ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 1, стр. 79–85

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. М. Дюгаев[a,b]***, П. Д. Григорьев***[a*]

[a] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук 142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

[b] *Max-Planck-Institut for the Physics of Complex Systems Dresden D-01187, Germany*

Поступила в редакцию 9 июля 2005 г.

Приведено точное решение уравнения Шредингера для основного состояния двумерных паулевских электронов в неоднородном поперечном магнитном поле H для двух случаев. В первом случае поле H зависит от одной переменной, $H = H(y)$, во втором — обладает аксиальной симметрией, $H = H(\rho)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Найдены распределения плотности электронов $n = n(y)$ и $n = n(\rho)$, отвечающие полностью заполненному нижнему уровню. Для квазиоднородных и знакопостоянных полей функции $n(y)$, $n(\rho)$ локально связаны с магнитным полем: $n(y) = H(y)/\phi_0$, $n(\rho) = H(\rho)/\phi_0$, где $\phi_0 = hc/|e|$ — квант магнитного потока. Рассмотрены периодические, сингулярные и ограниченные на плоскости xy магнитные поля. Анализируются конечные электронные объекты в неоднородном магнитном поле.

PACS: 73.20.-r, 73.20.At, 75.70.-i

1. Для спектра двумерных электронов в поперечном однородном магнитном поле H характерна высокая степень его вырождения. Каждый уровень $E_{n,\sigma}$ вырожден с кратностью HS/ϕ_0, где $\phi_0 = hc/|e|$ квант магнитного потока, а S — площадь области, доступной для электронов

$$E_{n,\sigma} = \left(n + \frac{1}{2} + \sigma\right)\hbar\omega_c, \tag{1}$$

$$\omega_c = \frac{H|e|}{Mc}.$$

В уравнении (1) $\sigma = \pm 1/2$ — проекция спина электронов на направление магнитного поля H, ω_c — циклотронная частота, e и M — заряд и масса электрона. В неоднородном поле $H = H(x, y)$ вырождение $E_{n,\sigma}$ снимается для всех уровней, кроме основного $E_{0,-1/2} = 0$, для которого спин электрона направлен против поля. Для поля $H(x, y)$, ограниченного на плоскости xy, в работе [1] точно определена степень вырождения основного состояния двумерных электронов через полный магнитный поток $\bar{H}$:

$$\bar{H} = \int H(x, y)\, dx\, dy \equiv (N + \varepsilon)\phi_0. \tag{2}$$

Здесь N — целое число, а $0 < \varepsilon < 1$. При таком определении $\bar{H}$ существует ровно N связанных магнитным полем электронных состояний. Иначе говоря, степень вырождения основного состояния оказывается той же, что и в однородном поле с тем же потоком $\bar{H}$ (2). Результат работы [1] существенно опирается на то, что электроны подчиняются линейному уравнению Дирака. Для случая дважды периодических магнитных полей основное состояние двумерных электронов исследовалось в работе [2]. В общей постановке задачи, которая характерна для работ [1, 2], трудно определить наблюдаемые величины, например, распределение плотности электронов $n(x, y)$, отвечающее полностью заполненному, насыщенному основному уровню $E_{0,-1/2} = 0$ в заданном неоднородном поле $H(x, y)$.

2. В настоящей работе нами рассмотрены два простейших типа неоднородных полей, для которых возможно определить функцию $n(x, y)$. Первое поле зависит только от одной переменной, $H = H(y)$, а

[*] E-mail: pashag@itp.ac.ru

второе обладает аксиальной симметрией, $H = H(\rho)$, где $\rho^2 = x^2 + y^2$. Для указанных полей точное решение задачи обладает поразительной простотой, что делает уместным сразу привести наши основные результаты. Для одномерного поля $H = H(y)$ волновые функции основного состояния $\psi_p(x,y)$ имеют вид (подробное обоснование см. ниже в разд. 4)

$$\psi_p(x,y) = e^{ipx}\psi_p(y),\qquad \psi_p(y) = A_p \exp\left[py - \frac{2\pi\phi(y)}{\phi_0}\right]. \tag{3}$$

В уравнениях (3) p — импульс свободного движения электрона по оси x, A_p — нормировочная постоянная, а $\phi(y)$ — потенциал поля $H(y)$:

$$\phi''(y) = H(y). \tag{4}$$

Для однородного поля $\phi(y) = Hy^2/2$ и уравнения (3) переходят в известное [3] выражение для волновых функций основного уровня Ландау. Распределение плотности электронов $n(y)$ выражается через нормированные функции $\psi_p(y)$ (3):

$$n(y) = \frac{1}{2\pi}\int \psi_p^2(y)\,dp, \tag{5}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_p^2(y)\,dy = 1.$$

Область интегрирования по импульсу p в выражении (5) неограничена ($-\infty < p < \infty$), если поток поля $\bar{H}$ (2) неограничен ($\bar{H} = \infty$). В этом случае все функции ψ_p можно отнормировать. Если же $\bar{H}$ имеет конечное значение, то конечна и область интегрирования по p в выражении (5), что отвечает ограниченной на плоскости xy электронной системе в неоднородном магнитном поле. Для физических приложений интересен пример знакопостоянного и квазиоднородного поля $H(y)$, когда магнитная длина $l_H(y)$ слабо зависит от y:

$$l_H^2(y) \equiv \frac{\hbar c}{|e|H(y)},\quad \frac{\partial l_H(y)}{\partial y} \ll 1. \tag{6}$$

Если магнитная длина l_H мало меняется на расстояниях порядка ее самой (6), то существует локальная связь плотности $n(y)$ и поля $H(y)$

$$n(y) = \frac{H(y)}{\phi_0}, \tag{7}$$

$$\phi_0 = \frac{hc}{|e|}.$$

Для квазиоднородных полей (6) можно найти весь спектр электронов. Он дается выражением (1) с циклотронной частотой, зависящей от импульса p через уравнение $y_0 = y_0(p)$, где координата y_0 определена условиями

$$p = \frac{|e|}{\hbar c}\phi'(y_0),\quad \omega_c(y_0) = \frac{|e|H(y_0)}{Mc}. \tag{8}$$

Для периодического поля $H(y)$ все уровни Ландау (1), кроме основного, периодически зависят от импульса p, а уравнения (1), (4) и (8) являются нелинейными уравнениями, определяющими эту зависимость. Ниже мы приведем несколько примеров полей $H(y)$, для которых можно отнормировать функции ψ_p (3) и найти плотность $n(y)$ (5).

3. Для аксиального поля $H = H(\rho)$ волновые функции основного состояния также связаны с потенциалом поля ϕ:

$$\psi_m(\theta,\rho) = \frac{e^{-im\theta}}{\sqrt{2\pi}} R_m(\rho), \tag{9}$$

$$R_m = A_m \rho^m \exp\left(-\frac{2\pi\phi(\rho)}{\phi_0}\right),$$

$$\phi''(\rho) + \frac{\phi'(\rho)}{\rho} = H(\rho),$$

где θ — азимутальный угол, m — магнитное квантовое число ($m > 0$), A_m — нормировочная постоянная. Распределение электронной плотности $n = n(\rho)$ дается выражением типа выражения (5):

$$n(\rho) = \frac{1}{2\pi}\sum_m R_m^2(\rho), \tag{10}$$

$$\int\limits_0^{\infty} R_m^2(\rho)\rho\,d\rho = 1.$$

Для однородного поля $\phi = H\rho^2/4$, и уравнение (9) определяет волновые функции основного состояния в калибровке Фока [3]. Для медленных и знакопостоянных полей $H(\rho)$ имеет место связь $n(\rho)$ и $H(\rho)$, аналогичная выражению (7):

$$n(\rho) = \frac{H(\rho)}{\phi_0}. \tag{11}$$

Приведем примеры сингулярных полей, когда связь (11) не имеет места, и рассмотрим конечные электронные системы с ограниченной суммой по m (10), что связано с конечностью потока $\bar{H}$ (2). Если поток $\bar{H}$ (2) равен целому числу, то плотность

$n(\rho)$ (10) отвечает компактному электронному объекту с быстроспадающей асимптотикой:

$$n(\rho) \propto 1/\rho^4 \quad \text{при} \quad \rho \to \infty.$$

Если же к целочисленному потоку $\bar{H}$ есть даже малый добавок ε (2), то характер асимптотики $n(\rho)$ сильно меняется:

$$n(\rho) \propto \frac{\varepsilon}{\rho^{2+2\varepsilon}} \quad \text{при} \quad \rho \to \infty. \qquad (12)$$

Согласно принятой в атомной и ядерной физике терминологии, целочисленный поток $\bar{H}$ отвечает магическому электронному заполнению.

4. Обоснование представления волновых функций основного состояния в виде (3), (9) основано на результатах оригинальной работы [1]. В уравнении Шредингера [3] орбитальный вклад, связанный со сдвигом оператора импульса электрона

$$p \to p - \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

и спиновый вклад

$$\frac{\mu_e H \sigma}{S}$$

($S = 1/2$ — спин электронов) не являются независимыми. Электрон имеет магнитный момент

$$\mu_e = -\frac{|e|\hbar}{2Mc},$$

а уравнение Шредингера представляет собой нерелятивистский предел уравнения Дирака. Оба эффекта, спиновый и орбитальный, по своей сути эффекты релятивистские, и их невозможно разделить. В уравнении

$$\hat{H}\psi = E\psi \qquad (13)$$

с гамильтонианом Паули [3, 4]

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\left(\hat{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \mu_e \frac{\sigma}{S} H \qquad (14)$$

можно исключить «лишние» переменные: векторный потенциал $\mathbf{A}$ и поле H, выбрав в качестве основной переменной потенциал поля $\phi(x, y)$. Для поперечного поля $H = H_z(x, y)$ [1] имеем

$$A_x = -\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, y), \quad A_y = \frac{\partial}{\partial x}\phi(x, y). \qquad (15)$$

Для одномерного поля $H = H(y)$ в калибровке Ландау ($A_x = -\phi'$; $A_y = 0$) подстановкой [3]

$$\psi(x, y) = e^{ipx}\psi_p(y) \qquad (16)$$

уравнение для $\psi_p(y)$ (13) с гамильтонианом (14) приводится к виду

$$\psi_p'' + \frac{2M}{\hbar^2}\left(E + \mu_e \frac{\sigma}{S} H\right)\psi_p = \left(p - \frac{e}{c\hbar}A_x\right)^2 \psi_p. \qquad (17)$$

Далее, если определить функцию χ с помощью выражения

$$\chi(y) = py - \frac{|e|}{\hbar c}\phi(y), \qquad (18)$$

то окажется, что уравнение для ψ_p (17) не содержит явной зависимости от $\mathbf{A}$ и H:

$$\psi'' + \frac{2ME}{\hbar^2}\psi + \frac{\sigma}{S}\chi''\psi = (\chi')^2\psi. \qquad (19)$$

В уравнении (19) естественно сделать подстановку

$$\psi_p(y) = \varphi(y)e^{\chi(y)}. \qquad (20)$$

Функция $\varphi(y)$ определяется уравнением, содержащим только χ' и χ'':

$$\varphi'' + 2\varphi'\chi' + \frac{2ME}{\hbar^2}\varphi + \varphi\chi''\left(1 + \frac{\sigma}{S}\right) = 0. \qquad (21)$$

Следует отметить, что столь простые уравнения (19), (21) характерны только для гамильтониана Паули (14), где нет свободы в выборе мировых постоянных. Замена в (14) массы электрона M на эффективную массу M^*, а магнитного момента μ_e на μ_e^* требует обоснования и не самоочевидна. Формула (14) с перенормированными постоянными M и μ_e имеет место только для слабых полей H, когда движение электрона квазиклассично [5].

Два уравнения (19) для двух разных направлений спина, $\sigma = \pm 1/2$, не являются независимыми:

$$\varphi_{-1/2}'' + 2\varphi_{-1/2}'\chi' + \frac{2ME}{\hbar^2}\varphi_{-1/2} = 0, \qquad (22)$$

$$\varphi_{1/2}'' + 2\varphi_{1/2}'\chi' + \frac{2ME}{\hbar^2}\varphi_{1/2} + 2\varphi_{1/2}\chi'' = 0. \qquad (23)$$

Из сравнения формул (22) и (23) видно, что если функция $\varphi_{-1/2}$ является решением (22) с энергией E, то функция $\varphi_{-1/2}' = \varphi_{1/2}$ является решением (23) с той же энергией E. Согласно общему утверждению работы [1], это означает, что в неоднородном поле $H(x, y)$ все уровни электрона, кроме основного, вырождены по спину так же, как и в случае однородного поля (1). Для основного же состояния, $E = 0$, $\sigma = -1/2$, решение (22), удовлетворяющее правильным граничным условиям при $y \to \pm\infty$, сводится к константе, а из (18), (20) следуют выражения (3).

5. Для квазиоднородного поля $H(y)$ можно продвинуться дальше и решить уравнение (21) для φ, определив весь спектр электронов. Для медленного поля допустимо разложение функции χ' в (21) в ряд по степеням $y-y_0$, где точка y_0 определена условием

$$\chi'(y_0)=0 \quad \text{или} \quad p=\frac{|e|}{\hbar}\phi'(y_0),$$

$$\chi'(y)=-\frac{z}{l_H(y_0)}\left(1-zl'_H(y_0)+\ldots\right). \qquad (24)$$

В формуле (24) параметры z и $l_H(y_0)$ определены выражениями

$$z\equiv\frac{y-y_0}{l_H(y_0)},\quad l_H^2(y_0)\equiv\frac{\hbar c}{|e|H(y_0)}. \qquad (25)$$

Из уравнения (24), пренебрегая производными поля $H(y)$ ($l'_H(y_0)=0$), с учетом (21) получим уравнение для функции $\varphi=\varphi(z)$:

$$\varphi''-2z\varphi'+2\left(\frac{E}{\hbar\omega_c(y_0)}-\frac{1}{2}-\sigma\right)\varphi=0, \qquad (26)$$

$$\omega_c(y_0)\equiv\frac{|e|H(y_0)}{Mc}.$$

Решениями (26) являются полиномы Эрмита [3], а спектр электронов дается выражением (1) с заменой $\omega_c\to\omega_c(y_0)$.

Для определения плотности $n(y)$ на основании (5) нет необходимости решать уравнение (24) для $y_0=y_0(p)$. Для медленного поля нормированные функции основного состояния $\psi_p(y)$ имеют вид

$$\psi_p^2(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,l_H(y_0)}\exp\left(\frac{-(y-y_0)^2}{l_H^2(y_0)}\right). \qquad (27)$$

Интегрирование по p в выражении (5) можно заменить интегрированием по y_0 (24):

$$dp=dy_0/l_H^2(y_0),$$

а медленную функцию $l_H(y_0)$ в выражении (27) заменить на $l_H(y)$. При этом из (5), (27) следует связь $n(y)$ и $l_H^2(y)$:

$$n(y)=\frac{1}{2\pi l_H^2(y)}=\frac{H(y)}{\phi_0}. \qquad (28)$$

6. Рассмотрим пример периодического поля

$$H(y)=H_0(1+\lambda\cos k_0y). \qquad (29)$$

В квазиоднородном пределе $k_0l_0\ll 1$, если при этом в (29) $|\lambda|<1$, из (24) следует уравнение для $y_0=y_0(p)$:

$$y_0k_0+\lambda\sin y_0k_0=pk_0l_0^2, \qquad (30)$$

$$l_0^2\equiv\frac{\hbar c}{|e|H_0}.$$

Значение

$$\omega_c=\frac{|e|H_0}{Mc}(1+\lambda\cos k_0y_0)$$

совместно с уравнением (30) определяет на основании уравнения (1) спектр электронов, а выражение (27) — нормированные функции $\psi_p(y)$. В другом пределе быстрого поля $k_0l_0\gg 1$ также можно отнормировать функции ψ_p и определить плотность $n(y)$:

$$\psi_p^2(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}l_0I_0(2\gamma)}\times \\ \times\exp\left[-\frac{(y-pl_0^2)^2}{l_0^2}+2\gamma\cos k_0y\right], \qquad (31)$$

$$n(y)=\frac{H_0}{\phi_0I_0(2\gamma)}\exp(2\gamma\cos k_0y). \qquad (32)$$

В выражениях (31), (32) $I_0(2\gamma)$ — функция Бесселя:

$$I_0(2\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\gamma^{2m}}{(m!)^2}, \qquad (33)$$

$$\gamma\equiv\frac{\lambda}{k_0^2l_0^2}.$$

Интересен предел $\gamma\gg 1$, когда в выражении (29) осциллирующая часть поля больше его среднего значения: $\lambda\gg 1$. С учетом асимптотики функции $I_0(2\gamma)$ при $\gamma\gg 1$ из (32) получаем

$$n(y)=\frac{2H_0}{\phi_0}\sqrt{\pi\gamma}\exp\left(-4\gamma\sin^2\left(\frac{k_0y}{2}\right)\right). \qquad (34)$$

Видно, что зависимость $n=n(y)$ отвечает узким δ-образным электронным нитям, расположенным с периодом $y=2\pi/k_0$. Полное число электронов на периоде $-\pi/k_0<y<\pi/k_0$ при $\gamma\gg 1$ определяется узкой областью $k_0y\ll 1$:

$$n(y)=\frac{2H_0^{1/2}(\pi)}{\phi_0k_0l_1}\exp\left(-\frac{y^2}{l_1^2}\right), \qquad (35)$$

где l_1 — магнитная длина поля $H_1=\lambda H_0$ в выражении (29):

$$l_1^2=\frac{\hbar c}{|e|H_1}.$$

Из формулы (35) имеем

$$\int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} n(y)\,dy = \frac{2\pi}{k_0}\,\frac{H_0}{\phi_0}. \qquad (36)$$

Сравнение выражений (28) и (36) показывает, что независимо от соотношения между k_0 и $1/l_0$ среднее значение плотности $n(y)$ определяется только величиной постоянного поля H_0, входящей в (29). Осциллирующее же поле $\lambda H_0 = H_1$ определяет модуляцию плотности $n(y)$, которая может быть очень большой при $\lambda \to 1$ или $\gamma \gg 1$ (28), (34). Приведем полезные формулы для $n(y)$ и $\psi_p^2(y)$ при малом значении λ в (29):

$$\psi_p^2(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}l_0}\exp\left(\frac{-(y-pl_0^2)^2}{l_0^2}\right)\times \times\left(1+\frac{2\lambda}{k_0^2l_0^2}\cos k_0y - \frac{2\lambda}{k_0^2l_0^2}\exp\left(-\frac{k_0^2l_0^2}{4}\right)\cos(k_0pl_0^2)\right), \qquad (37)$$

$$n(y) = \frac{H_0}{\phi_0}\left[1+\frac{2\lambda\cos k_0y}{k_0^2l_0^2}\left(1-\exp\left(\frac{-k_0^2l_0^2}{2}\right)\right)\right].$$

При $k_0l_0 \ll 1$ выражения (37) переходят в квазиоднородный предел, а при $k_0l_0 \gg 1$ из (37) следуют выражения (31), (32).

7. В качестве примера поля, ограниченного на плоскости xy, рассмотрим узкую одномерную магнитную яму:

$$H = \begin{cases} H_0, & |y|<a, \\ 0, & |y|>a. \end{cases} \qquad (38)$$

Из (4) следует выражение для потенциала $\phi(y)$:

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{H_0y^2}{2}, & |y|<a, \\ H_0a\left(|y|-\dfrac{a}{2}\right), & |y|>a. \end{cases} \qquad (39)$$

При $a\to 0$ из (38), (39) имеем

$$H = \bar{H}\delta(y), \quad \phi = |y|\bar{H}/2, \quad \bar{H} = 2aH_0, \qquad (40)$$

а на основании выражений (3) находим функции ψ_p:

$$\psi_p^2(y) = \frac{p_0^2-p^2}{p_0}\exp\left(2py - 2|y|p_0\right), \qquad (41)$$

$$p_0 \equiv \frac{aH_0|e|}{c\hbar}.$$

Нормированным функциям (41) отвечает интервал $|p|<p_0$. Далее на основании выражения (5) находим плотность $n(y)$:

$$n(y) = \frac{\exp(-2p_0|y|)}{2\pi y^2}\left(\mathrm{ch}(2p_0y) - \frac{\mathrm{sh}(2p_0y)}{2p_0y}\right). \qquad (42)$$

Асимптотика $n(y)$ при больших y степенная:

$$n(y) \propto 1/y^2,$$

что не зависит от выбора H в виде δ-функции. В самом деле, рассмотрим другой пример магнитной ямы конечной ширины:

$$H(y) = \frac{\phi_0p_0^2}{\pi}\,\frac{1}{\mathrm{ch}^2(2p_0y)}, \qquad (43)$$

$$\phi = \frac{\phi_0}{4\pi}\ln\mathrm{ch}(2p_0y).$$

Для $\psi_p^2(y)$ и $n(y)$, определяемых выражениями (3), (5), (43), получаем

$$\psi_p^2(y) = \frac{2p_0}{\pi}\,\frac{e^{2py}\cos\dfrac{\pi p}{2p_0}}{\mathrm{ch}(2p_0y)}, \qquad n(y) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{y^2+(\pi/4p_0)^2}. \qquad (44)$$

Так же, как и для δ-образной ямы, область существования нормированных решений ограничена областью $|p|<p_0$. Такие решения имеют место при сколь угодно слабом поле, когда $p_0\to 0$. Проинтегрировав один раз уравнение (4), связывающее H с ϕ, находим связь граничного импульса p_0 с полным потоком поля на единицу длины магнитной ямы произвольной формы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y)\,dy = \phi'(\infty) - \phi'(-\infty) = 2p_0\frac{\hbar c}{|e|}. \qquad (45)$$

8. Специфика поля $H = H(\rho)$ проявляется в дискретности магнитного квантового числа m в выражениях (9), (10). Если при определении $n(\rho)$ на основании выражения (10) можно заменить суммирование по m интегрированием, то нет большой разницы с рассмотренным выше случаем поля $H(y)$, для которого импульс p является непрерывной переменной. Рассмотрим сингулярные поля $H(\rho)$, для которых указанная дискретность m приводит к новым эффектам:

$$H_\mu(\rho) = \frac{\mu^2\phi_0}{4\pi\rho_0^\mu\rho^{2-\mu}}, \quad \frac{|e|}{\hbar c}\phi(\rho) = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\mu. \qquad (46)$$

Выражение (46) определяет магнитную длину ρ_0 в качестве масштаба. Параметр $\mu > 0$. Для однородного поля $\mu = 2$. На основании выражений (9), (46) находим нормированные функции $R_m(\rho)$:

$$R_m^2(\rho) = \frac{\mu X^{2m}\exp(-X^\mu)}{\rho_0^2\Gamma(2m+2)/\mu}, \quad X \equiv \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{47}$$

Для определения плотности $n(\rho)$ при $\rho = 0$ достаточно в выражении (10) оставить один член с $m = 0$:

$$n(0) = \frac{\mu}{2\pi\rho_0^2\Gamma(2/\mu)}. \tag{48}$$

Если же $\rho \gg \rho_0$ ($x \gg 1$), то сумму по m в выражении (10) можно заменить интегралом, используя в выражении (47) асимптотическое представление для гамма-функции при больших m:

$$n(\rho) = \frac{\mu^2}{4\pi\rho_0^2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\mu-2} = \frac{H(\rho)}{\phi_0}. \tag{49}$$

Связь плотности $n(\rho)$ поля $H(\rho)$ (49) имеет место при любом параметре $\mu > 0$, входящем в (46), в пределе $\rho \gg \rho_0$ ($x \gg 1$). Интересно сравнить предельные значения для $n(\rho)$, определяемые выражениями (48), (49), с результатом точного суммирования по m в выражении (10) для нескольких значений μ из формулы (46). Для $\mu = 1$ имеем

$$n(\rho) = \frac{H(\rho)}{\phi_0}\left(1 - e^{-2X}\right), \quad H = \frac{\phi_0}{4\pi\rho\rho_0}. \tag{50}$$

Для $\mu = 2/3$ имеем

$$n(\rho) = \frac{H(\rho)}{\phi_0} \times$$
$$\times \left[1 - 2\exp\left(-\frac{3X^{2/3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X^{2/3} - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$
$$H = \frac{\phi_0}{9\pi\rho_0^{2/3}\rho^{4/3}}.$$

Для $\mu = 1/2$ имеем

$$n(\rho) = \frac{H(\rho)}{\phi_0} \times$$
$$\times \left(1 - \exp(-2X^{1/2}) - 2\exp(-X^{1/2})\sin(X^{1/2})\right),$$
$$H = \frac{\phi_0}{16\pi\rho^{3/2}\rho_0^{1/2}}.$$

Выражения (46), (50) дают точное решение задач о связи плотности $n(\rho)$ и поля $H(\rho)$ для сингулярных полей (46).

9. Еще одним примером проявлений дискретности суммирования по m в (10) служит поле магнитного кольца

$$H(\rho) = \frac{\phi_0 q^2 Z^{q-1}}{\pi\rho_0^2(1+Z^q)^2}, \tag{51}$$
$$Z \equiv \frac{\rho^2}{\rho_0^2}.$$

При большом параметре q поле $H(\rho)$ (51) имеет δ-образный максимум при $\rho = \rho_0$. Полный поток поля (51) пропорционален q:

$$\bar{H} = \phi_0 q, \quad q = n + \varepsilon. \tag{52}$$

Во второй формуле (52) из q выделена целая часть n, а параметр $\varepsilon \in [0;1)$. На основании выражений (9), (10) и (51) находим потенциал поля ϕ, функции $R_m(\rho)$ и плотность $n(\rho)$:

$$\frac{2\pi\phi}{\phi_0} = \frac{1}{2}\ln(1+Z^q),$$
$$R_m^2(\rho) = \frac{2qZ^m\sin\left[(\pi/q)(1+m)\right]}{\rho_0^2\pi(1+Z^q)}, \tag{53}$$

$$n(\rho) = \frac{q}{\pi^2\rho_0^2} \times$$
$$\times\frac{\sin(\pi/q)+Z^n\left\{\sin\left[(\pi/q)(1-\varepsilon)\right]+Z\sin(\pi\varepsilon/q)\right\}}{\left[(\cos(\pi/q)-Z)^2+\sin^2(\pi/q)\right](1+Z^q)}. \tag{54}$$

Если параметр q в формуле (51) велик ($q \gg \pi$), то из выражения (54) следует короткая формула для $n(\rho)$:

$$n(\rho) = \frac{1}{\pi\rho_0^2}\,\frac{1+Z^n(1-\varepsilon)+\varepsilon Z^{n+1}}{\left[(1-Z)^2+\pi^2/q^2\right](1+Z^q)}. \tag{55}$$

При целом значении $q = n$, когда в (52) $\varepsilon = 0$, плотность $n(\rho)$ имеет δ-образный максимум при $Z = 1$, т. е. при $\rho = \rho_0$:

$$n(\rho) = \frac{1}{\pi\rho_0^2}\,\frac{1}{\left(1-\rho^2/\rho_0^2\right)^2+\pi^2/q^2}. \tag{56}$$

Формулы (51) и (56) представляют собой точное решение задачи о связи плотности и поля для магнитного кольца.

В заключение отметим, что рассмотренные в данной работе паулевские электроны (с эффективной массой, равной массе свободного электрона) могут быть реализованы на поверхности жидкого гелия. При этом неоднородность магнитного поля создается подложкой, выполненной из сверхпроводника первого рода, например, свинца или олова. Во внешнем магнитном поле сверхпроводник первого рода разбивается на домены (промежуточное состояние), что создает периодическое магнитное поле для электронов на поверхности пленки гелия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №03-02-16121) и INTAS (грант №01-0791).

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. A **19**, 2461 (1979).

2. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, ЖЭТФ **79**, 1006 (1980).

3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).

4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).

5. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва (1978).