

# СПЕКТРОСКОПИЯ ПРОБНОГО ПОЛЯ В ТРЕХУРОВНЕВЫХ Λ-СИСТЕМАХ В УСЛОВИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ НИЗКОЧАСТОТНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

*A. И. Пархоменко<sup>\*</sup>, А. М. Шалагин<sup>\*\*</sup>*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 26 апреля 2005 г.

Теоретически исследован спектр поглощения слабого зондирующего поля трехуровневыми атомами с Λ-конфигурацией уровней, находящимися в поле сильной электромагнитной волны, действующей на смежный переход, и испытывающими столкновения с атомами буферного газа. Анализ проведен для общего случая произвольной столкновительной релаксации низкочастотной когерентности на переходе между двумя нижними уровнями. Показано, что в случае отсутствия столкновительной релаксации низкочастотной когерентности спектр пробного поля всегда (даже в пределе малого доплеровского уширения) обладает ярко выраженной анизотропией по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений. Установлено, что в определенных условиях в спектре пробного поля могут возникать сверхузкие резонансы с шириной, пропорциональной коэффициенту диффузии взаимодействующих с излучением атомов. Этот факт может служить основой спектроскопического метода измерения транспортных частот столкновений поглощающих частиц с буферными. Обнаружен сверхузкий резонанс большой амплитуды (во много раз большей амплитуды резонанса вблизи центра линии) в далеком крыле линии поглощения, который испытывает столкновительное сужение (нелинейно-спектроскопический аналог эффекта Дикке) при частотах столкновений, на несколько порядков меньших доплеровской ширины линии. Предложены простые рабочие формулы для описания спектра пробного поля, которые удобно использовать при обработке экспериментальных данных.

PACS: 42.50.Gy, 42.50.Hz, 42.62.Fi

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Метод пробного поля в нелинейной спектроскопии является эффективным инструментом исследования спектроскопических характеристик и разнообразных релаксационных процессов в квантовых системах. Суть метода состоит в том, что слабое (пробное) поле «зондирует» структуру состояний атома, возмущенных другим сильным полем [1–3].

Спектроскопии пробного поля посвящено множество работ. Одной из наиболее активно исследуемых систем является трехуровневая Λ-система, в которой дипольно-разрешенными являются переходы между верхним и каждым из двух нижних уровней

системы (см., например, [1–10] и цитированную там литературу). Практически во всех работах использовались простейшие модели релаксации. В частности, предполагалось, что при столкновениях с изменением скорости происходит полный сбой фазы наведенной поляризации на всех переходах. С другой стороны, существует целый ряд реальных экспериментальных объектов, в которых это допущение несправедливо. Например, у атомов щелочных металлов столкновения с немагнитными буферными частицами не разрушают когерентности между компонентами сверхтонкой структуры основного электронного состояния [11]. Как оказывается, это обстоятельство приводит к радикальному изменению в форме спектральных линий, что, безусловно, важно при решении ряда задач, к которым в последние

---

<sup>\*</sup>E-mail: par@iae.nsk.su

<sup>\*\*</sup>E-mail: shalagin@iae.nsk.su

годы возродился интерес (так называемое когерентное пленение населеностей [12, 13], электромагнитно-индуцированная прозрачность [14], лазерная генерация без инверсии [12–17]).

В настоящей работе теоретически исследован спектр поглощения пробного поля трехуровневыми атомами с  $\Lambda$ -конфигурацией уровней, находящимися в поле сильной электромагнитной волны, воздействующей на смежный переход. Полагается, что атомы находятся в атмосфере буферного газа и испытывают столкновения с его частицами. Анализ проведен для общего случая произвольной столкновительной релаксации низкочастотной когерентности на переходе между двумя нижними уровнями (столкновительная релаксация может отсутствовать или, наоборот, быть весьма эффективной). В то же время полагается, что столкновения полностью сбивают фазу наведенного излучением дипольного момента на оптических переходах между общим верхним и нижними уровнями.

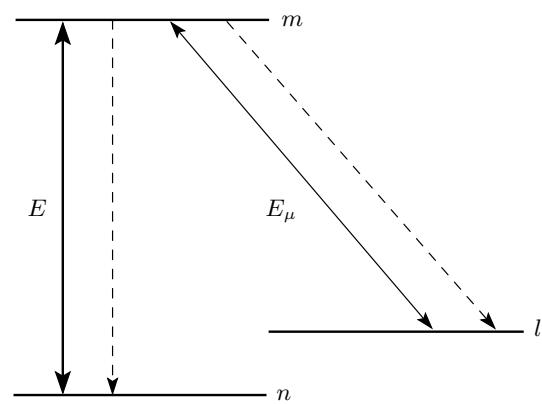
Неожиданным оказался тот факт, что спектр пробного поля сильно чувствителен к столкновениям и движению атомов даже в тех случаях, когда, казалось бы, учетом этих факторов вообще можно пренебречь. Так, для обнаруженного в данной работе резонанса пробного поля в далеком крыле линии поглощения эффект Дикке столкновительного сужения может сильно проявляться при частотах столкновений, на несколько порядков меньших доплеровской ширины (напомним, что в традиционных спектроскопических задачах эффект Дикке, как известно [1, 2], заметно проявляется лишь при частотах столкновений, больших доплеровской ширины).

При малом доплеровском уширении (по отношению к частоте столкновений) спектр пробного поля, казалось бы, не должен быть чувствительным к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений. Тем не менее оказывается, что даже в этом случае спектр пробного поля резко анизотропен по отношению к взаимной ориентации волновых векторов.

Теоретическому исследованию этих и других неизвестных ранее особенностей в спектре пробного поля трехуровневых  $\Lambda$ -систем посвящена данная работа.

## 2. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Рассмотрим взаимодействие сильного и пробного излучений с газом трехуровневых поглощающих частиц, находящихся в смеси с буферным газом. Схема



**Рис. 1.** Схема энергетических уровней. Сплошными стрелками обозначены переходы под действием излучения, штриховыми — спонтанные радиационные переходы

ма уровней поглощающих частиц показана на рис. 1. Пусть сильное поле

$$\text{Re } \mathbf{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$$

резонансно переходу  $m - n$ , слабое поле

$$\text{Re } \mathbf{E}_\mu \exp(i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r} - i\omega_\mu t)$$

резонансно смежному переходу  $m - l$ . Поляризация среды на частоте пробного поля определяется элементом матрицы плотности  $\rho_{ml}(\mathbf{v})$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. Для его нахождения достаточно рассмотреть следующую систему кинетических уравнений для элементов матрицы плотности (резонансное приближение, см. [1, 2]):

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dt} + \frac{\Gamma_m}{2} - i(\Omega_{0\mu} - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v}) \right] \rho_{ml}(\mathbf{v}) = \\ & = S[\rho_{ml}(\mathbf{v})] + iG_\mu [\rho_{ll}(\mathbf{v}) - \rho_{mm}(\mathbf{v})] + iG\rho_{nl}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dt} + i[\Omega_0 - \Omega_{0\mu} + (\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}] \right\} \rho_{nl}(\mathbf{v}) = \\ & = S[\rho_{nl}(\mathbf{v})] + iG^* \rho_{ml}(\mathbf{v}) - iG_\mu \rho_{nm}(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} & \Omega_0 = \omega - \omega_{mn}, \quad \Omega_{0\mu} = \omega_\mu - \omega_{ml}, \\ & G = \frac{d_{mn}E}{2\hbar}, \quad G_\mu = \frac{d_{ml}E_\mu}{2\hbar}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\rho_{ii}(\mathbf{v})$  — распределение частиц по скоростям на уровне  $i$  ( $i = m, n$ ),  $S[\rho_{ij}(\mathbf{v})]$  — интегралы столкновений;  $\Gamma_m$  — полная скорость спонтанного распада возбужденного уровня  $m$  (по каналам  $m \rightarrow n$  и

$m \rightarrow l$ ),  $d_{mn}$  и  $d_{ml}$  — матричные элементы дипольных моментов переходов  $m - n$  и  $m - l$ ,  $\omega_{mn}$  и  $\omega_{ml}$  — частоты переходов  $m - n$  и  $m - l$ .

Далее будем рассматривать случай, когда столкновения полностью сбивают фазу наведенного излучением дипольного момента на переходе  $m - l$ , но столкновительная релаксация низкочастотной когерентности  $\rho_{nl}(\mathbf{v})$  произвольна. Для интеграла столкновений  $S[\rho_{ml}(\mathbf{v})]$  в соотношении (1) примем обычное в таком случае приближение [1, 3]

$$S[\rho_{ml}(\mathbf{v})] = -\nu_{ml}\rho_{ml}(\mathbf{v}), \quad (3)$$

где частота «ухода»  $\nu_{ml}$  является в общем случае комплексной величиной. Для интеграла столкновений  $S[\rho_{nl}(\mathbf{v})]$  будем использовать модель сильных столкновений [1]:

$$\begin{aligned} S[\rho_{nl}(\mathbf{v})] &= -\nu\rho_{nl}(\mathbf{v}) + \tilde{\nu}\rho_{nl}W(\mathbf{v}), \\ \rho_{nl} &\equiv \int \rho_{nl}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $W(\mathbf{v})$  — максвелловское распределение по скоростям;  $\nu$  и  $\tilde{\nu}$  — частоты «ухода» и «прихода», являющиеся в общем случае комплексными величинами. Случаю отсутствия фазовой памяти при столкновениях (столкновения вызывают полную релаксацию когерентности  $\rho_{nl}(\mathbf{v})$ ) соответствует значение  $\tilde{\nu} = 0$ . В случае полной фазовой памяти при столкновениях (столкновительная релаксация когерентности  $\rho_{nl}(\mathbf{v})$  отсутствует) частоты ухода  $\nu$  и прихода  $\tilde{\nu}$  вещественны и равны между собой [1]:

$$\tilde{\nu} = \nu = \nu_{tr}, \quad (5)$$

где  $\nu_{tr}$  имеет смысл средней транспортной частоты упругих столкновений активных частиц с буферными частицами [18]. Величина  $\nu_{tr}$  связана с коэффициентом диффузии  $D$  взаимодействующих с излучением частиц соотношением [19]

$$D = v_T^2 / 2\nu_{tr}, \quad (6)$$

где  $v_T$  — наиболее вероятная скорость поглощающих частиц.

В стационарных и пространственно однородных условиях из (1), с учетом (3), (4), получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{v})\rho_{ml}(\mathbf{v}) &= iG_\mu [\rho_{ll}(\mathbf{v}) - \rho_{mm}(\mathbf{v})] + iG\rho_{nl}(\mathbf{v}), \\ \lambda_2(\mathbf{v})\rho_{nl}(\mathbf{v}) &= \tilde{\nu}\rho_{nl}W(\mathbf{v}) - iG_\mu\rho_{nm}(\mathbf{v}) + \\ &\quad + iG^*\rho_{ml}(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{v}) &= \frac{\Gamma_m}{2} + \nu_{ml} - i(\Omega_{0\mu} - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v}), \\ \lambda_2(\mathbf{v}) &= \nu + i(\Omega_0 - \Omega_{0\mu} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}, \quad \rho_{ij} \equiv \int \rho_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

В уравнениях (7) вследствие слабости пробного поля матричные элементы  $\rho_{ii}(\mathbf{v})$  и  $\rho_{nm}(\mathbf{v})$  можно считать известными и определяемыми действием только сильного поля. Далее будем полагать, что столкновительные переходы между уровнями  $n$  и  $l$  отсутствуют. В этом случае все частицы под действием сильного поля перейдут с уровня  $n$  на уровень  $l$ . Поэтому в (7) можно полагать

$$\rho_{mm}(\mathbf{v}) = \rho_{nm}(\mathbf{v}) = 0, \quad \rho_{ll}(\mathbf{v}) = NW(\mathbf{v}), \quad (9)$$

где  $N$  — полная концентрация поглощающих частиц.

В настоящей работе мы будем исследовать спектр поглощения пробного поля. Из системы уравнений (7) с учетом (9) для вероятности  $P_\mu$  поглощения пробного поля на частоте  $\omega_\mu$  (число актов поглощения излучения в единицу времени в расчете на один поглощающий атом) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} P_\mu &\equiv -\frac{2}{N} \operatorname{Re}[iG_\mu^*\rho_{ml}] = \\ &= 2|G_\mu|^2 \operatorname{Re} \left\{ I_2 - \frac{\tilde{\nu}|G|^2 J^2}{1 - \tilde{\nu}I_1} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\lambda_1(\mathbf{v})\lambda_2(\mathbf{v}) + |G|^2}, \\ I_i &= \int \frac{\lambda_i(\mathbf{v})W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\lambda_1(\mathbf{v})\lambda_2(\mathbf{v}) + |G|^2}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, расчет спектра пробного поля в модели сильных столкновений сводится к вычислению соответствующих интегралов.

### 3. АНАЛИЗ СПЕКТРА ПРОБНОГО ПОЛЯ

Анализ выражения (10) в общем виде провести трудно, хотя конкретный спектр пробного поля при различных наборах параметров (интенсивность сильного излучения, его частота, частоты столкновений, степень проявления фазовой памяти) легко получить численным расчетом. Для понимания физической картины мы рассмотрим прежде всего различные частные случаи, в которых удается получить из (10) относительно простые аналитические результаты.

### 3.1. Однородное уширение

Начнем анализ со случая однородного уширения линии поглощения на переходе  $m - l$ , когда доплеровская ширина  $k_\mu v_T$  мала по сравнению с величиной  $\Gamma$ :

$$\Gamma \gg k_\mu v_T, \quad \Gamma = \frac{\Gamma_m}{2} + \operatorname{Re} \nu_{ml}. \quad (12)$$

В этом случае при не слишком высокой интенсивности излучения, такой что

$$|G|^2 \ll |\nu(\Gamma - i\Omega)|, \quad (13)$$

формула (10) для вероятности поглощения пробного поля существенно упрощается и принимает вид<sup>1)</sup>

$$P_\mu = 2|G_\mu|^2 \operatorname{Re} \left\{ \left( \Gamma - i\Omega_\mu + \frac{|G|^2}{\Gamma_1 - i\varepsilon} \right)^{-1} \right\}. \quad (14)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Gamma_1 = (\nu - \tilde{\nu})' + \frac{(qv_T)^2}{2[\nu + i(\Omega_0 - \Omega_{0\mu})]}, \quad \varepsilon = \Omega_\mu - \Omega, \quad (15)$$

$$\Omega_\mu = \Omega_{0\mu} - \nu''_{ml}, \quad \Omega = \Omega_0 + (\nu - \tilde{\nu} - \nu_{ml})'',$$

$$q \equiv |\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}|.$$

Верхние индексы «'» и «''» здесь и ниже означают соответственно действительную и мнимую части комплексного числа<sup>2)</sup>.

Формула (14) для вероятности поглощения по структуре подобна соответствующей формуле для покоящихся частиц (см., например, [1, 2]). Изменение состоит в обобщении константы релаксации  $\Gamma_1$  на предмет учета движения частиц по диффузионному закону (второе слагаемое в формуле (15) для  $\Gamma_1$ ). В случае сохранения при столкновениях фазовой памяти на переходе  $n - l$  константа релаксации  $\Gamma_1$  определяется только вторым, диффузионным, слагаемым. Таким образом, в этом случае при расчете спектра пробного поля движение атомов необходимо учитывать всегда, даже при малом доплеровском уширении по отношению к частоте столкновений.

<sup>1)</sup> Заметим, что условие (13) зависит от отстройки  $\Omega$  частоты излучения и при достаточно больших значениях отстройки ( $|\Omega| \gg \Gamma$ ) может выполняться и при  $|G| \gtrsim \Gamma$ .

<sup>2)</sup> Аналогичная (14) формула получена в недавней работе [10], в которой рассмотрен спектр пробного поля в трехуровневой А-системе в условиях возможного сохранения фазовой памяти при столкновениях одновременно сразу на всех атомных переходах. Основное внимание в [10] удалено исследованию формы и положения компонент дублета Аутлера – Таунса, обусловленного полевым расщеплением верхнего уровня в А-системе.

Величина  $\Gamma_1$  анизотропна по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений. При сохранении фазовой памяти на переходе  $n - l$  и слабом различии модулей волновых векторов ( $|k - k_\mu| \ll k$ ) величина  $\Gamma_1$  для случаев встречных ( $\mathbf{k}_\mu \uparrow\downarrow \mathbf{k}$ ) и односторонних ( $\mathbf{k}_\mu \uparrow\uparrow \mathbf{k}$ ) волн может различаться на много порядков. Это означает, что спектр пробного поля даже в пределе малого доплеровского уширения имеет ярко выраженную анизотропию по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений.

Рассматривая в формуле (14) предельный случай  $\Gamma_1 \rightarrow 0$ , легко заметить, что максимальные значения  $P_\mu$  достигаются при условии

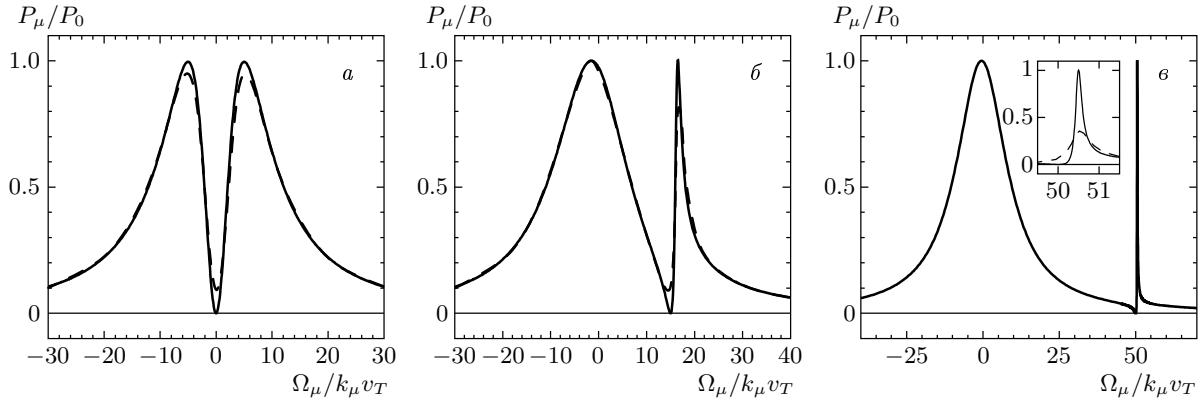
$$\varepsilon \Omega_\mu = |G|^2.$$

Из этого условия следует известный результат (см., например, [1, 2]), что спектр пробного поля имеет две компоненты, максимумы которых расположены в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(\pm)}$ , где

$$\Omega_\mu^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\Omega \pm \Omega_R), \quad \Omega_R \equiv \sqrt{4|G|^2 + \Omega^2}. \quad (16)$$

Согласно (16), расстояние между максимумами спектральных компонент равно  $\Omega_R$ . Несмотря на ограничения, использованные при выводе формулы (16), оказывается, что она с хорошей точностью определяет положение спектральных компонент при любых значениях параметров задачи.

На рис. 2 показан общий вид спектра пробного поля при различных значениях отстройки  $\Omega$  частоты сильного поля в случае однородного уширения (12) и при сохранении фазовой памяти на переходе  $n - l$ . При точном резонансе для сильного поля ( $\Omega = 0$ ) в центре линии существует «негативная» симметричная структура (провал, рис. 2a). С ростом  $|\Omega|$  в крыле линии поглощения (в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(+)}$ ) возникает узкий резонанс (рис. 2б, в), поведение которого весьма необычно: его амплитуда остается постоянной и равной амплитуде резонанса вблизи центра линии поглощения даже при больших значениях отстройки  $|\Omega_\mu| \gg \Gamma$  (далекое крыло линии поглощения, рис. 2б), ширина резонанса быстро уменьшается с ростом  $|\Omega|$  и может быть малой по сравнению с естественной шириной линии  $\Gamma_m$ . В окрестности  $\Omega_\mu = \Omega$  в спектре пробного поля возникает провал (рис. 2), поглощение излучения значительно уменьшается и при определенных условиях практически исчезает («темный резонанс» [12, 13]). В качестве единицы измерения на всех рисунках взя-



**Рис. 2.** Зависимости вероятности поглощения пробного поля  $P_\mu$  от отстройки частоты  $\Omega_\mu$  в случае однородного уширения линии поглощения на переходе  $m-l$  ( $\Gamma \gg k_\mu v_T$ ) и при отсутствии столкновительной релаксации низкочастотной когерентности на переходе  $n-l$  ( $\tilde{\nu} = \nu$ ),  $|G|/kv_T = 5$ ,  $\nu'/k_\mu v_T = 10$ ,  $\Gamma_m/k_\mu v_T = 10^{-2}$ ,  $(k-k_\mu)/k = 10^{-4}$ , сплошные кривые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\uparrow \mathbf{k}$ , штриховые —  $\mathbf{k}_\mu \downarrow\downarrow \mathbf{k}$ ;  $\Omega = 0$  (а),  $\Omega/kv_T = 15$  (б),  $50$  (в); на вставке в более крупном масштабе показан резонанс в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(+)} \approx \Omega + |G|^2/\Omega$

та величина  $P_0$ , которая представляет собой вероятность поглощения пробного излучения в центре линии на переходе  $m-l$  в пределе малой интенсивности сильного поля. В соответствии с (10) имеем

$$P_0 = 2|G_\mu|^2 \operatorname{Re} \int \frac{W(\mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\lambda_1(\mathbf{v})}. \quad (17)$$

В случае однородного уширения линии поглощения ( $\Gamma \gg k_\mu v_T$ ) из (17) следует

$$P_0 = \frac{2|G_\mu|^2}{\Gamma},$$

в случае доплеровского уширения ( $\Gamma \ll k_\mu v_T$ ) имеем

$$P_0 = \frac{2\sqrt{\pi}|G_\mu|^2}{k_\mu v_T}.$$

Рассмотрим более детально различные области спектра пробного поля. При небольшой отстройке частоты сильного поля

$$|\Omega| \ll \Gamma \quad (18)$$

из выражения (14) следует, что спектр пробного поля описывается формулой<sup>3)</sup>

<sup>3)</sup> В формулах для спектра пробного поля величину  $\Gamma_1$  (15) можно полагать действительной (можно сделать замену  $\Gamma_1 \rightarrow \operatorname{Re} \Gamma_1$ ) при условии  $\nu' \gg qv_T$ , которое фактически всегда выполняется в случае (12) однородного уширения линии поглощения.

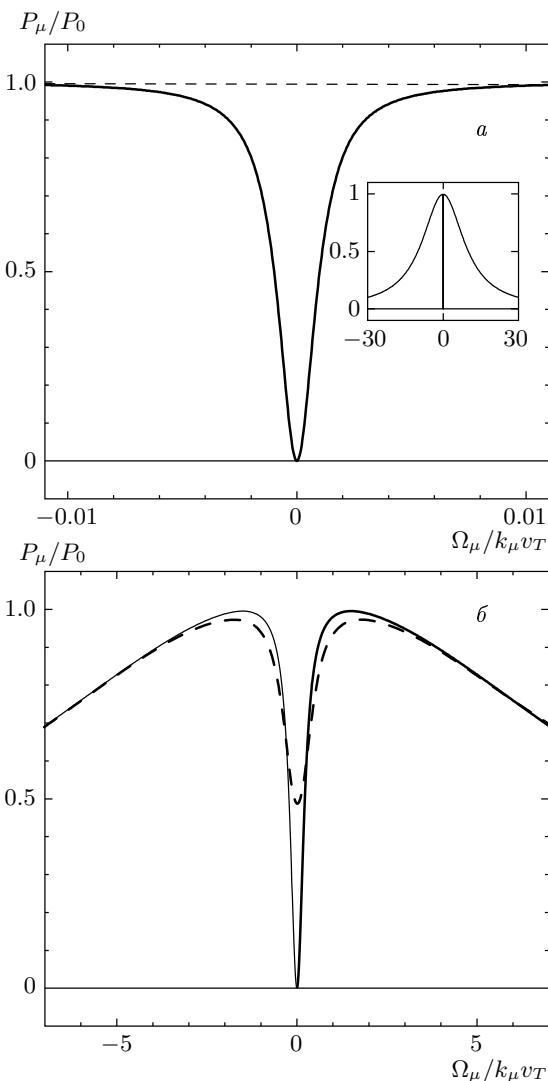
$$P_\mu = 2|G_\mu|^2 \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\Gamma - i\Omega_\mu} - \frac{|G|^2}{\Gamma^2 \left[ \Gamma_1 + \frac{|G|^2}{\Gamma} - i(\Omega_\mu - \Omega) \right]} \right\}. \quad (19)$$

Согласно (19), спектр пробного поля состоит из двух лоренцевых контуров, суммирующихся с разными знаками. Первое слагаемое в фигурных скобках описывает лоренцеву линию поглощения с полушириной  $\Gamma$ , характерную для случая предельно малой интенсивности сильного поля. Второе слагаемое описывает провал вблизи  $\Omega_\mu = \Omega$  с полушириной  $\Gamma_1 + |G|^2/\Gamma$  на фоне лоренцевского контура с полушириной  $\Gamma$ , обусловленного первым слагаемым. Ширина провала анизотропна по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений (рис. 3а). На рисунке видно, что в случае встречных волн резонанс настолько уширен, что штриховая кривая практически горизонтальна.

Анизотропия особенно ярко проявляется в случае слабой интенсивности излучения ( $|G|^2 \ll \Gamma \Gamma_1$ ), когда полуширина провала равна  $\Gamma_1$ . При сохранении фазовой памяти на переходе  $n-l$  для величины  $\Gamma_1$  в (19) справедлива формула

$$\Gamma_1 = q^2 D. \quad (20)$$

Таким образом, в этом случае ширина провала оказывается пропорциональной коэффициенту диффузии  $D$  взаимодействующих с излучением частиц. Это обстоятельство может служить основой спектроскопического метода измерения коэффициента



**Рис. 3.** Зависимости  $P_\mu(\Omega_\mu)$  в случае однородного уширения при точном резонансе для сильного поля ( $\Omega = 0$ ), столкновения сохраняют фазовую память на переходе  $n - l$ ,  $\nu'/k_\mu v_T = 10$ ,  $(k - k_\mu)/k = 10^{-4}$ ,  $\Gamma_m/k_\mu v_T = 10^{-2}$ , сплошные кривые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\uparrow \mathbf{k}$ , штриховые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\downarrow \mathbf{k}$ ;  $|G|/kv_T = 0.1$  (а, на вставке показан общий вид спектра), 1.5 (б)

диффузии поглощающих частиц в атмосфере буферного газа.

С ростом интенсивности излучения (при  $|G|^2 \sim \Gamma \Gamma_1$ ) ширины провалов для случаев однонаправленных и встречных волн становятся сопоставимыми, однако во втором случае существенного просветления среды не наступает (рис. 3б). С дальнейшим ростом интенсивности (при  $|G|^2 \gg \Gamma \Gamma_1$ ) анизотропия спектра пробного поля практически исчезает (рис. 2а).

Рассмотрим теперь случай предельно большой отстройки частоты сильного поля

$$|\Omega| \gg \Gamma. \quad (21)$$

В этом случае формулу (14) для вероятности поглощения пробного поля можно преобразовать к следующему виду:

$$P_\mu = \frac{2|G_\mu|^2}{\Gamma} \left\{ \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (\Omega_\mu + |G|^2/\Omega)^2} + \frac{(\Gamma_1 + \gamma) \gamma}{(\Gamma_1 + \gamma)^2 + (\Omega_\mu - \Omega - |G|^2/\Omega)^2} \right\}, \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{|G|^2 \Gamma}{\Omega^2}.$$

Согласно (22), спектр пробного поля состоит из двух лоренцевских контуров с полуширинами  $\Gamma$  и  $\Gamma_1 + \gamma$ , расположенных соответственно в окрестности

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(-)} \approx -\frac{|G|^2}{\Omega}$$

и

$$\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(+)} \approx \Omega + \frac{|G|^2}{\Omega}.$$

Ширина  $2(\Gamma_1 + \gamma)$  резонанса в далеком крыле линии (в окрестности  $\Omega_\mu \approx \Omega$ ) анизотропна по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений (см. вставку на рис. 2б) и может быть малой по сравнению с естественной шириной линии  $\Gamma_m$ .

При сохранении фазовой памяти на переходе  $n - l$  величина  $\Gamma_1$  определяется формулой (20) и, следовательно, ширина резонанса зависит от коэффициента диффузии  $D$  взаимодействующих с излучением частиц. Отношение  $a$  амплитуды резонанса в далеком крыле линии к амплитуде резонанса вблизи центра линии равно

$$a = \frac{\gamma}{\Gamma_1 + \gamma} \quad (23)$$

и при  $\Gamma_1 \ll \gamma$  близко к единице (рис. 2б). Таким образом, при  $\Gamma_1 \ll \Gamma$  амплитуда резонанса в далеком крыле линии не уменьшается с ростом отстройки частоты сильного поля вплоть до значений

$$|\Omega| \sim |G| \sqrt{\Gamma/\Gamma_1}.$$

В отсутствие фазовой памяти на переходе  $n - l$  имеем  $\Gamma_1 \sim \Gamma \gg \gamma$  и, следовательно, резонанс в крыле линии слабо выражен (его относительная амплитуда  $a$  мала).

Выражая величину  $\Gamma_1$  из (23), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\nu}'}{\nu'} &= 1 + \frac{(qv_T)^2}{2\nu'^2} - \frac{\gamma}{\nu'} \frac{1-a}{a} \approx \\ &\approx 1 + \frac{2D}{v_T^2} \left[ q^2 D - \frac{\gamma(1-a)}{a} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

из которого по относительной амплитуде  $a$  резонанса в крыле линии можно находить степень сохранения фазовой памяти при столкновениях, характеризуемую параметром  $\tilde{\nu}'/\nu'$  ( $0 \leq \tilde{\nu}'/\nu' \leq 1$ ). Второе приближенное равенство в формуле (24) (с коэффициентом диффузии  $D$  в правой части) фактически является точным при достаточно высокой степени сохранения фазовой памяти на переходе  $n-l$  (при  $1-\tilde{\nu}'/\nu' \ll 1$ ), так как в этом случае в правой части первого равенства можно полагать

$$\nu' = \nu_{tr} = v_T^2/2D.$$

### 3.2. Доплеровское уширение

Перейдем к анализу случая доплеровского уширения линии поглощения на переходе  $m-l$  ( $k_\mu v_T \gg \Gamma$ ). Характерные виды спектра пробного поля при различных значениях отстройки  $\Omega$  показаны на рис. 4. По сравнению с рассмотренным выше случаем однородного уширения контур линии  $P_\mu(\Omega_\mu)$  претерпевает значительные изменения: анизотропия спектра увеличивается, амплитуда узкого резонанса в крыле линии поглощения (в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(+)}$ ) растет с увеличением отстройки  $\Omega$  (рис. 4б, б) и при  $|\Omega| \gg \Gamma$  оказывается во много раз больше амплитуды резонанса вблизи центра линии (рис. 4в).

Рассмотрим детально наиболее интересный случай доплеровского уширения при большой отстройке частоты сильного излучения

$$|\Omega| \gg k_\mu v_T \gg \Gamma. \quad (25)$$

Пусть интенсивность излучения не слишком высока (см. (13)) и выполнены условия

$$\begin{aligned} \nu' &\gg qv_T, \quad k_\mu v_T \frac{|G|^2}{\Omega^2}, \\ \text{если } \mathbf{q} + \mathbf{k}_\mu \frac{|G|^2}{\Omega^2} &\neq 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} |\Omega| \Gamma &\gg (k_\mu v_T)^2 \text{ или } \nu' \gg (k_\mu v_T)^2 \frac{|G|^2}{|\Omega|^3}, \\ \text{если } \mathbf{q} + \mathbf{k}_\mu \frac{|G|^2}{\Omega^2} &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Можно показать, что в условиях (25)–(27) формула (22) для вероятности поглощения правильно описывает резонанс в крыле линии (в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega + |G|^2/\Omega$ , второе слагаемое в формуле (22)). Резонанс же вблизи центра линии (в окрестности  $\Omega_\mu = -|G|^2/\Omega$ ) формулой (22) не описывается, и для анализа этого резонанса необходимо исходить из общей формулы (10).

Для анализа резонанса в окрестности центра линии поглощения рассмотрим частный случай равенства волновых векторов сильного и пробного излучений  $\mathbf{k}_\mu = \mathbf{k}$ . В этом случае формула (10) для  $P_\mu$  существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$P_\mu = \frac{2\sqrt{\pi}|G_\mu|^2}{k_\mu v_T} \times \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{w(b)}{1 - \frac{\sqrt{\pi}\tilde{\nu}|G|^2 w(b)}{k_\mu v_T [\varepsilon + i(\nu - \tilde{\nu})'] (\varepsilon_1 + i\nu')}} \right\}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} w(b) &\equiv \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{b-t} dt, \\ b &= \frac{1}{k_\mu v_T} \left[ \left( \Omega_\mu - \frac{|G|^2|\varepsilon_1|}{\nu'^2 + \varepsilon_1^2} \right) + i \left( \Gamma + \frac{|G|^2\nu'}{\nu'^2 + \varepsilon_1^2} \right) \right], \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon - \tilde{\nu}'' , \end{aligned} \quad (29)$$

$w(b)$  — интеграл вероятности от комплексного аргумента, протабулированный в справочнике [20].

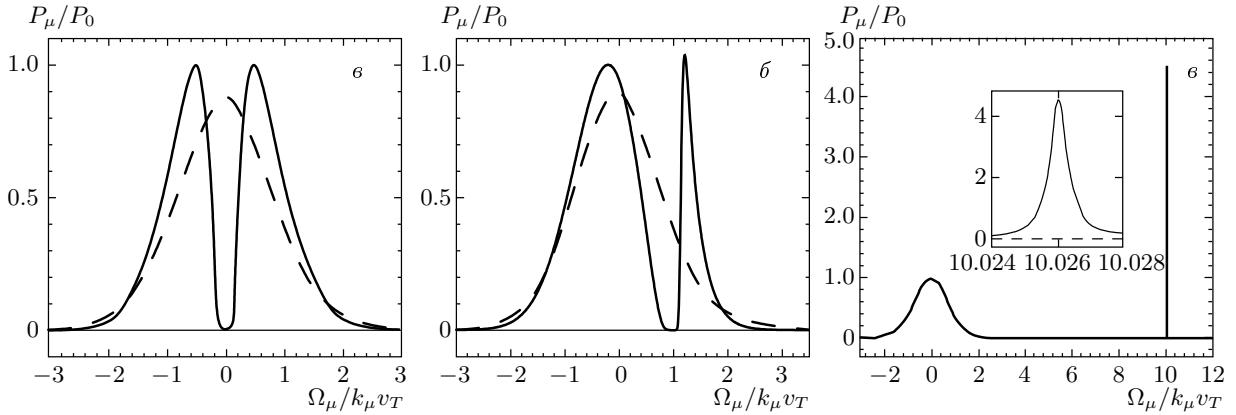
В условиях доплеровского уширения линии поглощения ( $\Gamma \ll k_\mu v_T$ ) параметр  $b$  в формуле (28) может быть мал,  $|b| \lesssim 1$ . В этом случае можно полагать

$$w(b) \approx \exp(-b^2)$$

и в отсутствие столкновений ( $\nu, \tilde{\nu} = 0$ ) из формулы (28) сразу же получаем

$$P_\mu = \frac{2\sqrt{\pi}|G_\mu|^2}{k_\mu v_T} \times \times \exp \left\{ - \left[ \Omega_\mu - \frac{|G|^2}{\Omega_\mu - \Omega} \right]^2 \frac{1}{(k_\mu v_T)^2} \right\}. \quad (30)$$

Численный анализ показывает, что в отсутствие столкновений формула (30) является очень хорошей аппроксимацией точного, но более сложного выражения (28) при любых значениях параметра  $b$ . Это объясняется тем, что в окрестности расположения спектральных компонент (вблизи  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(\pm)}$ ) условие  $|b| \lesssim 1$  применимости этой формулы всегда выполнено (показатель экспоненты в (30) обращается



**Рис. 4.** Зависимости  $P_\mu(\Omega_\mu)$  в случае доплеровского уширения линии поглощения на переходе  $m-l$  ( $k_\mu v_T \gg \Gamma$ ), столкновения сохраняют фазовую память на переходе  $n-l$  ( $\tilde{\nu}=\nu$ ),  $|G|/kv_T=0.5$ ,  $\nu'/kv_T=10^{-2}$ ,  $\Gamma_m/k_\mu v_T=10^{-2}$ ,  $(k-k_\mu)/k=10^{-4}$ , сплошные кривые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow \uparrow \mathbf{k}$ , штриховые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow \downarrow \mathbf{k}$ ;  $\Omega=0$  (а),  $\Omega/kv_T=1$  (б),  $10$  (в); на вставке в более крупном масштабе показан резонанс в окрестности  $\Omega_\mu=\Omega_\mu^{(+)} \approx \Omega + |G|^2/\Omega$

в нуль при  $\Omega_\mu = \Omega_\mu^{(\pm)}$ ). В той же области отстроек, где  $|b| \gg 1$ , вероятность поглощения мала (по сравнению с единицей измерения  $P_0$ ), и поэтому мало различие между расчетами по формулам (28) и (30).

Кроме того, численный анализ показывает, что в случае (25) большой отстройки частоты сильного излучения формула (30) очень хорошо описывает резонанс вблизи центра линии и при наличии столкновений и любом соотношении между  $\mathbf{k}_\mu$  и  $\mathbf{k}$ , несмотря на то что вывод этой формулы проведен для частного случая  $\mathbf{k}_\mu = \mathbf{k}$  и  $\nu, \tilde{\nu} = 0$ . В итоге, суммируя сказанное выше, заключаем, что при большом значении  $|\Omega|$  в случае доплеровского уширения (в условиях (25)–(27)) вероятность поглощения пробного поля описывается следующей формулой:

$$P_\mu = \frac{2|G_\mu|^2}{\Gamma} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma}{k_\mu v_T} \exp \left[ - \left( \frac{\Omega_\mu + |G|^2/\Omega}{k_\mu v_T} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{(\Gamma_1 + \gamma)\gamma}{(\Gamma_1 + \gamma)^2 + (\Omega_\mu - \Omega - |G|^2/\Omega)^2} \right\}. \quad (31)$$

Согласно (31), спектр пробного поля состоит из лоренцевского контура с полушириной  $\Gamma_1 + \gamma$ , расположенного в далеком крыле линии (в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega + |G|^2/\Omega$ ), и доплеровского контура с полушириной  $k_\mu v_T$ , расположенного вблизи центра линии (в окрестности  $\Omega_\mu = -|G|^2/\Omega$ ). Отношение  $A$  амплитуды резонанса в далеком крыле линии к амплитуде резонанса вблизи центра линии равно

$$A = \frac{k_\mu v_T}{\sqrt{\pi}\Gamma} \frac{\gamma}{\Gamma_1 + \gamma} \quad (32)$$

и может быть во много раз больше единицы (рис. 4в).

Из выражения (32) можно получить соотношение, связывающее относительную амплитуду  $A$  резонанса в крыле линии со степенью сохранения фазовой памяти при столкновениях:

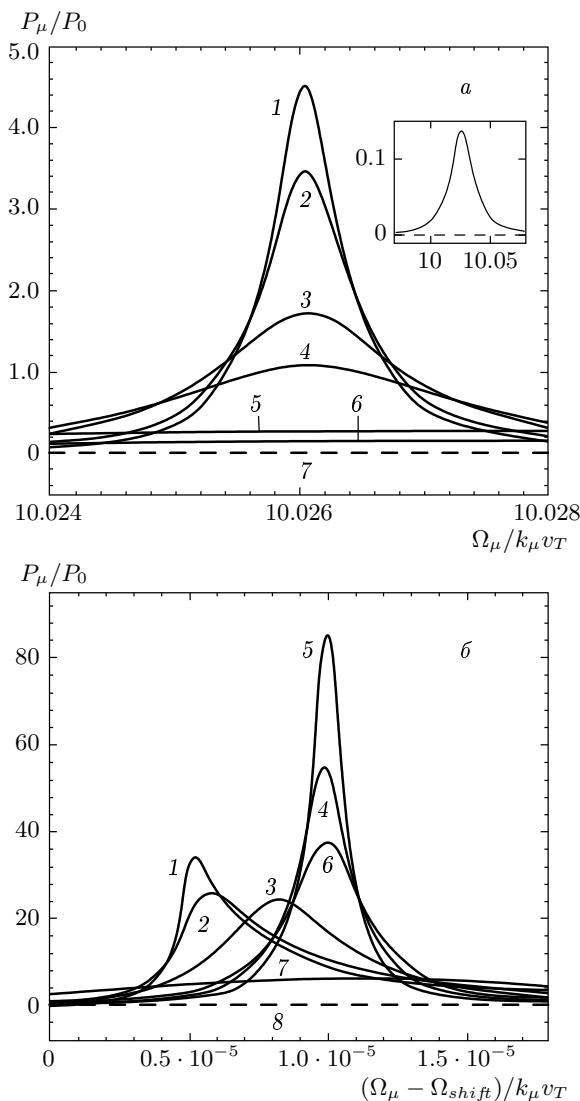
$$\frac{\tilde{\nu}'}{\nu'} = 1 + \frac{(qv_T)^2}{2\nu'^2} \frac{1}{1 + |G|^4/\Omega^2\nu'^2} - \\ - \frac{\gamma}{\nu'} \left( \frac{k_\mu v_T}{\sqrt{\pi}\Gamma A} - 1 \right). \quad (33)$$

При достаточно высокой степени сохранения фазовой памяти на переходе  $n-l$  (при  $1 - \tilde{\nu}'/\nu' \ll 1$ ) частоту столкновений  $\nu'$  в правой части (33) можно выразить через коэффициент диффузии  $D$ :

$$\nu' = \nu_{tr} = v_T^2/2D.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что амплитуда и ширина резонанса в крыле линии сильно чувствительны к эффектам фазовой памяти при столкновениях, несмотря на малость частоты столкновений по сравнению с доплеровской шириной линии (рис. 5а).

В традиционных спектроскопических задачах эффект Дикке, как известно (см., например, [1, 2]), заметно проявляется лишь в том случае, когда частота столкновений много больше доплеровской ширины линии. В рассматриваемом же нами случае эффект Дикке сильно проявляется даже при очень малой по сравнению с доплеровской шириной частоте столкновений. Физическую причину этого легко по-



**Рис. 5.** Зависимости  $P_\mu(\Omega_\mu)$  в окрестности  $\Omega_\mu = \Omega + |G|^2/\Omega$  в случае доплеровского уширения,  $\Omega/kv_T = 10$ ,  $\Gamma_m/k_\mu v_T = 10^{-2}$ ,  $(k - k_\mu)/k = 10^{-4}$ , сплошные кривые —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\downarrow \mathbf{k}$ , штриховые —  $\mathbf{k}_\mu \downarrow\uparrow \mathbf{k}$ ;  $a$  —  $|G|/kv_T = 0.5$ ,  $\nu'/k_\mu v_T = 10^{-2}$ ,  $1 - \tilde{\nu} = \nu$ ,  $\tilde{\nu}'/\nu' = 0.99$  (2), 0.95 (3), 0.9 (4), 0.5 (5);  $\tilde{\nu} = 0$  (6), 7 —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\downarrow \mathbf{k}$  при любом соотношении  $\tilde{\nu}/\nu$ ; на вставке в более крупном масштабе показаны кривые 6 и 7, 6 —  $|G|/kv_T = 0.1$  ( $|G| = |\Omega| \sqrt{q/k_\mu}$ ),  $\Omega_{shift}/k_\mu v_T = 10.002$ ,  $1 - \nu = 0$ ,  $\nu'/kv_T = 10^{-6}$  (2),  $10^{-5}$  (3),  $10^{-4}$  (4),  $10^{-3}$  (5),  $10^{-2}$  (6),  $10^{-1}$  (7), 8 —  $\mathbf{k}_\mu \uparrow\downarrow \mathbf{k}$  при любом соотношении  $\nu'/kv_T$

нять на основе представлений о полевом расщеплении уровней (такое расщепление называют еще эффектом Аутлера — Таунса или динамическим эффектом Штарка).

В сильном поле уровень  $m$  с невозмущенной энергией  $E_m^{(0)}$  расщепляется на два подуровня с квазиэнергиями  $E_m^{(\pm)}$ . Для частиц, имеющих скорость  $\mathbf{v}$ , квазиэнергия  $E_m^{(\pm)}$  зависит от  $\mathbf{v}$ , ввиду того что частота действующего на частицу поля зависит от ее скорости:

$$E_m^{(\pm)}(\mathbf{v}) = E_m^{(0)} + \hbar \Omega_\mu^{(\pm)}(\mathbf{v}),$$

$$\Omega_\mu^{(\pm)}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} [\Omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{4|G|^2 + (\Omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2}]. \quad (34)$$

Для частиц с фиксированной скоростью  $\mathbf{v}$  отстройка  $\Delta_\mu^{(\pm)}(\mathbf{v})$  частоты пробного поля на переходе между подуровнем с квазиэнергией  $E_m^{(\pm)}(\mathbf{v})$  и уровнем  $l$  с энергией  $E_l^{(0)}$  равна

$$\Delta_\mu^{(\pm)}(\mathbf{v}) \equiv \omega_\mu - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v} - \frac{E_m^{(\pm)}(\mathbf{v}) - E_l^{(0)}}{\hbar} =$$

$$= \Omega_\mu - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v} - \Omega_\mu^{(\pm)}(\mathbf{v}). \quad (35)$$

Отсюда при условии  $|G| \ll |\Omega|$  получаем

$$\Delta_\mu^{(+)}(\mathbf{v}) = \Omega_\mu - \Omega - \frac{|G|^2}{\Omega} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{|G|^2}{\Omega^2}, \quad (36)$$

$$\Delta_\mu^{(-)}(\mathbf{v}) = \Omega_\mu + \frac{|G|^2}{\Omega} - \mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{|G|^2}{\Omega^2}.$$

При слабом различии волновых векторов ( $\mathbf{k}_\mu \approx \mathbf{k}$ ,  $q \ll k$ ) доплеровский сдвиг в отстройке  $\Delta_\mu^{(+)}(\mathbf{v})$  мал по сравнению с  $\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{v}$ . Это и является причиной того, что в случае столкновений, сохраняющих фазовую память, эффект Дикке для резонанса в крыле линии сильно проявляется при достаточно малых частотах столкновений (при  $\nu' \gg qv_T, kv_T|G|^2/\Omega^2$ , при этом может быть  $\nu' \ll k_\mu v_T$ ). При  $q \ll k$  условие проявления эффекта Дикке, полученное на основе качественной картины, совпадает с условием (26) слабо-селективного по скоростям взаимодействия атомов с излучением.

Как видно из соотношений (36), в частном случае  $\mathbf{q} = -\mathbf{k}|G|^2/\Omega^2$  (при  $q \ll k$  здесь можно заменить  $\mathbf{k}$  на  $\mathbf{k}_\mu$ ) доплеровский сдвиг в отстройке  $\Delta_\mu^{(+)}(\mathbf{v})$  исчезает и все атомы независимо от их скорости резонансно взаимодействуют с пробным полем. Таким образом, в этом случае вблизи  $\Omega_\mu = \Omega + |G|^2/\Omega$  возникает свободный от доплеровского уширения резонанс. Этот резонанс хорошо описывается формулой (31) даже в отсутствие столкновений, если выполнено условие  $|\Omega|\Gamma \gg (k_\mu v_T)^2$  (см. (27)).

Рисунок 5б иллюстрирует поведение свободного от доплеровского уширения резонанса в крыле линии (при  $\mathbf{q} = -\mathbf{k}|G|^2/\Omega^2$ ) в зависимости от частоты столкновений в случае сохранения фазовой памяти. Амплитуда резонанса сложным образом зависит от частоты столкновений. С ростом  $\nu'$  от нуля

до некоторого малого значения (до  $\nu'/k_\mu v_T \sim 10^{-5}$  при параметрах рис. 5б) амплитуда резонанса сначала уменьшается (кривые 1, 2, 3). Затем, по мере роста  $\nu'$ , амплитуда резонанса существенно возрастает (кривые 4, 5), достигая максимума при  $\nu'/k_\mu v_T \sim 10^{-3}$ . С дальнейшим ростом  $\nu'$  амплитуда резонанса снова уменьшается (кривые 6, 7).

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе теоретически исследован спектр поглощения слабого зондирующего поля трехуровневыми атомами с Л-конфигурацией уровней в присутствии сильного поля на смежном переходе. Предполагалось, что атомы находятся в атмосфере буферного газа и испытывают столкновения с его частицами.

Показано, что наиболее интересные особенности в спектре пробного поля возникают в случае отсутствия столкновительной релаксации низкочастотной когерентности на переходе между двумя нижними уровнями Л-системы. В этом случае спектр пробного поля всегда (даже в пределе малого доплеровского уширения по отношению к частоте столкновений) обладает ярко выраженной анизотропией по отношению к взаимной ориентации волновых векторов сильного и пробного излучений. Могут возникать сверхзкие резонансы с ширинами много меньшими естественной, характеристики которых (ширина, амплитуда) определенным образом связаны с коэффициентом диффузии взаимодействующих с излучением атомов. На этой основе может быть развит спектроскопический метод измерения коэффициентов диффузии атомов.

Резонанс в далеком крыле линии поглощения может испытывать столкновительное дикковское сужение даже при очень малых (по сравнению с доплеровской шириной) частотах столкновений. Неожиданным оказался тот факт, что амплитуда резонанса в далеком крыле линии поглощения может на несколько порядков превышать амплитуду резонанса вблизи центра линии. Этот результат выходит за рамки привычных представлений, согласно которым сечение нерезонансных радиационных процессов всегда меньше сечения резонансных. Получены простые рабочие формулы, из которых по относительной амплитуде резонанса в крыле линии можно находить параметр  $\tilde{\nu}'/\nu'$  — степень сохранения фазовой памяти при столкновениях на переходе  $n-l$ .

Отмеченные в данной работе особенности в спектре пробного поля наиболее ярко проявляют-

ся при достаточно высокой степени сохранения фазовой памяти в столкновениях на переходе  $n-l$  (при  $1-\tilde{\nu}'/\nu' \ll 1$ ). Для атомов щелочных металлов (они хорошо моделируются Л-схемой уровней), находящихся в атмосфере инертных буферных газов, сечение столкновительных переходов между компонентами  $n, l$  сверхтонкой структуры основного состояния на 6–10 порядков меньше газокинетических сечений [11]. Поэтому для этих объектов следует ожидать высокой степени сохранения фазовой памяти при столкновениях, такой что  $1-\tilde{\nu}'/\nu' \lesssim 10^{-6}$ . Таким образом, атомы щелочных металлов, находящиеся в атмосфере инертных газов, являются вполне подходящим объектом для обнаружения и исследования всех эффектов, рассмотренных в настоящей работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16771), программы ОФН РАН «Оптическая спектроскопия и стандарты частоты» и программы «Университеты России».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин, *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*, Наука, Новосибирск (1979).
2. А. К. Попов, *Введение в нелинейную спектроскопию*, Наука, Новосибирск (1983).
3. В. С. Летохов, В. П. Чеботаев, *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения*, Наука, Москва (1990).
4. B. J. Feldman and M. S. Feld, Phys. Rev. A **5**, 899, (1972).
5. M. Kaivola, P. Thorsen, and O. Poulsen, Phys. Rev. A **32**, 207 (1985).
6. A. D. Wilson-Gordon, Phys. Rev. A **48**, 4639 (1993).
7. В. Г. Архипкин, А. К. Попов, А. С. Александровский, Письма в ЖЭТФ **59**, 371 (1994).
8. Ю. И. Белоусов, Е. В. Подивилов, М. Г. Степанов, Д. А. Шапиро, ЖЭТФ **118**, 328 (2000).
9. С. А. Бабин, Е. В. Подивилов, В. В. Потапов, Д. В. Чуркин, Д. А. Шапиро, ЖЭТФ **121**, 807 (2002).
10. Yu. I. Belousov and D. A. Shapiro, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **36**, 1495 (2003).
11. W. Happer, Phys. Rep. **44**, 169 (1972).

12. Б. Д. Агапьев, М. Б. Горный, Б. Г. Матисов, Ю. В. Рождественский, УФН **163**, 1 (1993).
13. E. Arimondo, Progress in Optics **35**, 257 (1996).
14. М. О. Скалли, М. С. Зубайри, *Квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2003).
15. O. Kocharovskaya, Phys. Rep. **219**, 175 (1992).
16. А. К. Попов, Известия РАН, серия физ. **60**, 99 (1996).
17. J. Mompart and R. Corbalan, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **2**, R7 (2000).
18. А. И. Пархоменко, А. М. Шалагин, ЖЭТФ **120**, 830 (2001).
19. С. Чепмен, Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).
20. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица, И. Стиган, Наука, Москва (1979).