ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 2, стр. 239–253

ПИЧКОВАЯ СТРУКТУРА КОГЕРЕНТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКИ ПЛОТНЫХ СРЕД

А. М. Башаров[*], *Г. Г. Григорян, Н. В. Знаменский, Э. А. Маныкин, Ю. В. Орлов, А. Ю. Шашков, Т. Г. Юкина*

Российский научный центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 июля 2005 г.

Экспериментально и теоретически исследована пичковая структура спонтанного излучения ионов празеодима в матрице LaF_3 на частоте перехода $^3P_0$–$^3H_6$ при когерентном импульсном возбуждении смежного перехода $^3H_4$–$^3P_0$. Экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими выводами, основанными на анализе динамики излучения возбужденного ансамбля трехуровневых систем в приближении среднего поля. Генерация пичковой структуры интерпретирована как излучение импульса кноидальной волны. Зарегистрированный случайный характер интервалов времени между пичками отражает чувствительность периода кноидальной волны к флуктуациям в системе. Выявлена связь развиваемой теории с моделями детерминированной хаотической динамики.

PACS: 42.65.Re, 42.65.Sf, 42.65.Yj

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические эффекты при когерентном резонансном возбуждении иона празеодима в матрице LaF_3 уже давно привлекают внимание исследователей (см. обзор [1]). В серии работ [2–8] экспериментально изучались особенности вынужденного (точнее, индуцированного или коллективного спонтанного) излучения на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ иона празеодима при когерентном возбуждении смежного перехода $^3H_4$–$^3P_0$. Авторы [5, 6] регистрировали моноимпульсную структуру спонтанного излучения и трактовали его как сверхизлучательный эффект. Авторы работ [3, 7, 8] наблюдали сложную временную структуру импульса спонтанного излучения, состоящего из последовательности затухающих пичков: двух в работе [3] и большего числа в работах [7, 8]. При этом данные [7, 8] свидетельствуют в пользу развития процесса генерации на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ празеодима.

Процесс формирования индуцированного спонтанного излучения на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ празеодима, по-видимому, является определяющим для всего класса когерентных эффектов, связанных с импульсным возбуждением перехода $^3H_4$–$^3P_0$. Поэтому целесообразно провести детальный теоретический анализ особенностей вынужденного излучения на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ празеодима. Интерес представляют как теория импульсной лазерной генерации, так и теория сверхизлучения. Как показано в данной работе, пичковая структура когерентного спонтанного излучения отражает общие черты, свойственные оптически протяженным («толстым») средам, для отличительной характеристики которых будем пользоваться понятием коллективной оптической плотности среды, а для краткости будем говорить просто об оптически плотных средах (см. ниже).

В данной статье представлены новые экспериментальные результаты по пичковой структуре индуцированного когерентного излучения на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ в случаях возбуждения кристалла LaF_3 в безрезонаторных условиях и при помещении его внутрь резонатора. Построена теория импульсной лазерной генерации на одном из смежных переходов в трехуровневой системе Λ-конфигурации при резонансном когерентном возбуждении другого перехода с основного состояния на возбужденное. Пред-

[*]E-mail: basharov@gmail.com, bash@online.ru

полагается, что частота перехода, на котором возникает импульсная лазерная генерация, совпадает с частотой низкодобротного резонатора. В приближении среднего поля получены уравнения, описывающие импульсную лазерную генерацию и динамику трехуровневой системы. В пренебрежении неоднородным уширением спектральных линий найдены аналитические решения в некоторых частных случаях, описывающие как моноимпульсный, так и пичковый режимы когерентного излучения, а общий случай проанализирован численно. Основной особенностью данного режима вынужденного излучения является пичковая структура импульса излучения. В теории сверхизлучения пичковая структура импульса сверхизлучения характерна для протяженной среды и является следствием интерференции сверхизлучательных процессов из разных точек возбужденной среды (осцилляторный режим сверхизлучения или режим МакГиливрея – Фельда [9]). Между тем в развитой теории пичковая структура следует из теории среднего поля, игнорирующей интерференционные эффекты в излучении из разных точек среды. Наряду с хорошим соответствием с экспериментом (в том числе с описанным в работах [7, 8]) это представлялось бы весомым доводом в пользу развития процессов генерации на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ при импульсным возбуждении перехода $^3H_4$–$^3P_0$. Проанализировав и другие возможные модели модуляции когерентного спонтанного излучения, мы пришли к следующим выводам.

Основным фактором, определяющим появление пичковой структуры в когерентном спонтанном излучении, является эффективная оптическая протяженность среды на частоте этого излучения. Известны оптически тонкие среды, в которых обратным влиянием индуцированного поля на возбуждающее можно пренебречь, и для теоретического описания используют приближение заданного поля. Эффективно оптически протяженные среды можно рассматривать как среды, в которых это условие нарушено и начинает сказываться нелинейность при распространении индуцированного излучения, так что приближение заданного поля неприменимо. Однако говорить о таких средах как о нелинейных средах не совсем удобно, поскольку большинство когерентных эффектов в оптически тонких средах обусловлено именно нелинейным взаимодействием поля со средой. Поэтому в противоположность случаю оптически тонких сред будем говорить о коллективно оптически плотных средах, добавляя слово «коллективно», чтобы отличить их от просто оптически плотной среды, в которой существенно диполь-дипольное взаимодействие атомов. В коллективно оптически плотной среде нельзя говорить о существенной малости индуцированного излучения по сравнению с возбуждающим полем (той же частоты), а зачастую в среде их нельзя корректно и разделять. Коллективно оптически плотная среда может представлять собой как достаточно протяженную среду, в которой влиянием границ можно пренебречь, так и оптически тонкую среду, помещенную в резонатор, когда граничные условия (отражение от зеркал) определяют эффективную оптическую протяженность среды много большей исходной. К оптически плотным средам относятся также оптически толстые среды, в которых существенно влияние границ, но нельзя говорить о выполнении резонаторных условий. В ряде случаев к ним можно отнести и тонкие пленки резонансных атомов толщиной, много меньшей длины волны резонансного электромагнитного излучения. Как было впервые подмечено в работе [10], основные уравнения для поляризации среды в резонаторе низкой добротности (в приближении среднего поля) и уравнения для поляризации тонкой пленки (в пренебрежении полем Лоренца) совпадают. По-видимому, в таких ситуациях в основном теряется различие между резонаторной и безрезонаторной генерацией, а также и осцилляторным сверхизлучением, и наблюдаемые нами и в экспериментах [3, 5–9] эффекты можно отнести к общему классу когерентных эффектов, характеризующих индуцированное спонтанное излучение коллективно оптически плотных сред.

Другим следствием развитой в работе теории является вывод о наблюдавшейся пичковой структуре когерентного излучения как об импульсе кноидальной волны. Кноидальная волна представляет собой такую же математическую абстракцию, как и монохроматическая волна, и в реальных условиях можно говорить только о подобии или близости зарегистрированного излучения к какой-либо подходящей абстракции. Полученное аналитическое решение процесса когерентного излучения выражается при определенных условиях через эллиптическую функцию Якоби — «эллиптический косинус» — которая описывает также нелинейную волну, состоящую из бесконечной последовательности пичков и называемую кноидальной волной. До сих пор экспериментально демонстрировалось формирование кноидальной волны в оптике только при нелинейном распространении последовательности импульсов через резонансную среду [11]. Отличительной особенностью наблюдавшегося нами «кноидального режима» является близость его параметров к сепаратрисе и, как следствие, проявление хаотического режима. Этот режим у нас проявляется в нерегулярных интервалах времени между пичками когерентного излучения. Уравнения развиваемой теории в одном случае сводятся к уравнениям, допускающим бигамильтонову структуру и гомоклинические орбиты [12], в другом случае — к известным уравнениям Лоренца [13]. Необходимо также отметить, что описание кноидальных волн при распространении резонансных импульсов в неинвертированных средах получено еще в работах [14–16]. Стохастические режимы когерентного излучения исследовались и экспериментально, и теоретически в лазерной генерации для различных условий [17–20], при прохождении стационарными волнами (модулированными и немодулированными) пассивных нелинейных резонаторов [21–24] и в ряде других случаев [25–27].

Сформулированная в работе модель трехуровневой среды представляется новой моделью, специфической особенностью которой служит описание когерентных процессов в системе, характеризуемой существенно различной коллективной оптической плотностью среды на смежных оптически разрешенных переходах. В случае пренебрежения процессами на переходе, по отношению к которому среда является оптически тонкой, модель переходит в широко известные модели тонкой пленки резонансных атомов [10, 28], низкодобротного и высокодобротного резонатора с резонансными атомами в приближении среднего поля [29–31] или к их обобщениям. В пренебрежении другим переходом, по отношению к которому среда является оптически толстой, модель сводится к популярной модели Блоха (см., например, [32]). Тот факт, что в рамках развитой модели описываются наши экспериментальные результаты как по резонаторной генерации когерентного излучения, так и по генерации в отдельном кристалле в безрезонаторных условиях, свидетельствует о широкой области применимости модели и приближения среднего поля, не ограниченными исходными предположениями о совпадении частоты импульсной лазерной генерации с частотой низкодобротного резонатора.

Предположение о существенно различных оптических толщинах среды по отношению к разным несущим частотам позволило получить основные результаты в аналитическом виде. Разработанная нами модель позволяет описывать не только упомянутые когерентное спонтанное излучение и импульсную лазерную генерацию, но и другие когерентные эффекты в спонтанном излучении. Так, становится возможным описание эффектов типа трехуровневых [33], комбинационных [34] и стоксовых [35] фотонных эхо в новых условиях экспериментов [3, 5–8] и т. п.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 описаны экспериментальные установка и результаты. В разд. 3 выведены основные уравнения модели взаимодействия когерентного излучения с трехуровневой системой в условиях, когда один из смежных оптически разрешенных переходов «помещен» в резонатор и проводится приближение среднего поля. В разд. 4 аналитически описаны временные особенности вынужденного излучения в упрощающих предположениях и представлено решение для пичковой структуры, выраженное через эллиптический косинус. В разд. 5 кратко проанализировано влияние неоднородного уширения спектральных линий рассматриваемых переходов и основных параметров теории. В Заключении сопоставлены экспериментальные данные и обсужден параметр, определяющий пичковую структуру в излучении разнообразных коллективно оптически плотных сред.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

Излучение лазера на органическом красителе с помощью длиннофокусной линзы ($f = 100$ см), стягивающей поперечный размер светового пучка до величины 0.5×0.5 мм^2, фокусировалось в кристалл $LaF_3{:}Pr^{3+}$ (концентрация 0.5 ат.%). Угол падения составлял около 2° (рис. 1). Кристалл располагался в гелиевом криостате и его температура могла поддерживаться от 4.2 K до комнатной. В выполненных экспериментах частота ω_p генерации лазера на красителе перестраивалась в пределах неоднородной ширины линии перехода $^3H_4$–$^3P_0$ ($\omega_1/2\pi c = 20930.1$ см$^{-1}$) иона Pr^{3+}. Спектральная ширина линии генерации $\Delta\omega_p/2\pi c$ не превышала 0.06 см$^{-1}$. Импульс лазерной генерации имел колоколообразную форму с шириной по основанию $\tau_p = 15$ нс, что значительно меньше времен продольной и поперечной релаксации для перехода $^3H_4$–$^3P_0$ при гелиевых температурах, составляющих соответственно $1/\gamma_2 \approx 47$ мкс, $1/\gamma_{21} = 2.4$ мкс.

Интенсивность излучения накачки на входе в кристалл определялась лучевой прочностью последнего и могла достигать значений $I_p \approx 40$ МВт/см^2, что соответствует «площади» импульса

$$\theta = 2|d_{31}|\hbar^{-1} \int a_p dt \approx 1.5\pi,$$

где $|d_{13}|$ — приведенный дипольный момент перехода $^3H_4$–$^3P_0$, a_p — медленно меняющаяся амплиту-

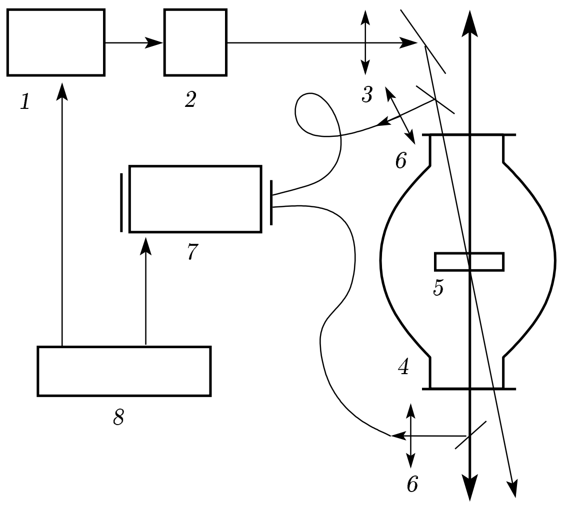


Рис. 1. Оптическая схема экспериментальной установки: *1* — эксимерный (XeCl) лазер, *2* — лазер на органическом красителе, *3* — линза ($f = 1.0$ м), *4* — гелиевый криостат для оптических исследований, *5* — кристалл LaF_3:Pr, *6* — линзы ($f = 0.1$ м), *7* — электронно-оптическая камера со щелевой разверткой, оборудованная волоконными световодами, *8* — импульсная электронная схема запуска и синхронизации

да импульса накачки. Регистрация всех излучений осуществлялась электронно-оптической камерой со щелевой разверткой.

Уже при интенсивности $I_p \approx 20$ МВт/см^2 на выходе из кристалла наблюдалось когерентное вынужденное излучение, частота которого $\omega/2\pi c = (16708.6 \pm 0.1)$ см$^{-1}$ соответствовала частоте перехода $^3P_0$–$^3H_6$. Оно возбуждалось как в прямом, так и в обратном направлении и имело спектральную ширину $\Delta\omega/2\pi c \approx 0.04$ см$^{-1}$. Вынужденное излучение генерировалось при перестройке частоты ω_p в пределах неоднородной ширины линии перехода $^3H_4$–$^3P_0$ и наблюдалось вплоть до температур, равных $T = 25$ К. Эта генерация происходила в режиме сверхлюминесценции с расходимостью около 40 мрад в двух близких направлениях с углом между ними, приблизительно равным 2°. Эти направления являются близкими к нормалям противоположных граней кристалла. Различий между характеристиками вынужденного излучения в них не обнаружено.

Хронограммы, полученные с помощью электронно-оптической камеры, показали, что когерентное вынужденное излучение состоит из мощного короткого импульса ($\tau = 10$–15 нс) и более слабого «хвоста», состоящего из цуга пичков с убывающей интенсивностью, случайных по длительности (5–50 нс) и интервалу следования (см. рис. 2). Поведение и временная структура первого короткого импульса когерентного вынужденного излучения при различных температурах и перестройке ω_p в пределах неоднородной ширины линии перехода $^3H_4$–$^3P_0$ исследовались авторами ранее [7].

Полная длительность процесса вынужденного излучения достигает 2 мкс при 4.5 К и уменьшается с повышением температуры [8]. При температуре, большей 25 К, генерация исчезает.

Когда кристалл помещался в резонатор (оба зеркала имели коэффициент отражения около 65 %), вместе с безрезонаторным вынужденным излучением в упомянутых двух близких направлениях появлялась генерация с расходимостью около 6 мрад. Ее характерная хронограмма приведена на рис. 3. Она возникала с задержкой 20 нс и более от возбуждающего импульса. Заметно, что общая длительность процесса генерации сокращается до 1 мкс, а случайные пички увеличивают свою длительность и интервал следования и сглаживаются с увеличением длины резонатора. Кроме того, генерация оказывается промодулированной регулярным образом с характерными временами 5–10 нс. Не было замечено никакой зависимости этих времен от длины резонатора.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ

Рассмотрим воздействие ультракороткого электромагнитного импульса, резонансного переходу $E_1 \to E_3$ примеси в условиях, когда смежный переход $E_3 \to E_2$ совпадает с собственной частотой низкодобротного резонатора, образованного гранями кристалла, куда обсуждаемые примеси имплантированы (см. рис. 4).

Запишем уравнения Максвелла–Блоха в резонансном приближении для амплитуд $\mathcal{E}_p^{(\pm)}$ и $\mathcal{E}^{(\pm)}$ напряженности полей возбуждающего импульса на частотах ω_p и ω, распространяющихся в обоих направлениях вдоль оси z, и для матрицы плотности $\rho^{(i)}$ примесных атомов с частотами перехода $\omega_1^{(i)}$ и $\omega_2^{(i)}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{E}_p^{(\pm)}}{\partial z} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}_p^{(\pm)}}{\partial t} = \pm i \sum_i \frac{2\pi\omega_p N^{(i)}}{c}\, d_{13}^{(i)} \tilde{\rho}_{31}^{(i)\pm}, \\
&\frac{\partial \mathcal{E}^{(\pm)}}{\partial z} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{E}^{(\pm)}}{\partial t} = \pm i \sum_i \frac{2\pi\omega N^{(i)}}{c}\, d_{23}^{(i)} \tilde{\rho}_{32}^{(i)\pm},
\end{aligned} \qquad (1)$$

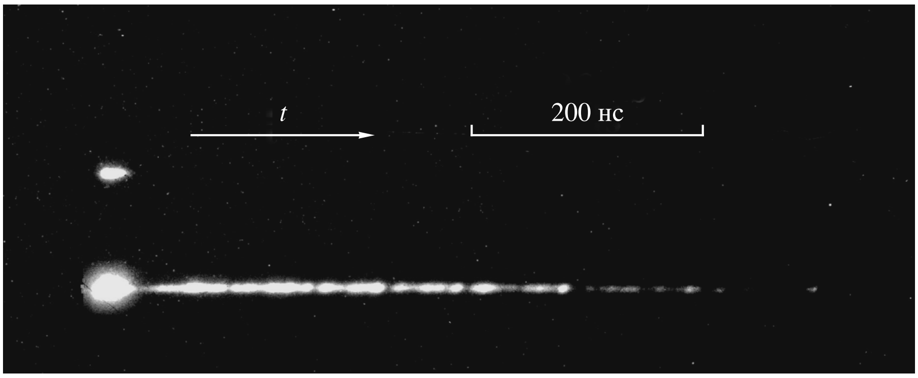


Рис. 2. Хронограмма импульса накачки (верхнее пятно) и вынужденного излучения (нижний трек) с временным разрешением 2 нс. Вверху показаны направление и масштаб времени. Температура равна 6 К

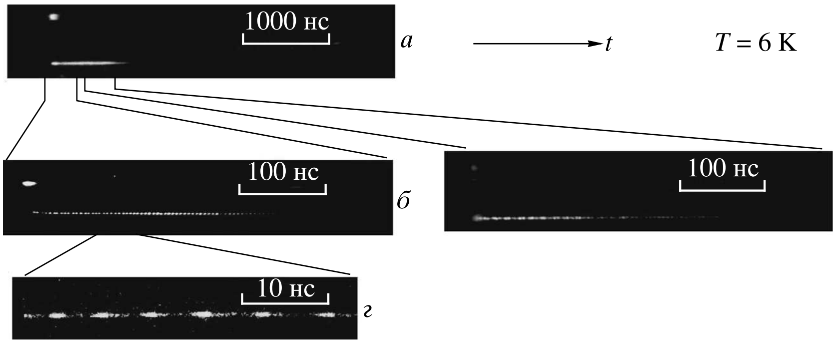


Рис. 3. Хронограмма накачки и вынужденного излучения с резонатором длиной 90 см. Развертка излучения на хронограмме *в* задержана относительно развертки на хронограмме *б* на 400 нс. Хронограммы *г* и *б* получены для одного и того же возбуждающего импульса на двух электронно-оптических камерах с разными развертками. Температура равна 6 К

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_{31}^{(i)}}{\partial t} = i\Delta\omega_1^{(i)}\tilde{\rho}_{31}^{(i)} + in_1^{(i)}\frac{d_{31}^{(i)}\mathcal{E}_p}{\hbar} + i\tilde{\rho}_{21}^{(i)}\frac{d_{32}^{(i)}\mathcal{E}}{\hbar}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_{32}^{(i)}}{\partial t} = i\Delta\omega_2^{(i)}\tilde{\rho}_{32}^{(i)} + in_2^{(i)}\frac{d_{32}^{(i)}\mathcal{E}}{\hbar} + i\tilde{\rho}_{21}^{(i)*}\frac{d_{31}^{(i)}\mathcal{E}_p}{\hbar}, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\tilde{\rho}_{21}^{(i)}}{\partial t} = i\left(\Delta\omega_1^{(i)} - \Delta\omega_2^{(i)}\right)\tilde{\rho}_{21}^{(i)} - \\ - i\tilde{\rho}_{32}^{(i)*}\frac{d_{31}^{(i)}\mathcal{E}_p}{\hbar} + i\tilde{\rho}_{31}^{(i)}\frac{d_{32}^{(i)*}\mathcal{E}^*}{\hbar}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial n_1^{(i)}}{\partial t} = 4\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\rho}_{31}^{(i)*}\frac{d_{31}^{(i)}\mathcal{E}_p}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\rho}_{32}^{(i)*}\frac{d_{32}^{(i)}\mathcal{E}}{\hbar}\right),$$

$$\frac{\partial n_2^{(i)}}{\partial t} = 4\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\rho}_{32}^{(i)*}\frac{d_{32}^{(i)}\mathcal{E}}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\rho}_{31}^{(i)*}\frac{d_{31}^{(i)}\mathcal{E}_p}{\hbar}\right),$$

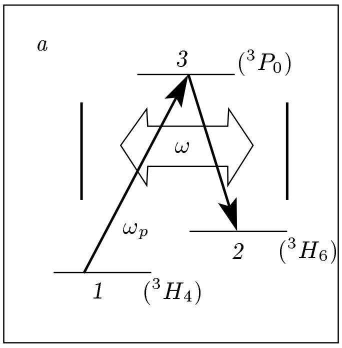
$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{31}^{(i)\pm} &= \frac{k_p}{2\pi}\int\limits_{-\pi/k_p}^{\pi/k_p} dz\,\tilde{\rho}_{31}^{(i)}\exp\left(\mp ik_pz\right), \\ \tilde{\rho}_{32}^{(i)\pm} &= \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\pi/k}^{\pi/k} dz\,\tilde{\rho}_{32}^{(i)}\exp\left(\mp ikz\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$n_1^{(i)} = \rho_{11}^{(i)} - \rho_{33}^{(i)}, \quad n_2^{(i)} = \rho_{22}^{(i)} - \rho_{33}^{(i)},$$

$$\Delta\omega_1^{(i)} = \omega_p - \omega_1^{(i)}, \quad \Delta\omega_2^{(i)} = \omega - \omega_2^{(i)}.$$

Амплитуды $\mathcal{E}_p^{(\pm)}$ и $\mathcal{E}^{(\pm)}$ определяют напряженности полей E_p и E на частотах, соответственно, ω_p и ω:

$$\begin{aligned} E_p &= \mathcal{E}_p\exp(-i\omega_pt) + \text{c.c.}, \\ E &= \mathcal{E}\exp(-i\omega t) + \text{c.c.}, \\ \mathcal{E}_p &= \mathcal{E}_p^{(+)}\exp(ik_pz) + \mathcal{E}_p^{(-)}\exp(-ik_pz), \\ \mathcal{E} &= \mathcal{E}^{(+)}\exp(ikz) + \mathcal{E}^{(-)}\exp(-ikz). \end{aligned} \qquad (6)$$



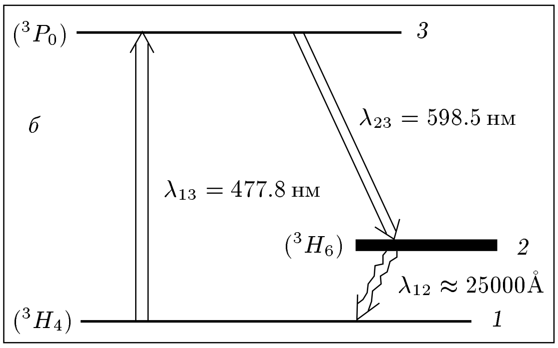


Рис. 4. a — Трехуровневая система, переход которой с основного состояния E_1 резонансен внешнему когерентному полю частоты ω_p, а смежный переход $E_3 \to E_2$ совпадает с собственной частотой ω низкодобротного резонатора. $б$ — Схема уровней иона празеодима в рассматриваемой частотной области

Как обычно для резонансного приближения, недиагональные матричные элементы матрицы плотности суть медленные амплитуды матрицы плотности:

$$\rho_{31}^{(i)} = \tilde{\rho}_{31}^{(i)} \exp(-i\omega_p t), \quad \rho_{32}^{(i)} = \tilde{\rho}_{32}^{(i)} \exp(-i\omega t),$$
$$\rho_{21}^{(i)} = \tilde{\rho}_{21}^{(i)} \exp(-i(\omega_p - \omega)t).$$

В дальнейшем знак тильды опускаем.

Будем считать, что временем движения сигнала внутри среды можно пренебречь, а на частоте накачки ω_p среда является оптически тонкой. Это значит, что индуцированное поле много меньше поля накачки, что приводит к условию [32]

$$\ell = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{\max|a_p|} = \frac{LN|d_{31}|^2 T_{01}\omega_p}{\hbar c} \ll 1, \tag{7}$$

где T_{01} — обратная ширина неоднородно уширенной линии поглощения перехода $E_3 \to E_1$ (время обратимой релаксации), L — длина кристалла, $N = \sum_i N^{(i)}$ — плотность атомов празеодима, а через a_p обозначен профиль входящего в среду импульса накачки, резонансного переходу $E_3 \to E_1$.

При пренебрежении неоднородным уширением в сильных полях условие оптической тонкости среды несколько иное [32]:

$$\ell = \frac{2\pi\omega_p NL}{c \max|a_p|}\,|d_{13}| \ll 1. \tag{8}$$

Для оптически тонкой среды можно положить

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p^{(+)} &= a_p + i\sum_i \frac{2\pi\omega_p N^{(i)} L}{c}\, d_{13}^{(i)} \rho_{31}^{(i)+}, \\ \mathcal{E}_p^{(-)} &= -i\sum_i \frac{2\pi\omega_p N^{(i)} L}{c}\, d_{13}^{(i)} \rho_{31}^{(i)-}. \end{aligned} \tag{9}$$

Предположим, что при отражении волн от граней кристалла на частоте перехода $E_3 \to E_2$ образуется квазирезонаторная мода [36]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(-)}(t, L) &= \sqrt{R}\,\mathcal{E}^{(+)}(t, L), \\ \mathcal{E}^{(-)}(t, 0) &= \sqrt{R}\,\mathcal{E}^{(+)}(t, 0), \end{aligned} \tag{10}$$

где R — коэффициент отражения, и перейдем к приближению среднего поля [30, 31]:

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{E}} = \frac{1}{L}\int_0^L dz\,\mathcal{E}^{(+)} \approx \frac{1}{L}\int_0^L dz\,\mathcal{E}^{(-)}, \\ &\overline{\rho_{32}^*\mathcal{E}} \approx \overline{\rho_{32}^*}\;\overline{\mathcal{E}} \quad \text{и т. п.} \end{aligned} \tag{11}$$

Получаем (при дополнительном пренебрежении неоднородным уширением, отстройками и индуцированным полем на частоте ω_p):

$$\frac{d\overline{\mathcal{E}}}{dt} + \sigma\overline{\mathcal{E}}(t) = is_0\overline{\rho}_{32}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\rho}_{31}}{dt} &= i\overline{n}_1 \frac{d_{31}^{(i)} a_p}{\hbar} + i\overline{\rho}_{21}\frac{d_{32}^{(i)}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}, \\ \frac{d\overline{\rho}_{32}}{dt} &= i\overline{n}_2 \frac{d_{32}^{(i)}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar} + i\overline{\rho}_{21}^{(i)*}\frac{d_{31}^{(i)} a_p}{\hbar}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{d\overline{\rho}_{21}}{dt} = -i\overline{\rho}_{32}^*\frac{d_{31}a_p}{\hbar} + i\overline{\rho}_{31}\frac{d_{32}^*\overline{\mathcal{E}}^*}{\hbar}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{n}_1}{dt} &= 4\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}_{31}^*\frac{d_{31}a_p}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}_{32}^*\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}\right), \\ \frac{d\overline{n}_2}{dt} &= 4\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}_{32}^*\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}_{31}^*\frac{d_{31}a_p}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\sigma = \frac{c(1-R)}{L\left(1+\sqrt{R}\right)}, \quad s_0 = 2\pi\omega N d_{23}.$$

В уравнениях (12)–(15), описывающих вынужденное излучение на переходе $E_3 \to E_2$, можно пренебрегать релаксацией на следующем основании. В обычные одночастичные уравнения для матрицы плотности входят параметры релаксации одиночного атома. То излучение, которое ищем, полагаем, сформировано коллективными процессами и разворачивается за времена, меньшие времени релаксации одного атома. В дальнейшем в некоторых простых случаях одночастичную релаксацию нетрудно будет учесть в конечных формулах.

В уравнениях (12)–(15) можно легко учесть однородные и неоднородные ширины линий и отстройку от резонанса в случае, когда можно пренебречь разбросом матричных элементов дипольного момента примесного атома:

$$\frac{d\overline{\mathcal{E}}}{dt} + \sigma\overline{\mathcal{E}}(t) = is_0 \int d\nu\, f(\nu)\overline{\rho}_{32}, \tag{16}$$

$$\frac{d\overline{\rho}_{31}}{dt} = -\gamma_{31}\overline{\rho}_{31} + i\Delta_1(\nu)\overline{\rho}_{31} + i\overline{n}_1\frac{d_{31}a_p}{\hbar} + i\overline{\rho}_{21}\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}, \tag{17}$$

$$\frac{d\overline{\rho}_{32}}{dt} = -\gamma_{32}\overline{\rho}_{32} + i\Delta_2(\nu)\overline{\rho}_{32} + i\overline{n}_2\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar} + i\overline{\rho}^*_{21}\frac{d_{31}a_p}{\hbar}, \tag{18}$$

$$\frac{d\overline{\rho}_{21}}{dt} = -\gamma_{21}\overline{\rho}_{21} + i(\Delta_1(\nu) - \Delta_2(\nu))\overline{\rho}_{21} - i\overline{\rho}^*_{32}\frac{d_{31}a_p}{\hbar} + i\overline{\rho}_{31}\frac{d^*_{33}\overline{\mathcal{E}}^*}{\hbar}, \tag{19}$$

$$\frac{d\overline{n}_1}{dt} = -\gamma_1\left(\overline{n}_1 - \overline{n}_1^{(0)}\right) + 4\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}^*_{31}\frac{d_{31}a_p}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}^*_{32}\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}\right), \tag{20}$$

$$\frac{d\overline{n}_2}{dt} = -\gamma_2\left(\overline{n}_2 - \overline{n}_2^{(0)}\right) + 4\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}^*_{32}\frac{d_{32}\overline{\mathcal{E}}}{\hbar}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\overline{\rho}^*_{31}\frac{d_{31}a_p}{\hbar}\right). \tag{21}$$

Здесь параметр ν характеризует группу резонансных атомов, чьи частоты переходов $E_3 \to E_1$ и $E_3 \to E_2$ лежат в пределах вблизи $\omega_p - \Delta_1(\nu)$ и $\omega - \Delta_2(\nu)$, где $\Delta_1(\nu)$ и $\Delta_2(\nu)$ — некоторые функции параметра ν. Относительное число этих атомов $d\nu\, f(\nu)$ определяется функцией распределения $f(\nu)$,

$$\int f(\kappa)\, d\kappa = 1.$$

Если в уравнениях (12)–(15) положить $d_{31} = 0$ и $a_p = 0$, то такие уравнения (12)–(20) совпадают с уравнениями, описывающими резонатор с резонансными атомами в приближении среднего поля [29–31]. Если далее предположить низкую добротность резонатора,

$$\sigma \gg |\overline{\mathcal{E}}d_{32}|/\hbar, \quad \sigma \gg \gamma_{32}, \quad \sigma \gg \gamma_2, \tag{22}$$

то получаются уравнения для тонкой пленки резонансных атомов [10, 28] (если в последних пренебречь полем Лоренца, обусловливающим поправку к микроскопическому полю, действующему на атом, за счет диполь-дипольного взаимодействия атомов).

Если в уравнениях (16)–(21) положить $d_{32} = 0$ и $\overline{\mathcal{E}} = 0$, то такие уравнения (16)–(21) совпадают с уравнениями модели Блоха (см., например, [32]).

При учете всех переходов в трехуровневом атоме представленная модель возбуждения и излучения трехуровневых сред отличается как от соответствующего обобщения модели Блоха (см., например, [32]), так и от трехуровневых моделей тонких пленок резонансных атомов [37, 38], в которых некоторые режимы сходны с описываемыми в данной работе.

Подчеркнем, что область применимости модели (особенно это явствует из сопоставления с экспериментом) гораздо шире, чем исходное предположение. При этом выражение параметра σ через длину резонатора и коэффициенты отражения зеркал верны лишь для случая высокой добротности резонатора [30, 31], образованного гранями кристалла (чего в нашем эксперименте не имело места). В остальных же случаях величину следует рассматривать лишь как феноменологический параметр системы, характеризующий скорость вывода энергии из системы (σ^{-1} — время жизни фотона в среде).

4. ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим некоторые конкретные случаи когерентного возбуждения трехуровневой системы импульсом на частоте ω_p. Неоднородным уширением и расстройками пренебрегаем. Знак черты над символами для простоты опускаем.

Пусть в начальный момент времени был заселен только нижний энергетический уровень и когерентный импульс накачки представляет собой интенсивный короткий импульс a_p площади θ,

$$\theta = 2|d_{31}|\hbar^{-1}\int a_p dt. \tag{23}$$

Предположим, что длительность импульса τ_p много меньше всех характерных времен задачи, в том числе и характерного времени развития неустойчивости, выписанного ниже. Тогда после воздействия такого θ-импульса решения уравнений (12)–(15) имеют вид

$$\begin{aligned} &\rho_{31} = i2^{-1}\sin\theta, \quad \rho_{32} = \rho_{21} = 0, \\ &n_1 = \cos\theta, \quad n_2 = -\sin^2(\theta/2), \quad \mathcal{E} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

При $\theta = \pi$ возбуждающий импульс переводит все атомы на верхний энергетический уровень без поляризации среды. При других значениях θ среда и инвертируется, и поляризуется. Известно, что решение (24) неустойчиво — соответствующие инкременты, определяющие экспоненциальную зависимость $\exp(\lambda t)$ малых возмущений, имеют вид

$$\lambda = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{d_{32}}{\hbar} s_0 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(здесь пренебрежено процессами переизлучения на частоте ω_p). Характерное время развития неустойчивости,

$$\tau_{unst} \sim \hbar \frac{\sqrt{\sigma^2 + 8\pi\omega N|d_{32}|^2\hbar^{-1}\sin^2(\theta/2)} + \sigma}{4\pi\omega N|d_{23}|^2\sin^2(\theta/2)}, \tag{25}$$

совпадает по порядку величины с временем задержки импульса сверхизлучения двухуровневых систем [39, 40] при малых σ.

Таким образом, в сделанных предположениях после воздействия ультракороткого импульса накачки, резонансного переходу $E_3 \to E_1$, исходная система уравнений разбивается: излучение на переходе $E_3 \to E_2$ описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \sigma\mathcal{E}(t) = is_0\rho_{32}, \\ &\frac{d\rho_{32}}{dt} = -\gamma_{32}\rho_{32} + in_2\frac{d_{32}\mathcal{E}}{\hbar}, \\ &\frac{dn_2}{dt} = -\gamma_2\left(n_2 - n_2^{(0)}\right) + 4\,\mathrm{Im}\left(\rho_{32}^*\frac{d_{32}\mathcal{E}}{\hbar}\right), \end{aligned} \tag{26}$$

тогда как когерентность переходов $E_3 \to E_1$, $E_2 \to E_1$ и динамика населенностей определяются при помощи уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho_{21}}{dt} = -\gamma_{21}\overline{\rho}_{21} + i\rho_{31}\frac{d_{32}^*\mathcal{E}^*}{\hbar}, \\ &\frac{d\rho_{31}}{dt} = -\gamma_{31}\overline{\rho}_{31} + i\rho_{21}\frac{d_{32}^{(i)}\mathcal{E}}{\hbar}, \\ &\frac{dn_1}{dt} = -\gamma_1\left(n_1 - n_1^{(0)}\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(\rho_{32}^*\frac{d_{32}\mathcal{E}}{\hbar}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

В случае резонатора низкой добротности будем считать выполненными условия (22). Тогда поле квазистатически «следит» за поляризацией:

$$\mathcal{E} = is_0\sigma^{-1}\rho_{32}. \tag{28}$$

Если ввести параметры

$$\begin{aligned} &\Lambda = \frac{d_{32}s_0}{\sigma\hbar} = \frac{2\pi\omega N|d_{32}|^2}{\hbar\sigma} = \frac{\omega_c\omega}{\sigma}, \\ &\omega_c = \frac{2\pi N|d_{32}|^2}{\hbar} \end{aligned} \tag{29}$$

и пренебречь распадом уровней, то

$$\frac{d\rho_{32}}{dt} = -\gamma_{32}\rho_{32} - \Lambda n_2\rho_{32}, \quad \frac{dn_2}{dt} = 4\Lambda|\rho_{32}|^2. \tag{30}$$

Для мнимых значений $\rho_{32} = -\rho_{32}^* = ir$ имеем

$$\frac{dr^2}{dt} = -2\gamma_{32}r^2 - 2\Lambda n_2 r^2, \quad \frac{dn_2}{dt} = 4\Lambda r^2. \tag{31}$$

Будем искать решение (31) в виде $n_2 = a + b\,\mathrm{th}(ct')$. Здесь момент t' отвечает моменту максимальной величины поля в излученном импульсе. Нетрудно получить, что

$$\gamma_{32} + \Lambda a = 0, \quad c = \Lambda b,$$

$$r^2 = \frac{c^2}{4\Lambda^2\,\mathrm{ch}^2(ct')}, \quad n_2 = -\Lambda^{-1}\left(\gamma_{32} - c\,\mathrm{th}(ct')\right).$$

При максимальном значении поля $n_2 = -\Lambda^{-1}\gamma_{32}$, а при $t \to -\infty$,

$$n_2 = -\sin^2\frac{\theta}{2} < 0,$$

так что

$$c = \Lambda\sin^2\frac{\theta}{2} - \gamma_{32},$$

$$n_2 = -\Lambda^{-1}\left\{\gamma_{32} - \left(\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2} - \gamma_{32}\right) \times \right. \\ \left. \times\,\mathrm{th}\left[\left(\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2} - \gamma_{32}\right)t'\right]\right\}.$$

Тогда при $t \to \infty$

$$n_2 = \Lambda^{-1}\left(-2\gamma_{32} + \Lambda\sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Таким образом, в условиях (22) излученное поле имеет колоколообразный вид:

$$\mathcal{E} = s_0\sigma^{-1}\frac{-\Lambda\sin^2\theta/2 + \gamma_{32}}{2\Lambda\,\mathrm{ch}\left[\left(\Lambda\sin^2(\theta/2) - \gamma_{32}\right)t'\right]}. \tag{32}$$

Вся энергия, накаченная в систему полем a_p, высвечивается в виде одиночного импульса (32) за время порядка

$$\tau_{film} = \frac{\sigma}{\omega_c \omega \sin^2(\theta/2)}.$$

Этот импульс носит характер сверхизлучения [39, 40], о чем говорят и его параметры, и его задержка относительно импульса накачки.

В другом предельном случае пренебрежем и релаксацией поляризации. Тогда при $\sigma = 0$, $\rho_{32} = -\rho_{32}^* = ir$ и действительной величине $\Omega = 2d_{32}\mathcal{E}\hbar^{-1}$ можно переписать основные уравнения и их интегралы движения в виде

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{2}\left(2\omega_c\omega\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{\Omega^2}{2}\right), \\ &r^2 + \frac{n_2^2}{4} = \frac{\sin^4(\theta/2)}{4}, \\ &\Omega^2 - 2\omega_c\omega n_2 = 2\omega_c\omega\sin^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Тривиальное нулевое решение уравнения (33) неустойчиво. Чтобы понять, к какому решению оно будет эволюционировать, учтем слабый шум в поляризации атомов и перепишем уравнение (33) в виде

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 = \beta + \omega_c\omega\Omega^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{\Omega^4}{4}. \tag{34}$$

Здесь

$$\beta = 4\omega_c^2\omega^2\overline{(\Delta\rho_{32})^2} > 0,$$

где $\overline{(\Delta\rho_{32})^2}$ — среднеквадратичная флуктуация когерентности на переходе ${}^3P_0$–${}^3H_6$; при этом β мало по сравнению с $4\omega_c^2\omega^2$. Если ввести новые положительные параметры α_1^2 и α_2^2,

$$\alpha_1^2 = 4\omega_c\omega\sin^2\frac{\theta}{2} + \alpha_2^2,$$

$$\alpha_2^2 = -2\omega_c\omega\sin^2\frac{\theta}{2} + \sqrt{\left(2\omega_c\omega\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + 4\beta} \approx \approx \frac{\beta}{\omega_c\omega\sin^2(\theta/2)},$$

причем $\alpha_1^2 > \alpha_2^2 > 0$, то уравнение (34) приобретает канонический вид:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^2 = \frac{1}{4}(\alpha_1^2 - \Omega^2)(\alpha_2^2 + \Omega^2), \tag{35}$$

с решением, выраженным через эллиптическую функцию Якоби («эллиптический косинус») [41]:

$$\Omega = \alpha_1 \operatorname{cn}\left(t\frac{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}{2}, \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\right).$$

В исходных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} &\Omega = \frac{2}{\tau}\operatorname{cn}\left(\frac{t}{\tau}, 1 - \frac{\beta\tau^4}{8}\right), \\ &\tau = \frac{1}{\sqrt{\omega_c\omega\sin^2(\theta/2)}}. \end{aligned} \tag{36}$$

При $\beta = 0$ выражение (36) переходит в решение, полученное в первой работе по когерентному пичковому режиму лазерной генерации [29]:

$$\begin{aligned} &r = -\frac{\sin^2(\theta_p/2)}{2}\sin\int_{-\infty}^{t}\Omega\,dt', \\ &\frac{n_2}{2} = -\frac{\sin^2(\theta_p/2)}{2}\cos\int_{-\infty}^{t}\Omega\,dt', \quad \Omega = \frac{2/\tau}{\operatorname{ch}(t/\tau)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Решение (36) описывает периодические колебания с периодом

$$T = 4\tau\mathbf{K}(1 - \beta\tau^4/8),$$

где $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл первого рода. К этим пульсациям придет неустойчивое инвертированное состояние среды за время порядка τ_{unst}. О длительности и характере пичков позволяет судить величина τ и решение (37), отвечающее случаю $\beta = 0$. Величину T удобно интерпретировать как интервал времени между пичками.

Согласно полученным решениям (36) и (37), энергия, запасенная в среде, переходит в энергию поля и обратно с периодичностью $\tau_{exchange} \sim T$. Если теперь предположить, что $\sigma \neq 0$, то энергия будет выходить за пределы резонатора в виде пичков длительности τ. Осцилляции внутри резонатора будут продолжаться до тех пор, пока энергия в среде либо рассеется за счет неколлективных процессов, определяемых параметром γ_{23}, либо будет выведена за пределы среды со скоростью σ. Именно эти осцилляции и приводят к пичковому режиму когерентного излучения, который наблюдался в эксперименте. Энергию, излученную в j-м пичке в пределе $\sigma\tau \ll 1$ можно оценить как $2\sigma\tau\hbar\omega|n_2(j)|NV$ (аналогично оценкам [29]), где V — эффективный объем области взаимодействия кристалла с импульсом накачки, N — плотность частиц празеодима, $n_2(j)$ — начальная инверсия перед j-м пичком. За j-й пичок начальная инверсия уменьшается на величину

$$\Delta n_2(j) = 4\sigma\tau|n_2(j)|$$

и к началу излучения $(j+1)$-го пичка становится равной

$$|n_2(j+1)| = |n_2(j)| - \Delta n_2(j).$$

Здесь мы пренебрегли изменением длительности пичка. Связать длительность $(j+1)$-го пичка $\tau(j+1)$ с длительностью j-го пичка $\tau(j)$ можно соотношением

$$\tau(j+1) = \tau(j)\left(1 + 2\sigma\tau(j)\right).$$

При этом число пичков в отсутствие релаксации можно оценить как

$$\frac{\sin^2(\theta_p/2)}{4\sigma\tau} = \left|\sin^3\frac{\theta}{2}\right| \frac{\sqrt{\omega_c\omega}}{4\sigma}.$$

Как показывают численные расчеты, эта оценка является удовлетворительной и при нарушении условия $\sigma\tau \ll 1$.

Приведем также другое решение уравнений (33), отвечающее малой шумовой добавке в начальной амплитуде поля:

$$\Omega = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{dn}\left(\frac{t}{\tau}, 1 + \frac{\tilde{\beta}\tau^4}{8}\right),$$

и напомним важное свойство использованных эллиптических функций: $\mathrm{cn}(k\iota, 1/k) = \mathrm{dn}(\iota, k)$. Для малых β и $\tilde{\beta}$ это решение аналогично (36), если пренебречь различием $k\iota$ и ι при $k \approx 1$ в аргументах эллиптических функций.

Описанные пульсации являются неустойчивыми в следующем смысле. Из свойств $\mathbf{K}(k)$ следует: $\mathbf{K}(k) \to \infty$ при $k \to 1$, причем эта зависимость весьма острая: $\mathbf{K}(0.96) = 2.68$, $\mathbf{K}(0.97) = 2.82$, $\mathbf{K}(0.98) = 3.02$, $\mathbf{K}(0.99) = 3.35$. Но именно вблизи единицы находится аргумент функции $\mathbf{K}(1-\beta\tau^4/8)$, поскольку $\beta = 4\omega_c^2\omega^2\overline{(\Delta\rho_{32})^2}$, а флуктуации $\overline{(\Delta\rho_{32})^2}$ малы. Используя асимптотику полного эллиптического интеграла первого рода при $k \to 1$ [41], можно записать

$$T \approx 4\tau \ln\left(8\tau^{-2}\beta^{-1/2}\right).$$

Таким образом, при незначительных, казалось бы, флуктуациях резко меняется интервал времени между генерируемыми пичками. Указанная выше резкая зависимость интервала времени между пичками от величины флуктуации когерентности перехода ${}^3P_0$–${}^3H_6$ определяет экспериментально наблюдаемые различия в длительности пичков, т. е. в интервале времени между максимумами пичков.

Мы полагаем, что данное выше объяснение экспериментально наблюдаемых случайных интервалов между пичками когерентного излучения носит более или менее физический характер. С математической точки зрения такое объяснение отражает общую ситуацию движения вблизи сепаратрисы нелинейного маятника [42, 43].

К интерпретации стохастических интервалов времени между пичками можно подойти еще более математически. Уравнения (26) при $\sigma = \gamma_{32} = \gamma_2 = 0$ сводятся к уравнениям, имеющим бигамильтоновую структуру и обладающим гомоклиническими орбитами, детальный аналитический анализ которых дан в работе [44]. Эти системы характеризуются наличием хаотических режимов типа подковы Смейла [12]. При $\sigma \neq 0$, $\gamma_{32} \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\rho_{32} = -\rho_{32}^* = -ir$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}^*$ уравнения (26) сводятся к хорошо известным уравнениям Лоренца [13, 43]:

$$\frac{dX}{d\iota} + \overline{\sigma}X = \overline{\sigma}Y, \frac{dY}{d\iota} = -Y - ZX + \overline{r}X,$$

$$\frac{dZ}{d\iota} = -\overline{b}Z + YX,$$

для следующих величин:

$$X = \mathcal{E}\frac{2d_{32}}{\hbar\gamma_{32}}, \quad Y = r\frac{2d_{32}s_0}{\sigma\hbar\gamma_{32}},$$

$$Z = \left(n_2 - n_2^{(0)}\right)\frac{d_{32}s_0}{\sigma\hbar\gamma_{32}}, \quad t = \frac{\iota}{\gamma_{32}}.$$

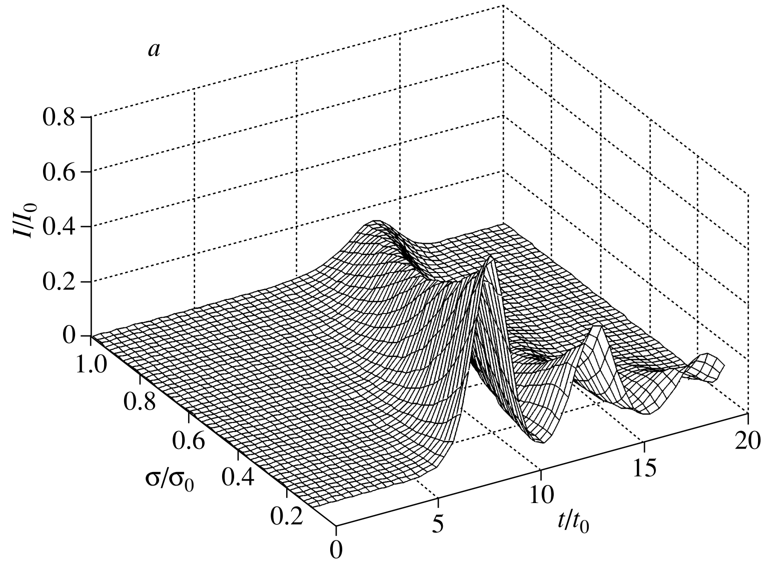
Безразмерную временную переменную мы вынуждены обозначить как ι. Над общепринятыми обозначениями параметров в уравнениях Лоренца мы поставили дополнительный знак черты, чтобы различать их с введенными в статье параметрами:

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma_{32}}, \quad \overline{b} = \frac{\gamma_2}{\gamma_{32}}, \quad \overline{r} = -n_2^{(0)}\frac{d_{32}s_0}{\sigma\hbar\gamma_{32}}.$$

Подчеркнем отличие обсуждаемых уравнений от уравнений, описывающих лазерную генерацию и также сводящихся к уравнениям Лоренца [25, 45]. В случае лазерной генерации стационарному решению соответствующих уравнений отвечает инвертированная среда, т. е. величины $n_2^{(0)}$ (и $\overline{r}$) для указанных случаев отличаются знаком.

Таким образом, упомянутые стохастические режимы (в условиях разделения исходных уравнений на системы (26) и (27)) и другие особенности пичкового режима отвечают регулярным и стохастическим решениям хорошо изученной модели Лоренца. Мы считаем, что представленные выше соображения достаточно полно характеризуют наблюдавшийся в эксперименте пичковый режим когерентного излучения со случайно меняющимися интервалами времени между пичками, а обширная литература по уравнениям Лоренца позволит на этом обсуждение стохастичности завершить.

О переходе между моноимпульсным режимом когерентного излучения и многоимпульсным в зависимости от соотношения основных параметров позволяют судить графики, представленные на рис. 5.



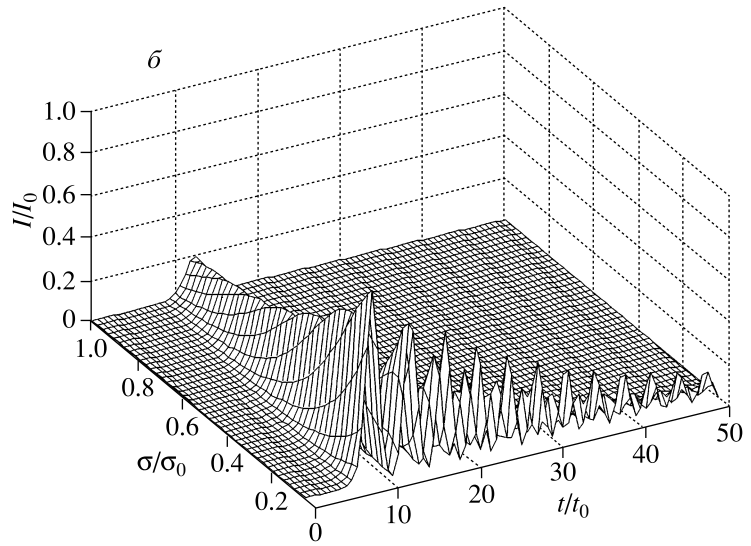


Рис. 5. Графики зависимости безразмерной интенсивности I/I_0 от безразмерных времени t/t_0 и скорости вывода фотона из среды, σ/σ_0. *а* — σ/σ_0 меняется от 0.1 до 1 при $\gamma_{23}/\sigma_0 = 0.1$; *б* — σ/σ_0 меняется от 0.05 до 1 при $\gamma_{23}/\sigma_0 = 0.001$. Рассчитан случай возбуждающего π-импульса при тепловых флуктуациях в поляризации на уровне 0.001 и в пренебрежении неоднородным уширением

5. РОЛЬ НЕОДНОРОДНОГО УШИРЕНИЯ И ДРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕОРИИ

Будем по-прежнему считать импульс накачки достаточно коротким, чтобы было возможно рассматривать отдельно стадии импульсной накачки перехода ${}^3H_4$–${}^3P_0$ и режим генерации на переходе ${}^3P_0$–${}^3H_6$. Для простоты будем считать, что неоднородное уширение смежных переходов описывается одинаковой симметричной функцией $f(\kappa)$ параметра κ, отстройка от резонанса группы атомов $\Delta_2(\kappa) = \delta\kappa$, а частоты ω_p и ω совпадают с центральными частотами соответствующих переходов.

С точки зрения режима генерации, неоднородное уширение перехода ${}^3H_4$–${}^3P_0$ влияет, прежде всего, на количество инвертированных атомов. Другим следствием неоднородного уширения будет формирование условий для наблюдения трехуровневых и комбинационных эхо [33–35], образованных импульсом накачки на частоте ω_p и импульсом генерируемого когерентного излучения на частоте ω.

Для импульса накачки прямоугольной формы,

$$\mathcal{E}_p = \begin{cases} a_p, & 0 \le t \le \tau_p, \\ 0, & \tau_p \le t, \end{cases}$$

имеем следующее решение уравнений (17) и (20), отвечающее возбуждению равновесной среды в приближении заданного поля (7):

$$n_1 = \left[1 - \frac{\Omega_p^2}{\Pi^2}\left(1 - \cos(\Pi\tau_p)\right)\right], \quad n_2 = -\frac{\Omega_p^2}{\Pi^2}\sin^2\frac{\Pi\tau_p}{2},$$

$$\rho_{31} = \frac{\Omega_p}{2\Pi}\left[-\frac{\Delta(\kappa)}{\Pi}\left(1 - \cos(\Pi\tau_p)\right) + i\sin(\Pi\tau_p)\right],$$

$$\rho_{21} = 0,$$

$$\Pi^2 = \Delta^2(\kappa) + \Omega_p^2, \quad \Omega_p = \frac{2a_p|d_{13}|}{\hbar}, \quad \Delta(\kappa) = \delta\kappa.$$

Поэтому, если использовать формулы предыдущего раздела, то всюду под $\sin^2(\theta/2)$ следует понимать величину

$$\overline{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \int d\kappa\, f(\kappa)\frac{\theta^2}{\Delta^2(\kappa)\tau_p^2 + \theta^2} \times \\ \times \sin^2\frac{\sqrt{\Delta^2(\kappa)\tau_p^2 + \theta^2}}{2}. \quad (38)$$

Пичковый режим тем самым описывается формулой (36). Из аналогии точно интегрируемых систем [32] с кноидальными волнами есть надежда, что строгий учет неоднородного уширения повлияет лишь на фазу волны при соответствующем выборе уровня накачки $\sin^2(\theta/2)$ и параметра β. Заметим также, что для определенной формы неоднородно уширенной спектральной линии частное решение уравнений (16), (18) и (21) также может быть получено в виде кноидальных осцилляций (36) [32].

Таким образом, к основным параметрам теории относятся величины σ, $\sin^2(\theta/2)$ (знак черты опускаем), ω_c и β (или $\mathbf{K}$). Подчеркнем, что величина σ в зависимости от ее соотношения со скоростью γ_{23} необратимой релаксации когерентности определяет возникновение многоимпульсного или моноимпульсного режима когерентного излучения, а также длительность пичкового режима в отсутствие релаксации и отличия длительности пичка от величины τ, определенной формулой (36).

В нашем эксперименте противоположные грани кристалла не составляли резонатор и было зарегистрировано два направления вынужденного излучения, образующие малый угол, отражающий, по-видимому, непараллельность противоположных граней кристалла. Характеристики этого излучения примерно одинаковые, и их амплитуда описывается величиной $\mathcal{E}$. Этому случаю отвечает некоторая величина σ, описывающая скорость вывода энергии из кристалла за счет когерентного излучения в двух указанных направлениях. При помещении кристалла внутрь резонатора появляется новый канал вывода энергии когерентным высвечиванием, связанный с резонаторной модой. При этом старые безрезонаторные каналы сохраняются. В результате такая ситуация описывается другой величиной, скажем, σ', которую грубо (полагая все каналы равноправными) можно оценить как $\sigma' = 3\sigma/2$ (подчеркнем, что здесь нельзя пользоваться выражением $\sigma = c(1-R)/L(1+\sqrt{R}))$. В результате длительность пичковой генерации в резонаторе должна сократиться на одну треть (если время необратимой релаксации существенно больше). Похожая картина и наблюдается в эксперименте. Разница в длительностях безрезонаторной генерации и резонаторной генерации определяет различие между σ и σ', а обнаруженная регулярная модуляция пичкового режима при помещении кристалла внутрь резонатора отражает биения между всеми каналами когерентного вывода энергии из кристалла. Однако описание этих биений выходит за рамки развитой теории.

Кооперативная (одномерная) частота ω_c определяет эффективный энергообмен между атомами [39, 40]. Если использовать оценки $|d_{23}| \sim ea$, $N \sim a^{-3}$, где e — заряд электрона, a — расстояние между ионами празеодима, то частота $\omega_c \sim e^2/a\hbar$. С учетом частоты электромагнитного поля именно она и определяет длительность пичка.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная модель когерентного излучения трехуровневой среды в условиях экспериментов [1–8] при определенных параметрах предсказывает как моноимпульсный режим излучения в случае низкой добротности резонатора, образованного гранями кристалла на частоте генерации излучения, так и пичковый режим при высокой добротности резонатора. В промежуточных случаях при больших временах необратимой релаксации имеет место пичковый режим генерации, который поэтому представляется общим случаем.

Основной величиной, определяющей характер когерентного излучения, служит отношение

$$\psi = \frac{2\pi\omega N|d_{32}|^2}{\hbar\sigma^2} = \frac{\omega\omega_c}{\sigma^2}. \quad (39)$$

Если $\psi \gg 1$, т. е. $\psi = \sigma^{-2}\tau_{exchange}^{-2} \gg 1$, то время жизни фотона в кристалле много больше времени энергообмена между атомной и фотонной подсистемами. Тогда устанавливается пичковый режим когерентного излучения вследствие осцилляций при энергообмене. При этом параметр (8), определяющий условие оптической тонкости среды,

$$\ell = \frac{\sqrt{\omega_c \omega}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma \tau_{exchange}} \gg 1.$$

Если $\psi \ll 1$, т.е. $\psi = 1/\sigma\tau_{film} \ll 1$, то время жизни фотона предельно мало, а основная часть закачанной в кристалл энергии выводится из кристалла одним импульсом. При этом

$$\ell = 1.$$

При оценках полагали величину поля равной максимальному значению поля в пичке, а параметр времени пробега фотона L/c заменяли на время жизни σ^{-1}.

Таким образом, оба рассмотренных в работе предельных случая обратны случаю оптически тонкой среды. Моноимпульсный и пичковый режимы характерны для оптически толстых сред. Если пересчитать параметры импульсов сверхизлучения строгой полуклассической теории [46], то здесь также можно говорить о формировании пичковой структуры в оптически толстых средах.

Заметим, что характерная частота энергообмена между атомной и фотонной подсистемами определяется средним геометрическим кооперативной частоты ω_c и несущей частоты электромагнитного поля ω.

Другой характерной особенностью описываемого излучения является его временная задержка по отношению к импульсу накачки. До сих пор такую задержку связывали со сверхизлучательным эффектом и временем фазировки и наведения квантовых корреляций независимых квантовых излучателей. Между тем подобная задержка является лишь следствием развития неустойчивости возбужденного состояния (first time passage) и свойственна как квантовым, так и классическим системам. Более того, как показано в рамках простой модели излучения двух атомов [47], никаких квантовых корреляций в строгом смысле в системе полностью инвертированных атомов при коллективном распаде не возникает. Это объясняет эффективность полуклассического подхода для описания явления сверхизлучения. Но проведенный анализ эквивалентен анализу лазерной генерации в соответствующих условиях [29]. Все это позволяет говорить об общем классе когерентных эффектов, характеризующих индуцированное спонтанное излучение коллективно оптически плотных сред.

Заметим, что для упрощения теории была развита модель трехуровневой среды с существенно различными оптическими толщинами на разных частотах. Это позволило провести анализ эксперимента в аналитическом виде. Отсутствие этого предположения, а также детальный учет влияния основных параметров теории, с необходимостью требуют численного моделирования. Имея в виду упомянутую общность когерентных процессов в коллективно оптически плотных средах, для представления о роли различных параметров, включая поле Лоренца, можно использовать результаты численных исследований когерентных эффектов в трехуровневых (коллективно оптически плотных) средах в рамках других моделей [37, 38, 48–50].

Наконец, скажем о классификации наблюдавшегося пичкового режима. Можно, конечно, поговорить об образах странного аттрактора модели Лоренца, памятуя о случае, сводимом к уравнениям Лоренца, но нам представляется более прагматичным следующий взгляд. В теории нелинейных волн выражение вида (36) с заменой $t \to t - z/V$ описывает так называемые кноидальные волны [32]. Поскольку в характерном предельном случае пичковый режим представляется эллиптической функцией Якоби (формула (36)), о пичковом режиме генерации когерентного излучения уместно говорить как о генерации импульса кноидальной волны. При этом в отличие от идеального случая пичковый режим когерентного излучения можно рассматривать как своеобразную генерацию волн, подобных кноидальным, или как импульс квазикноидальной волны, поскольку необратимая релаксация и время жизни фотона в резонаторе, определяющие протяженность волны во времени и пространстве, влияют также и на другие ее параметры. Конечно, свой элемент неопределенности привносит и обсужденный стохастический режим, но ориентация на образ импульса кноидальной волны дает плодотворную точку отсчета для дальнейшего анализа. В теории фигурируют наблюдаемые в эксперименте величины — длительность пичка $\tau = (\omega_c \omega \sin^2(\theta_p/2))^{-1}$, выраженная через характеристики среды и накачки, и интервал времени между пичками $T = 4\tau\mathbf{K}$. Вообще говоря, нельзя сопоставлять величине $\mathbf{K}$ выражение $\mathbf{K}(1 - \beta\tau^4/8)$, полученное в пренебрежении и неоднородным уширением, и процессами релаксации, и скоростью выхода фотонов из кристалла. Значения $\mathbf{K}$ и/или интервал времени T между пичками удобно рассматривать как дополнительные параметры системы.

В заключение сопоставим имеющиеся экспериментальные данные. Из формулы (36) и (37) следует, что характерная длительность пичка в осцилляторном режиме не зависит от интенсивности пичка и определяется только кооперативной частотой и несущей частотой излучения:

$$\tau = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|\sqrt{\omega_c \omega}}, \quad \omega_c = \frac{2\pi N |d_{32}|^2}{\hbar}.$$

Зависимость от уровня инверсии $|\sin(\theta/2)|$ в случае однородного уширения можно исключить, варьируя площадь импульса накачки таким образом, чтобы при данных условиях длительность пичков была минимальна. Если неоднородное уширение существенно, то в теории возникает дополнительный параметр $|\sin(\theta/2)|$ (39), характеризующий уровень инверсии ионов празеодима. Поскольку кооперативная частота определяется только концентрацией ионов празеодима и приведенным дипольным моментом перехода $^3P_0$–$^3H_6$, из значения периода пичков можно извлечь величину последнего. В случае неоднородно уширенной линии основную и существенную ошибку будет вносить параметр $|\sin(\theta/2)|$. Наши экспериментальные данные, $\tau \approx 13.8$ нс, $N \sim 10^{20}$ см$^{-3}$, будут соответствовать значению $|d_{32}| \approx 1.6 \cdot 10^{-21}$ СГСЕ приведенного дипольного момента перехода 598.5 нм ($\omega/2\pi c = (16708.6 \pm 0.1)$ см$^{-1}$), взятого из работ [51, 52], при величине параметра $|\sin(\theta/2)| = 10^{-3}$. Заметим, что если грубо оценить долю инвертированных атомов как

$$\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| \approx \frac{1/\tau_p}{\Delta\omega_1/2\pi c},$$

где $1/\tau_p$ — спектральная ширина возбуждающего импульса, а $\Delta\omega_1/2\pi c$ — ширина неоднородно уширенной линии на переходе 477.7 нм, то для данных [7, 8] $\Delta\omega_1/2\pi \approx 5.4 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$ при температуре 4.2 К получим $|\sin(\theta/2)| \approx 2 \cdot 10^{-3}$. В работе [6] сообщалось о существенно большем, чем оценивалось первоначально, аномально широком неоднородном уширении линии перехода 477.7 нм порядка примерно 200 ГГц, что дает оценку $|\sin(\theta/2)| \approx 0.5 \cdot 10^{-3}$. Любопытно, что наша оценка $|\sin(\theta/2)| = 10^{-3}$ находится в согласии со всеми этими экспериментальными данными. Из наблюдаемых на рис. 2 и 3 интервалов времени между пичками параметр $\mathbf{K}$ можно оценить как $\mathbf{K} \sim 1$. Таким образом, развитая простая теория согласуется со всеми имеющимися экспериментальными данными и описывает наблюдавшуюся пичковую структуру когерентного излучения на переходе $^3P_0$–$^3H_6$ иона празеодима, включая важные ее особенности. При этом в работе представлены экспериментальные свидетельства генерации импульса кноидальной волны.

Авторы выражают благодарность А. А. Калачеву, А. И. Маймистову и С. В. Сазонову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16567).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Калачев, В. В. Самарцев, *Фотонное эхо и его применение*, КГУ, Казань (1998).
2. R. Kichinski and S. R. Hartman, AIP Conf. Proc. № 146, 417 (1986).
3. Э. А. Маныкин, М. Н. Белов, О. А. Евсин и др., Труды ФТИАН **2**, 84 (1991).
4. Э. А. Маныкин, Н. В. Знаменский, Д. В. Марченко, Е. А. Петренко, Письма в ЖЭТФ **54**, 172 (1991).
5. V. A. Zuikov, A. A. Kalachev, V. V. Samartsev, and A. M. Shegeda, Laser Phys. **9**, 951 (1999).
6. V. A. Zuikov, A. A. Kalachev, V. V. Samartsev, and A. M. Shegeda, Laser Phys. **10**, 364 (2000).
7. А. И. Агафонов, Г. Г. Григорян, Н. В. Знаменский, Э. А. Маныкин, Ю. В. Орлов, Е. А. Петренко, А. Ю. Шашков, КЭ **34**, 823 (2004).
8. G. G. Grigoryan, Yu. V. Orlov, E. A. Petrenko, A. Yu. Shashkov, and N. V. Znamenskiy, Laser Phys. **15**, 602 (2005).
9. J. C. MacGillivray and M. S. Feld, Phys. Rev. A **14**, 1169 (1976).
10. А. М. Башаров, ЖЭТФ **94**(3), 12 (1988).
11. J. L. Shultz and G. J. Salamo, Phys. Rev. Lett. **78**, 855 (1997).
12. S. Wiggins, *Chaotic Transport in Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
13. C. Sparrow, *The Lorenz Equations*, Springer-Verlag, Berlin (1982).
14. F. T. Arecchi, V. DeGiorgio, and C. G. Someda, Phys. Lett. A **27**, 588 (1968).
15. J. H. Eberly, Phys. Rev. Lett. **22**, 760 (1969).

16. M. D. Crisp, Phys. Rev. Lett. **22**, 820 (1969).

17. F. T. Arecchi, R. Meuci, G. P. Puccioni, and J. Tredicce, Phys. Rev. Lett. **49**, 1217 (1982).

18. C. O. Weiss, A. Godone, and A. Olafsson, Phys. Rev. A **28**, 892 (1983).

19. L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy, and C. A. Penisse, Opt. Comm. **46**, 64 (1982).

20. J. N. Elgin and S. Sarkar, Phys. Rev. Lett. **52**, 1215 (1984).

21. K. Ikeda, Opt. Comm. **30**, 257 (1979).

22. K. Ikeda and M. Mizuno, Phys. Rev. Lett. **53**, 1340 (1984).

23. M. Le Berre, E. Ressayre, and A. Tallet, Phys. Rev. Lett. **56**, 274 (1986).

24. W. J. Firth, R. G. Harrisson, and I. A. Al-Saidi, Phys. Rev. A **33**, 2449 (1986).

25. Г. Хакен, *Лазерная светодинамика*, Мир, Москва (1988).

26. А. М. Башаров, *Фотоника. Самопульсации и хаос в оптических системах*, МИФИ, Москва (1987).

27. Е. Б. Пелюхова, Э. Е. Фрадкин, *Самоорганизация физических систем*, Изд. СПбГУ, Санкт-Петербург (1997).

28. М. Г. Бенедикт, А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **66**, 424 (1989).

29. Э. М. Беленов, А. Н. Ораевский, В. А. Щеглов, ЖЭТФ **56**, 2143 (1969).

30. R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Phys. Rev. A **18**, 1129 (1978).

31. M. Gronchi, V. Benza, L. A. Lugiato, P. Meystre, and M. Sargent III, Phys. Rev. A **24**, 1419 (1981).

32. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).

33. T. Mossberg, A. Flusberg, R. Kachru, and S. R. Hartmann, Phys. Rev. Lett. **19**, 1523 (1979).

34. А. М. Башаров, Опт. и спектр. **57**, 961 (1984).

35. А. И. Алексеев, Опт. и спектр. **68**, 1255 (1990).

36. А. Н. Ораевский, *Молекулярные генераторы*, Наука, Москва (1964).

37. А. И. Зайцев, В. А. Малышев, И. В. Рыжов, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **115**, 505 (1999).

38. V. A. Malyshev, F. Carreno, M. A. Anton, O. G. Calderon, and F. Dominguez-Adame, J. Opt. B: Quantum Semiclass, Opt. **5**, 313 (2003).

39. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).

40. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, E. D. Trifonov, *Super-Radiance*: *Multiatomic Coherent Emission*, IOP, Bristol and Philadelphia (1996).

41. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 3, Наука, Москва (1967).

42. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, *Слабый хаос и квазирегулярные структуры*, Наука, Москва (1982).

43. М. Табор, *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*, Эдиториал УРСС, Москва (2000).

44. D. Huang, Chaos, Solitons, and Fractals **22**, 207 (2004).

45. H. Haken, Phys. Lett. A **53**, 77 (1975).

46. И. Р. Габитов, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, ТМФ **63**, 11 (1985).

47. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **75**, 151 (2002); А. М. Башаров, ЖЭТФ **121**, 1249 (2002).

48. С. О. Елютин, А. И. Маймистов, Опт. и спектр. **90**, 849 (2001).

49. V. A. Malyshev, I. V. Ryzhov, E. D. Trifonov, and A. I. Zaitsev, Opt. Comm. **180**, 59 (2000).

50. А. В. Андреев, С. Л. Шитлин, КЭ **22**, 1203 (1995).

51. A. Szabo and N. Takeuchi, Opt. Comm. **15**, 250 (1975).

52. M. J. Weber, J. Chem. Phys. **48**, 4774 (1968).