

АНОМАЛЬНЫЙ ОТКЛИК СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ НА МЕХАНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Л. Х. Ингель*

Научно-производственное объединение «Тайфун»
249038, Обнинск, Калужская обл., Россия

Поступила в редакцию 1 июля 2005 г.

В линейном приближении аналитически исследованы стационарные возмущения, вносимые в стратифицированную жидкую бинарную смесь (например, соленую воду) неоднородными касательными напряжениями на ее поверхности. Показано, что учет двухкомпонентного характера среды (фоновых стратификаций температуры и концентрации примеси) может качественно менять результаты даже при одинаковых значениях коэффициентов переноса для двух субстанций. Например, добавление устойчивой стратификации примеси к устойчивой температурной стратификации может приводить не к убыванию амплитуды возмущений и глубины их проникновения в среду (чего, на первый взгляд, можно было ожидать), а к их существенному возрастанию. Обнаружен неисследованный ранее тип конвективной неустойчивости бинарной смеси, устойчиво стратифицированной по плотности.

PACS: 44.27.+g, 47.27.Te

1. ВВЕДЕНИЕ

Возмущения, вносимые в жидкую среду неоднородными касательными напряжениями на горизонтальной поверхности, представляют значительный интерес для ряда приложений. Сюда относятся прежде всего некоторые известные задачи геофизики, например реакция верхнего слоя водоемов на неоднородные ветровые воздействия [1], а также некоторые механизмы конвективной неустойчивости двухслойных систем, обсуждаемые в последние годы («антиконвекция» [2]). В таких системах конвективные движения в одной из соприкасающихся сред вызывают на границе раздела горизонтально-неоднородные касательные напряжения. Последние вызывают в смежном горизонтальном слое стратифицированной среды течения и термические возмущения, которые могут поддерживать конвекцию в первой среде, осуществляя тем самым положительную обратную связь. Один из важнейших элементов динамики таких систем — отклик стратифицированной среды на неоднородные касательные напряжения на горизонтальной границе. В настоящей работе обращается внимание на важные качествен-

ные особенности реакции двухкомпонентных сред, таких как морская вода, стратифицированная не только по температуре, но и по концентрации примеси (соли). Ранее были обнаружены нетривиальные особенности реакции подобных сред на горизонтально-неоднородные термические воздействия [3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Геометрия задачи схематически изображена на рис. 1. Рассматривается полуограниченный слой сре-

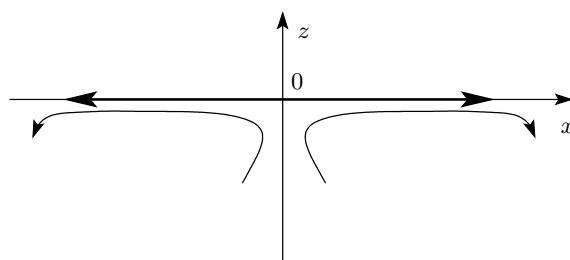


Рис. 1. Геометрия задачи. Стрелками схематически обозначены неоднородные касательные напряжения на горизонтальной поверхности жидкости и линии тока возникающих течений

*E-mail: lingel@obninsk.com

ды $z \leq 0$ (ось z направлена вертикально вверх), стратифицированный по температуре и концентрации примеси (для определенности будем говорить о соленой воде) таким образом, что гидростатическое равновесие устойчиво (при этом по отдельности температурная и соленостная стратификации могут быть и неустойчивыми, но устойчива суммарная стратификация плотности).

Линеаризованная стационарная система уравнений для возмущений в приближении Буссинеска имеет вид [4, 5]

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta s) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\gamma_T \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \lambda \nabla^2 T, \quad \gamma_s \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z = \chi \nabla^2 s.$$

Здесь T и s — возмущения, соответственно, температуры и концентрации примеси (солености), \mathbf{v} — вектор возмущения поля скорости, p — возмущение давления, \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении оси z , ρ_0 — отсчетная плотность среды, ν — кинематический коэффициент вязкости, λ — коэффициент температуропроводности, χ — коэффициент диффузии примеси, α — термический коэффициент расширения среды, β — коэффициент ее соленостного сжатия, g — ускорение свободного падения. Постоянные значения фоновых вертикальных градиентов каждой из субстанций, γ_T и γ_s , как упоминалось, предполагаются такими, что фоновое состояние конвективно устойчиво [4–6].

Предполагаем, что на поверхности жидкости, $z = 0$, заданы стационарные касательные напряжения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x (ограничиваемся двумерной задачей на плоскости xz):

$$\rho_0 \nu \frac{\partial u}{\partial z} = E \sin(kx) \quad \text{при } z = 0, \quad (2)$$

где E — амплитуда напряжения, u — горизонтальная составляющая скорости, k — волновое число. Пренебрегаем деформациями поверхности, так что вертикальная составляющая скорости w на поверхности $z = 0$ обращается в нуль. Для температуры и примеси на поверхности предполагается выполнение краевых условий третьего рода:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{T}{h_T}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{s}{h_s} \quad \text{при } z = 0, \quad (3)$$

где неотрицательные величины h_T , h_s — заданные масштабы длины. Предполагаем, что вдали от поверхности (при $z \rightarrow -\infty$) все возмущения затухают.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Неоднородные касательные напряжения на поверхности приводят к возникновению в жидкости горизонтально-неоднородных течений. Если горизонтальная составляющая скорости u зависит от горизонтальной координаты x , то из соображений неразрывности в жидкости должны возникать вертикальные движения. В стратифицированной среде последние переносят тепло и примесь, так что возникают возмущения температуры и концентрации примеси. Обозначим через H глубину (пока неизвестную) проникновения стационарных возмущений в устойчиво стратифицированную среду. Используя краевое условие (2), можно сделать оценку амплитуды скорости возникающих горизонтальных течений:

$$\frac{\rho_0 \nu u}{H} \sim E, \quad u \sim \frac{EH}{\rho_0 \nu} \quad (4)$$

(для простоты амплитуду возмущения скорости обозначаем той же буквой u). Из условия неразрывности следует, что

$$ku \sim \frac{w}{H}, \quad w \sim Hku \sim \frac{EH^2 k}{\rho_0 \nu}. \quad (5)$$

Из уравнения переноса тепла можно оценить амплитуду возникающего температурного возмущения:

$$\gamma_T w \sim \frac{\lambda T}{H^2}, \quad T \sim \frac{\gamma_T w H^2}{\lambda} \sim \frac{\gamma_T k E H^4}{\rho_0 \lambda \nu}. \quad (6)$$

Здесь учтена только «вертикальная» часть лапласиана в уравнениях переноса тепла. Это оправдано, поскольку, как нетрудно будет убедиться, вертикальный масштаб рассматриваемых возмущений H не может превышать по порядку величины их горизонтальный масштаб $L = 2\pi/k$. По той же причине для ориентировочных оценок можно пользоваться приближением гидростатики:

$$p' \sim g \rho' H \sim g \rho_0 |\alpha T - \beta s| H. \quad (7)$$

Здесь штрихами обозначены амплитуды возмущений давления и плотности. Кроме того, в горизонтальной проекции уравнения движения можно приравнять по порядку основные слагаемые

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim \frac{\nu u}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \sim g |\alpha T - \beta s| k H.$$

Отсюда

$$|\alpha T - \beta s| \sim \frac{E}{\rho_0 g k H^2}. \quad (8)$$

В случае однокомпонентной среды (пренебрегая s) из выражений (6) и (8) получаем оценки для глубины проникновения возмущений в среду, H , и для амплитуды T :

$$H \sim \left(\frac{\nu\lambda}{\alpha g \gamma_T k^2} \right)^{1/6}, \quad T \sim \frac{E}{\rho_0 \alpha g k H^2} \sim \frac{E}{\rho_0} \left(\frac{\gamma_T}{\nu \lambda k (\alpha g)^2} \right)^{1/3}. \quad (9)$$

Решение для обычной однокомпонентной среды, стратифицированной только по температуре, действительно приводит к этому результату [1], полученному выше из простых физических соображений (масштабного анализа). Выражаемый (9) вертикальный масштаб H давно известен (в западной литературе его иногда называют масштабом Линейкина в честь известного российского океанолога [7]). Это — глубина, на которую проникают в устойчиво стратифицированную среду линейные стационарные возмущения различной природы [1, 7]. Этот масштаб зависит от частоты плавучести (частоты Брента) $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$. При переходе к двухкомпонентной среде (учете вклада примеси в стратификацию плотности) частота плавучести, вообще говоря, меняется. На первый взгляд, требуется лишь внести соответствующую поправку в эту частоту (или, что то же самое, в стратификацию плотности). Поскольку зависимость H (9) от стратификации слабая ($H \sim N_T^{-1/3}$), казалось бы, можно ожидать, что дополнительный учет стратификации примеси должен приводить лишь к некоторым количественным поправкам. Ниже показано, что в действительности учет двухкомпонентного характера среды, вообще говоря, меняет результаты гораздо более радикально. Температурный отклик на механическое воздействие может сильно отличаться от того, к которому приводит очевидный, казалось бы, масштабный анализ.

4. РЕШЕНИЕ

Ищем для возмущений стационарные решения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x :

$$u(x, z) = U(z) \sin(kx), \quad w(x, z) = W(z) \cos(kx),$$

$$T(x, z) = \theta(z) \cos(kx), \quad s(x, z) = \vartheta(z) \cos(kx)$$

и т. д. Исключая из системы (1) все неизвестные, кроме w , нетрудно получить уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 W = k^6 S w, \quad (10)$$

где

$$S = \frac{1}{k^4 \nu} \left(\frac{N_T^2}{\lambda} + \frac{N_s^2}{\chi} \right) = R_T + \frac{R_s}{\delta},$$

$N_T^2 = \alpha g \gamma_T$, $N_s^2 = -\beta g \gamma_s$ — термическая и соле-
ностная составляющие квадрата частоты плавучести $N^2 = N_T^2 + N_s^2$;

$$R_T = \frac{N_T^2}{\nu \lambda k^4}, \quad R_s = \frac{N_s^2}{\nu \lambda k^4}$$

— аналоги чисел Рэлея, $\delta \equiv \chi/\lambda$.

Безразмерный параметр S имеет смысл некоторого обобщенного числа Рэлея. Для рассматриваемой области допустимых значений γ_T и γ_s он неотрицателен.

Ищем решение уравнения (10) в виде линейной комбинации экспонент $\exp(q_i k z)$, где q_i — корни характеристического уравнения

$$(q^2 - 1)^3 = S. \quad (11)$$

Из этих шести экспонент лишь три затухают при $z \rightarrow -\infty$; коэффициенты при остальных следует положить равными нулю. Поэтому решение для вертикальной скорости можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{i=1}^3 C_i \exp(q_i k z), \quad (12)$$

$$q_1 = (1 + S^{1/3})^{1/2},$$

$$q_{2,3} = \left[1 + S^{1/3} \exp\left(\pm \frac{2}{3} \pi i\right) \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Здесь C_i — постоянные интегрирования, $\text{Re } q_i > 0$. Ниже ограничимся анализом решения для случая $S \gg 1$ (точнее, предполагается выполнение более сильного неравенства $S^{1/6} \gg 1$). Это соответствует ситуациям, когда устойчивая стратификация плотности существенна и в большой степени определяет структуру возникающих в среде возмущений. В таких случаях можно пренебречь единицей по сравнению с другими слагаемыми в выражениях (11), (13):

$$q_1 \approx S^{1/6}, \quad q_{2,3} \approx S^{1/6} \exp\left(\pm \frac{1}{3} \pi i\right),$$

и решение заметно упрощается. В показателях экспонент в (12) (а также в выражениях для u и возмущений давления и плавучести) присутствует большой множитель $S^{1/6}$, так что возмущения упомянутых величин быстро затухают с увеличением глубины по сравнению с их характерным горизонтальным

масштабом $L = 2\pi/k$. Иными словами, аспектное отношение (отношение характерного горизонтального масштаба к вертикальному) у этих возмущений много больше единицы. Поэтому в лапласиане скорости в первом уравнении (1) производные по горизонтальной координате x пренебрежимо малы по сравнению с производными по z . Поскольку возмущения вытянуты по горизонтали, характерная вертикальная скорость много меньше горизонтальной. Поэтому в вертикальной проекции упомянутого уравнения динамики лапласианом скорости, как показывает масштабный анализ, можно вообще пренебречь (т. е. ограничиться приближением гидростатики, которое, как обычно, хорошо применимо для возмущений, вытянутых по горизонтали). Таким образом, в рассматриваемом приближении две проекции уравнения динамики имеют вид

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g(\alpha T - \beta s)$$

(эти упрощения уже использовались в приведенных выше предварительных оценках).

Как легко видеть, в выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси по сравнению с (12), вообще говоря, имеется и четвертая экспонента $\exp(kz)$. Из уравнений переноса тепла и примеси в (1) нетрудно получить:

$$T = \frac{\gamma_T}{\lambda k^2} \left(C'_T \exp(kz) + \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{q_i^2 - 1} \exp(kq_i z) \right) \cos(kx),$$

$$s = \frac{\gamma_s}{\chi k^2} \left(C'_s \exp(kz) + \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{q_i^2 - 1} \exp(kq_i z) \right) \cos(kx).$$

Здесь постоянные интегрирования C'_T и C'_s с учетом других уравнений системы (1) связаны между собой таким образом:

$$C'_s = -\frac{\chi N_T^2}{\lambda N_s^2} C'_T. \quad (14)$$

Необходимость выполнения равенства (14) видна, например, из следующих соображений. Только при его выполнении в выражении для плавучести $g(\alpha T - \beta s)$ отсутствует экспонента $\exp(kz)$. А это необходимо, поскольку при наличии такой экспоненты в источнике (последнем слагаемом уравнения динамики (1)), она должна была бы присутствовать и в поле скорости \mathbf{v} , что противоречит (12). Указанное различие в структуре решений для

полей температуры и солёности, с одной стороны, и плотности, скорости и давления, с другой, принципиально отличает их от решения для обычной однокомпонентной жидкости, приведенного, например, в работе [1].

Постоянные интегрирования находятся из краевых условий. Решение, как можно проверить, имеет вид

$$u = -S^{1/6} e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} - 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \times \right. \\ \left. \times \cos(\sqrt{3} Kz) - \frac{\tau}{2} \sin(\sqrt{3} Kz) \right] \sin(kx),$$

$$w = e^{Kz} \left[C_1 \left(e^{Kz} - \cos(\sqrt{3} Kz) \right) - \right. \\ \left. - \left(\sqrt{3} C_1 + \tau \right) \sin(\sqrt{3} Kz) \right] \cos(kx),$$

$$T = \frac{\gamma_T}{\lambda k^2 S^{1/3}} \times \\ \times \left\{ C_T e^{Kz} + e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} + 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(\sqrt{3} Kz) + \frac{\tau}{2} \sin(\sqrt{3} Kz) \right] \right\} \sin(kx),$$

$$s = \frac{\gamma_s}{\chi k^2 S^{1/3}} \times \\ \times \left\{ \frac{\chi \alpha \gamma_T}{\lambda \beta \gamma_s} C_T e^{Kz} + e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} + 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos(\sqrt{3} Kz) + \frac{\tau}{2} \sin(\sqrt{3} Kz) \right] \right\} \sin(kx).$$

Здесь

$$K = \frac{k S^{1/6}}{2}, \quad \tau = \frac{Ek}{2\sqrt{3} K^2 \nu \rho_0} = \frac{2E}{\sqrt{3} k \nu \rho_0 S^{1/3}},$$

$$C_T = S^{1/3} C'_T = -\left(\frac{h_T}{h_s} - 1 \right) \Phi, \quad (15)$$

$$C_1 = -\left[(1 + kh_T) \left(1 + \frac{1}{2Kh_s} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\chi \alpha \gamma_T h_T}{\lambda \beta \gamma_s h_s} (1 + kh_s) \left(1 + \frac{1}{2Kh_T} \right) \right] \Phi, \\ C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau = \frac{1}{4Kh_s} \left[1 + kh_T - \frac{\chi \alpha \gamma_T}{\lambda \beta \gamma_s} (1 + kh_s) \right] \Phi,$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \left[(1 + kh_T) \left(1 + \frac{3}{4Kh_s} \right) - \frac{\chi \alpha \gamma_T h_T}{\lambda \beta \gamma_s h_s} (1 + kh_s) \left(1 + \frac{3}{2Kh_T} \right) \right]^{-1}. \quad (16)$$

5. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Решение зависит от ряда безразмерных параметров, в частности, S , $N_s^2/N_T^2 = R_s/R_T$, $\delta = \chi/\lambda$, kh_T , kh_s (два последних обратны соответствующим аналогам числа Био [8]). Особые гидротермодинамические свойства двухкомпонентных сред обычно связывают с различием значений коэффициентов обмена χ и λ [4, 5]. Анализ полученного решения показывает, что нетривиальные эффекты возможны и при $\delta = 1$.

Зависимость от глубины решения для составляющих скорости (а также возмущений давления и плотности среды) представляет собой линейную комбинацию трех функций: $\exp(2Kz)$, $\exp(Kz) \cos(\sqrt{3}Kz)$, $\exp(Kz) \sin(\sqrt{3}Kz)$. Экспоненты в них убывают с увеличением глубины на масштабах $H \sim L/S^{1/6}$. В рассматриваемом приближении $S \gg 1$ это много меньше характерного горизонтального масштаба возмущений $L \equiv 2\pi/k$. Длина волны синусоид в двух последних упомянутых функциях имеет тот же порядок H . Этот результат аналогичен известным решениям для обычных однокомпонентных сред [1, 7], в которых возмущения представляют собой систему расположенных друг над другом циркуляционных ячеек с вертикальным и горизонтальным масштабами, соответственно, H и L , интенсивность которых экспоненциально затухает с увеличением глубины с тем же характерным масштабом порядка H .

Итак, возникающие у поверхности циркуляционные ячейки, поля возмущений скорости, давления и плотности вытянуты по горизонтали, что оправдывает использованные выше упрощения, связанные с малостью отношения H/L . Но в выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси в случае двухкомпонентных сред помимо упомянутых, вообще говоря, присутствует еще одно слагаемое, пропорциональное более медленно убывающей экспоненте $\exp(kz)$. Это не имеет аналогов в случае однокомпонентной среды и принципиально меняет свойства решений для возникающих температурных возмущений.

Как упоминалось выше, на первый взгляд, основной эффект стратификации примеси должен состоять в изменении стратификации плотности и эф-

фективного числа Рэлея (если не рассматривать специфические эффекты «двойной диффузии», связанные с различием коэффициентов обмена для разных субстанций). Поэтому подобные задачи очень часто пытаются упрощать следующим образом [1]. Линейной комбинацией уравнений переноса тепла и примеси в случае одинаковых значений коэффициентов обмена получают уравнение для плотности (плавучести). В него входит полная фоновая стратификация плотности. Часто считается, что тем самым задачу удалось свести к известному случаю однокомпонентной среды. Но дело в том, что для такой переменной как возмущение плотности невозможно корректно поставить краевое условие на поверхности $z = 0$: граничные условия для двух составляющих возмущения плотности (температуры и концентрации примеси), вообще говоря, различны. Полученное выше решение демонстрирует, что отказ от упомянутого необоснованного упрощения качественно меняет свойства решений. В выражениях для температуры и концентрации примеси дополнительно появляются медленно убывающие с увеличением глубины экспоненты $\exp(kz)$. Иными словами, возмущения этих субстанций при прочих равных условиях могут проникать в двухкомпонентные среды гораздо глубже, чем в однокомпонентные — до глубин порядка горизонтальных масштабов неоднородных напряжений L . В случае однокомпонентной среды ($\gamma_s = 0$) коэффициент (15) при упомянутой экспоненте обращается в нуль, так же как и в случае одинаковых краевых условий для двух субстанций ($h_T = h_s$). На глубинах, больших H , возмущения температуры и примеси в большой степени компенсируют друг друга в поле плотности. Поэтому возмущения плавучести, давления и скорости проникают и в двухкомпонентные среды лишь до глубин порядка H , как и в случае однокомпонентных сред.

Если к устойчивой температурной стратификации добавить устойчивую стратификацию концентрации примеси, то кажется очевидным, что, вследствие увеличения устойчивости стратификации плотности, возмущения от поверхности при прочих равных условиях должны в меньшей степени проникать в среду. Тем более нетривиален полученный результат: вопреки интуитивным представлениям указанное усиление устойчивой стратификации, согласно найденному решению, приводит к возрастанию глубины проникновения термических возмущений от значений порядка H до значений порядка L .

С усилением устойчивой стратификации плотности увеличивается значение безразмерного параметра S (эффективного числа Рэлея). При этом несколь-

ко возрастают по абсолютной величине показатели входящих в решение экспонент $\exp(Kz)$. Поэтому соответствующие слагаемые в найденном решении быстрее убывают с увеличением глубины. Это соответствует более быстрому убыванию с увеличением глубины возмущений скорости, плотности, давления и почти всех слагаемых в полученных выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси. В последних выражениях, к тому же, с устойчивостью стратификации возрастает находящаяся в знаменателе величина $S^{1/3}$. И тем не менее появление в решении для T и s дополнительной экспоненты $\exp(kz)$, медленно убывающей с увеличением глубины, может влиять на температурные профили более существенно. Поэтому, несмотря на перечисленные выше очевидные обстоятельства, глубина проникновения температурных возмущений в двухкомпонентную среду увеличивается.

Рассмотрим численный пример, отвечающий возможным лабораторным экспериментам. Сначала рассмотрим однокомпонентную среду (воду), устойчиво стратифицированную только по температуре. Пусть характерный горизонтальный масштаб $L = 0.5$ м, $k = 2\pi/L \approx 12.5$ м⁻¹, $\gamma_T = 30$ К/м, $\nu = 10^{-6}$ м²/с, $\lambda = 1.4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹. В этом случае $N_T \sim 0.25$ с⁻¹, $Ra_T = S \sim 1.5 \cdot 10^7$. Сравним это с ситуацией, когда к устойчивой температурной стратификации добавлена устойчивая соленостная ($\gamma_s < 0$), так что при прочих равных условиях эффективное число Рэлея в два раза больше: $S = 3 \cdot 10^7$. На рис. 2 приведены примеры вертикальных профилей температуры и вертикальной скорости.

Входящие в полученное решение величины $S^{1/3}$ и $S^{1/6}$ при увеличении в два раза значения S меняются относительно мало. Это соответствует малым изменениям полей скорости, плотности и давления (поэтому на рис. 2 приведен лишь один из двух мало различающихся профилей вертикальной скорости). Но, как видно на рис. 2, температурные профили при переходе к двухкомпонентной среде меняются очень существенно, причем отклик более устойчиво стратифицированной среды оказывается, как ни парадоксально, более интенсивным.

Выше основное внимание уделено ситуации, когда обе субстанции стратифицированы устойчиво ($\gamma_T > 0$, $\gamma_s < 0$, $\gamma_T/\gamma_s < 0$). Если же допустить, что одна из них стратифицирована неустойчиво ($\gamma_T/\gamma_s > 0$), то амплитуда возмущений может при определенных соотношениях значений параметров стремиться к бесконечности (когда выражение в квадратных скобках в (16) стремится к нулю). Это

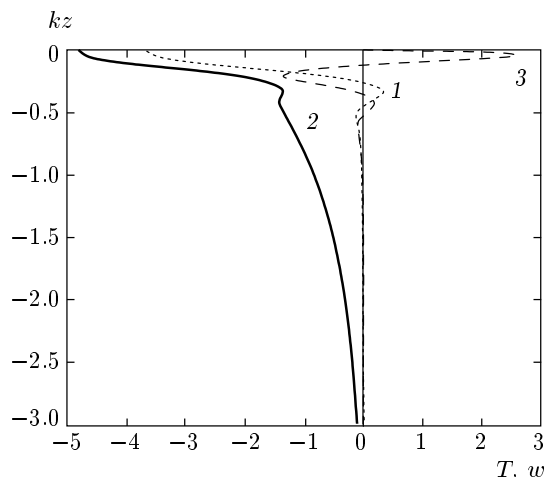


Рис. 2. Примеры безразмерных (нормированных на $\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \gamma_T \tau / 4 \lambda k^2$) профилей температурных возмущений на вертикали $x = 0$ для рассмотренных в тексте численных значений параметров при $\chi \alpha \gamma_T / \lambda \beta \gamma_s = -1$, $kh_T = 1$, $kh_s = 0.05$ в случаях одно- (1) и двухкомпонентной (2) сред. Кривая 3 — профиль вертикальной скорости в случае двухкомпонентной среды, нормированный на $2\sqrt{3} \tau$

соответствует неустойчивости фонового состояния. Возможность конвективной неустойчивости бинарной смеси при выполнении условия $\chi \alpha \gamma_T / \lambda \beta \gamma_s < 1$ хорошо известна («неустойчивость, обусловленная двойной диффузией» [4–6]). Но в данном случае условия неустойчивости в зависимости от краевых условий (значений параметров h_T , h_s) могут быть гораздо мягче. Таким образом, речь идет о неисследованном ранее типе конвективной неустойчивости. Ее анализ содержится в конце следующего раздела.

6. ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ ИНТЕНСИВНОГО ОТКЛИКА

6.1. Случай устойчивой стратификации обеих субстанций

Существенное отличие кривой 2 от кривой 1 на рис. 2 обусловлено незначительным, на первый взгляд, изменением фоновой стратификации плотности. Если отношение коэффициентов обмена $\chi/\lambda = 10^{-2}$ (случай соленой морской воды), то в рассмотренном численном примере речь идет об усилении фоновой устойчивой стратификации плотности всего на 1% за счет добавления к устойчивой температурной стратификации слабой устойчивой стратификации примеси. Естественно было ожи-

дать, что температурный отклик на механическое воздействие при этом, во-первых, должен уменьшиться по амплитуде и глубине проникновения в среду, а во-вторых, эти изменения должны быть незначительными по абсолютной величине. Результат оказался совершенно иным. В частности, глубина проникновения в среду термических возмущений в рассмотренном примере возросла примерно на порядок.

Для определенности остановимся на ситуации в области положительной дивергенции касательных напряжений (вблизи вертикали $x = 0$), чему соответствуют рис. 1, 2. В этой области у поверхности возникают расходящиеся горизонтальные течения. Это означает (из соображений неразрывности) возникновение у поверхности восходящих движений (последнее видно как из схематического рис. 1, так и из полученного решения — кривая 3 на рис. 2). Восходящие движения переносят снизу более холодные и плотные объемы среды, так что температура в поверхностном слое понижается (кривые 1, 2 на рис. 2). В однокомпонентной среде масштабы этого охлаждения (амплитуда и глубина проникновения термического эффекта) выражаются соотношениями (9). Последние определяются балансом между внешним механическим воздействием, приводящим к подъему среды в рассматриваемой области, и отрицательной плавучестью, приобретаемой поднимающимися (относительно холодными и плотными) объемами среды.

В двухкомпонентной среде ситуация усложняется: понижение температуры объема среды, вообще говоря, не означает уменьшения его плавучести. Последняя зависит также и от концентрации примеси. Возмущения этих двух субстанций могут компенсировать друг друга в поле плавучести, что означает возможность их меньшего влияния на динамику. Так в данном случае и происходит: в полученном решении «аномально холодное пятно» у поверхности оказывается и «аномально пресным», так что баланс внешнего механического воздействия и отклонений плавучести не нарушается и в бинарной смеси, несмотря на невыполнение соотношений (9). Благодаря различию краевых условий для двух субстанций (при $h_s \neq h_T$), в данной системе при рассматриваемом механическом воздействии может происходить достаточно эффективное разделение этих субстанций. Это и приводит к возникновению термических эффектов аномальной интенсивности.

Силы плавучести в любой жидкости обеспечивают горизонтальную ориентацию изопикн (поверхностей равной плотности) за исключением тонкого

верхнего слоя толщиной H , в котором это нарушается внешним механическим воздействием. В обычной однокомпонентной жидкости, где плотность однозначно определяется температурой, это означает и эффективное выравнивание изотерм, т. е. отсутствие термических возмущений за пределами упомянутого тонкого слоя. В бинарной смеси, в которой возможно разделение субстанций, выравнивание изопикн не исключает возможности возникновения интенсивных возмущений в поле каждой из этих субстанций, что и происходит в рассмотренном примере.

6.2. Случай неустойчивой стратификации примеси

При $\gamma_T/\gamma_s > 0$, как упоминалось выше, выражение в квадратных скобках в (16) может обращаться в нуль, что соответствует бесконечной амплитуде отклика — неустойчивости фонового состояния. Условие неустойчивости нетрудно представить в виде

$$\frac{\chi\alpha\gamma_T}{\lambda\beta\gamma_s} < \frac{(1 + kh_T)(\varepsilon + kh_s)}{(1 + kh_s)(\varepsilon + kh_T)} = \frac{1 + kh_T}{\varepsilon + kh_T} \frac{\varepsilon + kh_s}{1 + kh_s}, \quad (17)$$

где $\varepsilon = 3/2S^{1/6}$ — малый безразмерный параметр. При одинаковых краевых условиях для двух субстанций ($h_T = h_s$) правая часть (17) равна единице. В этом случае, как уже упоминалось, приходим к известному условию неустойчивости, обусловленной «двойной диффузией» в бинарной смеси [4–6]. Но если граничные условия для тепла и примеси различаются, условие (17) может быть гораздо мягче. Рассмотрим зависимость этого условия от неотрицательных параметров h_T и h_s . Первая дробь в правой части (17) зависит только от h_T и максимальна (равна ε^{-1}) при $h_T = 0$, вторая зависит только от h_s и монотонно растет с увеличением этого параметра (стремится к единице). Таким образом, правая часть (17) максимальна (равна ε^{-1}) при $h_T = 0$, $h_s \rightarrow \infty$.

Из изложенного выше вытекает наличие неисследованного ранее типа конвективной неустойчивости гидростатически устойчивой бинарной смеси. Ранее неустойчивость таких сред считалась возможной только при существенном различии коэффициентов переноса ($\chi \ll \lambda$). Но выше вместо условия $\chi\alpha\gamma_T/\lambda\beta\gamma_s < 1$ получено гораздо более мягкое условие

$$\frac{\chi\alpha\gamma_T}{\lambda\beta\gamma_s} < \varepsilon^{-1} \equiv \frac{2S^{1/6}}{3}.$$

Это означает, что и при равенстве коэффициентов переноса даже весьма слабая неустойчивая стратификация примеси ($\beta\gamma_s \ll \alpha\gamma_T$) может дестабилизировать устойчиво стратифицированную по плотности среду.

Физический механизм этой неустойчивости можно понять из следующих соображений. Пусть, например, при устойчивой температурной стратификации и неустойчивой стратификации примеси (соли) некоторый объем среды вблизи поверхности немного сместился вверх, в сторону поверхности. Поскольку стратификация плотности устойчива, он должен приобретать при этом отрицательную плавучесть (становиться холоднее окружающей среды) и испытывать действие возвращающей силы. Но его плавучесть зависит также и от процессов обмена с окружающей средой. Если температура поверхности среды более жестко фиксирована, чем соленость (краевые условия для двух субстанций различаются, $h_T < h_s$), то отклонение температуры в рассматриваемом объеме среды при прочих равных условиях быстрее релаксирует, чем возмущение солености. Поэтому плавучесть этого объема в принципе может, несмотря на его вертикальное смещение, не стать отрицательной и даже возрастать за счет его меньшей солености, так что возвращающая сила может не возникнуть. Такой механизм во многом аналогичен неустойчивости, обусловленной «двойной диффузией» [4, 5], но вместо различия коэффициентов обмена эффект связан с различием граничных условий. Как видно из изложенного выше, наиболее благоприятна ситуация для развития рассматриваемой неустойчивости при $h_T = 0$, $h_s \rightarrow \infty$ (т. е., когда для температуры на поверхности заданы краевые условия 1-го рода, для примеси — 2-го).

Отметим, что идея о возможности возникновения неустойчивости за счет различия краевых условий для разных субстанций ранее была высказана в работе [9]. Но в ней изучались другие сочетания стратификаций температуры и примеси, заметно отличающийся механизм и предполагалось возникновение колебательной неустойчивости. Была рассмотрена весьма упрощенная теоретическая схема (в частности, не учитывалась вязкость среды), и задача устойчивости осталась нерешенной.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Некоторые известные ранее «удивительные» [4] гидротермодинамические свойства бинарных смесей связаны с различием значений коэффициентов переноса для разных субстанций. При этом обычно считается, что нетривиальные эффекты возникают в ситуациях, когда одна из двух субстанций стратифицирована неустойчиво («конвекция, обусловленная двойной (дифференциальной) диффузией» [4]). Обнаруженный выше эффект интенсивного термического отклика на внешнее механическое воздействие отличается тем, что он существует и при одинаковых значениях коэффициентов переноса, и при устойчивой стратификации обеих субстанций. Если же одна из субстанций вносит небольшой дестабилизирующий вклад в устойчивую стратификацию плотности, то, как показано, возникновение неустойчивости может быть связано не с различием коэффициентов переноса, а с различием граничных условий для разных субстанций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-05-64027) и МНТЦ (гранты G-553, G-1217).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Линейкин, В. С. Мадерич, *Теория океанического термоклина*, Гидрометеоздат, Ленинград (1982).
2. Л. Х. Ингель, УФН **167**, 779 (1997).
3. Л. Х. Ингель, УФН **172**, 691 (2002).
4. Дж. Тернер, *Эффекты плавучести в жидкостях*, Мир, Москва (1977).
5. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
6. G. Walin, *Tellus* **16**, 389 (1964).
7. H. Stommel and G. Veronis, *Tellus* **9**, 401 (1957).
8. Э. М. Карташов, *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, Москва (1985).
9. P. Welander, *Tellus* **41**, 66 (1989).