

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В ФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ ТИПА СМЕЙЛА – ВИЛЬЯМСА

С. П. Кузнецов, Е. П. Селезнев*

*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники Российской академии наук
410019, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 11 августа 2005 г.

Предложена и реализована в эксперименте неавтономная нелинейная система, которая при описании в терминах четырехмерного отображения Пуанкаре характеризуется наличием странного аттрактора типа Смейла – Вильямса. Система построена на основе двух связанных осцилляторов Ван-дер-Поля, у которых характерные частоты различаются вдвое, а параметр, управляющий бифуркацией рождения предельного цикла, подвергается медленному периодическому изменению в обоих осцилляторах в противофазе, так что реализуется эстафетная передача возбуждения от одного осциллятора к другому по очереди. Качественно поясняются механизм функционирования системы и причины возникновения хаоса. Сформулирована система дифференциальных уравнений и приводятся данные численных расчетов, подтверждающие наличие хаотического аттрактора. Выполнен численно тест на гиперболичность, основанный на статистическом анализе распределения углов между устойчивым и неустойчивым подпространствами векторов возмущения хаотической траектории. Представлены экспериментальные результаты исследования системы, демонстрирующие качественное соответствие результатам численного моделирования.

PACS: 05.45.-a

1. ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория динамического хаоса в нелинейных системах, базирующаяся на строгом аксиоматическом фундаменте, использует концепцию гиперболичности [1–7]. Это подразумевает, что все существенные траектории в фазовом пространстве динамической системы имеют седловой тип, с хорошо определенными подпространствами устойчивых и неустойчивых направлений в окрестности траектории. Гиперболические системы диссипативного типа, в которых динамика сопровождается сжатием фазового объема, демонстрируют странные аттракторы с сильными хаотическими свойствами. В учебниках и монографиях по нелинейной динамике примеры гиперболических аттракторов представлены искусственными математическими конструкциями, такими как аттрактор Плыкина и солениод Смейла – Вильямса [1–8].

Аттрактор Смейла – Вильямса имеет место в модельной диссипативной динамической системе, за-

даваемой отображением трехмерного фазового пространства в себя (рис. 1). Рассмотрим трехмерную область в форме тора (рис. 1а). Представляя его для наглядности как резиновый бублик, растянем его в длину, сложим вдвое и вложим в исходный тор (рис. 1б). Чтобы он там поместился, приходится предположить, что в ходе процедуры площадь поперечного сечения сокращается более чем в два раза, т. е. общий объем бублика уменьшается (диссипативность). На рис. 1в показано, как выглядит образ исходного тора после двух итераций отображения, а на рис. 1г — получающийся в пределе большого числа шагов солениод Смейла – Вильямса. Поперечное сечение объекта в процессе построения имеет вид одного, затем двух, четырех, восьми и так далее кружков. Очередной шаг построения состоит в том, что внутри каждого кружка выделяются две области в форме кружков меньшего размера, которые оставляются для следующего шага, а все остальное множество исключается. Таким образом, в пределе большого числа шагов формируется поперечная фрактальная структура аттрактора, аналогичная канторову множеству.

*E-mail: spkuz@rambler.ru

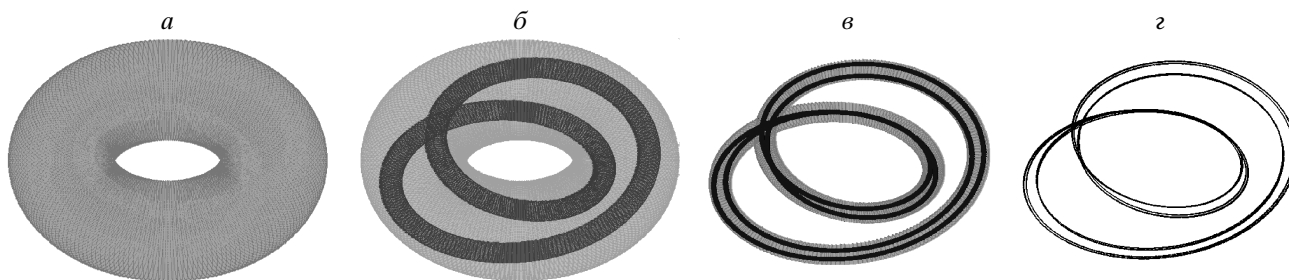


Рис. 1. Построение аттрактора отображения трехмерного фазового пространства в себя. Область в форме тора (а) растягивают в длину, складывают вдвое, сжимают в поперечном направлении и вкладывают внутрь исходного тора (б); в — образ исходного тора после двух итераций отображения, г — солениод Смейла–Вильямса, получающийся в пределе большого числа шагов итераций

Гиперболические странные аттракторы, представителем которых служит солениод Смейла–Вильямса, являются, как доказано, грубыми (структурно устойчивыми) [1–5]. Грубость означает нечувствительность характера движений и структуры взаимного расположения траекторий в фазовом пространстве по отношению к вариациям уравнений, задающих динамику системы. В частности, канторова структура странного гиперболического аттрактора сохраняется без бифуркаций, по крайней мере, пока вариации не слишком велики. Показатель Ляпунова, ответственный за характерную для хаоса чувствительность динамики по отношению к возмущениям начальных условий, зависит от параметров гладким образом (без провалов в отрицательную область, присутствующих обычно в случае негиперболического аттрактора).

Представляется, однако, что математическая теория гиперболического хаоса никогда не была применена убедительно к какому-либо физическому объекту, несмотря на то что ее концепции сплошь и рядом привлекаются для интерпретации хаотического поведения реалистических нелинейных систем.

С другой стороны, широко исследуемые физически мотивированные нелинейные системы со сложной динамикой, например, хаотические автогенераторы, нелинейные осцилляторы с периодическим внешним воздействием, модель Ресслера и др. не относятся к классу систем с гиперболическими аттракторами [7–10]. Как правило, наблюдаемый в них хаос связан с так называемым квазиаттрактором, который наряду с хаотическими траекториями включает также устойчивые орбиты большого периода. (Последние обычно неразличимы при численном решении уравнений на компьютере из-за узости бассейнов притяжения.) Строгое математическое опи-

сание квазиаттракторов остается нерешенной проблемой, хотя в физических системах негиперболическость эффективно маскируется в силу присутствия шума. В модели Лоренца в определенной области параметров хаотический аттрактор, как доказано, обладает основными свойствами гиперболических аттракторов (с оговорками, касающимися нарушения в некоторых деталях аксиоматических положений гиперболической теории), и динамика характеризуется как квазигиперболическая [11, 12].

Известно немного теоретических работ, в которых обсуждаются примеры гиперболического хаоса в системах, описываемых дифференциальными уравнениями. В работе [13] рассмотрена механическая система, названная «тройным соединением», которая в отсутствие трения допускает описание в терминах орбит на поверхности отрицательной кривизны. В диссипативном случае при добавлении обратной связи это должно приводить, как ожидается, к возникновению гиперболического хаотического аттрактора. В работе [14] сконструирован искусственный пример потоковой системы с трехмерным фазовым пространством, имеющей в сечении Пуанкаре аттрактор Плькина. Этот пример, однако, выглядит слишком сложным, чтобы можно было говорить о возможности его реализации в физической системе. Наконец, в работе [15] приводится аргументация в пользу существования аттрактора Плькина в сечении Пуанкаре трехмерной потоковой системы, мотивированной проблемами нейродинамики.

В настоящей статье мы предлагаем простой и прозрачный пример физической неавтономной системы, которая, как можно предположить на основании представленных качественных соображений и численных расчетов, обладает гиперболическим странным аттрактором. При описании в тер-

минах стробоскопического отображения Пуанкаре это аттрактор того же вида, что соленоид Смейла–Вильямса, вложенный в четырехмерное (а не трехмерное) фазовое пространство.

2. СХЕМА И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Обратимся к показанной на рис. 2 схеме радиотехнического устройства, которое представляет собой неавтономную колебательную систему, сконструированную на базе двух подсистем — осцилляторов Ван-дер-Поля с характерными частотами ω_0 и $2\omega_0$. Каждый из двух осцилляторов содержит колебательный контур, образованный катушкой индуктивности $L_{1,2}$ и емкостью, соответственно, $C_{1,2}$, так что

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad 2\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Отрицательное сопротивление ($-R_{1,2}$) вносится специальным элементом на основе операционного усилителя, причем величину отрицательного сопротивления можно считать практически постоянной в рабочем интервале напряжений при колебаниях в контурах. Нелинейная проводимость, обеспечивающая увеличение потерь энергии с ростом амплитуды колебаний, вводится элементом, составленным из полупроводниковых диодов в виде двух параллельно соединенных ветвей с противоположным направлением пропускания тока. Полевой транзистор вносит в колебательный контур практически линейную положительную проводимость, величина которой регулируется напряжением, подаваемым на затвор транзистора. Это напряжение медленно изменяется во времени, совершая колебания с периодом $T = 2\pi N/\omega_0$, где N — целое число, причем на одном полупериоде этого процесса первый осциллятор находится в режиме генерации колебаний, а второй — под порогом генерации. На следующем полупериоде они меняются ролями. Первый генератор действует на второй посредством нелинейного квадратичного элемента A_1 . Производимая при этом вторая гармоника сигнала служит затравкой для возникающих колебаний второго осциллятора в диапазоне частот вблизи $2\omega_0$, когда он выходит за порог генерации. В свою очередь, второй генератор действует на первый посредством нелинейного элемента A_2 , осуществляющего смещение поступающего сигнала и вспомогательного сигнала на частоте ω_0 . При этом появляется составляющая на разностной частоте, которая

попадает в резонансный диапазон для первого осциллятора и служит затравкой, когда он начинает генерировать. Таким образом, оба осциллятора, составляющие схему, по очереди передают возбуждение один другому, что можно охарактеризовать как эстафетный механизм.

Поясним, почему схема функционирует как генератор хаоса. Предположим, что на стадии генерации первого осциллятора его колебания имеют некоторую фазу φ : $U_1 \propto \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Сигнал U_1^2 на выходе нелинейного элемента A_1 содержит вторую гармонику $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$ и его фаза равна 2φ . Когда полупериод заканчивается и начинает генерировать второй осциллятор, возникающие колебания переменной U_2 получают ту же самую фазу 2φ . Благодаря смешению этих колебаний со вспомогательным сигналом частоты ω_0 на нелинейном элементе A_2 , удвоенная фаза передается в исходный частотный диапазон. Таким образом, на новой стадии возбуждения первого осциллятора он получит фазу 2φ . Очевидно, значения фазы первого генератора на последующих стадиях даются, по крайней мере в определенном приближении, отображением вида

$$\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

Как известно, динамика, описываемая этим отображением, хаотична. Это хорошо изученный пример хаоса, отображение «зуб пилы» (saw-tooth map) [1, 4, 6, 7]. В частности, для него легко установить присутствие неустойчивости движения по отношению к возмущению начальных условий, являющейся основным характерным атрибутом хаотической динамики. В самом деле, из уравнения (1) очевидно, что на каждом шаге итераций малое возмущение исходного состояния возрастает вдвое.

Будем рассматривать динамику нашей системы двух взаимодействующих осцилляторов стробоскопически, отслеживая дискретную последовательность мгновенных состояний с периодом внешнего воздействия T . Формально говоря, такое описание сводится к итерациям некоторого отображения четырехмерного пространства в себя. Действительно, мгновенное состояние системы определяется набором четырех переменных, характеризующих напряжение и ток в обоих колебательных контурах, $\mathbf{V} = \{U_1, I_1, U_2, I_2\}$. Если в некоторый момент времени $t = nT$ задан вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n$, то динамика системы однозначно определит эти же переменные через период воздействия: $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{V}_n)$.

В четырехмерном пространстве состояний направление, связанное с фазой φ , отвечает расширению, а три остальных направления — сжатию.

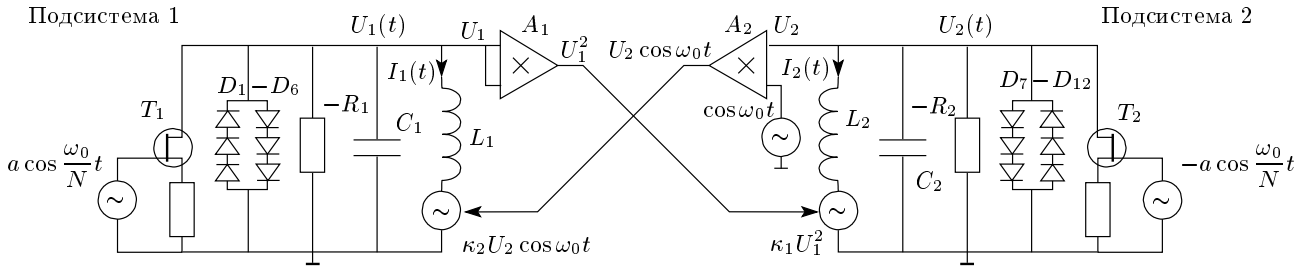


Рис. 2. Схема устройства на основе двух связанных подсистем — осцилляторов Ван-дер-Поля с периодически меняющимися параметрами, — обладающая странным аттрактором типа Смейла–Вильямса (см. пояснения в тексте)

Интерпретируя действие стробоскопического отображения $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{V}_n)$ геометрически, мы можем вообразить вложенный в четырехмерное пространство тороид (прямое произведение одномерной окружности и трехмерного шара) и связать одну итерацию отображения с продольным растяжением и поперечным сжатием этого объекта, вкладываемого затем дважды сложенным внутрь исходной области. Это точно соответствует конструкции аттрактора Смейла–Вильямса. Таким образом, можно предположить, что в данной системе реализуется гиперболический хаотический аттрактор. Далее мы представим численные результаты, свидетельствующие в пользу этого предположения.

3. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Составим систему уравнений, описывающих динамику предлагаемой схемы. Для каждой подсистемы записываем уравнение Кирхгофа, выражающее равенство нулю суммарного тока в параллельных ветвях схемы, и уравнение, связывающее напряжение и ток через катушку индуктивности:

$$\begin{aligned}
 C_1 \frac{dU_1}{dt} + I_1 - \frac{U_1}{R_1} + f(U_1) + \\
 + U_1 \left(g_1 - k_1 a \cos \frac{\omega_0 t}{N} \right) &= 0, \\
 L_1 \frac{dI_1}{dt} &= U_1 + \kappa_2 U_2 \cos \omega_0 t, \\
 C_2 \frac{dU_2}{dt} + I_2 - \frac{U_2}{R_2} + f(U_2) + \\
 + U_2 \left(g_2 + k_2 a \cos \frac{\omega_0 t}{N} \right) &= 0, \\
 L_2 \frac{dI_2}{dt} &= U_2 + \kappa_1 U_1^2.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В этих уравнениях функция $f(U) \approx \alpha U + \beta U^3$ характеризует зависимость тока от напряжения для нелинейного элемента, составленного из полупроводниковых диодов, $\kappa_{1,2}$ — коэффициенты передачи в цепях, обеспечивающих связь между двумя подсистемами, множитель $g \pm ka \cos(\omega_0 t/N)$ отвечает проводимости, вносимой в контур полевым транзистором при наличии переменного напряжения на затворе $\pm a \cos(\omega_0 t/N)$.

С использованием безразмерных переменных

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{\omega_0 t}{2\pi}, \quad x = U_1 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0 C_1} \right)^{1/2}, \\
 u &= I_1 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0^3 C_1^3} \right)^{1/2}, \\
 y &= U_2 \left(\frac{6\pi\beta}{\omega_0 C_2} \right)^{1/2}, \quad v = I_2 \left(\frac{3\pi\beta}{2\omega_0^3 C_2^3} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{3}$$

и параметров

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{2\pi k_1 a}{\omega_0 C_1}, \quad A_2 = \frac{2\pi k_2 a}{\omega_0 C_2}, \\
 h_1 &= \frac{2\pi}{\omega_0 C_1} \left(\frac{1}{R_1} - \alpha - g_1 \right), \\
 h_2 &= \frac{2\pi}{\omega_0 C_2} \left(\frac{1}{R_2} - \alpha - g_2 \right), \\
 \varepsilon_1 &= \kappa_1 \sqrt{\frac{\omega_0 C_1^2}{6\pi\beta C_2}}, \quad \varepsilon_2 = \kappa_2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} + 2\pi u - \left(h_1 + A_1 \cos \frac{2\pi\tau}{N} \right) x + \frac{1}{3} x^3 &= 0, \\
 \dot{u} &= 2\pi(x + \varepsilon_2 y \cos 2\pi\tau), \\
 \dot{y} + 4\pi v - \left(h_2 - A_2 \cos \frac{2\pi\tau}{N} \right) y + \frac{1}{3} y^3 &= 0, \\
 \dot{v} &= 4\pi(y + \varepsilon_1 x^2).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Каждая из двух подсистем описывается парой уравнений первого порядка, допускающей представление

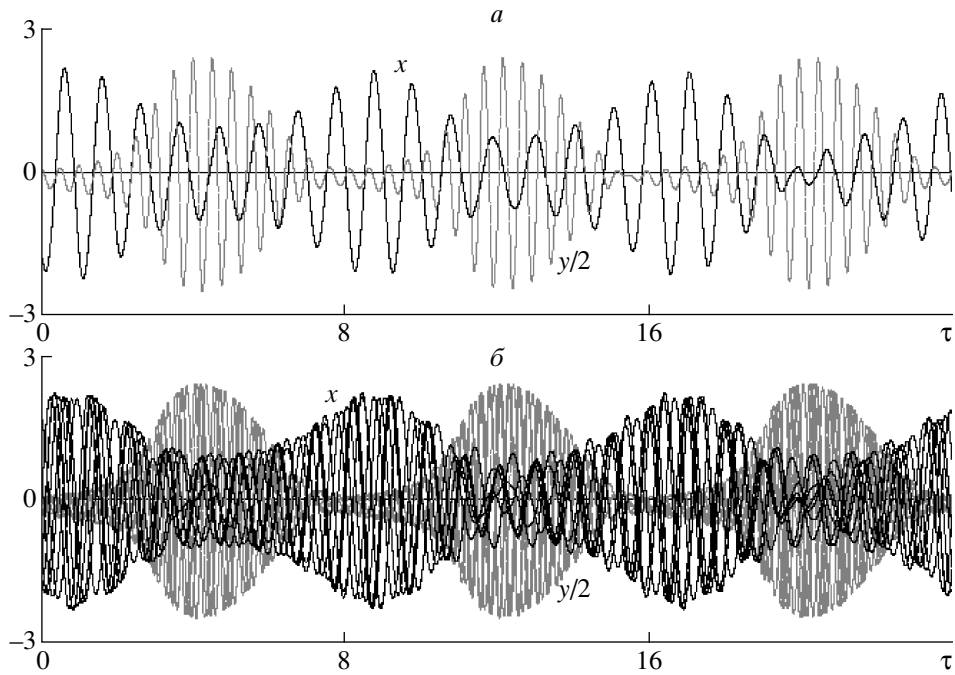


Рис. 3. Типичные образцы временной зависимости для переменных x (черные линии) и y (серые линии), полученной из численного решения уравнений (5) для $N = 8$, $A_1 = 1.5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $h_1 = h_2 = 0$; a — одна реализация, b — порядка десяти наложенных друг на друга реализаций — участков одного и того же сигнала

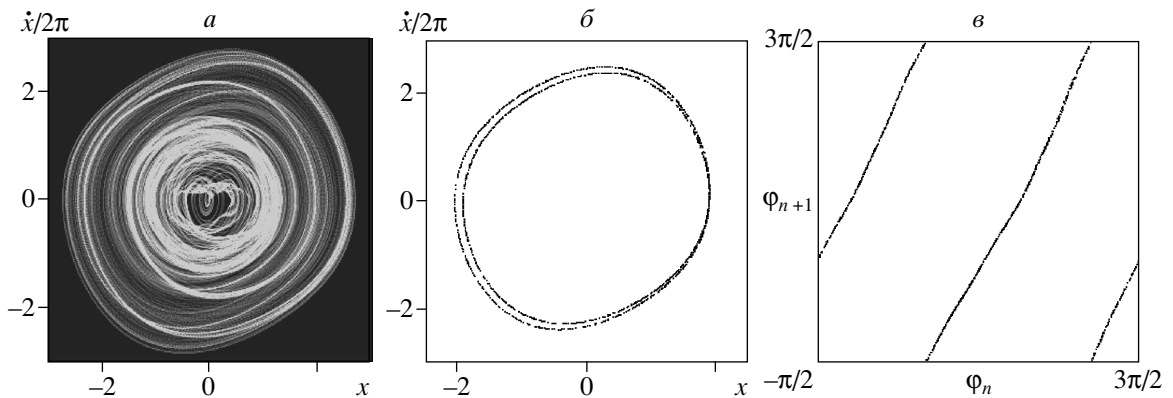


Рис. 4. Портрет аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) (a), стробоскопическое сечение аттрактора для последовательности моментов времени $\tau_n = nN$ (b) и эмпирическая диаграмма, где по горизонтальной и вертикальной осям отложены значения фазы первого осциллятора в последовательные моменты времени τ_n и τ_{n+1} (c). Значения параметров $N = 8$, $A_1 = 1.5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $h_1 = h_2 = 0$

в виде уравнения Ван-дер-Поля с изменяющимися во времени коэффициентами. Динамические переменные x, u отвечают первому осциллятору, а y, v — второму. С учетом использованной нормировки характерная круговая частота первого осциллятора

равна 2π (что соответствует периоду $\Delta\tau = 1$), а второго — 4π . Множитель $h_{1,2} \pm A_{1,2} \cos(2\pi\tau/N)$ представляет медленно осциллирующий во времени параметр, управляющий бифуркацией рождения цикла в одной и другой подсистемах.

4. ХАОТИЧЕСКИЙ АТТРАКТОР В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

На рис. 3 показаны типичные образцы временных зависимостей переменных x и y , полученных из численного решения уравнений (5) методом Рунге–Кутты при $N = 8$ и значениях параметров $A_1 = 1.5, A_2 = 6, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1, h_1 = h_2 = 0$. На диаграмме рис. 3а представлена одна реализация, а на диаграмме рис. 3б — набор примерно из десятка реализаций, отвечающих последовательным участкам одного и того же генерируемого сигнала. На рис. 3а видно, что имеет место поочередное возбуждение первого (черная кривая) и второго (серая кривая) осцилляторов; возбуждение как бы по эстафете передается по очереди от одного осциллятора к другому. На рис. 3б можно сделать на визуальном уровне заключение о неперIODичности процесса. Более тщательный анализ показывает, что на самом деле имеет место хаос, который проявляет себя в случайном смещении максимумов и минимумов функций $x(t)$ и $y(t)$ относительно огибающей генерируемых колебаний на последовательных стадиях возбуждения осцилляторов.

На рис. 4а показан фазовый портрет аттрактора в проекции на плоскость переменных (x, \dot{x}) . На диаграмме рис. 4б на той же плоскости отложены точки, отвечающие последовательности моментов времени $\tau_n = nN$, т. е. представлен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении. На рис. 4в приведена эмпирическая диаграмма для фазы первого осциллятора, где по горизонтальной оси отложена величина фазы, относящаяся к моменту времени τ_n , а по вертикали — к моменту времени τ_{n+1} . Фазы определяются посредством соотношения

$$\varphi = \begin{cases} \arctg\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\dot{x}}{x}\right), & x > 0, \\ \pi + \arctg\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\dot{x}}{x}\right), & x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Как видно на рис. 4в, отображение для фазы топологически эквивалентно соотношению (1). (Некоторые искажения возникают из-за неточности качественных рассуждений при выводе формулы (1), а также самого определения фазы; соответствие становится лучше при больших отношениях периодов N .)

Для вычисления показателей Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина [16, 17] проводилось одновременное решение уравнений (5) и четырех комплектов линеаризованных уравнений для возмуще-

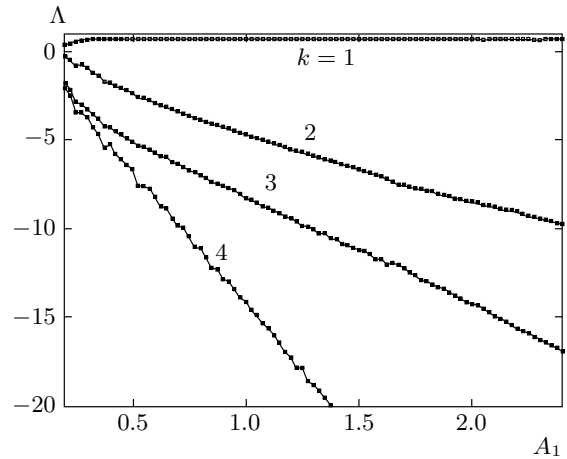


Рис. 5. Полученные численно показатели Ляпунова стробоскопического отображения в зависимости от параметра A_1 при $N = 8, A_2 = 4A_1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1, h_1 = h_2 = 0$. Наибольший показатель остается почти постоянным во всем интервале гиперболичности и находится в хорошем соответствии с оценкой $\Lambda_1 \approx \ln 2$

ний:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= -2\pi\tilde{u} - x^2\tilde{x} + \left(h_1 + A_1 \cos \frac{2\pi\tau}{N}\right)\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{u}} &= 2\pi(\tilde{x} + \varepsilon_2\tilde{y} \cos 2\pi\tau), \\ \dot{\tilde{y}} &= -4\pi\tilde{v} - y^2\tilde{y} + \left(h_2 - A_2 \cos \frac{2\pi\tau}{N}\right)\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{v}} &= 4\pi(\tilde{y} + 2\varepsilon_1x\tilde{x}). \end{aligned} \quad (7)$$

По ходу решения на каждом шаге схемы интегрирования выполнялась ортогонализация Грама–Шмидта и нормализация для четырех векторов, определялись средние скорости роста или уменьшения накапливающихся сумм логарифмов норм векторов возмущения (после ортогонализации, но перед нормализацией). Очевидно, четыре показателя Ляпунова для дифференциальных уравнений λ_k и для стробоскопического отображения Λ_k связаны соотношением $\lambda_k = N^{-1}\Lambda_k$. Согласно результатам вычислений показатели Ляпунова для аттрактора стробоскопического отображения при упомянутых параметрах составили $\Lambda_1 \approx 0.69 \approx \ln 2, \Lambda_2 \approx -6.64, \Lambda_3 \approx -11.12, \Lambda_4 \approx -22.24$. Наличие положительного показателя Λ_1 служит количественным подтверждением присутствия хаоса. (Отметим отсутствие нулевого показателя, что естественно для отображений и неавтономных систем с непрерывным временем.)

На рис. 5 показана зависимость показателей Ля-

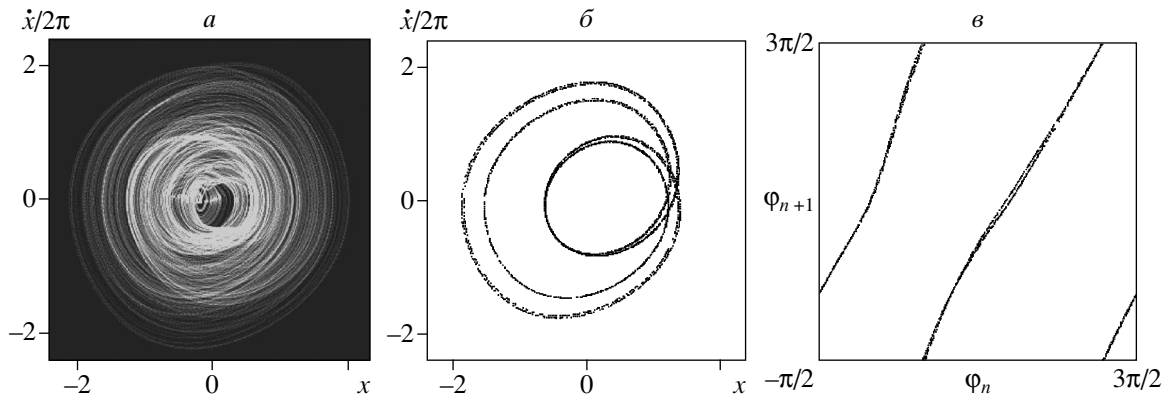


Рис. 6. Портрет аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (x, \dot{x}) (а), стробоскопическое сечение аттрактора для последовательности моментов времени $\tau_n = nN$ (б) и эмпирическая диаграмма, где по горизонтальной и вертикальной осям отложены значения фазы первого осциллятора в последовательные моменты времени τ_n и τ_{n+1} (в). Значения параметров $N = 4$, $A_1 = 1.5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $h_1 = h_2 = 0$

пунова Λ_k от параметра A_1 при $A_2/A_1 = \text{const} = 4$. Наибольший показатель Ляпунова Λ_1 остается почти постоянным в широком интервале изменения параметра и близок к величине $\ln 2$, а остальные демонстрируют плавную зависимость от параметра. Такой характер поведения показателей Ляпунова согласуется с предположением о гиперболической природе наблюдаемого аттрактора. Левый край диаграммы, где начинается заметное уменьшение показателя Λ_1 , соответствует нарушению гиперболичности.

Если хаотический аттрактор действительно гиперболический, хаотическая динамика должна быть грубой, а значит сохранять свой характер при вариации уравнений. Численные расчеты подтверждают, что это действительно так. В частности, динамическое поведение аналогичной природы наблюдается и при других целочисленных значениях N , включая существенно меньшие. Например, на рис. 6 показан портрет странного аттрактора в проекции на плоскость (x, \dot{x}) и его стробоскопическое сечение для случая $N = 4$. Для этого аттрактора показатели Ляпунова $\Lambda_1 \approx 0.69$, $\Lambda_2 \approx -2.40$, $\Lambda_3 \approx -4.24$, $\Lambda_4 \approx -6.85$. Отметим ясно видимую на диаграмме рис. 6б фрактальную поперечную структуру «лент», составляющих аттрактор. Очевидно, он выглядит именно так, как должен выглядеть аттрактор Смейла–Вильямса (ср. с рис. 1з). В данном случае фрактальную поперечную структуру полос можно различить и на диаграмме для фаз (рис. 6в).

По формуле Каптана–Йорке [3, 7, 8] оценка

фрактальной размерности аттрактора как объекта в стробоскопическом сечении в данном случае дает

$$D = 1 + \frac{\Lambda_1}{|\Lambda_2|} \approx 1.29$$

(так называемая ляпуновская размерность). Согласно вычислениям по алгоритму Грассбергера–Прокаччия [3, 7, 8, 18], корреляционная размерность аттрактора в стробоскопическом сечении составляет $D \approx 1.4$, что находится в разумном соответствии с ляпуновской размерностью. Полная размерность аттрактора, вложенного в пятимерное расширенное фазовое пространство неавтономной системы, на единицу больше: $d = D + 1 \approx 2.4$.

На рис. 7 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов в рассматриваемом режиме генерации хаоса. Для их построения использовался метод статистической оценки спектральной плотности мощности, рекомендуемый в теории случайных процессов и состоящий в разбиении имеющейся реализации на участки конечной протяженности, выполнении преобразования Фурье для каждого участка и последующем усреднении квадратов амплитуд спектральных компонент. Как можно усмотреть из рисунка, спектр, очевидно, сплошной. Для первого осциллятора он сосредоточен в диапазоне вблизи частоты $\omega_0 = 2\pi$, а для второго — вблизи $2\omega_0 = 4\pi$. Отметим очевидную из рис. 7 непрерывную зависимость спектральной плотности мощности от частоты и отсутствие «изрезанности» спектра, характерной, как правило, для спектров, порождаемых негиперболическими аттракторами. Можно за-

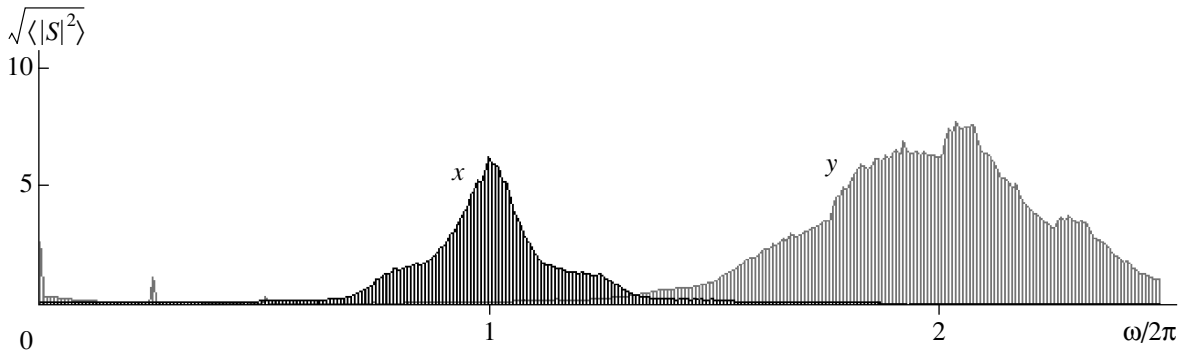


Рис. 7. Спектры колебаний в первом (x) и втором (y) осцилляторах в хаотическом режиме. По вертикальной оси отложен корень квадратный из спектральной плотности мощности. Значения параметров: $N = 4$, $A_1 = 1.5$, $A_2 = 6$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $h_1 = h_2 = 0$

метить присутствие относительно узких пиков спектральной плотности в низкочастотной части спектра второго осциллятора. Это связано, очевидно, с эффектом детектирования при смещении вспомогательного сигнала и колебаний первого осциллятора на элементе связи с квадратичной нелинейностью.

Интересно выполнить прямую численную проверку свойства гиперболичности аттрактора. Идея такого теста была предложена в работах [19, 20] и применялась для проверки гиперболичности траекторий динамических систем, имеющих одно устойчивое и одно неустойчивое направления. Процедура состоит в вычислении векторов малых возмущений вдоль траектории в прямом и обратном времени с измерением угла между этими векторами в точках траектории. Если нулевые значения угла не встречаются, т. е. статистическое распределение углов отделено от нуля, то делается заключение, что динамика гиперболическая. Если статистическое распределение показывает ненулевую вероятность для нулевого угла, то это свидетельствует о негиперболическом поведении из-за наличия касаний устойчивых и неустойчивых многообразий. В диссипативном случае именно эти касания ответственны за возникновение квазиаттрактора в негиперболических системах.

Применительно к нашей системе метод нуждается в модификации. Во-первых, мы хотим работать с описанием в терминах стробоскопического отображения, чтобы непосредственно связать результаты с конструкцией Смейла–Вильямса. Во-вторых, в нашем случае только неустойчивое подпространство является одномерным, тогда как устойчивое — трехмерным. Соответствующим образом адаптированный алгоритм состоит в следующем. Сначала из численного решения уравнений (5) находим до-

статочно протяженную представительную орбиту на аттракторе $\{x(\tau), u(\tau), y(\tau), v(\tau)\}$. Затем решаем численно уравнения (7) для возмущений траектории в прямом времени. По ходу решения на каждом шаге выполняется нормализация вектора $\mathbf{a}(\tau) = \{\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau)\}$, чтобы исключить расходимость. Далее решаем три комплекта уравнений (7) в обратном времени вдоль той же самой траектории, что дает три вектора $\{\mathbf{b}(\tau), \mathbf{c}(\tau), \mathbf{d}(\tau)\}$. Чтобы избежать превалирования одного вектора и расходимости, используем ортогонализацию Грама–Шмидта и нормализацию векторов на каждом шаге численного интегрирования.

В каждой точке стробоскопического сечения $\tau_n = nN$ вектор $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(\tau_n)$ определяет неустойчивое направление возмущения траектории, а всевозможные линейные комбинации $\{\mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n, \mathbf{d}_n\} = \{\mathbf{b}(\tau_n), \mathbf{c}(\tau_n), \mathbf{d}(\tau_n)\}$ — трехмерное устойчивое подпространство векторов возмущения.

Для оценки угла α между одномерным неустойчивым подпространством и трехмерным устойчивым подпространством сначала строим вектор \mathbf{v}_n , ортогональный к трехмерному подпространству, с компонентами, определяемыми из системы линейных уравнений

$$\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{b}_n = 0, \quad \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{c}_n = 0, \quad \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{d}_n = 0.$$

Затем вычисляем угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами \mathbf{v}_n и \mathbf{a}_n :

$$\cos \beta = \frac{|\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{a}_n|}{|\mathbf{v}_n| |\mathbf{a}_n|},$$

и полагаем $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$.

На рис. 8 показаны гистограммы для распределения углов α_n , построенные по результатам вычислений на компьютере. Диаграммы рис. 8а, б полу-

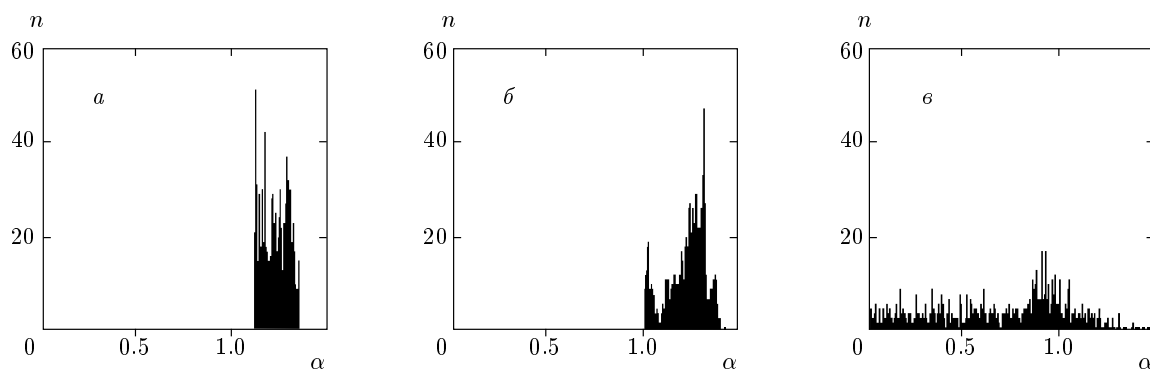


Рис. 8. Гистограммы для распределений углов α между устойчивым и неустойчивым подпространствами для системы (5), полученные из вычислительной процедуры, описанной в тексте. a, b соответствуют гиперболическому аттрактору при $A_1 = 1.5, A_2 = 6, h_{1,2} = 0, \varepsilon_{1,2} = 0.1, N = 8$ (a), 4 (b), v — негиперболическому аттрактору при $A_1 = 0.2, A_2 = 0.8, h_{1,2} = 0, \varepsilon_{1,2} = 0.1, N = 8$

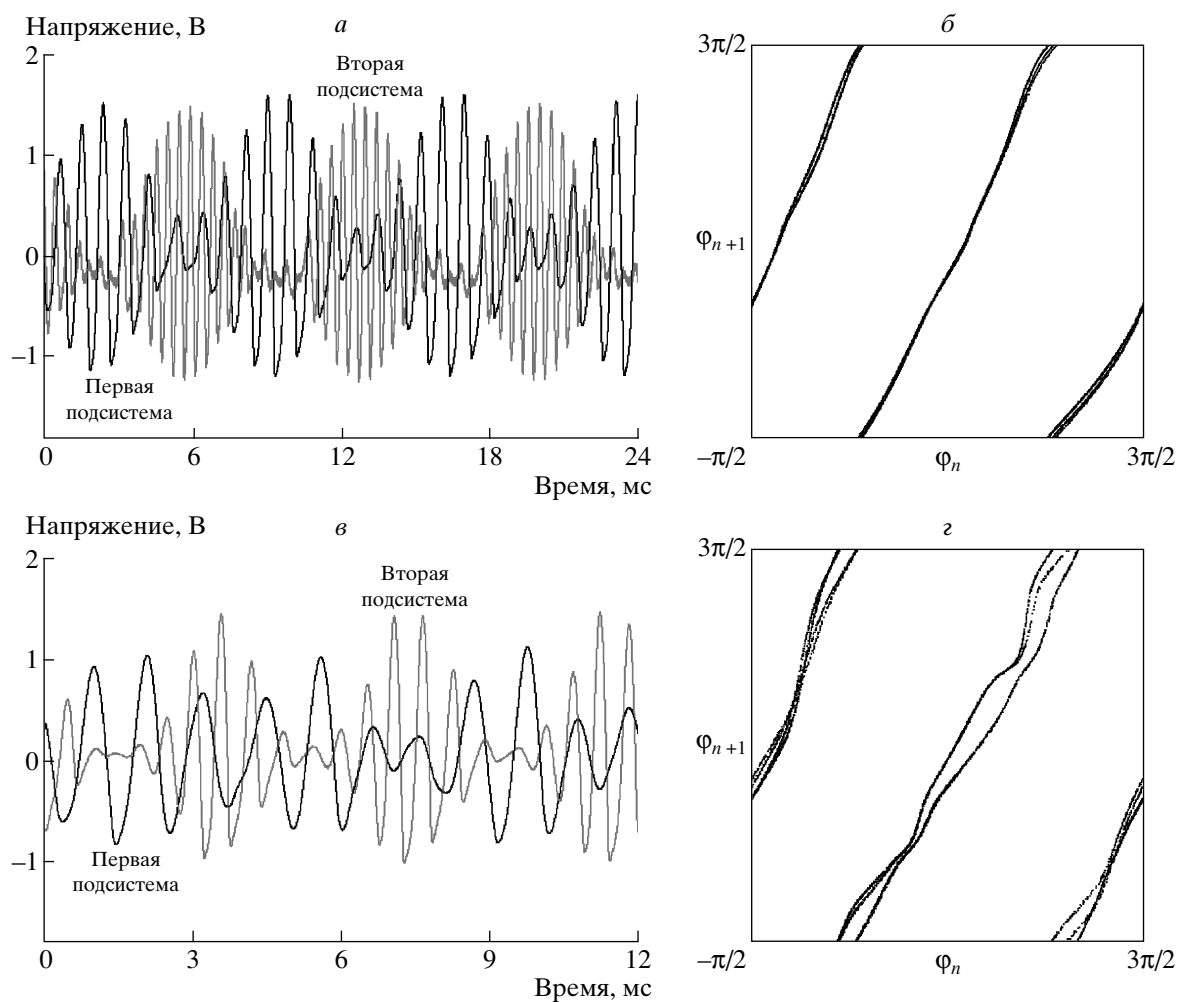


Рис. 9. Типичные образцы полученных в эксперименте временных зависимостей переменного напряжения первой (черные линии) и второй (серые) подсистем в режиме хаотической генерации и эмпирические итерационные диаграммы для фазы первой подсистемы при $N = 8$ (a, b), 4 (v, z)

чены для двух упомянутых выше наборов параметров. Оба распределения с очевидностью отделены от нулевых значений α , т.е. тест подтверждает гиперболичность аттрактора. На рис. 8*в* для сравнения показана гистограмма при задании параметров, не обеспечивающих гиперболичность. (Заклучение о негиперболичности аттрактора в этом случае можно сделать также на основании поведения показателя Ляпунова, см. левый край диаграммы на рис. 5.)

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проведения экспериментального исследования схема, представленная на рис. 2, была реализована в виде лабораторного устройства. Конденсаторы в колебательных контурах имели емкость $C_1 = 20$ нФ и $C_2 = 5$ нФ. Катушки L_1 и L_2 выполнены на ферритовых сердечниках 2000НМ с одинаковой индуктивностью около 1 Гн. Соответственно, рабочая частота двух осцилляторов составляла $f_1 = \omega_0/2\pi = 1090$ Гц и $f_2 = 2f_1 = 2180$ Гц. Элемент отрицательного сопротивления реализован на операционном усилителе 140УД26, а нелинейный элемент — на диодах КД102. Для внесения в колебательные контуры изменяющейся во времени проводимости использованы полевые транзисторы КП303Г. Нелинейные элементы, через которые осуществлялась связь обеих подсистем, выполнены на основе аналоговых умножителей 525ПС2.

Напряжения U_1 и U_2 , снимаемые, соответственно, с первого и второго контура, можно было подавать на регистрирующую аппаратуру (осциллограф, анализатор спектра) или вводить в компьютер в виде временного ряда посредством аналого-цифрового преобразователя АДМ12-3 (12-разрядный, максимальная частота дискретизации 3 МГц). Функции \dot{U}_1 и \dot{U}_2 получались как результат аналогового дифференцирования с использованием стандартной дифференцирующей цепочки, содержащей емкость 500 пФ, резистор 62 кОм и операционный усилитель 140УД26.

В эксперименте при надлежащем подборе параметров в системе можно было наблюдать хаотические колебания, обусловленные эстафетной передачей возбуждения от одного осциллятора к другому в соответствии с механизмом, рассмотренным в предыдущих разделах. На рис. 9*а, в* слева показаны типичные образцы временных зависимостей переменного напряжения в режиме хаотической генерации в одной и другой подсистемах при отношении частоты медленного изменения параметров и частоты

вспомогательного сигнала $N = 8$ и $N = 4$. Диаграммы построены на компьютере с использованием записанных в память временных рядов, полученных посредством аналого-цифрового преобразования напряжений $U_1(t)$ и $U_2(t)$. Частота выборки составляла 200 кГц, т.е. на период характерной частоты генерации ω_0 приходилось примерно 200 точек.

На рис. 9*б, г* приведены эмпирические «итерационные диаграммы» для фазы первого осциллятора. Для их построения в компьютер вводился двухкомпонентный временной ряд. Одна компонента отвечала выборке сигнала $U_1(t)$ с периодом медленной вариации параметров $T = 2\pi N/\omega_0$ в моменты времени, примерно соответствующие максимуму амплитуды колебаний первого осциллятора. В качестве второй компоненты фигурировала производная сигнала $U_1(t)$ на выходе дифференцирующей цепочки в те же моменты времени. Фаза определялась по формуле, аналогичной соотношению (6). По горизонтальной и вертикальной осям на графиках рис. 9*б, г* отложены значения фазы, относящиеся к последовательным моментам выборки. То обстоятельство, что отображение для фазы топологически эквивалентно хаотическому отображению «зуб пилы» (1), существенно для интерпретации наблюдаемого в эксперименте аттрактора как гиперболического.

На рис. 10*а* показана фотография фазового портрета аттрактора с экрана осциллографа в режиме генерации хаоса при $N = 4$. На входы горизонтального и вертикального отклонений электронного луча подавались, соответственно, переменное напряжение от первой подсистемы $U_1(t)$ и сигнал с выхода дифференцирующей цепочки, пропорциональный производной по времени $\dot{U}_1(t)$. Выдержка при съемке была порядка нескольких секунд, чтобы отобразить достаточно большое число характерных периодов движения изображающей точки на аттракторе. Отметим очевидное сходство с рис. 6*а*. На рис. 10*б* приведен портрет аттрактора в стробоскопическом сечении в проекции на плоскость (U_1, \dot{U}_1) , полученный из того же двухкомпонентного временного ряда, который использовался при построении эмпирической итерационной диаграммы на рис. 9*г*. Видно, что этот портрет выглядит в точности как изображение соленоида Смейла–Вильямса. Отдельно на вставке показан фрагмент, демонстрирующий в увеличенном виде тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор.

Вычисление корреляционной размерности аттрактора по методу Грассбергера–Прокаччия на основе обработки временного ряда с частотой выборки 200 кГц дало величину $d \approx 2.3$, что

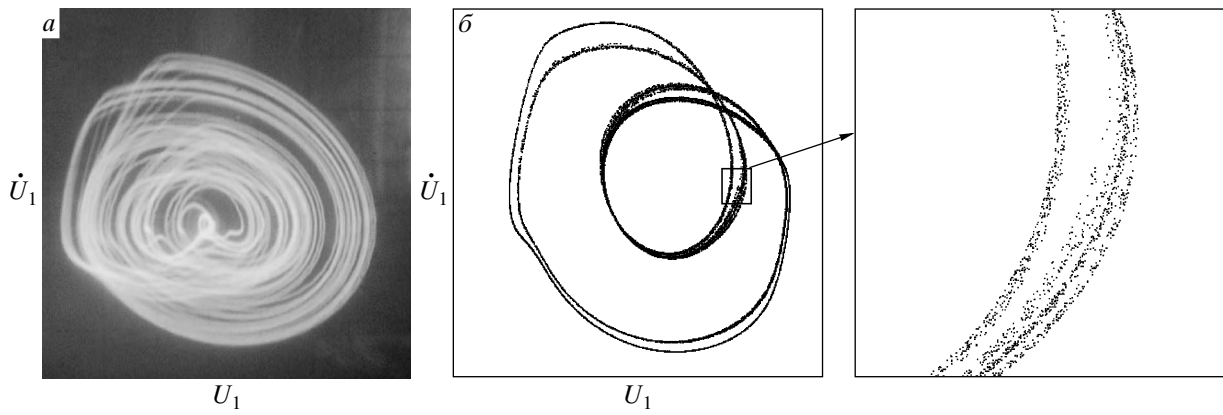


Рис. 10. Фотография с экрана осциллографа портрета аттрактора в проекции на плоскость динамических переменных первого осциллятора (U_1, \dot{U}_1) при $N = 4$ (а) и стробоскопическое сечение этого аттрактора (б) для последовательности моментов времени, соответствующих максимуму амплитуды первого осциллятора и следующих с периодом $T = 2\pi N/\omega_0$. На вставке показан увеличенный фрагмент, демонстрирующий тонкую фрактальную структуру «полос», из которых построен аттрактор

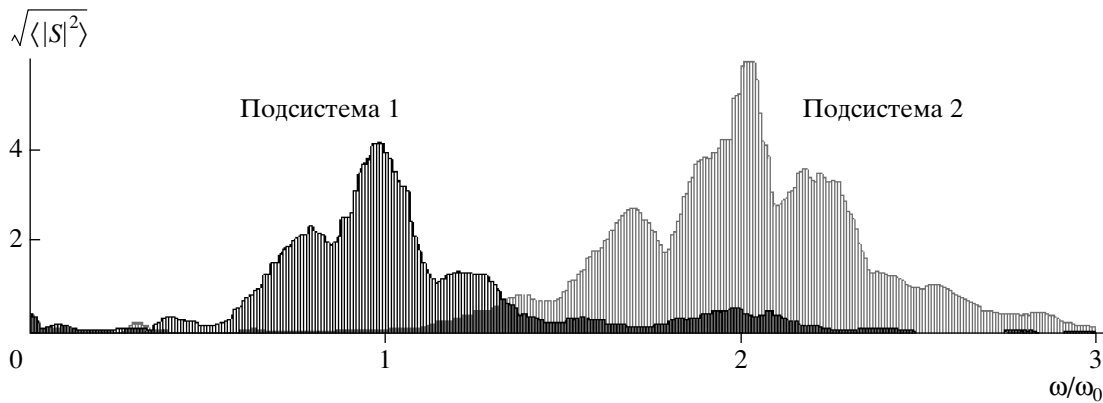


Рис. 11. Спектры колебаний двух подсистем в режиме генерации хаоса, $N = 4$. Диаграмма построена путем наложения двух изображений, полученных фотографированием с экрана анализатора спектра

разумно согласуется с результатом для аналогичной ситуации при численном моделировании. Оценка старшего ляпуновского показателя стробоскопического отображения посредством алгоритма работы [21], основанного на обработке временного ряда с выборкой периода $T = 2\pi N/\omega_0$, дало результат $\Lambda \approx 0.73$, что находится в неплохом соответствии с оценкой $\Lambda \approx \ln 2$.

На рис. 11 показаны спектры колебаний первого и второго осцилляторов, сфотографированные с экрана анализатора спектра в режиме генерации хаоса при $N = 4$. Для экономии места и для наглядности сопоставления с результатами численного моделирования мы приводим две фотографии, смонтированные на одном графике в оформлении, ана-

логичном рис. 7. Спектры колебаний обоих осцилляторов являются сплошными; для первого осциллятора он расположен вблизи частоты ω_0 , для второго — вблизи $2\omega_0$. Отметим очевидное сходство со спектром, полученным при численном моделировании. В качестве отличий, по-видимому, непринципиальных, можно обратить внимание на несколько большую степень изрезанности спектра в экспериментальной системе, присутствие вторичного максимума спектральной плотности в спектре первого осциллятора вблизи частоты второй гармоники, а также отсутствие узких пиков спектральной плотности в низкочастотной области в спектре второго осциллятора.

В экспериментальном исследовании проверку до-

пускают не все моменты, обсужденные применительно к численным расчетам в предыдущем разделе. Например, представляется затруднительным получить полный спектр показателей Ляпунова или выполнить тест на гиперболичность. Тем не менее в целом весь набор полученных результатов позволяет уверенно утверждать, что в эксперименте мы имеем дело с тем же объектом, что и в теоретическом рассмотрении — странным аттрактором типа Смейла–Вильямса в неавтономной колебательной системе.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен пример физической системы, обладающей странным хаотическим аттрактором, который, как позволяют предполагать имеющиеся данные, относится к классу гиперболических аттракторов. Было бы желательно иметь математическое доказательство гиперболической природы хаоса в этой системе, но его разработка составляет самостоятельную задачу и выходит за рамки настоящего исследования, выполненного на уровне взаимно дополняющих друг друга качественных соображений, компьютерных результатов и экспериментов.

Как мы полагаем, появление примера физической системы с гиперболическим хаотическим аттрактором имеет принципиальное значение для дальнейшего развития нелинейной динамики и ее приложений. С точки зрения исследователей, занимающихся анализом реальных систем физической и иной природы, это в определенном смысле «прорыв в гиперболическую область». Очевидно, используя данный пример как отправную точку и опираясь на присущее гиперболическим аттракторам свойство грубости, можно строить и другие примеры систем с гиперболическими хаотическими аттракторами. В самом деле, модификация правых частей уравнений не будет разрушать гиперболичность, по крайней мере, пока изменения не слишком велики. Наличие физических систем с гиперболическим хаосом открывает возможности для приложений глубоко проработанного раздела математики — гиперболической теории, а также переводит в практическую плоскость задачу сравнительного исследования гиперболического и негиперболического хаоса в теории и эксперименте.

Авторы благодарны Б. П. Безручко за поддержку настоящей работы в ее экспериментальной час-

ти, а также В. С. Анищенко, В. С. Афраймовичу, Л. А. Бунимовичу, Р. МакКею (R. S. MacKay), Л. А. Мельникову, А. С. Пиковскому, М. Г. Розенблюму за полезное обсуждение. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 03-02-16192, 05-02-16305).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Г. Синай, в кн. *Нелинейные волны*, Наука, Москва (1979), с. 192.
2. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники*, под ред. Р. В. Гамкрелидзе, Изд. ВИНТИ АН СССР, Москва (1985), т. 2.
3. J.-P. Eckmann and D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
4. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, Москва (1999).
5. V. Afraimovich and S.-B. Hsu, *Lectures on Chaotic Dynamical Systems*, AMS/IP Studies in Advanced Math., **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, Int. Press, Somerville, MA (2003).
6. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, New York (1989).
7. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
8. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос*, Физматлит, Москва (2001).
9. S. E. Newhouse, *Publ. Math. IHES* **50**, 101 (1979); V. S. Afraimovich and L. P. Shil'nikov, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, ed. by G. I. Barenblatt, G. Ioss, and D. D. Joseph, Pitman, Boston, London, Melbourne (1983), p. 1.
10. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, А. Б. Нейман, Г. И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гайер, *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Ин-т компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).
11. В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, *ДАН СССР* **234**, 336 (1977).
12. K. Mischaikow and M. Mrozek, *Bull. Amer. Math. Soc.* **32**, 66 (1995); *Math. Comp.* **67**, 1023 (1998); K. Mischaikow, M. Mrozek, and A. Szymczak, *J. Diff. Equ.* **169**, 17 (2001).

13. T. J. Hunt and R. S. MacKay, *Nonlinearity* **16**, 1499 (2003).
14. T. J. Hunt, PhD Thesis, Univ. of Cambridge (2000).
15. V. Belykh, I. Belykh, and E. Mosekilde, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **15**, 3567 (2005).
16. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. M. Strelcyn, *Meccanica* **15**, 9 (1980).
17. F. Christiansen and H. H. Rugh, *Nonlinearity* **10**, 1063 (1997).
18. P. Grassberger and I. Procaccia, *Physica D* **9**, 189 (1983).
19. Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke and I. Kan, *Nonlinearity* **6**, 779 (1993).
20. V. S. Anishchenko, A. S. Kopeikin, J. Kurths, T. E. Vadivasova, and G. I. Strelkova, *Phys. Lett. A* **270**, 301 (2000).
21. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, *Physica D* **16**, 285 (1985).