ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 1, стр. 71–78

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОГЕРЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ БОЗЕ-ГАЗА ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ В РЕЗОНАНСНОМ ЛАЗЕРНОМ ПОЛЕ ПРИ $T = 0$

Л. А. Максимов, А. В. Параскевов *

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2005 г.

Показано, что при при нулевой температуре двухуровневый бозе-газ в сильном резонансном поле лазера является смесью двух конденсатов с определенным соотношением плотностей. Установлены критерии устойчивости стационарных состояний такой системы относительно роста амплитуд квазибоголюбовских элементарных возбуждений бозе-газа. Показано, что кроме обычной акустической моды существует мода со щелью, пропорциональной амплитуде поля лазера. Учет неидеальности газа при определенных условиях приводит к неустойчивости и распаду конденсатов.

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Mn

1. ВВЕДЕНИЕ

После экспериментальной реализации бозе-эйнштейновской конденсации газа [1], а затем и бинарной смеси бозе-газов [2] в магнитных ловушках при сверхнизких температурах адекватное теоретическое описание свойств таких систем несомненно является востребованным. Это подтверждает множество теоретических работ по классификации [3] всех состояний бозе-смеси (в приближении Томаса – Ферми) и ее динамике (длинноволновые коллективных возбуждения [4], метастабильные состояния [5], пространственное расслоение компонентов смеси [6]). В большинстве работ смесь описывается двумя уравнениями Гросса – Питаевского, а конкретное различие между компонентами смеси не рассматривается. Представление компонент смеси как атомов в основном и возбужденном состояниях использовано в работах по изучению рассеяния [7] и поглощения [8] излучения лазера бозе-конденсатом. Однако вопрос о существовании стационарного когерентного состояния взаимодействующей системы «смесь + лазерное поле» не рассматривался. Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию этого вопроса: определено равновесное отношение плотностей конденсатов в зависимости от амплитуды резонансного лазерного поля и близости к насыщению, найден спектр элементарных квазибоголюбовских возбуждений и установлены критерии устойчивости системы двух конденсатов в лазерном поле с учетом импульса отдачи и неидеальности газа.

Рассмотрим слабонеидеальный бозе-газ двухуровневых атомов, находящийся в резонансном лазерном поле большой интенсивности при $T = 0$. Монохроматическое поле лазера, действуя на бозе-конденсат атомов в основном состоянии (надконденсатными частицами пренебрегаем), переводит некоторую часть атомов в дипольно-возбужденное состояние, причем каждый возбужденный атом движется с одинаковой скоростью, определяемой импульсом отдачи. Если интенсивность лазерного поля велика настолько, что можно пренебречь спонтанным распадом возбужденных атомов по сравнению с вынужденным испусканием, то за время, малое по сравнению со временем между столкновениями возбужденных атомов с квазичастицами конденсата невозбужденных атомов, образуется макроскопически большое число дипольно-возбужденных атомов, движущихся с одинаковой скоростью, и возникает второй бозе-конденсат. Мы не будем заниматься

*E-mail: paraskevov@kurm.polyn.kiae.su

описанием процесса образования этого конденсата и примем, что состояние с двумя конденсатами уже сформировано, условно полагая, что естественная ширина линии дипольного перехода $\gamma \approx 0$ (критерий малости γ приведен в разд. 2). Наконец, в целях максимальной простоты изложения рассматриваемого эффекта атомная система считается пространственно-однородной.

2. ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХУРОВНЕВОГО ГАЗА В ПОЛЕ ЛАЗЕРА

Гамильтониан системы N_a невозбужденных атомов и N_b дипольно-возбужденных атомов в поле лазера (объем системы $V = 1$, $\hbar = 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} &H_{tot} = H_{gas} + H_{int} + H_{ph}, \\ &H_{gas} = H_a + H_b + H_{ab}, \\ &H_a = \sum_p \left(\frac{p^2}{2m}\right) \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \\ &\qquad + \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} \frac{1}{2} U_{aa} \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_3} \hat{a}_{p_4}, \\ &H_b = \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} + \omega_0\right) \hat{b}_p^+ \hat{b}_p + \\ &\qquad + \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} \frac{1}{2} U_{bb} \hat{b}_{p_1}^+ \hat{b}_{p_2}^+ \hat{b}_{p_3} \hat{b}_{p_4}, \\ &H_{ab} = \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} U_{ab} \hat{a}_{p_1}^+ \hat{b}_{p_2}^+ \hat{b}_{p_3} \hat{a}_{p_4}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $\hat{a}_p$, $\hat{b}_p$ — операторы уничтожения атома с импульсом $\mathbf{p}$ в основном и дипольно-возбужденном состояниях, соответственно, $U_{ik} = 4\pi a_{ik}/m$ — параметры парного взаимодействия частиц, выраженные через соответствующие длины рассеяния. Чтобы исключить проблему коллапса, полагаем $U_{ik} > 0$. Взаимодействие газа с одномодовым полем лазера описываем гамильтонианом

$$H_{int} = \sum_p (g_k \hat{c}_k^+ \hat{a}_p^+ \hat{b}_{p+k} + g_k^* \hat{b}_{p+k}^+ \hat{a}_p \hat{c}_k), \qquad (2)$$

где $\hat{c}_k$, $\hat{c}_k^+$ — операторы поглощения и рождения фотона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω_k. Для простоты предполагаем, что излучение лазера линейно поляризовано вдоль единичного вектора поляризации $\mathbf{e}_k$. Константа взаимодействия атомов с лазерным полем имеет стандартный вид (чтобы упростить запись, в матричном элементе взаимодействия отдельного атома с полем опущен множитель $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$),

$$|g_k|^2 = 2\pi\omega_k \left|\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{d}\right|^2,$$

и связана с естественной шириной линии возбужденного уровня отдельного атома через дипольный матричный элемент d, $\gamma = (4/3)k_0^3 d^2$, где $k_0 = \omega_0/c$.

Наконец, гамильтониан свободных фотонов имеет вид

$$H_{ph} = \omega_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k.$$

Динамика системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \hat{a}_p}{\partial t} &= \frac{p^2}{2m}\hat{a}_p + \sum_{p+p_2=p_3+p_4} U_{aa} \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_3} \hat{a}_{p_4} + \\ &\quad + \sum_{p_1+p=p_3+p_4} U_{ab} \hat{b}_{p_1}^+ \hat{b}_{p_3} \hat{a}_{p_4} + g_k \hat{c}_k^+ \hat{b}_{p+k}, \\ i\frac{\partial \hat{b}_p}{\partial t} &= \left(\frac{p^2}{2m} + \omega_0\right) \hat{b}_p + \\ &\quad + \sum_{p+p_2=p_3+p_4} U_{bb} \hat{b}_{p_2}^+ \hat{b}_{p_3} \hat{b}_{p_4} + \\ &\quad + \sum_{p_1+p=p_3+p_4} U_{ab} \hat{a}_{p_1}^+ \hat{b}_{p_3} \hat{a}_{p_4} + g_k^* \hat{a}_{p-k} \hat{c}_k, \\ i\frac{\partial \hat{c}_k}{\partial t} &= \omega_k \hat{c}_k + \sum_p g_k \hat{a}_p^+ \hat{b}_{p+k}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Рассмотрим систему, которая состоит из трех когерентных подсистем — двух конденсатов, образованных атомами в основном и дипольно-возбужденном состояниях, и поля лазера. Найдем основное состояние этой системы, пренебрегая надконденсатными частицами. В дальнейшем удобно иметь дело не с операторами, а с обычными комплексными величинами, поэтому целесообразно использовать представление когерентных состояний. Будем называть когерентным состоянием вектор ($|0\rangle$ — прямое произведение всех пустых атомных и фотонных состояний)

$$|a\rangle = \exp\left(\sum_p a_p \hat{a}_p^+\right)|0\rangle,$$

который можно рассматривать как прямое произведение всех собственных векторов $|a_p\rangle$, таких что $\hat{a}_p|a_p\rangle = a_p|a_p\rangle$, $\langle a_p|\hat{a}_p^+ = \langle a_p| a_p^*$, относящихся к состояниям с разными импульсами. Для дипольно-возбужденных атомов и фотонов когерентные состояния определяются аналогично:

$$|b\rangle = \exp\left(\sum_p b_p \hat{b}_p^+\right)|0\rangle, \quad |c\rangle = \exp(c_k \hat{c}_k^+)|0\rangle.$$

С учетом отдачи конденсаты атомов в основном и дипольно-возбужденном состояниях должны двигаться относительно друг друга. Обозначим импульсы атомов, принадлежащих этим конденсатам, соответственно $\mathbf{p}_a$ и $\mathbf{p}_b = \mathbf{p}_a + \mathbf{k}$. Если газ как целое покоится, то

$$\mathbf{p}_a = -\frac{\mathbf{k}N_b}{N_a + N_b}.$$

Умножив справа каждое из уравнений (3) на вектор $|a\rangle\,|b\rangle\,|c\rangle$, получим систему из трех уравнений для комплексных полей a_{p_a}, b_{p_b}, c_k:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial a_{p_a}}{\partial t} &= \left(\frac{p_a^2}{2m} + U_{aa}N_a + U_{ab}N_b\right) a_{p_a} + g_k c_k^* b_{p_b}, \\ i\frac{\partial b_{p_b}}{\partial t} &= \left(\frac{p_b^2}{2m} + \omega_0 + U_{bb}N_b + U_{ab}N_a\right) b_{p_b} + \\ &\qquad + g_k^* a_{p_a} c_k, \\ i\frac{\partial c_k}{\partial t} &= \omega_k c_k + g_k a_{p_a}^* b_{p_b}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и далее мы рассматриваем газ в конденсатном состоянии, поэтому N_a и N_b принципиально являются макроскопически большими величинами, т. е. $N_a, N_b \gg 1$. Стационарное решение ищем в виде

$$\begin{aligned} a_{p_a} &= a\exp(-i\varepsilon_a t), \\ b_{p_b} &= b\exp(-i\varepsilon_b t), \quad c_k = c\exp(-i\omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что стационарное решение (5) имеет место только при условии точного резонанса между перенормированными частотой лазера и разностью энергий возбужденного и основного состояний атома:

$$\omega = \varepsilon_b - \varepsilon_a. \quad (6)$$

Из системы (4) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_a a &= \Omega_a a + g_k c^* b, \\ \varepsilon_b b &= \Omega_b b + g_k^* a c, \\ (\varepsilon_b - \varepsilon_a)\, c &= \omega_k c + g_k a^* b. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения

$$\Omega_a = \frac{p_a^2}{2m} + U_{aa}N_a + U_{ab}N_b,$$

$$\Omega_b = \frac{p_b^2}{2m} + \omega_0 + U_{ab}N_a + U_{bb}N_b,$$

$$N_a = |a|^2, \quad N_b = |b|^2.$$

Неизвестными величинами являются $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ и N_a (либо N_b, поскольку считаем, что $N = N_a + N_b = \mathrm{const}$ — заданная полная плотность газа). Третье уравнение (7) определяет перенормировку лазерной частоты, обусловленную дипольными переходами. Этой перенормировкой можно пренебречь, если интенсивность лазерного поля достаточно велика (формально это значит, что $H_{ph} \gg H_{int}$, где подразумеваются матричные элементы), так что

$$N_c = |c|^2 \gg \frac{|g_k|^2 N_a N_b}{\omega_k^2}. \quad (8)$$

Из этого неравенства непосредственно следует условие малости естественной ширины линии:

$$\gamma \ll \omega_k \frac{N_c k_0^3}{N_a N_b}. \quad (9)$$

Неравенство (8) целесообразно сравнить с исходно подразумеваемым условием достаточно высокой интенсивности поля для того, чтобы пренебречь спонтанными распадами по сравнению с индуцированными переходами. Во введенных обозначениях это условие имеет вид

$$N_c \gg \frac{2}{\pi}k^3. \quad (10)$$

Заметим, что с учетом резонансного приближения ($|\omega_k - \omega_0| \ll \omega_k, \omega_0$) неравенство (10) содержит в себе известное в лазерной физике условие насыщения заселенности возбужденного состояния, при котором атом с равной вероятностью находится в основном и в возбужденном состояниях (при этом $N_a = N_b = N/2$), количественно оно выражается как

$$|\omega_k - \omega_0| \sim \gamma \ll |A|\,, \quad (11)$$

где $|A| = |g_k|\sqrt{N_c}$ в стандартной терминологии является частотой Раби. Из (11) получаем

$$\gamma \ll \omega_k \frac{N_c}{k_0^3}. \quad (12)$$

Из сопоставления условий (9) и (12) видно, что они эквивалентны друг другу, если $k_0^3 \ge N$, т. е. когда на один атом приходится объем, больший, чем λ_0^3. С учетом (10) качественно это означает, что на один атом приходится много фотонов. Заметим, однако, что условие (11) теряет смысл в случае, когда перенормировка частоты перехода больше, чем естественная ширина линии отдельного атома, $|\varepsilon_b - \varepsilon_a - \omega_0| > \gamma$. В этом случае, по-видимому, под γ нужно понимать суммарную естественную ширину линии с учетом столкновительного уширения (расчет соответствующего вклада сделан в работе [8]).

В дальнейшем будем считать, что неравенство (9) выполнено, и полагать $\omega \approx \omega_k$. Обозначив $\varepsilon = \varepsilon_a$ и переобозначив $\Omega_b \to \Omega_b - \omega$, из уравнений (7) получим

$$(\varepsilon - \Omega_a)\,(\varepsilon - \Omega_b) = |A|^2\,.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[(\Omega_a+\Omega_b)+\eta\sqrt{\delta\omega^2+4\left|A\right|^2}\right], \quad \eta = \pm 1. \quad (13)$$

Здесь величина

$$\delta\omega = \Omega_a - \Omega_b = \omega - \omega_0 + \frac{k^2}{2m}\left(\frac{N_b - N_a}{N_a + N_b}\right) + \\ + U_{aa}N_a - U_{bb}N_b + U_{ab}(N_b - N_a)$$

играет роль отклонения от полного насыщения. Связь между амплитудами конденсатов определяется из (7) как

$$b = \left[-\frac{\delta\omega}{2\left|A\right|} + \eta\sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2\left|A\right|}\right)^2 + 1}\right] a.$$

Отсюда следует, что система в поле лазера находится в одном из состояний с фиксированным (при заданном знаке произведения $\eta\delta\omega$) соотношением плотностей конденсатов:

$$N_b = \left[-\eta\frac{\delta\omega}{2\left|A\right|} + \sqrt{\left(\frac{\delta\omega}{2\left|A\right|}\right)^2 + 1}\right]^2 N_a. \quad (14)$$

Когда $\delta\omega = 0$, резонансная частота поля равна

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}(U_{bb} - U_{aa})N,$$

поэтому при $U_{aa} \approx U_{bb}$ в качестве внешнего параметра, характеризующего отклонение от насыщения, естественно взять разность $\omega - \omega_0$. Введем безразмерные переменные:

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{2\left|A\right|}, \quad y = \frac{N_b - N_a}{N}, \\ z \approx \frac{1}{2\left|A\right|}\left[\frac{k^2}{2m} + (U_{ab} - U_{aa})N\right], \quad (15)$$

и запишем уравнение (14) в виде

$$1+y = \left(-\eta\,(x+zy) + \sqrt{(x+zy)^2+1}\right)^2 (1-y). \quad (16)$$

Уравнение (16) есть уравнение 4-й степени относительно $y\,(x)$, но решение этого уравнения относительно обратной функции $x\,(y)$ имеет простой вид:

$$x = -\left(z + \frac{\eta}{\sqrt{1-y^2}}\right) y. \quad (17)$$

Из этого выражения следует, что существует симметрия относительно одновременной замены

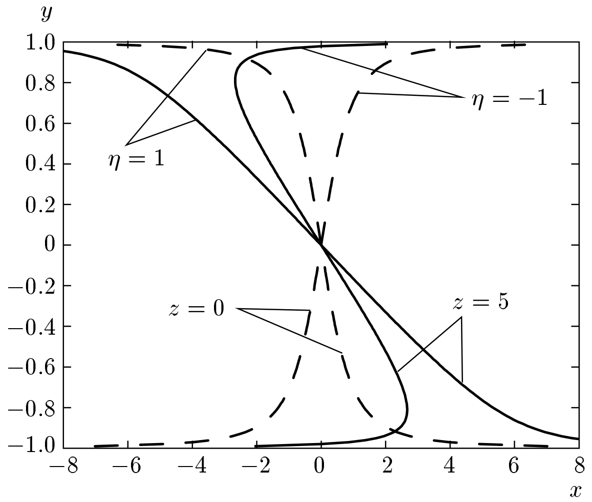

Рис. 1. Зависимость относительной разности населенностей, y, от отклонения x от полного насыщения

$x \to -x$, $y \to -y$, что является следствием симметрии гамильтониана системы относительно замены $\hat{a} \leftrightarrow \hat{b}$ (такая симметрия между «верхом» и «низом» является, в свою очередь, следствием предположения о малости γ). Отметим, что нет симметрии решений относительно изменения знака η. Для ветви $\eta = +1$ величина $y\,(x)$ — это взаимооднозначная функция x, а для $\eta = -1$ функция $y\,(x)$ при $z > 1$ в интервале

$$|x| < x_{lim} = \left(z^{2/3} - 1\right)^{3/2}$$

принимает четыре значения (см. рис. 1). Соответственно, для ветви $\eta = -1$ при $z > 1$ существуют предельные значения

$$y(\pm x_{lim}) = \mp\sqrt{1 - z^{-2/3}}$$

при аномальном загибе ветви (по сравнению со случаем $z < 1$).

При $x = 0$ оба конденсата либо (для любого знака η) имеют одинаковую плотность, $y = 0$, либо (при $\eta = -1$)

$$y = \pm\sqrt{1 - z^{-2}}, \quad (18)$$

т. е. возможны сателлитные состояния, если взаимодействие атомов с полем является достаточно слабым по сравнению с энергией отдачи $\varepsilon_r = k^2/2m$ ($z > 1$, причем $z \approx \varepsilon_r/2\left|A\right|$ при $U_{ab} \approx U_{aa}, U_{bb}$). Если же взаимодействие атомов с полем сильное ($z < 1$), то при $|x| \ll 1$ (т. е. в случае

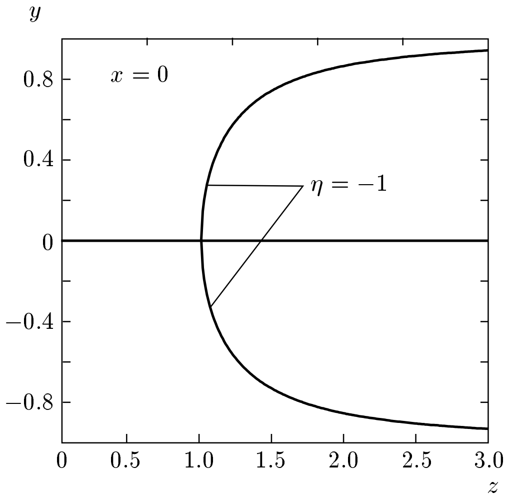

Рис. 2. Зависимость относительной разности населенностей, y, от параметра z (см. (15))

$|\varepsilon_b - \varepsilon_a - \omega_0| \le \gamma \ll |A|$) есть решения только в окрестности центра ($y = -x/(z+\eta)$).

Таким образом, из анализа функции $x(y)$ видно, что, во-первых, при условии насыщения, $|x| \ll 1$, существуют четыре стационарных состояния, причем кроме обычных решений $y \approx 0$ имеют место два сателлитных состояния, в которых населенности верхнего и нижнего уровней существенно различаются, во-вторых, вне области насыщения при $|x| > x_{lim}$ существуют два стационарных состояния, а при $|x| < x_{lim}$ снова четыре.

Интересно также проследить зависимость $y(z)$ при $x = 0$: если $z > 1$, то на графике $y(z)$ помимо $y = 0$ возникает бифуркация (см. рис. 2), связанная с возможностью сателлитных состояний.

3. СОВМЕСТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНДЕНСАТОВ В ПОЛЕ ЛАЗЕРА

Полученное стационарное состояние является неустойчивым, если спектр элементарных возбуждений системы в этом состоянии содержит мнимую часть. Для выяснения роли взаимодействия между атомами прежде всего разобран случай идеального газа. Помимо этого рассмотрен вопрос об устойчивости в случае полного насыщения ($\omega = \omega_0, N_a = N_b = N/2$) и в случае сателлитного состояния.

Вначале найдем систему уравнений, задающих спектр одночастичных возбуждений конденсатов. Запишем уравнения (3) для комплексных полей в линейном приближении по амплитуде надконденсатных частиц в представлении ($\mathbf{q}$ — импульс квазичастицы)

$$\begin{gathered} a_p = \bar{a}_p \exp(-i\varepsilon t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_a \pm \mathbf{q}, \\ b_p = \bar{b}_p \exp(-i\varepsilon t - i\omega t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_b \pm \mathbf{q}, \end{gathered}$$

в котором система (3) принимает вид замкнутой системы с постоянными коэффициентами (знаки векторов опущены):

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \bar{a}_{p_a+q}}{\partial t} = \left(\frac{(p_a+q)^2}{2m} - \varepsilon + \right. \\ & \qquad \left. + 2\mu_{aa} + U_{ab}N_b\right)\bar{a}_{p_a+q} + \\ & + \mu_{aa}\bar{a}^+_{p_a-q} + (\mu_{ab}+A)\bar{b}_{p_b+q} + \mu_{ab}\bar{b}^+_{p_b-q}, \\ & -i\frac{\partial \bar{a}^+_{p_a-q}}{\partial t} = \left(\frac{(p_a-q)^2}{2m} - \varepsilon + \right. \\ & \qquad \left. + 2\mu_{aa} + U_{ab}N_b\right)\bar{a}^+_{p_a-q} + \\ & + \mu_{aa}\bar{a}_{p_a+q} + \mu_{ab}\bar{b}_{p_b+q} + (\mu_{ab}+A)\bar{b}^+_{p_b-q}, \\ & i\frac{\partial \bar{b}_{p_b+q}}{\partial t} = \left(\frac{(p_b+q)^2}{2m} - \varepsilon - (\omega-\omega_0) + \right. \\ & \qquad \left. + 2\mu_{bb} + U_{ab}N_a\right)\bar{b}_{p_b+q} + \\ & + \mu_{bb}\bar{b}^+_{p_b-q} + (\mu_{ab}+A)\bar{a}_{p_a+q} + \mu_{ab}\bar{a}^+_{p_a-q}, \\ & -i\frac{\partial \bar{b}^+_{p_b-q}}{\partial t} = \left(\frac{(p_b-q)^2}{2m} - \varepsilon - (\omega-\omega_0) + \right. \\ & \qquad \left. + 2\mu_{bb} + U_{ab}N_a\right)\bar{b}^+_{p_b-q} + \\ & + \mu_{bb}\bar{b}_{p_b+q} + \mu_{ab}\bar{a}_{p_a+q} + (\mu_{ab}+A)\bar{a}^+_{p_a-q}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь использованы обозначения $\mu_{ik} = U_{ik}\sqrt{N_iN_k}$ и $A = g^*_k c$ (фазу лазерного поля выбираем так, чтобы величина A была действительной и положительной).

В случае идеального газа, когда все $U_{ik} = 0$, уравнение на собственные значения системы (19) с учетом выражений (13) и (15) дает:

$$E_{1,2} = -\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{2m}y + \frac{q^2}{2m} - \frac{1}{2}\eta\sqrt{\delta\omega^2 + 4|A|^2} \pm \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\delta\omega + \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}\right)^2 + 4|A|^2},$$

$$E_{3,4} = -\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{2m}y - \frac{q^2}{2m} + \frac{1}{2}\eta\sqrt{\delta\omega^2 + 4|A|^2} \pm \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\delta\omega - \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{m}\right)^2 + 4|A|^2}.$$

Здесь

$$\delta\omega = \omega - \omega_0 + \frac{k^2}{2m}y.$$

При полном насыщении ($\delta\omega = 0, y = 0$) получаем

$$E_{1,2} = \left(\frac{q^2}{2m} - \eta|A|\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{2m}\right)^2 + |A|^2},$$

$$E_{3,4} = -\frac{q^2}{2m} + \eta|A| \pm \sqrt{\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{2m}\right)^2 + |A|^2}.$$

Отсюда следует, что при заданном η у двух мод существует щель $2|A|$ в спектре возбуждений при $q = 0$, а бесщелевые моды при $A = 0$ и $q \to 0$ дают звуковой закон дисперсии:

$$E(q) \sim c_s q,$$

где $c_s = |\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}|/2mq$ — скорость звука. Вдали от насыщения ($|x| \gg 1, |y| \approx 1$ в (15)) при заданном η две ветви имеют щель порядка $|\omega - \omega_0|$, а остальные ветви по-прежнему бесщелевые.

Таким образом, в приближении идеального газа стационарное конденсатное состояние всегда устойчиво в указанном выше смысле.

В случае неидеального газа можно найти аналитическое выражение для спектра системы (19) при полном насыщении, предположив, что $U_{aa} = U_{bb}$:

$$E_\pm^2 = \left(P^2 - \mu^2\right) + A(A + 2\mu_{ab}) + Q^2 \pm \pm 2\sqrt{(P^2 - \mu^2)Q^2 + (AP + \mu_{ab}(P - \mu))^2}, \quad (20)$$

$$P = \frac{q^2}{2m} - \eta A + \mu, \quad Q = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}}{2m},$$

$$\mu = \frac{1}{2}U_{aa}N, \quad \mu_{ab} = \frac{1}{2}U_{ab}N.$$

Прежде всего рассмотрим длинноволновый предел ($q \to 0$),

$$E_\pm^2(q) \approx E_\pm^2(0) + \frac{q^2}{2m}\Delta E,$$

где

$$E_\pm^2(0) = \xi^2 - \mu^2 + A(A + 2\mu_{ab}) \pm 2A|\xi - \eta\mu_{ab}|, \quad \xi = \mu - A\eta,$$

$$\Delta E = 2\xi + \varepsilon_r\cos^2\theta \pm \left(\frac{\xi^2 - \mu^2}{A|\xi - \eta\mu_{ab}|}\varepsilon_r\cos^2\theta + + 2A(A + \mu_{ab})\,\mathrm{sign}(\xi - \eta\mu_{ab})\right). \quad (21)$$

Здесь θ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$. Критичным в смысле устойчивости является E_-^2. В случае, когда выражение под знаком модуля в (21) положительно, $\mu > \eta(\mu_{ab} + A)$, получим

$$E_-^2(0) = 2A(A - \mu + \mu_{ab})(1 + \eta),$$

$$\Delta E = 2(\mu - \mu_{ab} - A(1 + \eta)) + + \varepsilon_r\cos^2\theta\left[1 - \frac{(A - 2\eta\mu)}{\mu - \eta(\mu_{ab} + A)}\right].$$

Отсюда видно, что существует неустойчивость в состоянии с $\eta = 1$ при $\mu > \mu_{ab} + A$ и в состоянии с $\eta = -1$,

$$\Delta E = 2(\mu - \mu_{ab})\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\cos^2\theta}{\mu + \mu_{ab} + A}\right),$$

при $\mu < \mu_{ab}$ (что совпадает с известным [6] условием неустойчивости бинарной смеси бозе-газов относительно пространственного расслоения ее компонент) или при

$$\varepsilon_r\cos^2\theta > 2(\mu + \mu_{ab} + A),$$

т. е. при сильной отдаче неустойчивость развивается прежде всего в направлении импульса отдачи (соответствующий вид спектра (20) при $\cos^2\theta = 1$ см. на рис. 3).

Обратный случай для $\mu < \eta(\mu_{ab} + A)$ имеет смысл только при $\eta = 1$ и не дает неустойчивости:

$$E_-^2(0) = 0,$$

$$\Delta E = 2(\mu + \mu_{ab})\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r\cos^2\theta}{A + \mu_{ab} - \mu}\right) > 0.$$

Рассмотрим теперь случай поперечных (по отношению к вектору $\mathbf{k}$) возбуждений, когда $Q = 0$:

$$E_\pm^2 = \delta^2 + 2\mu\delta + A(A + 2\mu_{ab}) \pm \pm 2|A(\delta + \mu) + \mu_{ab}\delta|, \quad \delta = \frac{q^2}{2m} - \eta A. \quad (22)$$

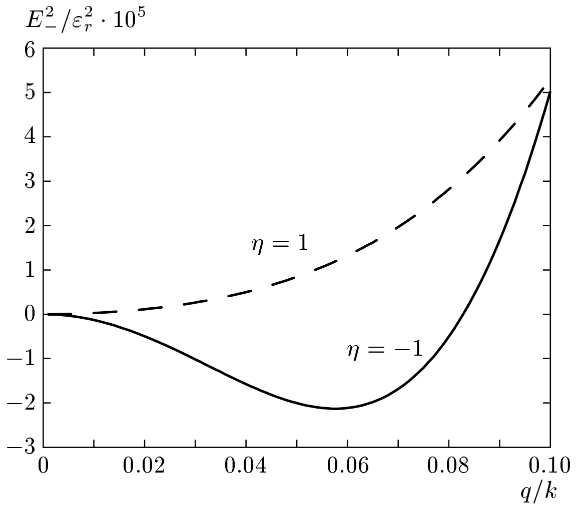

Рис. 3. Пример неустойчивого спектра (длинноволновый предел) в состоянии с $\eta = -1$ при полном насыщении для $\varepsilon_r > 2(\mu + \mu_{ab} + A) = 0.43\varepsilon_r$, $\mu : \mu_{ab} : A = 1 : 0.5 : 20$. Масштаб по вертикальной оси для кривой $\eta = 1$ уменьшен в 40 раз

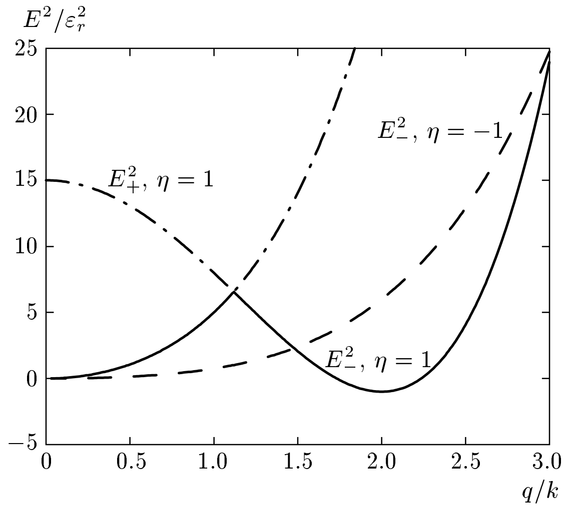

Рис. 4. Пример неустойчивого спектра поперечных возбуждений в состоянии с $\eta = 1$ при полном насыщении для $Q = 0$, $A = 2.5\varepsilon_r$, $\mu : \mu_{ab} : A = 3 : 1 : 5$. Масштаб по вертикальной оси для кривой $\eta = -1$ уменьшен в 4 раза. Излом на кривой E_-^2, $\eta = 1$ соответствует нулю модуля в (22)

Для E_-^2 при

$$(A + \mu_{ab}) \left(\frac{q^2}{2m} - \eta A \right) + A\mu > 0$$

получим

$$E_-^2 = \left(\frac{q^2}{2m} - A(1+\eta) \right) \times \left(\frac{q^2}{2m} - A(1+\eta) + 2(\mu - \mu_{ab}) \right).$$

Видно, что в состоянии с $\eta = -1$ неустойчивость возникает при уже полученном условии $\mu < \mu_{ab}$, а в состоянии с $\eta = 1$ есть область неустойчивости,

$$2A - 2(\mu - \mu_{ab}) < \frac{q^2}{2m} < 2A,$$

с центром в точке

$$\frac{q_{min}^2}{2m} = 2A - (\mu - \mu_{ab}),$$

где

$$E_-^2(q_{min}) = -(\mu - \mu_{ab})^2.$$

Кроме того, при $q = 0$ в этом состоянии возникает неустойчивость, если $\mu > A + \mu_{ab}$ (однако всегда $E_-^2(q_{min}) < E_-^2(0)$). Характерный для данного случая вид спектра (20) приведен на рис. 4.

При

$$(A + \mu_{ab}) \left(\frac{q^2}{2m} - \eta A \right) + A\mu < 0$$

имеем

$$E_-^2 = \left(\frac{q^2}{2m} + A(1-\eta) \right) \times \left(\frac{q^2}{2m} + A(1-\eta) + 2(\mu + \mu_{ab}) \right),$$

откуда следует, что оба состояния с $\eta = \pm 1$ устойчивы.

Наконец, рассмотрим вопрос об устойчивости сателлитов при $U_{aa} = U_{bb}$. Вдали от насыщения ($|\omega - \omega_0| \gg A, \mu, \mu_{ab}$) можно пренебречь неидеальностью газа и, как мы убедились выше, конденсаты устойчивы. В области насыщения, $|x| \ll 1$, сателлиты имеются только в состоянии с $\eta = -1$. Для простоты ограничимся случаем, когда плотность одного конденсата много меньше, чем другого, для определенности, $N_b \ll N_a$ ($y \approx -1$). Оказывается, что можно получить аналитическое выражение спектра элементарных возбуждений в приближении тяжелых атомов и сильного, по сравнению с отдачей, взаимодействия между ними, формально считая, что $k \ll q$ (отметим, что при таких условиях нельзя переходить к длинноволновому пределу $q \to 0$):

$$E_\pm^2 = \frac{1}{2} \left\{ W^2 + V^2 + 2A^2 - \mu^2 \pm \left[\left(W^2 - V^2 - \mu^2 \right)^2 + 4A^2 \left((W+V)^2 - \mu^2 \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (23)$$

$$W = \frac{q^2}{2m} + \frac{1}{2}(3\mu - \mu_{ab}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\mu - \mu_{ab})^2 + A^2},$$
$$V = \frac{q^2}{2m} - \frac{1}{2}(\mu - \mu_{ab}) + \sqrt{\frac{1}{4}(\mu - \mu_{ab})^2 + A^2},$$

где $\mu = U_{aa}N$, $\mu_{ab} = U_{ab}N$. Переписав выражение (23) в виде

$$E_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\left\{W^2 + V^2 + 2A^2 - \mu^2 \pm \pm\left[\left(W^2 + V^2 + 2A^2 - \mu^2\right)^2 - - 4\left(A^2 - WV\right)^2 + 4\mu^2V^2\right]^{1/2}\right\},$$

можно непосредственно указать область возможных отрицательных значений E_-^2,

$$-4\left(A^2 - WV\right)^2 + 4\mu^2V^2 > 0.$$

Отсюда

$$\mu V > \left(WV - A^2\right). \qquad (24)$$

Заметим, что при $\mu \approx \mu_{ab}$ условие (24) никогда не выполняется и сателлитное состояние устойчиво.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным результатом данной работы является получение стационарного решения уравнений движения единой когерентной системы бозе-конденсатов двухуровневых атомов и лазерного поля большой интенсивности. При этом установлена зависимость плотностей конденсатов от частоты Раби и отстройки от полного насыщения. Проведен анализ устойчивости системы относительно возникновения мнимой части в спектре элементарных возбуждений, что приводит к экспоненциальному росту колебаний, нагреву системы и распаду конденсатов либо к переходу системы в одно из устойчивых состояний (вопрос об эволюции системы после распада нестабильного стационарного состояния является предметом отдельного исследования).

Условие применимости теории по температуре имеет вид

$$T \ll T_c \sim \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}, \quad n = \min(N_a, N_b).$$

Отметим, что в сателлитном состоянии, когда плотности конденсатов существенно различаются, при $T > T_c$ конденсат с меньшей плотностью превратится в надконденсатные частицы, дополнительные по отношению к конденсату с большей плотностью. Вопрос о том, разрушится ли этот конденсат при добавлении в него «инородных» надконденсатных частиц, представляет самостоятельный интерес.

Авторы признательны Ю. М. Кагану и С. Н. Бурмистрову за ценные замечания. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и ИНТАС.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews et al., Science **269**, 198 (1995); K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995); C. C. Bradley, C. A. Sackett, ans R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997); D. G. Fried, Th. C. Killian, L. Willmann et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).

2. D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 1539 (1998).

3. Tin-Lin Ho and V. B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996); M. Trippenbach, K. Goral, K. Rzazewski et al., J. Phys. B **33**, 4017 (2000).

4. Th. Busch, J. I. Cirac, V. M. Perez-Garcia, and P. Zoller, Phys. Rev. A **56**, 2978 (1997); R. Graham and D. Walls, Phys. Rev. A **57**, 484 (1998).

5. H. Pu and N. P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1134 (1998).

6. P. Ao and S. T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998); E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998); H. Shi, Wei-Mou Zheng, and Siu-Tat Chui, Phys. Rev. A **61**, 063613 (1998); R. A. Barankov, Phys. Rev. A **66**, 013612 (2002).

7. J. Ruostekoski, M. J. Collett, R. Graham, and D. Walls, Phys. Rev. A **57**, 511 (1998).

8. M. O. Oktel and L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **83**, 6 (1999).