta S_z = \sigma_b - \sigma_a = \sigma_{b'} - \sigma_{a'} = \dots$. Таким образом, уравнения (2.12) и (2.15) представляют собой систему из конечного числа уравнений, которые для заданного набора квантовых чисел δn , δS_z и \mathbf{q} определяют собственные состояния гамильтониана \hat{H}_{ED} и соответственно энергии этих состояний.

Остальные члены кулоновского гамильтониана, $\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int} - \hat{H}_{ED}$, с которыми не коммутирует оператор $\hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{H}'_{ab} = & \sum_{\substack{c, d \neq a, b \\ g \neq a}} \sum_{\mathbf{q}} V_{gacd}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{dg\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{ac\mathbf{q}} + \\ & + \sum_{\substack{c, d \neq a, b \\ g \neq b}} \sum_{\mathbf{q}} V_{cdbg}(\mathbf{q}) \hat{Q}_{gc\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{db\mathbf{q}} + \text{H.c.} \quad (2.16) \end{aligned}$$

Действуя на экситон (1.4), операторы (2.16), вообще говоря, генерируют «дополнительные» двухэкситонные состояния, не сводящиеся к одноэкситонным. Часть членов в суммах (2.16) тем не менее коммутирует с одноэлектронным гамильтонианом (2.8), т. е. приводит к двухэкситонным состояниям, соответствующим тем же квантовым числам δn , δS_z , и \mathbf{q} . Даже в рамках приближения первого порядка по

r_C эти члены должны быть учтены при расчете энергии возбуждений. Дополнительные двухэкситонные состояния возникают всегда, если $\delta n \geq 2$, или даже при $\delta n = 1$, если $\delta S_z = -1$.

Приведем конкретный пример. При единичном заполнении для спин-циклотронного возбуждения ($\delta n = -\delta S_z = 1$, т. е. $a = 0, b = \bar{1}$) члены

$$\hat{H}'_{0\bar{1}} = \sum_{\mathbf{q}} V_{1010}(q) \hat{Q}_{01\mathbf{q}}^\dagger \hat{Q}_{\bar{0}\bar{1}\mathbf{q}} + \text{H.c.} \quad (2.17)$$

должны учитываться наряду с $\hat{H}_{ED} = \hat{H}_a + \hat{H}_{ab}$ (заметим, что в этом случае вклады других операторов, входящих в уравнение (2.12), а также недиагональной части $\hat{H}_{ab}^{\text{off-di}}$ в (2.15) сводятся к нулю).

Экситонное представление оказывается удобным в том случае, когда двумерный электронный газ является диэлектриком, т. е. в отсутствие свободных электронов и дырок. Это представление означает переход от фермиевских операторов рождения, которые генерируют собственные состояния идеального газа, многократно вырожденные по параметру p , к экситонным операторам, которые, действуя на вакуумное состояние $|0\rangle$, образуют систему базисных состояний, диагонализующих гамильтониан

$$g\mu_B B \hat{S}_z + \hat{H}_1 + \hat{H}_{int}^{ED}.$$

Последний включает существенную часть кулоновского взаимодействия, поэтому для состояний нового базиса (1.7), классифицируемых естественным квантовым числом q , вырождение снято. В некоторых случаях отличим оператора \hat{H}_{int}^{ED} от \hat{H}_{int} можно пренебречь и получить правильные результаты для энергии возбуждений в первом порядке по r_C . В ряде других случаев можно рассматривать члены \hat{H}_{int} как возмущение [13] и в качестве базисных векторов использовать экситонные состояния.

Экситонное представление имеет еще ряд очевидных преимуществ. Во-первых, оно не зависит от специфики калибровки одноэлектронных волновых функций. В другой калибровке изменится определение оператора (1.1), но коммутационные соотношения (2.5) и представление полного гамильтониана в виде (2.7), (2.8) останутся прежними. Во-вторых, гамильтониан кулоновского взаимодействия из четырехоператорного выражения (2.2) превращается в двухоператорное (2.7). Наконец, экситонное представление дает явный вид собственных состояний многоэлектронной системы и позволяет легко (с помощью коммутационной алгебры (2.5)) рассчитывать матричные элементы переходов, определяющих согласно золотому правилу Ферми вероятность различных кинетических процессов в электронном

газе. Эти переходы могут быть связаны, например, с электрон-фононным, электрон-примесным и другими взаимодействиями (тогда взаимодействия ренормируются в экситон-фононное [12, 17, 18], экситон-примесное [14, 20], экситон-экситонное [16] и т. д.).

В частных случаях операторы (1.1) использовались в работах [10, 11] при изучении абстрактной двухкомпонентной фермиевской системы с симметричной моделью взаимодействия. Впоследствии оказалось, что реально эта модель соответствует «междолинным волнам» в двумерном полупроводнике при $\nu = 1$ в приближении сильного магнитного поля [19, 22] или спиновым волнам в квантово-холловском ферромагнетике [5–7, 12, 14, 16, 21]. В работах [10–12, 14] рассматривались также специфические многоэкситонные состояния, обусловленные присутствием в системе так называемого конденсата нулевых экситонов.

3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СПЕКТРОВ НИЗКОЛЕЖАЩИХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Итак, в первом порядке по r_C возбуждения характеризуются квантовыми числами $\delta n, \delta S_z$ и \mathbf{q} , а их энергия определяется формулой (1.7). Параметром системы является также заполнение ν , так что для классификации собственных состояний можно выбрать обозначение $|\nu; \delta n, -\delta S_z, \mathbf{q}\rangle$. При целочисленном заполнении в рамках экситонно-диагонализуемой части гамильтониана \hat{H}_{int}^{ED} решения находятся с помощью уравнений (2.12) и (2.15). Для расчета энергии $E_{\delta n, -\delta S_z}$ следует спроецировать эти уравнения на все возможные состояния $|a'b'; \mathbf{q}\rangle$, отвечающие избранным значениям δn и δS_z (1.6), и найти величины $\mathcal{E}_{a'b'}^{(ab)}(q)$ и $\mathcal{E}_{ab}(q)$. После этого задача сводится к решению секулярного уравнения

$$\det \left| (\mathcal{E}_{ab} - E_{\delta n, -\delta S_z}) \delta_{a,a'} \delta_{b,b'} + \mathcal{E}_{a'b'}^{(ab)} (1 - \delta_{a,a'} \delta_{b,b'}) \right| = 0 \quad (3.1)$$

(индексами элементов матрицы здесь являются пары ab и $a'b'$, в которых подуровни a и a' заняты, а b и b' свободны). Такая схема является рутинной, и на практике она гораздо проще, чем метод функций Грина, использованный в известной работе [7]. В действительности, для каждого конкретного вида состояний $|\nu; \delta n, -\delta S_z, \mathbf{q}\rangle$ легко отобразить конкретные операторы $\hat{H}_a, \hat{H}_b, \hat{H}_{ab}, \hat{H}_{ac}, \hat{H}_{bc}$ и $\hat{H}_{ab}^{\text{off-di}}$, вносящие вклад в коммутаторы уравнений (2.12) и (2.15).

Проблема, однако, состоит в том, что только для возбуждений

$$|\nu = 2m + 1; \delta n = 0, -\delta S_z = 1, \mathbf{q}\rangle, \quad |2m + 1; 1, 0, \mathbf{q}\rangle,$$

$$|2m; 1, 0, \mathbf{q}\rangle, \quad |2m; 1, 1, \mathbf{q}\rangle$$

(m здесь целое) такой метод, как и тот, что был использован в работе [7], дает правильный ответ. Уравнение (3.1) при этом имеет порядок не выше второго. Мы не станем приводить здесь результаты для состояний

$$|2m + 1; 0, 1, \mathbf{q}\rangle, \quad |1; 1, 0, \mathbf{q}\rangle,$$

$$|2m; 1, 0, \mathbf{q}\rangle, \quad |2m; 1, 1, \mathbf{q}\rangle,$$

они найдены в работах [5–7].

Тем не менее продемонстрируем расчет энергии состояния $|2m + 1; 1, 0, \mathbf{q}\rangle$ при $m \geq 1$, поскольку эта величина приведена в работе [7] неточно (см. также [23]) и, по-видимому, нигде до сих пор верное решение не было представлено. Базисными векторами возбуждения $|2m + 1; 1, 0, \mathbf{q}\rangle$ являются экситоны $|\overline{m-1} \overline{m}; \mathbf{q}\rangle$ и $|m m + 1; \mathbf{q}\rangle$. Детали преобразований уравнений (2.12) и (2.15) приведены в Приложении 1. Здесь заметим, что если $m < 2$ (т.е. при $\nu < 5$), то сумма по s операторов в левой части уравнения (2.12) не вносит какого-либо вклада в \mathcal{E}_{ab} , однако при всех $m \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\overline{m-1} \overline{m}}(q) &= E_m \equiv u_m(q) + v_m(q), \\ \mathcal{E}_{m m+1}(q) &= E_{m+1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} u_m(q) &= \\ &= \frac{1}{N_\phi} \sum_p V_{m-1 m m-1}(p) \{1 - \exp(i\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z\} = \\ &= \frac{e^2}{\epsilon l_B} \int_0^\infty \frac{p dp}{2\pi} V(p) \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right) L_{m-1}\left(\frac{p^2}{2}\right) \times \\ &\quad \times L_m\left(\frac{p^2}{2}\right) [1 - J_0(pq)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} v_m(q) &= V_{m-1 m m-1 m}(q) = \\ &= \frac{e^2 q^2 V(q)}{4\pi \epsilon l_B m} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \left[L_{m-1}^1\left(\frac{q^2}{2}\right)\right]^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

J_0 — функция Бесселя, а недиагональные матричные элементы, определяемые из (2.15), равны

$$\mathcal{E}_{m m+1}^{(\overline{m-1} \overline{m})} = \mathcal{E}_{m-1 \overline{m}}^{(m m+1)} = W_m(q),$$

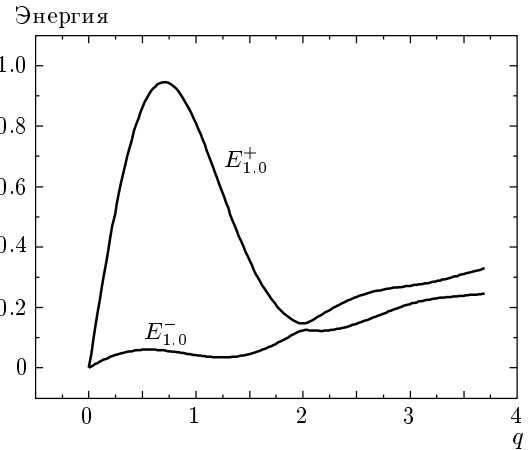


Рис. 1. Дисперсия магнитоплазменных мод $E_{1,0}^+(q)$ и $E_{1,0}^-(q)$ в зависимости от волнового вектора, отложенного в единицах $1/l_B$. Расчет по формуле (3.6) для заполнения $\nu = 3$ ($m = 1$). Энергия по вертикальной оси отложена в единицах $e^2/\epsilon l_B$

где

$$\begin{aligned} W_m(q) &= V_{m m m-1 m+1}(q) = \\ &= \frac{e^2 q^2 V(q)}{4\pi \epsilon l_B \sqrt{(m+1)m}} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right) \times \\ &\quad \times L_{m-1}^1\left(\frac{q^2}{2}\right) L_m^1\left(\frac{q^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

(эти недиагональные члены найдены и в работах [7, 23]), поэтому энергия $\epsilon = \hbar\omega_c + E_{1,0}^\pm(q)$ обеих мод определяется следующими кулоновскими поправками:

$$\begin{aligned} E_{1,0}^\pm(q) &= \frac{E_m(q) + E_{m+1}(q)}{2} \pm \\ &\pm \sqrt{\left[\frac{E_m(q) - E_{m+1}(q)}{2}\right]^2 + [W_m(q)]^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

На рис. 1 представлен результат расчета. Обратим внимание на то, что кулоновская энергия обеих мод положительна при всех q . Точно таким же свойством обладают и поправки, рассчитанные в первом порядке по взаимодействию для других возбуждений [5–7]. Заметим что, напротив, поправка второго порядка по r_C чаще всего бывает отрицательной. В частности, при $q = 0$ именно она определяет отрицательный обменный сдвиг для спин-циклотронной моды $|2m; 1, 1, \mathbf{q} = 0\rangle$ [24].

Более сложные возбуждения не могут быть рассчитаны в экситонном базисе (1.7). Для решения

в этом случае необходимо расширить базис и выйти за рамки редуцированной модели, использующей гамильтониан \hat{H}_{int}^{ED} . Например, в случае возбуждения типа $|\nu = 1; 2, 0, \mathbf{q}\rangle$ экситон $|0 2; \mathbf{q}\rangle$ имеет в силу наличия в выражении (2.16) членов $\hat{H}'_{02} = \sum_{\mathbf{p}} V_{1120}(\mathbf{p}) \hat{Q}_{01\mathbf{p}}^\dagger \hat{Q}_{12\mathbf{p}}$ квантовую флуктуацию в двухэкситонное состояние $\hat{Q}_{01\mathbf{q}-\mathbf{p}}^\dagger \hat{Q}_{01\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$, ортогональное $|0 2; \mathbf{q}\rangle$. Необходимо тогда искать ответ в расширенном базисе, т. е. представить состояние в виде

$$|1; 2, 0, \mathbf{q}\rangle = \hat{Q}_{02\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{s}} \varphi_{20}(\mathbf{s}) \hat{Q}_{01\mathbf{q}/2-\mathbf{s}}^\dagger \hat{Q}_{01\mathbf{q}/2+\mathbf{s}}^\dagger |0\rangle, \quad (3.7)$$

после чего можно в первом порядке по r_C свести решение к конкретной математической задаче: подставить выражение (3.7) в уравнение Шредингера

$$\hat{H}_{int}|1; 2, 0, \mathbf{q}\rangle = E_{2,0}(q)|1; 2, 0, \mathbf{q}\rangle,$$

где

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_{01} + \hat{H}_{02} + \hat{H}'_{02} + \hat{H}'_{02},$$

и спроецировать это уравнение на $\hat{Q}_{02\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle$ и $\hat{Q}_{01\mathbf{q}-\mathbf{p}}^\dagger \hat{Q}_{01\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$. В результате возникнет система двух интегральных уравнений для функции φ_{20} , включающих в качестве параметра искомую величину $E_{2,0}(q)$.

Аналогичным образом спин-циклотронное возбуждение при $\nu = 1$ представляется в виде

$$|1; 1, 1, \mathbf{q}\rangle = \left[\hat{Q}_{01\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N_\phi}} \sum_{\mathbf{s}} \varphi_{11}(\mathbf{s}) \hat{Q}_{00\mathbf{q}/2-\mathbf{s}}^\dagger \hat{Q}_{01\mathbf{q}/2+\mathbf{s}}^\dagger |0\rangle \right] \quad (3.8)$$

(экситон $|0\bar{1}; \mathbf{q}\rangle$ из-за присутствия в гамильтониане членов (2.17) смешан с комбинацией одноциклотронного магнитоплазмона и спиновой волны). После этого задача для φ_{11} и $E_{1,1}(q)$ также сводится к двум интегральным уравнениям.

В настоящей работе не будем приводить довольно сложный численный расчет энергий состояний (3.7) и (3.8). Вместо этого рассмотрим наиболее простое двухэкситонное возбуждение $|\nu = 2m + 1; \delta n = 0, -\delta S_z = 2, \mathbf{q}\rangle$, которое не смешано с каким-либо одноэкситонным.

4. ДВУХЭКСИТОННЫЕ СОСТОЯНИЯ

Прежде всего остановимся на некоторых общих свойствах двухэкситонных состояний. Рассмотрим

только один тип таких возбуждений, а именно случай, когда индексы подуровней у обоих экситонных операторов одинаковы:

$$|ab; \mathbf{q}, \mathbf{s}\rangle = \frac{1}{2} \hat{Q}_{ab\mathbf{q}/2-\mathbf{s}}^\dagger \hat{Q}_{ab\mathbf{q}/2+\mathbf{s}}^\dagger |0\rangle \quad (4.1)$$

(разумеется, $|ab; \mathbf{q}, \mathbf{s}\rangle \equiv |ab; \mathbf{q}, -\mathbf{s}\rangle$). Это состояние ортогонально любому другому двухэкситонному состоянию $|a'b'; \mathbf{q}', \mathbf{s}'\rangle$, если только $(a, b) \neq (a', b')$ или $\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}$. В то же время ортогональность при $\mathbf{s} \neq \mathbf{s}'$ определяется специальным образом. Рассмотрим следующую комбинацию:

$$\sum_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}} |ab; \mathbf{q}, \mathbf{s}\rangle. \quad (4.2)$$

Фактически физический смысл имеет только проекция этого состояния на какое-либо другое. С помощью коммутационной алгебры (2.5) можно найти, что

$$\sum_{\mathbf{s}'} f_{\mathbf{s}'} \langle \mathbf{s}, \mathbf{q}; ba | ab; \mathbf{q}', \mathbf{s}' \rangle \equiv \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} f_{\mathbf{s}}^{(a)}. \quad (4.3)$$

Здесь мы определяем преобразование «антисимметризации» следующим образом:

$$f_{\mathbf{s}}^{(a)} = \frac{1}{2} \left(f_{\mathbf{s}} - \frac{1}{N_\phi} \sum_{\mathbf{s}'} f_{\mathbf{s}'} \exp [i(\mathbf{s} \times \mathbf{s}')_z] \right). \quad (4.4)$$

Двойное применение этого преобразования равносильно однократному, $\{f_{\mathbf{s}}^{(a)}\}^{(a)} = f_{\mathbf{s}}^{(a)}$, поэтому если в сумме (4.3) подставить $f_{\mathbf{s}} \rightarrow f_{\mathbf{s}} + g_{\mathbf{s}} - g_{\mathbf{s}}^{(a)}$ ($g_{\mathbf{s}}$ — произвольная функция), то это не скажется на результате. Функция $f_{\mathbf{s}}$, таким образом, оказывается неоднозначно определенной и только ее «антисимметричная» часть $f_{\mathbf{s}}^{(a)}$ дает вклад в расчеты. Анализ показывает, что такое свойство огибающей функции $f_{\mathbf{s}}$ в представлении (4.2) есть результат коммутационных правил для фермиевских операторов в определении (1.1), т. е. следствие перестановочной антисимметрии волновой функции электронного газа (см. [6]). Если $f_{\mathbf{s}} = \delta_{\mathbf{s}, \mathbf{s}_0}$, то с помощью (4.3) получаем условие ортогональности базисных состояний в виде

$$\langle \mathbf{s}, \mathbf{q}; ba | ab; \mathbf{q}_0, \mathbf{s}_0 \rangle = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}_0} \bar{\delta}_{\mathbf{s}, \mathbf{s}_0}^{(a)},$$

где $\bar{\delta}_{\mathbf{s}, \mathbf{s}_0} = (\delta_{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}} + \delta_{-\mathbf{s}_0, \mathbf{s}}) / 2$ и, соответственно,

$$\bar{\delta}_{\mathbf{s}, \mathbf{s}_0}^{(a)} = \frac{1}{4} \left[\delta_{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}} + \delta_{\mathbf{s}_0, -\mathbf{s}} - \frac{1}{N_\phi} (\exp [i(\mathbf{s} \times \mathbf{s}_0)_z] + \exp [i(\mathbf{s}_0 \times \mathbf{s})_z]) \right].$$

Нормируемость состояния (4.2) означает конечность суммы $\sum_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}} f_{\mathbf{s}}^{(a)}$. Если здесь перейти от суммирования к интегрированию по \mathbf{s} и соответственно переобозначить $f_{\mathbf{s}} = N_{\phi}^{-1/2} f(\mathbf{s})$, то нормируемость обусловлена конечностью интеграла,

$$\int d\mathbf{s} f^*(\mathbf{s}) f^{(a)}(\mathbf{s}) < \infty. \quad (4.5)$$

Предположим, что экситон $|ab; \mathbf{q}\rangle$ принадлежит одному из тех простейших возбуждений, для которых в первом порядке по r_C энергия $\epsilon(\mathbf{q})$ (1.7) вычисляется в рамках экситонно-диагонализуемого гамильтониана \hat{H}_{ED} . Тогда, подействовав полным гамильтонианом (см. формулы (2.1) и (2.7)) на состояние (4.1), найдем, что его энергия равна

$$\epsilon\left(\frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{s}\right) + \epsilon\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{s}\right) + O\left(\frac{E_C}{N_{\phi}}\right).$$

Следовательно, это состояние соответствует с точностью до E_C/N_{ϕ} двум невзаимодействующим экситонам. В частности, если $\nu = 2m + 1$ и при этом $a = m$, а $b = \bar{m}$, то двухэкситонное состояние (4.1) — это два невзаимодействующих спиновых экситона (две спиновые волны) с суммарной энергией $|g\mu_B B| + E_{0,1}(\mathbf{q}/2 - \mathbf{s}) + E_{0,1}(\mathbf{q}/2 + \mathbf{s})$. Здесь $E_{0,1}$ — обменная часть энергии, равная (см. [4–7])

$$\begin{aligned} E_{0,1}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{N_{\phi}} \sum_{\mathbf{p}} V_{m\bar{m}m\bar{m}}(p) \{1 - \exp i(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z\} = \\ &= \frac{e^2}{\epsilon l_B} \int_0^{\infty} \frac{p dp}{2\pi} V(p) \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right) \left[L_m\left(\frac{p^2}{2}\right)\right]^2 \times \\ &\quad \times [1 - J_0(pq)], \quad (4.6) \end{aligned}$$

в чем легко убедиться с помощью выражения (2.12).

Рассчитаем теперь энергию двухэкситонного состояния (4.2) в том случае, когда $a = m$, $b = \bar{m}$. В первом порядке по взаимодействию можно опять (как и для одного спинового экситона) ограничиться редуцированным гамильтонианом и уравнение Шредингера сводится к

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{s}} \varphi_{02, \mathbf{s}}(\mathbf{s}) [\hat{H}_m + \hat{H}_{\bar{m}} + \hat{H}_{m\bar{m}}, \\ \hat{Q}_{m\bar{m} \mathbf{q}/2 - \mathbf{s}}^{\dagger} \hat{Q}_{m\bar{m} \mathbf{q}/2 + \mathbf{s}}^{\dagger}] |0\rangle = \\ = E \sum_{\mathbf{s}} \varphi_{02, \mathbf{s}}(\mathbf{s}) |m\bar{m}; \mathbf{q}, \mathbf{s}\rangle \end{aligned}$$

(мы обозначили $f(\mathbf{s}) = \varphi_{02, \mathbf{s}}$). Спроецируем теперь это уравнение на состояние (4.1) с $ab = m\bar{m}$. Используя выражения (2.10) и (2.11), правила коммутации

(2.5) и тождества (2.6), (4.3) и (4.4), придем к интегральному уравнению для функции φ_{02} :

$$E\varphi_{02}^{(a)}(\mathbf{s}) = \{\mathcal{L}_{\mathbf{q}}[\varphi_{02}(\mathbf{s})]\}^{(a)},$$

где оператор $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}[\varphi_{02}(\mathbf{s})]$ есть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{q}}[\varphi_{02}(\mathbf{s})] &= \left[E_{0,1}\left(\left|\frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{s}\right|\right) + E_{0,1}\left(\left|\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{s}\right|\right)\right] \times \\ &\quad \times \varphi_{02}(\mathbf{s}) + \frac{1}{\pi} \int d\mathbf{p} \varphi_{02}(\mathbf{p}) V_{nnnn}(|\mathbf{p} + \mathbf{s}|) \times \\ &\quad \times \left\{ \cos[(\mathbf{p} \times \mathbf{s})_z] - \cos\left[\frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z}{2} + \frac{(\mathbf{s} \times \mathbf{q})_z}{2}\right] \right\}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Здесь $E_{0,1}$ определяется формулой (4.6). В нашем случае особенность оператора (4.7) в том, что

$$\{\mathcal{L}_{\mathbf{q}}[f]\}^{(a)} = \mathcal{L}_{\mathbf{q}}[f^{(a)}],$$

поэтому уравнения для $\varphi_{02}^{(a)}$ и φ_{02} (до антисимметризации) выглядят одинаково. Формально мы могли бы просто решать уравнение для φ_{02} ,

$$E\varphi_{02}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}_{\mathbf{q}}[\varphi_{02}(\mathbf{s})], \quad (4.8)$$

не накладывая никаких условий на симметрию решения.

Для единичного заполнения уравнение (4.8) было выведено ранее другим способом в работе [25]. Оно описывает возбуждение, соответствующее $\delta n = 0$ и $\delta S = \delta S_z = -2$. Совершенно очевидно, что среди решений этого уравнения есть сингулярные нормируемые функции (см. условие (4.5)), такие что

$$|\varphi_{02}(\mathbf{s})|^2 = C [\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \delta(\mathbf{s} + \mathbf{s}_0)]. \quad (4.9)$$

Это функции сплошного спектра, которые соответствуют паре свободных спиновых волн. Межэкситонное взаимодействие при этом пренебрежимо мало. Действительно, подстановка выражения (4.9) в (4.8) обращает интегральный член в нуль в термодинамическом пределе $N_{\phi} \rightarrow \infty$, так что энергия оказывается равной

$$E = E_{0,1}(|\mathbf{q}/2 + \mathbf{s}_0|) + E_{0,1}(|\mathbf{q}/2 - \mathbf{s}_0|).$$

Заметим, что нижний край такой спин-экситонной зоны определяется при заданном значении суммарного импульса \mathbf{q} пары следующим образом:

$$E_m(q) = \min_{\mathbf{s}} [E_{0,1}(|\mathbf{q}/2 + \mathbf{s}|) + E_{0,1}(|\mathbf{q}/2 - \mathbf{s}|)], \quad (4.10)$$

причем очевидно, что всегда $E_m(q) < E_{0,1}(q)$, т. е., если пренебречь зеемановской энергией, то образование такой пары оказывается термодинамически более выгодным, чем образование одной спиновой волны с той же величиной q . Верхний край зоны не зависит от q и достигается при $s_0 \rightarrow \infty$.

Принципиальным является следующий вопрос: существует ли помимо решений (4.9) также и регулярное квадратично-интегрируемое решение уравнения (4.8), для которого интегральный член в (4.7) не равен нулю? Такое решение означало бы существование спинового биэкситона. По крайней мере для единичного заполнения (при $m = 0$) мы можем ответить на этот вопрос утвердительно: спиновый биэкситон — связанное состояние двух спиновых волн — должен существовать при всех конечных значениях q за исключением точки $q = 0$. Этот вывод следует из исследования уравнения (4.8) в пределе $q \rightarrow \infty$.

5. РАСПАД БИЭКСИТОНА. ЗАРЯЖЕННЫЙ СПИНОВЫЙ ЭКСИТОН (ТРИОН)

Предположим, что искомое возбуждение — спиновый биэкситон — существует. Как и в случае магнитного экситона [4, 5, 7], переход $q \rightarrow \infty$ означает его распад. Действительно, при больших значениях q по крайней мере один экситон в двухэкситонном состоянии (4.1), (4.2) имеет большое среднее расстояние между составляющими его электроном и эффективной дыркой (для экситона эта величина равна $\mathbf{R} = \mathbf{q} \times \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z — единичный вектор вдоль оси z , см. [4, 7]). В то же время, если носитель функции $f(\mathbf{s})$ расположен в области $|\mathbf{s}| \lesssim 1$, очевидно, что состояние (4.2) при $q \rightarrow \infty$ перейдет в четырехчастичное состояние, отвечающее двум невзаимодействующим электронам и двум дыркам. Энергия такого состояния является не минимальной, а максимально возможной энергией четырехчастичного возбуждения. Для определения состояния с минимальной энергией (т. е. основного состояния при распаде $q \rightarrow \infty$) следует искать функцию $f(\mathbf{s})$, имеющую, очевидно, носитель в области $|\mathbf{s} - \mathbf{q}/2| \lesssim 1$. При этом один из экситонов распадается на электрон и дырку, а второй образует связанное состояние с одной из распадных квазичастиц, т. е. образует кооперативное фермиевское возбуждение — заряженный спиновый экситон (трион). Эти состояния в режиме квантового эффекта Холла хорошо известны (см. работы [15, 26] и цитируемую там литературу).

Перейдем теперь конкретно к уравнению (4.8). Правильный (а именно, с носителем φ_{02} в окрестности $\mathbf{s} \approx \mathbf{q}/2$) переход к пределу при $q \rightarrow \infty$ в выражении (4.7) сделать трудно. Преобразуем это уравнение. Прежде всего выберем направление \mathbf{q} параллельно оси y : $q_x = 0$, $q_y = q$. В (4.7), (4.8) оставим только антисимметричную часть (т. е. будем считать, что $\varphi_{02} = \varphi_{02}^{(a)}$) и применим к нему пре-

образование Фурье по переменной s_x . Сохраняя для новой сопряженной переменной то же обозначение s_x , вместо (4.8) получим

$$E' \Phi(s_x, s_y) = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} dw \left\{ U \left(w + \frac{s_x - s_y}{2}, w + \frac{s_y - s_x}{2} \right) \times \right. \\ \times \Phi \left(w + \frac{s_x + s_y}{2}, w - \frac{s_x + s_y}{2} \right) + \\ + U \left(w + \frac{s_x + s_y}{2}, w - \frac{s_x + s_y}{2} \right) \times \\ \times \Phi \left(w + \frac{s_x - s_y}{2}, w + \frac{s_y - s_x}{2} \right) - \\ - [U(q/2 + s_y, w + s_x) + U(q/2 - s_y, w + s_x)] \Phi(w, s_y) - \\ - [U(q/2 + s_x, w + s_y) + \\ + U(q/2 - s_x, w + s_y)] \Phi(s_x, w) \left. \right\}, \quad (5.1)$$

где

$$\Phi(s_x, s_y) = \int_{-\infty}^{\infty} ds'_x \exp(-is'_x s'_x) \varphi_{02}(s'_x, s_y), \quad (5.2) \\ U(s_x, s_y) = \int_{-\infty}^{\infty} ds_x \exp(-is_x s'_x) V_{mmmm}(s'_x, s_y),$$

$$E' = E - \frac{1}{\pi} \int d^2 p V_{mmmm}(p) \equiv E - 2E_{0,1}(\infty).$$

Из свойства антисимметрии, $\varphi_{02} = \varphi_{02}^{(a)}$, и четности φ_{02} по каждой из переменных следует, что

$$\Phi(s_x, s_y) = \Phi(-s_x, s_y) = \\ = \Phi(s_x, -s_y) = -\Phi(s_y, s_x), \quad (5.3)$$

т. е. функция Φ четна и обладает фермиевской перестановочной симметрией. Уравнение (5.1) имеет очевидную особенность. Несмотря на то что неизвестной является функция двух переменных, интеграл в (5.1) однократный. Это упрощает численное решение задачи.

Носитель функции Φ по переменной s_y расположен так же, как и у функции φ_{02} , в окрестности $s_y \approx q/2$. В силу свойств (5.3) отсюда следует, что для Φ должны быть важны окрестности всех четырех точек на плоскости (s_x, s_y) : $(q/2, \pm q/2)$, $(\pm q/2, q/2)$. Мы сделаем подстановку

$$\Phi(q/2 + x, q/2 + y) = F(x, y),$$

где функция F должна иметь масштаб порядка единицы по обоим переменным в окрестности точки $x = y = 0$. Из свойств (5.3) следует, что

$$\Phi(-q/2 + x, q/2 + y) = F(-x, y),$$

$$\Phi(q/2 + x, -q/2 + y) = F(x, -y)$$

и, кроме того, $F(x, y) = -F(y, x)$. В то же время свойства четности по переменным x и y у функции F , очевидно, нет. Если теперь сделать замену переменных

$$s_x = q/2 + x, \quad s_y = q/2 + y,$$

то с учетом сказанного о носителе F мы видим, что некоторые члены в подынтегральном выражении становятся пренебрежимо малыми при $q \rightarrow \infty$. В результате находим

$$\begin{aligned} E' F(x, y) = & \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dw & \left\{ U \left(w + \frac{x-y}{2}, w + \frac{y-x}{2} \right) \times \right. \\ \times F \left(\frac{x+y}{2} + w, \frac{x+y}{2} - w \right) & - U(y, w+x) \times \\ \times F(-w, y) - U(x, w+y) & F(x, -w) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Итак, мы получили уравнение для функции $F(x, y)$, которая играет роль волновой функции двумерного триона — новой квазичастицы со спином $\delta S_z = -3/2$. (Другая квазичастица, возникающая после распада, имеет спин $-1/2$.) Подчеркнем два обстоятельства. Во-первых, уравнение (5.4) является предельным случаем для уравнения биекситона (5.1), эквивалентного уравнению (4.8), так что можно говорить, что оно описывает биекситон при $q \gg 1$. Во-вторых, важным является то, что уравнение (5.4), как и (4.8) и (5.1), является асимптотически точным в термодинамическом пределе, т. е. в рассматриваемом приближении оно отвечает бесконечно большому числу частиц, $N_\phi = \infty$. В этом состоит существенное отличие нашего решения от подходов, использованных в работах [15, 26].

В частном случае единичного заполнения при условии, что газ является идеально двумерным,

$$\nu = 1 \quad (m = 0),$$

$$V_{mmm} = \frac{e^2}{\epsilon l_B q} \exp \left(-\frac{q^2}{2} \right),$$

минимальная энергия (4.10) двух «свободных» спиновых экситонов при их суммарном импульсе $q = \infty$

равна $E_m(\infty) = E_{0,1}(\infty) = \sqrt{\pi/2}$ (здесь и далее будем приводить численные значения энергий в единицах $e^2/\epsilon l_B$). При этом импульс одного спинового экситона бесконечен, другого равен нулю. Энергия $E_{3/2} = E' + 2E_{0,1}(\infty)$, как и следовало ожидать, оказывается меньше этой величины на энергию связи триона $\delta E_{3/2} = E_m(\infty) - E_{3/2} > 0$. Численное решение уравнения (5.4), несмотря на его простоту, на первый взгляд, вид, представляет собой определенную сложность. Действительно, физически значимой величиной является именно энергия связи $\delta E_{3/2}$, которая мала по сравнению с энергией $E' \approx E_{0,1}(\infty)$. Реально это означает, что наименьшее собственное значение E' следует найти с ошибкой менее чем 10^{-4} . Отметим, что ядро U можно представить в интегральном виде (см. Приложение 2), удобном для численного расчета и табуляции, которая затем используется при подстановке в это уравнение.

Решим уравнение (5.4) с помощью разложения по ортогональному базису, в качестве которого можно взять полиномы Эрмита H_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) с соответствующей весовой функцией:

$$\begin{aligned} F(x, y) = \sum_{i=k=0}^{i_{max}, k_{max}} & \frac{1}{2^{(i+k)/2} \sqrt{\pi i! k!}} A_{ik} H_i(x) H_k(y) \times \\ \times \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $A_{ik} = -A_{ki}$. Подстановка разложения (5.5) в уравнение (5.4) и последующее его проецирование на базисные функции

$$\frac{1}{\sqrt{2^{i'+k'} \pi i'! k'!}} H_{i'}(x) H_{k'}(y) \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$$

приводит к секулярному уравнению для E' , в котором матричные элементы $I_{i'k', ik}$ представляют собой трехкратные интегралы (не считая интегрирования в представлении для ядра U). Одно из интегрирований может быть выполнено аналитически. Необходимая точность определения E' требует высокой точности вычисления интегралов и учета значительного числа членов в разложении (5.5). Общее число интегралов $I_{i'k', ik}$, которые необходимо найти, равно $K(K+1)/2$, где K — число различных (с учетом перестановки $x \leftrightarrow y$) множителей A_{ik} в (5.5). Поэтому $K = M(M+1)/2$, где $M = i_{max} = k_{max}$. Расчет ведется вплоть до $M = 27$. Детали даны в Приложении 2. Здесь приведем ответ для энергии связи:

$$\delta E_{3/2} = 0.05444. \quad (5.6)$$

Наше решение не содержит информации о зарядах возникающих при $q \rightarrow \infty$ квазичастиц. Из сооб-

ражений симметрии [27] следует, что квазичастица со спином $-1/2$ может с равной вероятностью оказаться электроном или дыркой и с такой же вероятностью возбуждение с $\delta S_z = -3/2$ будет иметь заряд $+e$ или $-e$. Эта особенность решения отнюдь не означает, что найденное основное состояние биэкситона при $q \rightarrow \infty$ является вырожденным. Представление состояний (4.1), (4.2) определяет, условно говоря, только взаимную ориентацию импульсов взаимодействующих экситонов. От состояния (4.2) в сопряженном пространстве можно, в принципе, перейти к четырехчастичной волновой функции в реальном двумерном пространстве. Последняя должна быть такой, что ее амплитуда при $q \rightarrow \infty$ будет одинакова для обеих конфигураций: дырка плюс отрицательный трион ($h + X^-$) и электрон плюс положительный трион ($e + X^+$).

Трион X^+ имеет энергию $E_{0,1}(\infty) - \delta E_{3/2}$, а X^- — энергию $-\delta E_{3/2}$. Оба возбуждения, X^+ и X^- , отвечают триплетному состоянию триона. Действительно, изменение полного спина \mathbf{S} системы равно $\delta S = \delta S_z = -1$, причем это справедливо при добавлении спинового экситона с ненулевым импульсом как к электрону (переход от состояния $b_p^\dagger|0\rangle$ к $\hat{Q}_{00\mathbf{q}}^\dagger b_p^\dagger|0\rangle$), так и к эффективной дырке (переход $a_p|0\rangle \rightarrow \hat{Q}_{00\mathbf{q}}^\dagger a_p|0\rangle$). Такой триплетный заряженный экситон соответствует найденному нами связанному состоянию. Синглетный экситон связанного состояния не образует¹⁾.

В заключение этого раздела отметим, что для расчета энергии связи триона существуют и другие способы. Во-первых, это метод точной диагонализации для конечного числа электронов $N_e = N_\phi \pm 1$ (случай $N_\phi = 80$ рассмотрен, например, в работе [15]); погрешность этого метода определяется конечностью величины N_ϕ . Во-вторых, это подход, основанный на том обстоятельстве, что в термодинамическом пределе и при пренебрежении смешиванием уровней Ландау данная многочастичная задача сводится к квантовомеханической задаче трех тел (для $h + h + e$ или $h + e + e$). Однако трехчастичное уравнение Шредингера с кулоновским взаимодействием для каждой пары квазичастиц не может

быть выписано точно, поскольку имеет смысл только его проекция на один уровень. Ограниченность набора базисных функций уровня Ландау определяет в этом случае методическую погрешность расчета, проведенного в работе [26]. Тем не менее авторы приводят ответы, очень близкие к полученному нами результату, а именно, $\delta E_{3/2} = 0.0544$ [15] и $\delta E_{3/2} = 0.0545$ [26].

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Физический смысл образования триона можно понять уже из следующих простых соображений. Если импульс спинового экситона мал ($q \ll 1$), то его энергия квадратична, $E_{0,1} \approx q^2/2M_{s-X}$, M_{s-X} — масса спинового экситона. В то же время поле, создаваемое им за счет дипольного момента $e\mathbf{q} \times \mathbf{e}_z$, линейно по q , так что при надлежащем эффективном расположении зарядов полная энергия может оказаться меньше, чем у квазичастицы с тем же зарядом, но со спином $-1/2$.

Вернемся к вопросу существования биэкситона. Подчеркнем, что речь идет о состоянии системы с наименьшей энергией при заданных квантовых числах $\delta S = \delta S_z = -2$ и \mathbf{q} . Мы нашли это состояние при $q \rightarrow \infty$. Очевидно, оно существует и при конечных, но больших q (а следовательно, и при большом расстоянии между трионом и квазичастицей в реальном пространстве). Энергия складывается из энергии триона и энергии удаленной квазичастицы за вычетом ее энергии связи с трионом.

Для определенности рассмотрим биэкситон, образованный при больших q положительно заряженным экситоном X^+ и электроном e . Энергия триона X^+ есть $E_{0,1}(\infty) - \delta E_{3/2}$. Энергия электрона на бесконечности равна нулю. Теперь оценим энергию связи X^+ и e . Нам известна энергия связи дырки h и электрона e , она равна $\delta E_{0,1}(q) = E_{0,1}(\infty) - E_{0,1}(q)$. На больших расстояниях справедливо разложение по степеням $R^{-1} = 1/q$. Конечно, трион помимо заряда обладает еще и квадрупольным моментом, но при больших R основным является поле, создаваемое положительным зарядом, т. е. трион в этом смысле не отличается от дырки. Поэтому энергия связи X^+ и e в главном приближении по $1/q$ будет такой же, как и энергия связи h и e . В этом приближении для энергии биэкситона отсюда получаем

$$\begin{aligned} E_{0,2}(q) &\approx E_{0,1}(\infty) - \delta E_{3/2} - \delta E_{0,1}(q) = \\ &= E_{0,1}(q) - \delta E_{3/2} \quad (q \gg 1). \end{aligned} \quad (6.1)$$

На рис. 2 в зависимости от обратной величины

¹⁾ Заряженный синглетный экситон в терминах экситонного представления соответствовал бы предельному случаю $\mathbf{s} = \mathbf{q}/2 \rightarrow \infty$ двухэкситонного состояния (4.1), в котором один экситон является «нулевым», т. е. имеет импульс, строго равный нулю. Нулевой спиновый экситон отвечает изменению спиновых чисел $\delta S_z = -1$, но $\delta S = 0$. Это есть просто поворот спиновой системы как целого относительно направления оси z . Нулевой экситон имеет нулевой дипольный момент и не образует связанного состояния с электроном или дыркой.

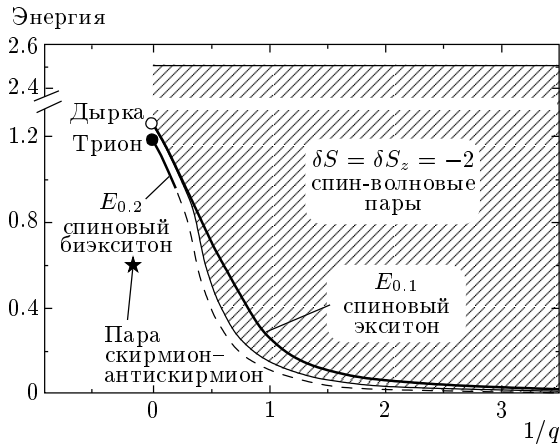


Рис. 2. Зависимость энергий возбуждений от волнового вектора. Заштрихована область энергий спин-волновых пар $E_{0,1}(q/2 + s) + E_{0,1}(q/2 - s)$, соответствующая решениям (4.9), при которых интегральный член в уравнении (4.7) обращается в нуль. Нижний край этой области определяется формулой (4.10). Внутри области сплошная кривая — энергия $E_{0,1}(q)$ спиновое экситона (при $q \rightarrow \infty$ она равна энергии свободной дырки, образовавшейся на нижнем спиновом подуровне, так как энергия электрона равна нулю). Вне области сплошная линия — энергия $E_{0,2}(q)$ спиновое биэкситона (см. (6.1)), штриховая линия — предполагаемое поведение этой энергии при $q \lesssim 1$. Приведены энергии эффективной дырки (○), положительного триона (●) и образования скирмион-антискирмионной пары (*). Расчет выполнен для идеально двумерного случая. Вертикальная ось размечена в единицах $e^2/\epsilon l_B$, по горизонтали отложен обратный волновой вектор в единицах l_B

волнового вектора отложена энергия экситона $E_{0,1}$ (сплошная кривая) и показана энергия биэкситона $E_{0,2}(q)$ (сплошная линия, переходящая в штриховую). При $1/q = 0$ эта величина равна энергии триона $E_{0,1}(\infty) - \delta E_{3/2}$. На том же рисунке заштрихована область, соответствующая зоне свободных пар спиновых экситонов. Ее нижний край $E_m(q)$ определяется уравнением (4.10), а верхний ограничен прямой $2E_{0,1}(\infty)$. Все состояния этой зоны отвечают, разумеется, тем же самым квантовым числам $\delta n = 0$ и $\delta S = \delta S_z = -2$, поэтому кривая $E_{0,2}(q)$ должна проходить ниже $E_m(q)$. В противном случае, т. е. в случае равенства $E_{0,2}(q_c) = E_m(q_c)$ при конечном значении q_c , оказалось бы, что наимизшее состояние системы при фиксированных квантовых числах δS , δS_z и \mathbf{q} вырождено, для чего нет ни симметричных соображений, ни каких-либо других специ-

альных причин. В то же время при $q = 0$, очевидно, обращается в нуль как энергия E_m , так и энергия $E_{0,2}$ биэкситона. Иными словами, в точке $q = 0$ биэкситон перестает существовать, а описывающая его функция φ_{02} формально сводится к сингулярному виду (4.9) с $s_0 = 0^2$). Заметим, что точка $q \equiv 0$ является «выколотой» также и для состояний края спин-экситонной зоны. Связано это с тем, что возбуждение $|0\bar{0}; \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle = (1/2)\hat{Q}_{0\bar{0}\mathbf{0}}^\dagger \hat{Q}_{0\bar{0}\mathbf{0}}^\dagger |0\rangle$, соответствующее кулоновской энергии $E_m(0) = 0$, имеет спиновые числа $\delta S_z = -2$ и $\delta S = 0$, но не $\delta S_z = \delta S = -2$ (см. [12, 14] и примечание в конце предыдущего раздела).

Мы нашли, что щель рождения фермионов X^+ и e (или X^- и h) при переходе $q \rightarrow \infty$, приводящем к диссоциации биэкситона, оказывается меньше, чем значение $E_{0,1}(\infty)$, определяемое распадом спиновое экситона. Выигрыш в энергии (5.6) в поле $B = 10$ Тл соответствует примерно 9 К в ультрадвумерном пределе. Мы не принимали пока в расчет разность зеемановских энергий для возбуждений с $\delta S_z = -1$ и $\delta S_z = -2$. В то же время эта энергия, $|g\mu_B B| \approx 2.9$ К при $B = 10$ Тл, не компенсирует, как мы видим, значительную разность кулоновских энергий. Можно рассмотреть и большие квантовые числа $|\delta S_z|$, например, исследуя 3-экситон и т. д. Расчеты, выполненные численно [15], показывают, что фермиевская щель при обычном факторе Ланде для GaAs ($g = -0.44$) определяется малыми значениями $|\delta S_z| \sim 1$, и лишь если $g \rightarrow 0$, фермионное возбуждение реализуется при $\nu = 1$ в виде так называемого скирмиона (при этом $\delta S_z = -\infty$, а щель равна $(1/2)\sqrt{\pi/2}$). Наш результат для щели при $\delta S_z = -2$ является, таким образом, промежуточным между случаем распада спиновое экситона на электрон и эффективную дырку и случаем образования пары скирмион-антискирмион.

Рассмотрим теперь вопрос об активационной энергии при возбуждении, отвечающем изменению $\delta S = \delta S_z = -3$. Очевидно, что при $q \rightarrow \infty$ такой 3-экситон должен тоже распадаться на два фермиевских возбуждения. Если это два возбуждения со спинами $\delta S_z = -3/2$, то энергия щели нами фактически вычислена. С учетом энергии Зеемана она равна

$$3|g\mu_B B| + E_{0,1}(\infty) - 2\delta E_{3/2}, \quad (6.2)$$

²⁾ Отрицательной кулоновской энергией $E_{0,2}$ стать не может. Иначе оказалось бы, что ферромагнитное основное состояние $|0\rangle$ при заполнении $\nu = 1$ разрушается, так как полный спин оказывается меньше своего максимального значения $S_0 = N_\phi/2$.

т.е. уменьшение щели за счет обменного взаимодействия составляет $2\delta E_{3/2} \approx 0.109$. «Несимметричный» вариант диссоциации на фермионы с $\delta S_z = -1/2$ и $\delta S_z = -5/2$ дает меньший выигрыш в энергии. Действительно, такой распад был бы более выгоден в том случае, когда квазичастица со спином $-5/2$ обеспечивает выигрыш в энергии $\delta E_{5/2}$ больший, чем $2\delta E_{3/2}$. Однако в соответствии с физическим смыслом (что подтверждается также расчетом [15]) должно всегда быть

$$\delta E_{K+\frac{3}{2}} - \delta E_{K+1/2} < \delta E_{K+1/2} - \delta E_{K-1/2}$$

для любого K ($K \geq 1, \delta E_{1/2} = 0$). При $K = \infty$ энергия связи равна $\delta E_\infty = 0.25\sqrt{\pi/2} \approx 0.31$ [28].

Конечно, приведенные выше рассуждения относятся лишь к линейному по параметру r_C приближению. Уже поправка второго порядка (с учетом того, что этот параметр реально не мал) может внести существенную корректировку в рассчитанные значения щелей в сторону их уменьшения. Кроме того, следует иметь в виду, что в силу обязательного присутствия в двумерном канале плавного случайного потенциала (из-за примесей, расположенных за спейсером), спектр возбуждений фактически обрезается при конечном q . Действительно, в случае спинового экситона его существование обусловлено тем, что сила взаимодействия электрона и условной дырки, $|dE_{0,1}(\mathbf{q})/d\mathbf{q}|$, превосходит силу $|\nabla\phi|$, определяемую случайным потенциалом $\phi(\mathbf{r})$ (характерные значения $|\nabla\phi| \sim 0.05-0.1$ К/нм). Это условие нарушается уже при $q \gtrsim 4$, т.е. щель оказывается существенно меньше значения, формально определяемого при $q \rightarrow \infty$. Еще одна поправка появляется при учете толщины двумерного газа в направлении оси z . Эта поправка уменьшает энергию возбуждений примерно на 30%. Таким образом, экспериментальные данные для фермионной щели (она определяется по энергии активации в режиме квантового эффекта Холла [29]) в принципе не противоречат теоретическим представлениям. При учете поправок «на беспорядок», на конечность r_C и конечность толщины газа щель оказывается достаточно близка к величине (6.2).

Авторы благодарны С. В. Иорданскому и И. В. Кукушкину за ценные обсуждения. Работа поддержана РФФИ. Один из авторов (С. М. Д.) признателен фонду MINERVA за поддержку и институту Вайцмана (the Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel) за гостеприимство, оказанное ему в период работы над статьей. С. М. Д. и

В. М. Ж. благодарят также Институт Макса Планка физики комплексных систем (Max-Planck-Institut für Physik Komplexer Systeme, Dresden, Germany) за гостеприимство и предоставленную возможность работать в компьютерной сети института при выполнении численных расчетов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приведем пример уравнений (2.12) и (2.15) в конкретном случае для заполнения $\nu = 2m + 1$ и парах $(ab) = (\overline{m-1} \overline{m})$ и $(a'b') = (m+1)$. Использование определений операторов \hat{H}_a и \hat{H}_{ab} (см. (2.10) и (2.11), а также определение для операторов «смещения» $\hat{A}_{\mathbf{q}}^\dagger, \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger, \hat{C}_{\mathbf{q}}^\dagger, \dots$ через операторы (1.1)), коммутационных соотношений (2.5) и правил действия (2.6) дает возможность непосредственно найти

$$\begin{aligned} & \left[\hat{H}_a + \hat{H}_{ab}, \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \right] |0\rangle = \left\{ V_{m-1 m m-1 m}(\mathbf{q}) + \right. \\ & + \frac{1}{N_\phi} \sum_{\mathbf{p}} [V_{m-1 m-1 m-1 m-1}(\mathbf{p}) - V_{m-1 m m-1 m}(\mathbf{p}) - \\ & \left. - V_{m-1 m m m-1}(\mathbf{p}) \exp[i(\mathbf{p} \times \mathbf{q})_z]] \right\} \times \\ & \times \hat{Q}_{m-1 \overline{m}\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \quad (\text{П.1.1}) \end{aligned}$$

(мы не отмечаем чертой спиновый признак у индексов величин V_{\dots} , поскольку всегда $V_{klmn} = V_{\overline{k}\overline{l}\overline{m}\overline{n}} = V_{\overline{k}l\overline{m}n} = V_{k\overline{l}\overline{m}n}$).

Точно так же найдем

$$\begin{aligned} & \sum_c \left[(\hat{H}_{ac} + \hat{H}_{bc}), \hat{Q}_{ab\mathbf{q}}^\dagger \right] |0\rangle = \\ & = \left\{ \frac{1}{N_\phi} \sum_{n_c=0}^{m-2} \sum_{\mathbf{p}} [V_{m-1 n_c m-1, n_c}(\mathbf{p}) - \right. \\ & \left. - V_{m n_c m, n_c}(\mathbf{p})] \right\} \hat{Q}_{m-1 \overline{m}\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \quad (\text{П.1.2}) \end{aligned}$$

(этот вклад появляется, если $m \geq 2$). Подставим в эти формулы выражения (2.3), (2.4) для V_{\dots} и совершим суммирование по n_c в (П.1.2). Для этого используется следующее функциональное тождество для обобщенных полиномов Лагерра:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{k!}{n!} z^{n-k} [L_k^{n-k}(z)]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{k!}{(n+1)!} z^{n+1-k} [L_k^{n+1-k}(z)]^2 \right\} = \\ & = L_n(z)L_{n+1}(z). \quad (\text{П.1.3}) \end{aligned}$$

Складывая выражения (П.1.1) и (П.1.2) и переходя от суммирования к интегрированию по \mathbf{p} , согласно уравнению (2.12) найдем величину $\mathcal{E}_{m-1\overline{m}}(q)$ (см. (3.2), (3.4)). Расчет другого матричного элемента $\mathcal{E}_{m\overline{m+1}}(q)$ выполняется аналогичным образом.

Что касается уравнения (2.15), то для пары $(ab) = (\overline{m-1}\overline{m})$ вклад в его левую часть дадут только следующие члены, входящие в сумму (2.14):

$$\sum_{\mathbf{q}} \left[V_{m-1\overline{m+1}m\overline{m}}(q) \hat{Q}_{m\overline{m+1}\mathbf{q}}^+ \hat{Q}_{\overline{m-1}\overline{m}\mathbf{q}}^+ + V_{m-1\overline{m+1}m,m}(q) \hat{Q}_{m\overline{m-1}\mathbf{q}}^+ \hat{Q}_{\overline{m+1}\overline{m}\mathbf{q}}^+ \right]. \quad (\text{П.1.4})$$

Соответственно для пары $(a'b') = (m\overline{m+1})$ вклад определяется членами

$$\sum_{\mathbf{q}} \left[V_{m\overline{m}m-1\overline{m+1}}(q) \hat{Q}_{m-1\overline{m}\mathbf{q}}^+ \hat{Q}_{m\overline{m+1}\mathbf{q}}^+ + V_{m\overline{m}m+1,m-1}(q) \hat{Q}_{m-1\overline{m}\mathbf{q}}^+ \hat{Q}_{\overline{m}\overline{m+1}\mathbf{q}}^+ \right]. \quad (\text{П.1.5})$$

С помощью правил коммутации (2.5) находим из уравнений (2.15), что недиагональные элементы $\mathcal{E}_{m\overline{m+1}}^{(m-1\overline{m})} = \mathcal{E}_{m-1\overline{m}}^{(m\overline{m+1})}$ определяются величиной (3.5).

Отметим, что и при расчете возбуждений $|2m; 1, 0, \mathbf{q}\rangle$ и $|2m; 1, 1, \mathbf{q}\rangle$ тождество (П.1.3) оказывается полезным для упрощения суммы по s в уравнении (2.12), если только $m \geq 2$ (т. е. $\nu \geq 4$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В уравнении (5.4) должна быть задана функция ядра U . Из ее определения (5.2) следует, что в единицах $e^2/\epsilon l_B$

$$U(x, y) \equiv \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\exp(-u^2/2 - i|x|u)}{\sqrt{u^2 + y^2}} \quad (\text{П.2.1})$$

(рассматривается случай $m = 0$ и $V(q) = 2\pi/q$). Однако эта формула неудобна для табуляции значений $U(x, y)$, так как интеграл в ней сходится медленно и точность расчета оказывается недостаточной. Преобразуем выражение (П.2.1) следующим образом. Принимая во внимание наличие точки ветвления $u = -i|y|$, изменим контур интегрирования. При $|x| < |y|$ он состоит из интервалов $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_4$, где

$$\mathcal{G}_1 = (e^{3i\pi/2}|x| - \infty, e^{3i\pi/2}|x| - 0), \\ \mathcal{G}_4 = (e^{-i\pi/2}|x| + 0, e^{-i\pi/2}|x| + \infty).$$

Если же $|x| > |y|$, то интегрирование совершается по контуру $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + \mathcal{G}_4$, где

$$\mathcal{G}_2 = \left[e^{3i\pi/2}(|x| - |y|) + e^{-i\pi/2}|y| - 0, \right. \\ \left. 0 \cdot e^{3i\pi/2} + e^{-i\pi/2}|y| - 0 \right],$$

$$\mathcal{G}_3 = \left(e^{-i\pi/2}|y| + 0, e^{-i\pi/2}|x| + 0 \right)$$

(интегрирование по бесконечно малой петле в окрестности $u = -i|y|$ дает нулевой вклад).

Сначала сделаем в уравнении (П.2.1) подстановку $u = -i|x| + z$ и выполним интегрирование по участку $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_4$. Соответствующий вклад равен

$$U_1(x, y) \equiv \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \times \int_{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_4} du \frac{\exp(-u^2/2 - i|x|u)}{\sqrt{u^2 + y^2}} \equiv \\ \equiv \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-z^2/2)}{\sqrt{(-i|x| + z)^2 + y^2}} \equiv \\ \equiv \sqrt{2} \exp\left(-\frac{y^2 + x^2}{2}\right) \int_0^{\infty} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \times \\ \times \frac{\sqrt{R_{x,y}(z) + z^2 + y^2 - x^2}}{R_{x,y}(z)}, \quad (\text{П.2.2})$$

где

$$R_{x,y}(z) = \sqrt{(z^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2z^2}. \quad (\text{П.2.3})$$

Для интегрирования по контуру $\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3$ подставим

$$u = |y|e^{-i\pi/2} + \begin{cases} w^2 e^{3i\pi/2} & \text{для } \mathcal{G}_2, \\ w^2 e^{-i\pi/2} & \text{для } \mathcal{G}_3 \end{cases}$$

в уравнение (П.2.1) и получим результат, который может быть записан в следующем виде, удобном для численного расчета:

$$U_2(x, y) \equiv \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \int_{\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3} du \frac{\exp(-u^2/2 - i|x|u)}{\sqrt{u^2 + y^2}} \equiv \\ \equiv 2\sqrt{2} \exp(-|xy|) \times \\ \times \int_0^{\sqrt{|x|-|y|}} dw \frac{\exp[w^4/2 + w^2(|y| - |x|)]}{\sqrt{|y| + w^2/2}}. \quad (\text{П.2.4})$$

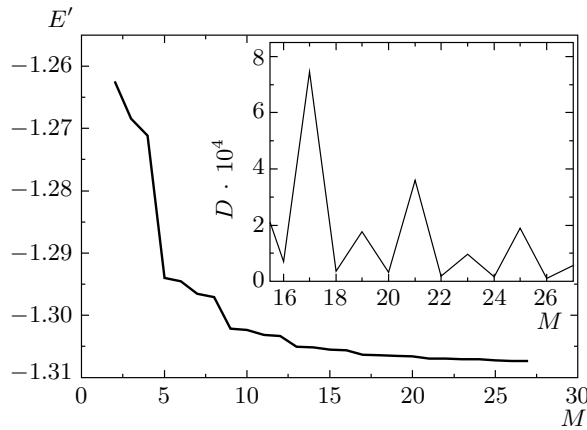


Рис. 3. Рассчитанная величина E' (в единицах $e^2/\epsilon l_B$) в зависимости от номера M — старшего индекса полиномов Эрмита в представлении (5.5). На вставке показана величина $D(M) = E'(M) - E'(M + 1)$

Окончательный ответ есть

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y), & |x| < |y|, \\ U_1(x, y) + U_2(x, y), & |x| > |y|. \end{cases} \quad (\text{П.2.5})$$

Формулы (П.2.2)–(П.2.5) позволяют создать массив значений $U(x, y)$ для использования его при численном решении уравнения (5.4). Все расчеты проводились с четверной точностью. С ростом максимального индекса M используемых в разложении (5.5) полиномов Эрмита искомое минимальное собственное значение матрицы $I_{i'k', ik}$ уменьшается (т. е. растет по модулю, так как $E' < 0$). Эта зависимость продемонстрирована на рис. 3. С ростом M она, разумеется, ослабевает. Величина скачка $D(M) = E'(M) - E'(M + 1)$ показана на вставке. Как видно, зависимость $D(M)$ обладает характерной квазипериодической особенностью, которая позволяет аналитически экстраполировать кривую $D(M)$ в область значений $M > 27$ и тем самым рассчитать величину $E'(\infty)$. Экстраполяция может выполняться разными способами, что приводит к некоторому разбросу результатов для $E'(\infty)$. Разброс оказывается в пределах ошибки 10^{-5} , поэтому мы приходим к значению $E'(\infty) = -\sqrt{\pi/2} - \delta E_{3/2}$, где величина $\delta E_{3/2}$ приведена в разд. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *The Quantum Hall Effect*, ed. by R. R. Prange and S. M. Girvin, Springer, New York (1990).
2. R. B. Laughlin, *Physica B* **126**, 254 (1984).
3. S. M. Girvin, P. H. MacDonald, and P. M. Platzman, *Phys. Rev. B* **33**, 2481 (1986).
4. И. В. Лернер, Ю. Е. Лозовик, *ЖЭТФ* **78**, 1167 (1980).
5. Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, Г. М. Элиашберг, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 152 (1981).
6. Ю. А. Бычков, Е. И. Рашба, *ЖЭТФ* **85**, 1826 (1983).
7. C. Kallin and B. I. Halperin, *Phys. Rev. B* **30**, 5655 (1984).
8. A. Pinczuk, B. S. Dennis, D. Heiman et al., *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3623 (1992).
9. J. P. Longo and C. Kallin, *Phys. Rev. B* **47**, 4429 (1993).
10. А. Б. Дзюбенко, Ю. Е. Лозовик, *ФТТ* **25**, 874 (1983); **26**, 938 (1984).
11. A. B. Dzyubenko and Yu. E. Lozovik, *J. Phys. A* **24**, 415 (1991).
12. С. М. Дикман, С. В. Иорданский, *Письма в ЖЭТФ* **63**, 43 (1996); *ЖЭТФ* **110**, 238 (1996).
13. S. Dickmann and Y. Levinson, *Phys. Rev. B* **60**, 7760 (1999).
14. S. Dickmann, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 206804 (2004).
15. J. J. Palacios, D. Yoshioka, and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **54**, R2296 (1996).
16. С. М. Дикман, С. В. Иорданский, *Письма в ЖЭТФ* **70**, 543 (1999).
17. S. Dickmann, *Phys. Rev. B* **61**, 5461 (2000).
18. S. Dickmann and Y. Levinson, *Physica E* **5**, 153 (2000).
19. Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, *ФТТ* **29**, 2442 (1987).
20. S. Dickmann, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 144 (2003).
21. Yu. A. Bychkov, T. Maniv, and I. D. Vagner, *Phys. Rev. B* **53**, 10148 (1996).

- 22.** M. Rasolt, B. I. Halperin, and D. Vanderbilt, Phys. Rev. Lett. **57**, 126 (1986).
- 23.** C. Kallin and B. I. Halperin, Phys. Rev. B **31**, 3635 (1985).
- 24.** S. Dickmann and I.V. Kukushkin, Phys. Rev. B **71**, 241310(R) (2005).
- 25.** Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, Г. М. Элиашберг, Поверхность **10**, 33 (1982).
- 26.** D. M. Whittaker and A. J. Shields, Phys. Rev. B **56**, 15185 (1997).
- 27.** H. A. Fertig, L. Brey, R. Côté et al., Phys. Rev. B **55**, (1997).
- 28.** H. A. Fertig, L. Brey, R. Côté, and A. H. MacDonald, Phys. Rev. B **50**, 11018 (1994).
- 29.** A. Usher, R. J. Nicholas, J. J. Harris, and C. T. Foxon, Phys. Rev. B **41**, 1129 (1990).