

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СТРУКТУР БИНАРНОЙ СМЕСИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВИБРАЦИЙ КОНЕЧНОЙ ЧАСТОТЫ

Б. И. Мызникова^a, Б. Л. Смородин^{b}*

*^a Институт механики сплошных сред
Уральского отделения Российской академии наук
614013, Пермь, Россия*

*^b Пермский государственный университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 16 июня 2005 г.

Рассмотрена нелинейная эволюция двумерных конвективных структур несжимаемой бинарной смеси с аномальной термодиффузией в горизонтальном слое, подверженном воздействию поперечных вибраций произвольной амплитуды и конечной частоты. Численное исследование проведено для условий, соответствующих непроницаемым жестким границам, реализуемым в лабораторном эксперименте. Зависимость интенсивности течения от амплитуды вибрации изучена в первой и второй областях параметрического резонансного возбуждения термовибрационной конвекции. Результаты расчетов согласуются с найденными средствами линейной теории границами устойчивости равновесия. Выявлено качественное различие в динамике нелинейных колебаний, возникающих в областях, соответствующих субгармоническим и синхронным критическим возмущениям. В области нарастания синхронных возмущений обнаружены регулярные и стохастические динамические режимы, а также гистерезисные переходы между синхронными и субгармоническими колебаниями.

PACS: 47.20.Bp, 47.20.Ky, 47.27.Te

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования физических явлений, приводящих к образованию структур в однородных жидкостях, восходят к работам Бенара и Кармана. Процессы самоорганизации в многокомпонентных жидкостях (смесях) приводят к различным результатам. В последнее время конвекция в бинарных смесях активно изучается экспериментально [1–3] и теоретически [4–7]. Обнаружены конвективные режимы с различными пространственными и временными свойствами. Сложное поведение конвективных структур связано с явлением термодиффузии, при котором приложенный градиент температуры вызывает появление градиента концентрации. В случае аномальной термодиффузии, когда легкая компонента мигрирует к холодной границе, уменьшая эффект плавучести, конвекция смеси в постоянном поле может быть вызвана ростом осциллирующих возмущений.

Их нелинейная эволюция в надкритической области может приводить к формированию стационарных структур, стоячих, бегущих и локализованных бегущих волн, а также шевронов.

С точки зрения приложений, вибрации, переменные электрические поля, модуляции температуры оказывают эффективное воздействие на характеристики технологических процессов. Классическим примером качественного изменения реакции физической системы, помещенной в вибрационное поле, на возмущение ее состояния равновесия является маятник Капицы [8]. Переменное воздействие сильно влияет также на устойчивость и нелинейную динамику конвективных систем [9], что может быть использовано для управления гидродинамикой, тепло- и массопереносом в различных технических устройствах.

Представляет интерес исследование влияния вибраций на режим конвекции двухкомпонентной смеси, структуру установившегося течения, возможность его дестабилизации [10]. В работе [11]

*E-mail: smorodin@psu.ru

изучены конвективная устойчивость квазиравновесия и надкритические режимы конвекции бинарной смеси с термодиффузией в плоском горизонтальном канале, ограниченном жесткими пластинами, непроницаемыми для вещества, в пределе высокочастотных вибраций, амплитуда и частота которых не являются независимыми параметрами, при этом все резонансные эффекты исключены. Показано, что в неравномерно нагретой бинарной смеси с аномальной термодиффузией в результате эволюции устанавливается стационарная автоструктура, а не колебательный режим термовибрационной конвекции. Порог возникновения подобного состояния не совпадает с критическим значением параметра, предсказанным линейной теорией устойчивости, и определяется нелинейной динамикой системы.

В настоящей работе исследована нелинейная стадия конвекции в горизонтальном слое смеси с аномальной термодиффузией, к твердым непроницаемым границам которого приложена вертикальная разность температур. Система находится в поле поперечных вибраций конечной амплитуды и произвольной частоты. Изучено влияние амплитуды вибраций на динамику конвективных структур в различных областях параметрического резонансного возбуждения конвекции. Обнаружен гистерезис между синхронными и субгармоническими нелинейными колебаниями, а также переходы между регулярными и хаотическими режимами движения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой бинарной смеси, ограниченный твердыми непроницаемыми идеально теплопроводными параллельными плоскостями $z = 0$, $z = h$ (h — толщина слоя), на которых поддерживается постоянная, но разная температура $T(0) = \Theta$ и $T(h) = 0$. Вариант $\Theta < 0$ соответствует нагреву сверху, а $\Theta > 0$ представляет нагрев снизу. В данной задаче нет приложенной внешней разности концентраций, но наличие градиента температуры, благодаря эффекту термической диффузии $Sore$ [12], вызывает относительное движение компонент смеси и, как следствие, установление градиента концентрации даже в первоначально однородной смеси.

Уравнение состояния смеси имеет вид

$$\varrho = \bar{\varrho}(1 - \beta_T T - \beta_C C). \quad (1)$$

Здесь $\bar{\varrho}$ — плотность смеси при средних значениях

температуры и концентрации, T и C — отклонения температуры и концентрации от средних значений,

$$\beta_T = - \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \varrho}{\partial T} \right), \quad \beta_C = - \left(\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \varrho}{\partial C} \right)$$

— соответственно, коэффициент теплового расширения и концентрационный коэффициент плотности. Выбирая в качестве C концентрацию легкой компоненты, имеем $\beta_C > 0$.

Слой, заполненный смесью, вместе с границами линейно гармонически осциллирует в направлении поперечной оси z с циклической частотой Ω и амплитудой смещения b . В системе координат, связанной с полостью, вертикальные вибрации проявляются в модуляции ускорения силы тяжести по закону $\mathbf{g} + b\Omega^2 \sin(\Omega t)\mathbf{n}$, где \mathbf{g} — ускорение свободного падения в статическом поле тяжести, \mathbf{n} — единичный вектор вдоль оси вибрации, направленный вертикально вверх.

В отличие от случая однородной жидкости, уравнение движения бинарной смеси будет содержать дополнительные слагаемые, обусловленные действием сил, связанных с неоднородностью концентрации в модулированном гравитационном поле. Кроме уравнений теплопроводности и непрерывности, в модель включено уравнение эволюции концентрации примеси, описывающее перенос легкой компоненты смеси, диссипативные процессы диффузии и термодиффузии. Учет эффекта термодиффузии приводит к следующему выражению плотности потока легкой компоненты:

$$\mathbf{j} = -\bar{\varrho}D(\nabla C + \alpha \nabla T).$$

Здесь D — коэффициент диффузии, α — термодиффузионный параметр. Случай $\alpha < 0$, при котором направления градиентов температуры и концентрации противоположны, соответствует нормальному эффекту $Sore$; при $\alpha > 0$ эти направления совпадают, что отвечает аномальному эффекту $Sore$. В дальнейшем будем пренебрегать зависимостью коэффициентов D и α от температуры.

Если ввести безразмерные переменные на основе следующих масштабов: расстояния h , времени h^2/ν , скорости χ/h , температуры Θ , концентрации $\beta_T \Theta / \beta_C$, давления $\bar{\rho} \nu \chi / h^2$ (ν и χ — соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности), то система уравнений конвекции в приближении Буссинеска примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \\ &+ (\text{Gr} + \text{Gr}_v \sin \omega t)(T + C)\mathbf{n}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T &= \frac{1}{\text{Pr}}\Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C &= \frac{1}{\text{Sc}}\Delta(C - \psi T), \\ \text{Gr} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu^2}, \quad \text{Gr}_v &= \frac{b\Omega^2\beta\Theta h^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \\ \psi = -\frac{\beta_C\alpha}{\beta_T}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu}{D}, \quad \omega &= \frac{\Omega h^2}{\nu}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость смеси, p — конвективная добавка к гидростатическому давлению. Безразмерными параметрами задачи являются ω — частота вибрации; ψ — параметр Соре разделения смеси, положительные значения которого $\psi > 0$ соответствуют смеси с нормальной термодиффузией, отрицательные $\psi < 0$ — смеси с аномальной термодиффузией; Gr — число Грасгофа; Gr_v — вибрационный аналог числа Грасгофа, характеризующий интенсивность вибрационного воздействия; Pr — число Прандтля; Sc — число Шмидта.

При исследовании конвекции бинарной смеси используются разные типы граничных условий. Наиболее реалистичным представляется соответствующий экспериментальным условиям вариант непроницаемых изотермических твердых границ, на которых обращается в нуль поток вещества:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial z} - \psi \frac{\partial T}{\partial z} &= 0, \\ z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} - \psi \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В неподвижной смеси распределение температуры создает вертикальный градиент концентрации, обеспечивая возможность состояния механического равновесия, при котором система описывается следующими полями характеристик:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 0, \quad T_0 = -z, \quad \frac{\partial C_0}{\partial z} = -\psi, \\ p_0 = \frac{(\text{Gr} + \text{Gr}_v \sin \omega t)z^2}{2} + \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы исключить давление из числа фазовых переменных, введем функцию тока Ψ , связанную с компонентами скорости соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (5)$$

В терминах функции тока Ψ , y -компоненты завихренности $\varphi = (\text{rot } \mathbf{v})_y$, температуры и концентрации

легкой компоненты система уравнений термовибрационной конвекции бинарной смеси запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= \\ = \Delta \varphi + (\text{Gr} + \text{Gr}_v \sin \omega t) \frac{\partial(T + C)}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\text{Pr}}\Delta T, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\text{Sc}}\Delta(C - \psi T), \\ \Delta \Psi + \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия на горизонтальных и вертикальных границах расчетной области примут вид

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad T = 1, \\ \frac{\partial C}{\partial z} - \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ z = 1: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad T = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial z} - \psi \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ \Psi(0, z) = \Psi(L, z), \quad \varphi(0, z) = \varphi(L, z), \\ T(0, z) = T(L, z), \quad C(0, z) = C(L, z). \end{aligned} \quad (7)$$

На вертикальных границах ячейки, имеющей длину L , используются периодические граничные условия, позволяющие сопоставить результаты изучения нелинейной динамики конвективных структур с данными линейной теории устойчивости бинарной смеси в модулированном поле тяжести о развитии критических возмущений с волновым числом $k = 2\pi/L$.

3. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИНХРОННЫХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Приведенные в данной работе результаты получены при значениях чисел Прандтля и Шмидта, характерных для газовой смеси: $\text{Pr} = 0.75$ и $\text{Sc} = 1.5$.

Теория Флоке позволяет определить в линейном приближении спектры критических частот и границы параметрических резонансных областей неустойчивости динамической системы. На рис. 1 представлены такие результаты для смеси с аномальной термодиффузией ($\psi < 0$).

В отсутствие модуляции (в статическом поле тяжести $\text{Gr}_v = 0$) конвективная неустойчивость

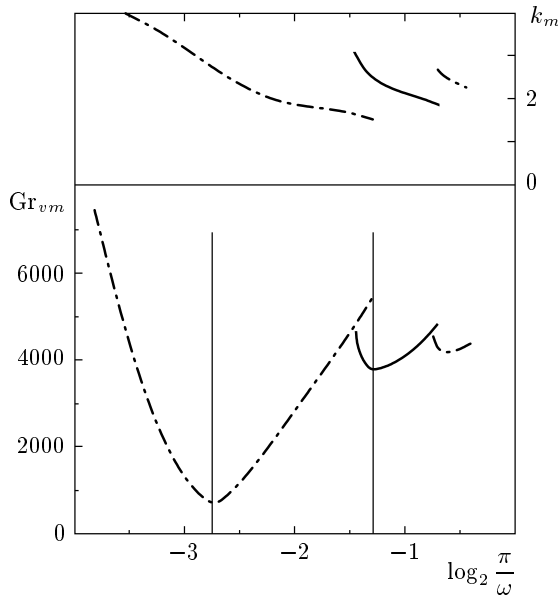


Рис. 1. Зависимости критических значений волнового числа k_m и амплитуды модуляции Gr_{vm} от обратной частоты $1/\omega$ для смеси с аномальной термодиффузией $\psi = -0.3$. В отсутствие вибрации система находится в состоянии устойчивого равновесия ($Gr = 4000$)

при $\psi = -0.3$ появляется при критическом значении числа Грасгофа $Gr_m = 4347$. При этом колебательные нейтральные возмущения имеют частоту $\omega_0 = 10.64$. При подкритическом значении числа Грасгофа $Gr = 4000$, $Gr < Gr_m$, бинарная смесь неподвижна. Рост амплитуды модуляции Gr_v может привести к неустойчивости механического равновесия смеси. Эффект параметрической резонансной дестабилизации наиболее значителен при $\omega = 21.10 \approx 2\omega_0$ и связан с возмущениями субгармонического отклика на внешнее воздействие. При этом пространственный масштаб конвективных структур определяется критическим волновым числом $k_m = 2.71$, а критическое значение амплитуды модуляции равно $Gr_{vm} = 680.30$, что значительно ниже, чем в случае нормального эффекта Соре. Минимум второй нейтральной кривой, соответствующей синхронной резонансной области, находится на частоте $\omega = 7.75 \approx \omega_0$. Он характеризуется критическими значениями волнового числа $k_m = 2.48$ и амплитуды вибрации $Gr_{vm} = 3754$. Другие минимумы на границах синхронных и субгармонических резонансных областей соответствуют появлению спектральных компонент $2\omega_0/m$, где m — целое число. Эффект дестабилизации в этих областях выражен

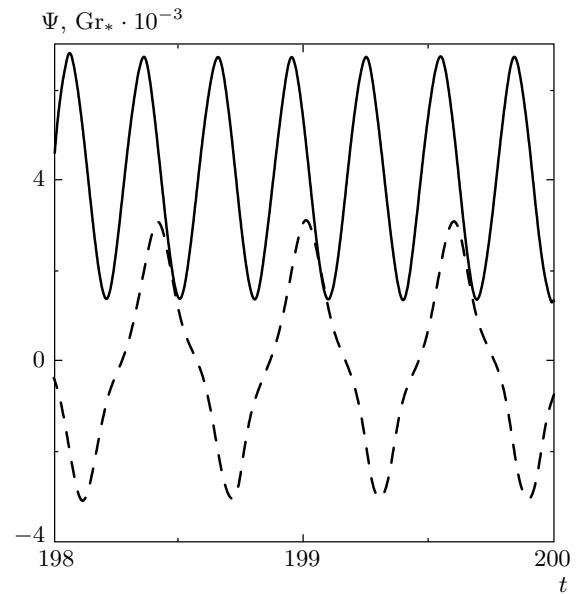


Рис. 2. Зависимость от времени значений функции тока в фиксированной точке конвективной ячейки (штриховая линия) и модулированного числа Грасгофа Gr_* (сплошная линия) в первой резонансной области при $Gr_v = 2720$, $\omega = 21.10$

слабее. Изменение волновых чисел критических субгармонических и синхронных возмущений на границах областей параметрического возбуждения представлено в верхней части рис. 1. Критические значения волновых чисел монотонно убывают внутри каждой резонансной области.

Численное решение задачи (6), (7) в полной нелинейной постановке получено методом конечных разностей. Расчет полей завихренности φ , температуры T и концентрации C осуществлен с использованием неявной схемы продольно-поперечной прогонки метода дробных шагов. Значения функции тока Ψ на каждом шаге по времени найдены с помощью итерационного метода последовательной верхней релаксации.

Выбор параметров для компьютерного моделирования нелинейных конечно-амплитудных режимов сделан на основе результатов линейной теории. Вертикальные линии в первой и второй резонансных областях на рис. 1 соответствуют разрезам пространства параметров по частоте вибрации. Вдоль этих линий проведены вычислительные эксперименты.

При значениях параметров ($m = 1$, $\omega = 21.10$), характерных для минимума первой резонансной области, в результате нарастания колебательных возмущений с волновым числом $k_m = 2.71$ рождается

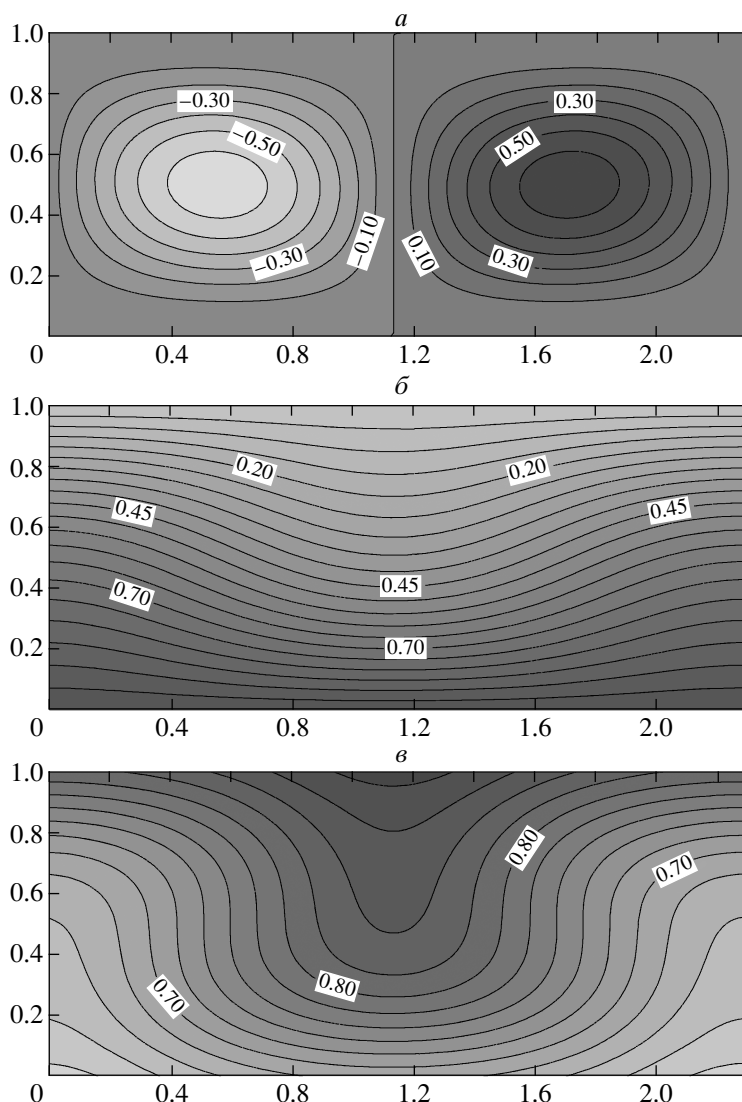


Рис. 3. Структура полей функции тока (а), температуры (б) и концентрации (в) в режиме субгармонических колебаний для значений параметров $Gr_v = 2720$, $\omega = 21.10$, соответствующих первой резонансной области

субгармонический режим термовибрационной конвекции смеси. График изменения функции тока в любой фиксированной точке конвективной ячейки (например, при $x = L/4$, $z = 1/2$) изображен штриховой линией на рис. 2. Его период вдвое превышает период модуляции поля тяжести:

$$Gr_*(\omega t) = Gr + Gr_v \sin(\omega t).$$

При этом конвективная структура представляет собой стоячую волну — поля функции тока, температуры и концентрации в каждой точке пространства пульсируют около некоторых средних значений. Пространственное распределение этих характе-

ристик в некоторый момент времени представлено картами изолиний на рис. 3. Зависимость $\Psi_{max}(Gr_v)$ (рис. 4) свидетельствует о том, что локальная бифуркация рождения стоячей волны из состояния равновесия происходит мягко, при значении амплитуды вибрации, соответствующей бифуркационному значению параметра $Gr_v = 625$. Критические значения вибрационного числа Грасгофа, найденные по линейной теории и из нелинейных расчетов, различаются приблизительно на 8%. Важно отметить, что этот результат эволюции структур в модулированном поле качественно отличается от конвективной динамики бинарной смеси в случае высокочас-

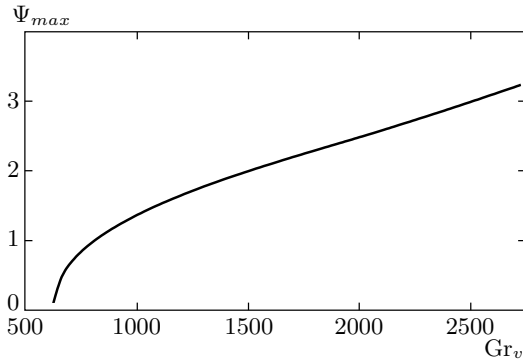


Рис. 4. Изменение максимального значения функции тока в зависимости от амплитуды вибрации Gr_v в первой резонансной области при фиксированном значении частоты модуляции $\omega = 21.10$

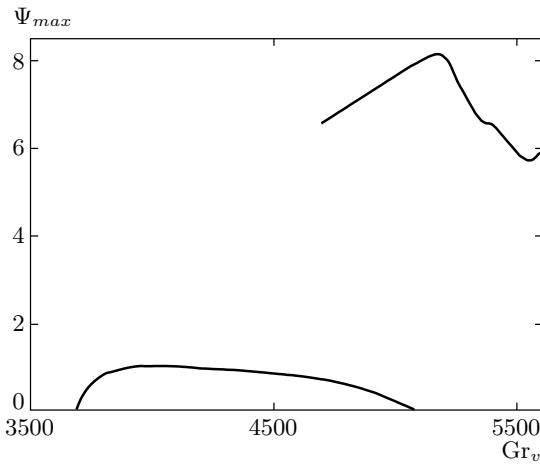


Рис. 5. Зависимость максимального значения функции тока от амплитуды вибрации Gr_v во второй резонансной области при фиксированном значении частоты модуляции $\omega = 7.75$

тотных вибраций, когда после длительного колебательного переходного процесса устанавливается стационарная конвективная структура, существующая и в подкритической области. Это можно объяснить тем, что модуляция параметра резонансным образом поддерживает собственные колебания бинарной смеси.

В области неустойчивости, вызванной синхронными возмущениями ($m = 2$), динамика системы демонстрирует гистерезисные переходы между конвективными движениями различной структуры. На рис. 5 представлена зависимость интенсивности течения от степени надкритичности на плоскости (ам-

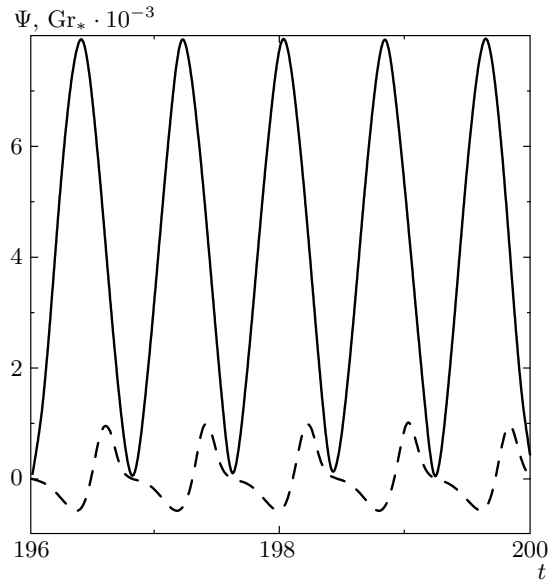


Рис. 6. Зависимость от времени значений функции тока в фиксированной точке конвективной ячейки (штриховая линия) и модулированного числа Грасгофа Gr_* (сплошная линия) во второй резонансной области при $Gr_v = 3950$, $\omega = 7.75$

плитуда вибрации Gr_v — максимальное значение функции тока). При превышении порога устойчивости равновесия, $Gr_m = 3700$, отличающегося от критического значения, предсказанного линейной теорией, не более чем на 1.5 %, мягко рождается нелинейный режим колебаний, синхронных с изменением поля тяжести. Временная эволюция функции тока в фиксированной точке конвективной ячейки ($x = L/4$, $z = 1/2$) показана на рис. 6 штриховой линией. На рис. 6 видно, что период нелинейных колебаний совпадает с периодом модуляции числа Грасгофа Gr_* . Отметим, что в данном режиме синхронных колебаний функция тока имеет ненулевое среднее значение. С ростом амплитуды вибраций интенсивность синхронных колебаний достигает максимального значения, а затем уменьшается до нуля при $Gr_v = 5105$.

При значении вибрационного аналога числа Грасгофа $Gr_v = 5119$ жестко устанавливается режим интенсивных субгармонических колебаний, для которого характерно многократное, по сравнению с синхронным режимом, увеличение амплитуды осцилляций. Этот режим остается устойчивым при дальнейшем росте Gr_v .

Использование процедуры продолжения по параметру Gr_v в сторону уменьшения амплитуды вибра-

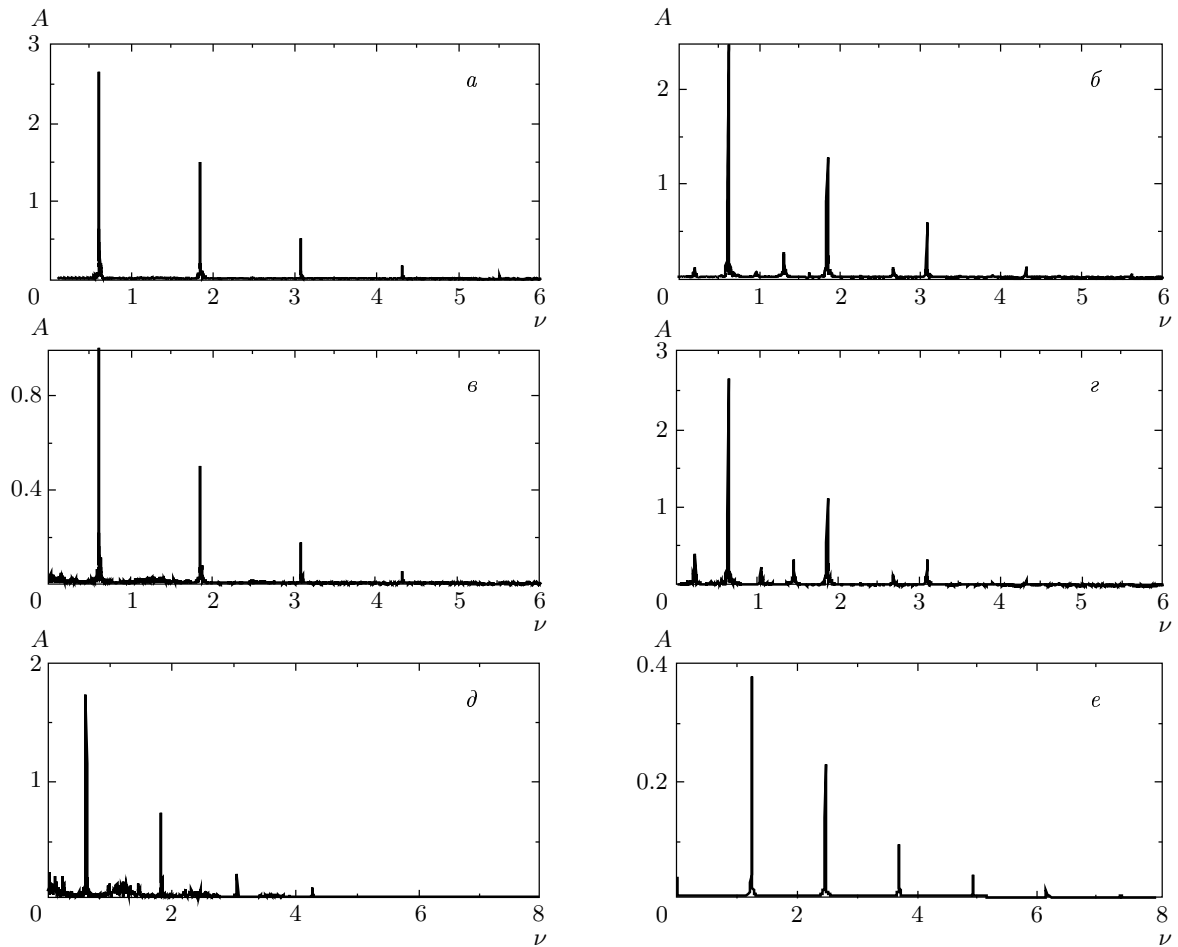


Рис. 7. Спектры интенсивности регулярных и хаотических колебаний во второй резонансной области: $Gr_v = 5612$ (а), 5400 (б), 5255 (в), 5161 (г), 4692.5 (д), 4692.4 (е)

ции позволяет наблюдать усложнение колебательно-го движения смеси. В результате цифровой обработки расчетных данных с помощью быстрого алгоритма дискретного преобразования Фурье получены графики зависимости интенсивности каждой из составляющих течения от частоты, представленные на рис. 7. При $Gr_v = 5612$ спектр колебаний (см. рис. 7а) содержит составляющую с половинной частотой относительно частоты модуляции, $\nu_{1/2} = \nu/2 = 0.617$ ($\nu = \omega/2\pi$), и ее высшие гармоники $\nu_k = k\nu_{1/2}$, $k = 1, 3, 5, \dots$, что соответствует режиму регулярных субгармонических нелинейных колебаний. При понижении амплитуды вибрации появляются спутники с комбинационными частотами $(\nu_{ki} \pm \nu_{kj})/2$, что иллюстрирует рис. 7б, соответствующий значению вибрационного числа Грасгофа $Gr_v = 5400$. В области значений амплитуды вибрации, для которых $4692.5 < Gr_v < 5375$, в слое

смеси реализуется режим динамической стохастичности, характеризующийся сплошным спектром. В нем доминируют составляющие с половинной относительно внешнего воздействия частотой и ее высшие гармоники (см. рис. 7в, д, соответствующие значениям $Gr_v = 5255, 4692.5$). Следует отметить, что хаотическая динамика конвективных структур в бинарной смеси под действием вибраций наблюдается при относительно невысокой надкритичности $Gr_v/Gr_{v0} < 1.27$. Внутри указанного интервала значений амплитуды модуляции существует окно периодичности, в котором реализуется цикл с утроенным относительно внешнего воздействия периодом. Спектр такого движения при значении вибрационного числа Грасгофа $Gr_v = 5161$ показан на рис. 7г. При $Gr_v < 4692.5$ стохастический режим становится неустойчивым и в системе устанавливается процесс менее интенсивных синхронных колебаний (рис. 7е,

$\nu = 1.234$). В области перекрытия резонансов, отвечающей диапазону значений вибрационного числа Грасгофа $4692.5 < Gr_\nu < 5105$, имеются два различных режима конвекции, различающихся интенсивностью теплопереноса, с гистерезисом их возникновения и исчезновения при увеличении или уменьшении амплитуды модуляции.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты описывают возникновение и нелинейную эволюцию динамических пространственных структур в горизонтальном слое неоднородно нагретой бинарной смеси с аномальной термодиффузией, происходящие в результате развития конвективных неустойчивостей и их последующей стабилизации в поле поперечных вибраций произвольной частоты. Показано, что надкритические режимы течения, характерные для первой и второй резонансных областей, зарождаются мягко; пороговые значения параметров соответствуют результатам линейной теории устойчивости. Спектральный анализ временных реализаций позволил получить информацию о характеристиках нелинейных конвективных структур во второй резонансной области, где наблюдается установление разнообразных регулярных и хаотических режимов с гистерезисом между синхронной и субгармонической модами колебаний.

Исследования, результаты которых представлены в данной статье, выполнены при поддержке РФФИ (гранты №№ 05-01-00789, 04-01-96029), CRDF (грант № PE-009-0).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Walden, P. Kolodner, A. Passner, and C. M. Surko, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 496 (1985).
2. E. Moses and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1373 (1986).
3. P. Kolodner, *Phys. Rev. A* **46**, 1739 (1992).
4. E. Knobloch, *Phys. Rev. A* **34**, 1538 (1986).
5. O. Batiste, M. Net, I. Mercader, and E. Knobloch, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2309 (2001).
6. P. Matura, D. Jung, and M. Lucke, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 54501 (2004).
7. M. I. Shliomis and B. L. Smorodin, *Phys. Rev. E* **71**, 036312 (2005).
8. П. Л. Капица, *ЖЭТФ* **21**, 588 (1951).
9. G. Ahlers, P. C. Hohenberg, and M. Lucke, *Phys. Rev. A* **32**, 3493 (1985).
10. G. Z. Gershuni, A. K. Kolesnikov, J.-C. Legros, and B. I. Myznikova, *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**, 547 (1999).
11. Г. З. Гершуни, А. К. Колесников, Ж. К. Легро, Б. И. Мызникова, в сб. *Вибрационные эффекты в гидродинамике*, Пермь, Изд-во ПГУ (1998), с. 97.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. 6, Наука, Москва (1986).