

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА САМОИНДУЦИРОВАННОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ В СРЕДЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Ю. Г. Гладуи^a, А. М. Камчатнов^{b*}

^a *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119992, Москва, Россия*

^b *Институт спектроскопии Российской академии наук
142190, Троицк, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 3 ноября 2005 г.

Рассмотрено распространение импульса самоиндуцированной прозрачности в средах с пространственной дисперсией. Предложено обобщение модели двухуровневых атомов, учитывающее когерентный перенос возбуждений в среде экситонами. Найдены периодическое и солитонное решения соответствующих уравнений. Оценки показывают, что вследствие уменьшения скорости распространения импульса благодаря нелинейности эффекты пространственной дисперсии усиливаются и могут оказаться существенными при резонансном переходе и достаточной длительности импульса.

PACS: 42.65.Tg, 42.25.Bs

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической теории самоиндуцированной прозрачности (СИП), развитой в работах [1–3], предполагается, что молекулярные возбуждения не передаются соседним молекулам, что безусловно верно для газов и представляется естественным для конденсированных сред, если скорость распространения импульса много больше скорости когерентного распространения возбуждений в среде, т. е. скорости экситонов. Однако наблюдаемая в эксперименте скорость сильно замедленных импульсов СИП, в тысячу раз меньшая скорости света, может сравняться по порядку величины с характерной скоростью экситонов, и тогда пренебрегать их вкладом в распространение импульса уже нельзя. Это означает, что слабые эффекты пространственной дисперсии, обусловленные движением экситонов (см., например, [4, 5]), могут быть существенно усилены вследствие двухуровневой нелинейности среды. В настоящей работе мы модифицируем теорию распространения импульсов СИП таким образом, чтобы учесть

эффекты пространственной дисперсии. В давней работе [6] по исследованию влияния пространственной дисперсии на эффект СИП скорость движения экситонов предполагалась много меньшей скорости импульса и учитывался лишь сдвиг уровней вследствие межмолекулярного взаимодействия. Мы же здесь рассмотрим обратный случай, когда главный вклад пространственной дисперсии обусловлен конечной эффективной массой экситонов. Из найденных нами периодических и солитонных решений модифицированных уравнений СИП следует, что существует область параметров импульса, в которой его скорость существенным образом изменяется вследствие эффектов пространственной дисперсии. Этот эффект представляет принципиальный интерес как частный пример усиления свойств пространственной дисперсии вследствие нелинейности среды и может оказаться существенным, например, при рассмотрении распространения электромагнитного импульса в квантовых ямах, взаимодействующих с полем микрорезонатора, и в других микро- и наноструктурах.

*E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

2. МОДЕЛЬ

Как хорошо известно, электромагнитные свойства среды, состоящей из двухуровневых атомов, при действии на нее электромагнитного поля E описываются оптическими уравнениями Блоха [1, 2]:

$$d_t = \frac{d_0}{\hbar} An, \quad n_t = -\frac{d_0}{2\hbar}(Ad^* + A^*d). \quad (1)$$

Здесь и далее нижние индексы означают производную по соответствующей переменной. В уравнениях (1) A — комплексная амплитуда электрического поля:

$$E = \frac{i}{2} \{A(x, t) \exp[i(k_0x - \omega_0t)] - A^*(x, t) \exp[-i(k_0x - \omega_0t)]\}, \quad (2)$$

k_0 и ω_0 — волновое число и частота несущей волны, n — разность населенностей верхнего и нижнего уровней, нормированная так, что $n = -1$, когда все атомы находятся в основном состоянии, d_0 — матричный элемент дипольного момента перехода, а величина d описывает амплитуду перехода между уровнями и связана с поляризацией \tilde{P} единицы объема среды соотношением

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}Nd_0 \{d(x, t) \exp[i(k_0x - \omega_0t)] + d^*(x, t) \exp[-i(k_0x - \omega_0t)]\}. \quad (3)$$

Переменные n и d удовлетворяют условию

$$|d|^2 + n^2 = 1, \quad (4)$$

имеющему смысл сохранения вероятности при переходах между уровнями атома — полная вероятность того, что атом находится либо на нижнем, либо на верхнем уровне, равна единице.

Распространение электромагнитного поля в среде описывается «укороченным» уравнением Максвелла:

$$A_x + \frac{1}{c}A_t = \frac{2\pi Nd_0\omega_0}{c}d. \quad (5)$$

Связанная система уравнений (1), (5) хорошо исследована — она имеет солитонные и периодические решения, и распространение соответствующих импульсов СИП наблюдалось в различных средах.

Как ясно из уравнений (1), возбуждения двухуровневых атомов не передаются от одного атома другому, так что энергия переносится только электромагнитным полем. В плотных средах, однако,

имеется перенос энергии от атома к атому вследствие их взаимодействия друг с другом, в частности, может происходить когерентное распространение возбуждений экситонами. Простейший способ учесть этот эффект заключается в модификации уравнений (1) следующим образом:

$$d_t = \frac{d_0}{\hbar} An + \frac{i\hbar}{2m}(dn_{xx} - nd_{xx}), \quad (6)$$

$$n_t = -\frac{d_0}{2\hbar}(Ad^* + A^*d) + \frac{i\hbar}{4m}(d^*d_{xx} - dd_{xx}^*), \quad (7)$$

где добавленные члены подобраны таким образом, чтобы автоматически удовлетворялось сохранение полной вероятности для заселенностей состояний в двухуровневом атоме, т. е. постоянство выражения в левой части (4). Очевидно, что новые члены в уравнениях соответствуют распространению волны поляризации в среде. Действительно, в отсутствие внешнего поля ($A = 0$) уравнение (6) приводит в линейном по d приближении (когда из (4) следует, что $n \approx -1$) к следующему закону дисперсии для волн поляризации $d \propto \exp[i(k'x - \omega't)]$:

$$\omega' = \frac{\hbar k'^2}{2m}, \quad (8)$$

где ω' и k' являются добавками к частоте ω_0 и волновому числу k_0 несущей волны (3), т. е. полная частота ω зависит от полного волнового числа k следующим образом:

$$\hbar\omega = \hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2m}. \quad (9)$$

Это соответствует закону дисперсии экситона с минимумом зоны при волновом числе $k = k_0$ и эффективной массе m .

Из (2) и (3) следует, согласно соотношению $(\epsilon - 1)E = 4\pi\tilde{P}$, выражение для диэлектрической проницаемости среды:

$$\epsilon - 1 = -4\pi i N d_0 \frac{d}{A},$$

где d есть дипольный момент, возникший в среде под действием поля A . Отношение d/A легко вычисляется в линейном по d и A приближении из уравнения (6), так что в случае рассматриваемой модели двухуровневой среды получаем следующее выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon - 1 = \frac{4\pi N d_0^2 / \hbar}{\omega_0 - \omega + \frac{\hbar}{2m}(k - k_0)^2}. \quad (10)$$

Это выражение имеет полюс при энергии фотона $\hbar\omega$, равной энергии экситона, возбужденного светом, $\hbar\omega_0 + \hbar^2(k - k_0)^2/2m$, т. е. соответствует описанию диэлектрической проницаемости с учетом пространственной дисперсии в случае экситонного резонанса (см., например, [7, 8]).

Система уравнений (5) и (6), (7) описывает распространение импульса СИП в среде из двухуровневых атомов, взаимодействующих друг с другом таким образом, что по этой среде могут двигаться экситоны с законом дисперсии (9). На практике законы дисперсии как экситонов, так и фотонов могут варьироваться необходимым образом, например, путем подбора параметров квантовых ям и микрорезонаторов, поле которых взаимодействует с экситонами ямы (см., например, [9]). Поскольку в этой работе нас интересует принципиальная возможность усиления эффекта пространственной дисперсии при уменьшении скорости распространения импульса вследствие нелинейных эффектов, будем предполагать реализованным условие равенства частоты и волнового числа несущей волны (2) соответствующим параметрам дна экситонной зоны (9).

Наконец, сделаем следующее методическое замечание. Система (5)–(7) не допускает солитонных решений в простой замкнутой форме, так что для исследования зависимости свойств солитонов от их параметров (скажем, скорости солитона от его длительности) требуются обширные численные расчеты. Однако небольшая модификация уравнений (6), (7) делает эту систему полностью интегрируемой, что позволяет применить для ее исследования мощный аналитический метод обратной задачи рассеяния, так что все результаты представляются в простой аналитической форме. Указанная модификация заключается в замене производной $\partial/\partial x$ на «длинную» производную

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t},$$

так что уравнения (6) и (7) приобретают вид

$$d_t = \frac{d_0}{\hbar} An + \frac{i\hbar}{2m} (dD^2n - nD^2d), \quad (11)$$

$$n_t = -\frac{d_0}{2\hbar} (Ad^* + A^*d) + \frac{i\hbar}{4m} (d^*D^2d - dD^2d^*). \quad (12)$$

Добавленные члены малы по сравнению с основными, когда $\omega'/c \ll k'$ или с учетом (8) выполняется условие

$$\hbar ck' \ll mc^2. \quad (13)$$

В оптическом диапазоне частот мы имеем $\hbar ck' \approx \hbar ck_0 \approx \hbar\omega_0 \approx 1$ эВ и при массе экситона порядка массы электрона $mc^2 \approx 0.5$ МэВ, т. е. отношение левой части (13) к правой имеет порядок величины 10^{-5} – 10^{-6} . Более конкретно убедиться в том, что это изменение вносит пренебрежимо малую ошибку в решения, можно, вычислив модифицированный закон дисперсии экситонов. Уравнение (11) при $A = 0$ и в линейном по d приближении вместо (8) дает

$$\hbar\omega' = mc^2 + \hbar ck' \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar ck'}{mc^2}}. \quad (14)$$

Второе слагаемое под знаком корня мало в интересующей нас области частот, где можно ограничиться длинноволновым пределом нижней ветви (14), совпадающим с (8); другая ветвь $\hbar\omega' \approx 2mc^2$ имеет энергию около 1 МэВ и в оптическом диапазоне частот ею можно пренебречь. Аналогичным образом резонансный знаменатель в формуле (10) для диэлектрической проницаемости принимает вид

$$\omega_0 - \omega + \frac{\hbar k'^2}{2m} \left(1 - \frac{\omega'}{ck'}\right)^2, \quad (15)$$

где в силу того же неравенства (13) второй член в скобках пренебрежимо мал по сравнению с единицей. Таким образом, дополнительные члены в уравнениях (11), (12) вносят относительную ошибку порядка 10^{-5} – 10^{-6} в интересующие нас эффекты, обусловленные конечностью массы экситона. С физической точки зрения их добавление несущественно и вполне компенсируется удобством возможности детального аналитического исследования задачи. Поэтому в основу последующей теории будут положены уравнения (5) и (11), (12).

Для упрощения формул перейдем к безразмерным величинам. Для этого введем параметр

$$\Omega = \left(\frac{2\pi N d_0^2 \omega_0}{\hbar}\right)^{1/2}, \quad (16)$$

переменную

$$\mathcal{E}' = \frac{d_0}{\hbar\Omega} A, \quad (17)$$

и безразмерные координаты

$$X = \frac{\Omega}{c} x, \quad T = \Omega \left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (18)$$

В результате получим уравнения

$$\mathcal{E}'_X = d, \quad (19)$$

$$d_T = \mathcal{E}'n + i\kappa(nd_{XX} - dn_{XX}), \quad (20)$$

$$n_T = -\frac{1}{2}(\mathcal{E}'d^* + \mathcal{E}^*d) + \frac{i\kappa}{2}(dd_{XX}^* - d^*d_{XX}), \quad (21)$$

где безразмерный параметр

$$\kappa = \frac{\hbar\Omega}{2mc^2} \quad (22)$$

характеризует величину пространственной дисперсии. Наконец, нам будет удобно еще сделать замену

$$\xi = aX, \quad \tau = aT, \quad \mathcal{E} = a\mathcal{E}' \quad (23)$$

и ввести величины

$$u = 1/a^2, \quad v = a\kappa, \quad (24)$$

где параметр a должен определяться из условия

$$u + v = 1. \quad (25)$$

Отсюда получаем уравнение для a :

$$a^2 = 1 + \kappa a^3, \quad (26)$$

корень которого должен быть выбран таким образом, чтобы $a \rightarrow 1$ при $\kappa \rightarrow 0$. Для физически важного случая малых κ имеем $a \approx 1 + \kappa/2$, откуда получаем

$$u \approx 1 - \kappa, \quad v \approx \kappa. \quad (27)$$

Таким образом, система (19)–(21) принимает окончательный вид:

$$\mathcal{E}_\xi = d, \quad (28)$$

$$d_\tau = u\mathcal{E}n - iv(nd_{\xi\xi} - dn_{\xi\xi}), \quad (29)$$

$$n_\tau = -\frac{u}{2}(\mathcal{E}d^* + \mathcal{E}^*d) - \frac{iv}{2}(dd_{\xi\xi}^* - d^*d_{\xi\xi}), \quad (30)$$

где u и v связаны соотношением (25). При $v \rightarrow 0$ получаем стандартные уравнения для СИП (1), а при $u \rightarrow 0$ уравнения (29), (30) описывают движение экситонов с квадратичным законом дисперсии (в длинноволновом пределе).

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ И СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы получим периодическое и солитонное решения с помощью метода «конечнозонного интегрирования», который будет использоваться в форме, изложенной в работе [10]. Этот метод

основан на возможности представления уравнений (28)–(30) как условий совместности двух линейных систем:

$$\psi_\xi = \begin{pmatrix} F & G \\ H & -F \end{pmatrix} \psi, \quad \psi_\tau = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \psi. \quad (31)$$

Для системы (28)–(30) такая возможность была указана в работе [11], причем легко убедиться, что если матричные элементы задаются следующим образом:

$$F = \frac{i\lambda}{2}n, \quad G = -\frac{i\lambda}{2}d, \quad H = -\frac{i\lambda}{2}d^*, \quad (32)$$

$$A = -\frac{iu}{2\lambda} + \frac{iv}{2}\lambda^2n - \frac{v}{4}\lambda(d^*d_\xi - dd_\xi^*),$$

$$B = \frac{u}{2}\mathcal{E} - \frac{iv}{2}\lambda^2d + \frac{v}{2}\lambda(dn_\xi - nd_\xi), \quad (33)$$

$$C = -\frac{u}{2}\mathcal{E}^* - \frac{iv}{2}\lambda^2d^* - \frac{v}{2}\lambda(d^*n_\xi - nd_\xi^*),$$

то из требования $\psi_{\xi\tau} = \psi_{\tau\xi}$, которое должно выполняться при произвольном значении спектрального параметра λ , следуют уравнения (28)–(30). Линейные системы (31) для вспомогательной функции ψ имеют два базисных решения

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

из которых можно построить «квадраты базисных функций»:

$$f = -\frac{i}{2}(\varphi_1\phi_2 + \varphi_2\phi_1), \quad (35)$$

$$g = \varphi_1\phi_1, \quad h = -\varphi_2\phi_2.$$

Как следует из (31), они должны удовлетворять уравнениям

$$f_\xi = -iHg + iGh, \quad g_\xi = 2iGf + 2Fg, \quad (36)$$

$$h_\xi = -2iHf - 2Fh,$$

$$f_\tau = -iCg + iBh, \quad g_\tau = 2iBf + 2Ag, \quad (37)$$

$$h_\tau = -2iCf - 2Ah,$$

которые имеют интеграл движения

$$f^2 - gh = P, \quad (38)$$

независимый от ξ и τ . Константа P зависит от спектрального параметра λ и физически интересные однофазные периодические решения выделяются условием (см. [10]), что $P(\lambda)$ является полиномом четвертой степени от λ ,

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^4 (\lambda - \lambda_i) = \lambda^4 - s_1\lambda^3 + s_2\lambda^2 - s_3\lambda + s_4. \quad (39)$$

Тогда решения уравнений (36) и (37) следует также искать в виде полиномов от λ ,

$$\begin{aligned} f &= -n\lambda^2 - f_1\lambda + f_2, & g &= g_0(\lambda - \mu), \\ h &= h_0(\lambda - \mu^*). \end{aligned} \quad (40)$$

Подстановка (40) в (36) и (37) с учетом (38) и (39) дает выражения для коэффициентов:

$$g_0 = -id\lambda, \quad h_0 = -id^*\lambda, \quad (41)$$

$$f_1 = \frac{s_3}{2\sqrt{s_4}}, \quad f_2 = \sqrt{s_4}, \quad (42)$$

а также уравнения движения для μ :

$$\begin{aligned} \mu_\xi &= -if(\mu) = -i\sqrt{P(\lambda)}, \\ \mu_\tau &= -\left(\frac{u}{\sqrt{s_4}} - \frac{vs_1}{2}\right)\mu\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Следовательно, μ зависит только от фазы

$$\theta = \xi - V\tau, \quad (44)$$

где

$$V = \frac{u}{\sqrt{s_4}} - \frac{vs_1}{2} \quad (45)$$

является скоростью волны в координатах ξ, τ .

Выражения для d, n и \mathcal{E} могут быть получены из уравнений

$$d = \exp\left[-i\left(\frac{us_3}{2s_4} - v\sqrt{s_4}\right)\right]\tilde{d}, \quad (46)$$

$$\tilde{d}_\theta = -i(f_1 + \mu n)\tilde{d},$$

$$\mathcal{E} = \frac{i}{\sqrt{s_4}}d\mu, \quad (47)$$

$$n_\theta = \frac{i}{2}|d|^2(\mu - \mu^*), \quad (48)$$

которые также следуют из (36), (37) после подстановки в них (40). И, наконец, из (38) могут быть получены соотношения

$$\begin{aligned} \mu + \mu^* &= \frac{1}{1-n^2}\left(s_1 + 2n\frac{s_3}{\sqrt{s_4}}\right), \\ \mu\mu^* &= \frac{1}{1-n^2}\left(s_2 + 2n\sqrt{s_4} - \frac{s_3^2}{4s_4}\right), \end{aligned} \quad (49)$$

которые позволяют выразить μ, μ^* как функции n или более удобной переменной

$$\nu = -2\sqrt{s_4}n. \quad (50)$$

Из (49) получаем

$$\mu(\nu) = \frac{2s_4s_1 - \nu s_3 + 2i\sqrt{s_4}\sqrt{\mathcal{R}(\nu)}}{4s_4 - \nu^2}, \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\nu) &= \nu^3 - s_2\nu^2 + (s_1s_3 - 4s_4)\nu + \\ &\quad + 4s_2s_4 - s_3^2 - s_1^2s_4 \end{aligned} \quad (52)$$

— алгебраическая резольвента полинома $P(\lambda)$. Нули $\nu_i, i = 1, 2, 3$, резольвенты $\mathcal{R}(\nu)$ выражаются через нули $\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4$, многочлена $P(\lambda)$ формулами (см. [10])

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4, & \nu_2 &= \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3, \\ \nu_3 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4. \end{aligned} \quad (53)$$

Из уравнения (48) получается уравнение для ν :

$$\nu_\theta = \sqrt{\mathcal{R}(\nu)}, \quad (54)$$

интегрирование которого дает ν и, соответственно, нормированную разность населенностей n . Так как ν — действительная величина, ν_i тоже должны являться действительными величинами, и, следовательно, λ_i образуют две комплексно-сопряженные пары:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha + i\gamma, & \lambda_2 &= \beta + i\delta, \\ \lambda_3 &= \alpha - i\gamma, & \lambda_4 &= \beta - i\delta. \end{aligned} \quad (55)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2, & \nu_2 &= 2(\alpha\beta + \gamma\delta), \\ \nu_3 &= 2(\alpha\beta - \gamma\delta), \end{aligned} \quad (56)$$

где нумерация была выбрана таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\nu_3 \leq \nu_2 \leq \nu_1$. Величина ν изменяется в интервале $\nu_3 \leq \nu \leq \nu_2$, в котором $\mathcal{R} \geq 0$. Уравнение (54) легко решается в эллиптических функциях, и несложные вычисления дают

$$\begin{aligned} n &= -\left\{\alpha\beta - \gamma\delta + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma\delta \operatorname{sn}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2}\theta, \tilde{k}\right)\right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2)}}, \end{aligned} \quad (57)$$

где

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{4\gamma\delta}{(\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2}} \quad (58)$$

— модуль эллиптической функции.

Из (47) получаем выражение

$$|E|^2 = \frac{2n}{\sqrt{s_4}} + \frac{4s_2s_4 - s_3^2}{4s_4^2} \quad (59)$$

и подстановка в него (57) дает

$$|E|^2 = \left\{ [\delta(\alpha^2 + \gamma^2) + \gamma(\beta^2 + \delta^2)]^2 - 4\gamma\delta(\alpha^2 + \gamma^2) \times \right. \\ \left. \times (\beta^2 + \delta^2) \operatorname{sn}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\gamma + \delta)^2} \theta, \tilde{k} \right) \right\} \times \\ \times (\alpha^2 + \gamma^2)^{-2} (\beta^2 + \delta^2)^{-2}. \quad (60)$$

Более громоздкие вычисления с использованием уравнений (46) дают выражение для d :

$$d = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2)}} \times \\ \times \exp \left[-i \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2)} \frac{\delta + \gamma}{\alpha\delta + \gamma\beta} \xi \right] \times \\ \times \exp \left[-i \left(u \left(\frac{\alpha(\beta^2 + \delta^2) + \beta(\alpha^2 + \gamma^2)}{(\beta^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)} - \frac{\delta + \gamma}{\alpha\delta + \gamma\beta} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + v \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2)} \frac{\beta\delta + \alpha\gamma}{\alpha\delta + \gamma\beta} \right) \tau \right] \times \\ \times \exp [-(\zeta(\rho) + \zeta(\tilde{\rho}))\theta] \frac{\sigma(\theta + \rho)\sigma(\theta + \tilde{\rho})}{\sigma(\rho)\sigma(\tilde{\rho})\sigma_3^2(\theta)}. \quad (61)$$

Здесь параметры ρ и $\tilde{\rho}$ определяются из выражений

$$\wp(\rho) = e_3 + \frac{1}{4} \frac{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)}{2\sqrt{s_4} - \nu_3}, \quad (62) \\ \wp(\tilde{\rho}) = e_3 - \frac{1}{4} \frac{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)}{2\sqrt{s_4} + \nu_3},$$

а \wp , σ , ζ — эллиптические функции Вейерштрасса.

Солитонные пределы периодических решений соответствуют случаю, когда $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$. Выражения (57) и (60) сразу же дают

$$n = -1 + \frac{2\gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\gamma\theta)}, \quad (63)$$

$$|\mathcal{E}|^2 = \frac{4\gamma^2}{(\alpha^2 + \gamma^2)^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\gamma\theta)}. \quad (64)$$

Более сложное исследование уравнения (61), аналогичное проведенному в работе [12], приводит к выражению

$$d = \frac{2\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2} \times \\ \times \exp \left[-i\alpha\xi - i \left(u \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} - v(\alpha^2 - \gamma^2) \right) \tau \right] \times \\ \times \frac{-i\gamma \operatorname{sh}(\gamma\theta) + \alpha \operatorname{ch}(\gamma\theta)}{\operatorname{ch}^2(\gamma\theta)}. \quad (65)$$

Из формулы (46) найдем солитонный предел для амплитуды электрического поля:

$$\mathcal{E} = \frac{2i\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2} \times \\ \times \exp \left[-i\alpha\xi - i \left(u \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} - v(\alpha^2 - \gamma^2) \right) \tau \right] \times \\ \times \frac{1}{\operatorname{ch}(\gamma\theta)}. \quad (66)$$

Из уравнения (43) следует, что скорость солитона в бегущих координатах равна

$$V = \frac{u}{\alpha^2 + \gamma^2} - 2v\alpha. \quad (67)$$

Для случая, когда $u = 1$, $v = 0$, получаем известную формулу для скорости солитона СИП [12] без учета пространственной дисперсии.

Площадь импульса такого солитона не равна 2π :

$$\frac{d_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, x) dt = \frac{2\pi}{u - 2v\alpha(\alpha^2 + \gamma^2)} \neq 2\pi. \quad (68)$$

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Проанализируем полученные формулы. Вернувшись в лабораторную систему отсчета, получим выражения для скорости:

$$U = \frac{cV}{1 + V}, \quad (69)$$

где V задается формулой (67). Из (66) также следуют выражения для амплитуды поля:

$$A = \frac{\hbar\Omega}{ad_0} \frac{2\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2}, \quad (70)$$

для отстройки от несущей частоты:

$$\Delta = a\Omega \left(u \frac{\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} - v(\alpha^2 - \gamma^2) \right), \quad (71)$$

и длительности стационарного импульса:

$$\tau_p = \frac{1}{a\Omega\gamma V}. \quad (72)$$

При условии $u = 1$, $v = 0$ эти величины переходят в соответствующие величины стандартной теории СИП и удовлетворяют хорошо известному соотношению (см., например, [13]):

$$\frac{c}{U} = 1 + \frac{\Omega^2 \tau_p^2}{1 + \Delta^2 \tau_p^2}. \quad (73)$$

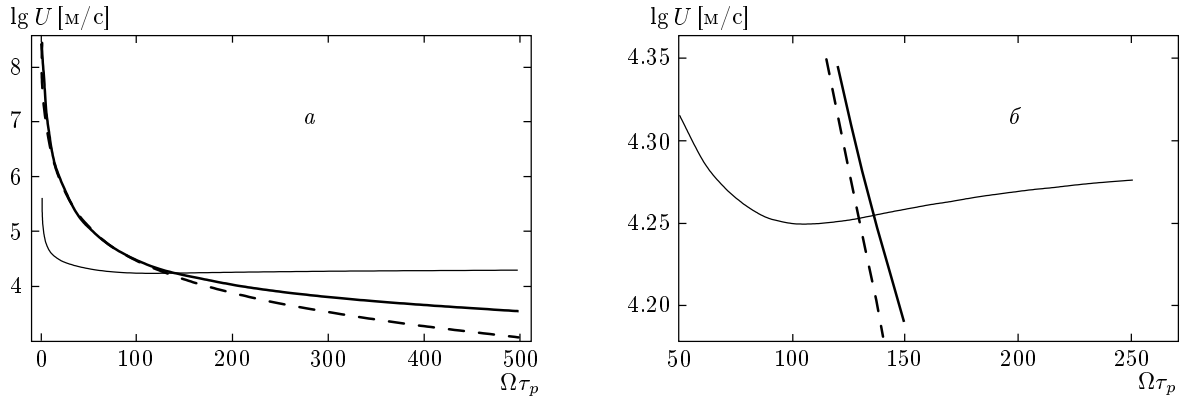


Рис. 1. *a* — Зависимость скорости солитона U от длительности импульса $\Omega\tau_p$ при $\Delta = 0$ и $\kappa = 10^{-7}$. Штриховая линия — результат стандартной теории СИП, жирная линия — «оптическая» ветвь, тонкая линия — «экситонная» ветвь. *б* — Область пересечения ветвей в более крупном масштабе

В формулах (67)–(72) зависимость физических величин друг от друга задана параметрически через их зависимости от параметров α и γ . Если мы фиксируем, например, отстройку Δ , то уравнение (71) накладывает связь на α и γ , что позволяет найти скорость в зависимости от γ и, следовательно, в зависимости от длительности импульса τ_p (см. (72)).

На рис. 1 приведена зависимость скорости распространения солитона, U , от длительности импульса τ_p при условии резонанса. Штриховой линии соответствует стандартная модель СИП. Зависимость $U(\tau_p)$ для СИП с пространственной дисперсией имеет две ветви. Одну из них назовем «оптической» (жирная линия), а другую «экситонной» (тонкая линия). Названия эти весьма условны, так как и в том, и в другом случае в переносе энергии участвуют как экситонный, так и электромагнитный механизмы. При малой длительности импульса «оптическая» ветвь практически совпадает со случаем стандартной СИП. Но с увеличением длительности солитон замедляется меньше, чем в случае отсутствия пространственной дисперсии. «Экситонная» же ветвь имеет минимум при некотором значении длительности $\tau_{p,min}$.

Чтобы оценить характерные параметры этих зависимостей аналитически, исключим параметр α из уравнений (67) и (71), которые представим в виде многочленов по α :

$$2v\alpha^3 + V\alpha^2 - 2v\gamma^2\alpha + V\gamma^2 - u = 0, \quad (74)$$

$$v\alpha^4 + u\alpha - v\gamma^4 = 0. \quad (75)$$

Эти уравнения написаны для наиболее важного случая строгого резонанса ($\Delta = 0$). Условием, что эти

два уравнения имеют общий корень α , является равенство нулю их результата (см., например, [14]), вычисление которого по стандартным формулам дает:

$$u(27uv^2 - V^3) + V(V^3 - 36uv^2)\gamma^2 + 12v^2V^2\gamma^4 - 64v^4\gamma^6 = 0. \quad (76)$$

С помощью уравнения (72) можно исключить переменную γ , так что в результате остаются только физические величины — скорость V и длительность $\tilde{\tau}_p = \alpha\Omega\tau_p$ импульса:

$$uV^6(27uv^2 - V^3) + V^5(V^3 - 36v^2u)\frac{1}{\tilde{\tau}_p^2} + 12v^2V^4\frac{1}{\tilde{\tau}_p^4} - 64v^4\frac{1}{\tilde{\tau}_p^6} = 0. \quad (77)$$

При $\tilde{\tau}_p \rightarrow \infty$ асимптотическое значение скорости V определяется условием, что свободный член в (77) обращается в нуль. Отсюда следует, что либо $V_{opt}(\tilde{\tau}_p \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ (что «соответствует» оптической ветви), либо $V_{exc}(\tilde{\tau}_p \rightarrow \infty) = 3(uv^2)^{1/3}$ (это «соответствует» экситонной ветви). Учет члена порядка $1/\tilde{\tau}_p^2$ в (77) позволяет найти характер приближения V к этому асимптотическому значению

$$V_{exc} \approx 3(uv^2)^{1/3} - \frac{v^2}{9\tilde{\tau}_p^2}, \quad (78)$$

т. е. график скорости как функции от $\tilde{\tau}_p$ приближается к асимптотическому постоянному значению снизу. Для того чтобы получить асимптотическое поведение оптической ветви, следует также учесть первые два члена в выражении (77), в результате чего получаем

$$V_{opt} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{v}{u}\right)^{1/3} \frac{1}{\tilde{\tau}_p}, \quad (79)$$

что существенно отличается от результата стандартной теории СИП, в которой соответствующая асимптотика имеет вид $V \approx 1/\tilde{\tau}_p^2$. Это отличие может наблюдаться уже при не слишком больших длительностях импульса. Действительно, при длительности импульса $\tau_p \gg (\kappa^{1/3}\Omega)^{-1}$ его скорость оказывается существенно меньшей, чем была бы скорость импульса СИП без учета пространственной дисперсии — например, при $\kappa = 10^{-7}$ и $\Omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ достаточно иметь длительность $\tau_p \sim 10^{-12} \text{ с}$.

Для исследования противоположного предельного случая при $\tilde{\tau}_p \rightarrow 0$ следует учесть, что в «экситонном» случае наибольший вклад дают последние два члена в левой части (77). Тогда для экситонной ветви находим

$$V_{exc} \approx \sqrt{\frac{2v}{\tilde{\tau}_p}}. \quad (80)$$

Чтобы получить аналогичную асимптотику для оптической ветви, следует учесть, что наибольшими становятся первые два члена результата (77). В результате получаем соотношение

$$V_{opt} \approx \frac{1}{u\tilde{\tau}_p^2}, \quad (81)$$

которое совпадает с формулой (73), т.е. при уменьшении длительности солитонного импульса скорость «оптического» солитона стремится к скорости солитона стандартной теории СИП.

В точках экстремума графика $V(\tilde{\tau}_p)$ (или $U(\tilde{\tau}_p)$) производная результата по $\tilde{\tau}_p^2$ должна равняться нулю, т.е. эти точки соответствуют кратным корням уравнения (77). В этом случае дискриминант данного уравнения должен равняться нулю, что дает условие

$$(5V^3 - 108uv^2)^2 (V^6 - 432u^2v^4) = 0. \quad (82)$$

Минимуму экситонной ветви соответствует корень

$$V_{exc} = (12\sqrt{3}uv^2)^{1/3} \approx 2.75(uv^2)^{1/3}. \quad (83)$$

Соответствующая длительность импульса может быть получена подстановкой этого значения скорости в результат (77) и его производную и вычислением их общего корня $\tilde{\tau}_{p,min}$. Простой расчет дает

$$\tilde{\tau}_{p,min} = \frac{2^{1/6}}{3^{3/4}} \frac{1}{(u^2v)^{1/3}} \approx 0.49 \frac{1}{(u^2v)^{1/3}}. \quad (84)$$

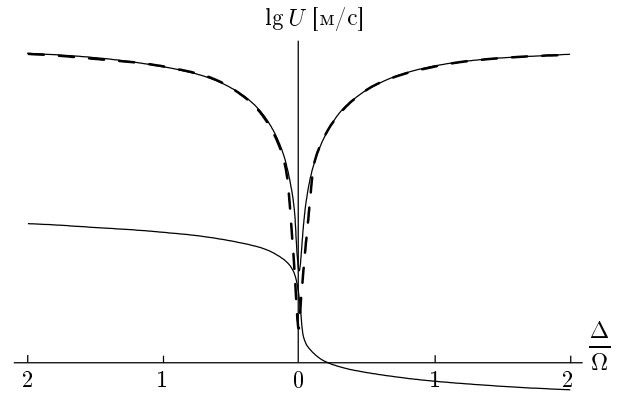


Рис. 2. Зависимость скорости солитона U от отстройки импульса Δ/Ω при $\Omega\tau_p = 200$ и $\kappa = 10^{-7}$. Штриховые линии — результат стандартной теории СИП, сплошные — результат теории СИП с учетом пространственной дисперсии

На рис. 2 видно, что при увеличении отстройки от резонанса оптическая ветвь стремится к результатам, описываемым стандартной теорией СИП. Поэтому наиболее сильное влияние эффект пространственной дисперсии оказывает при $\Delta \rightarrow 0$ и при больших длительностях, так что можно ограничиться рассмотренными выше соотношениями.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе нами было показано, что если импульс света может возбуждать в среде легкие и подвижные экситоны, то по мере будут распространяться два типа солитонов, обладающих различными характеристиками. Один тип солитонов в соответствующем предельном случае переходит в стандартный импульс СИП, в то время как свойства солитонов второго типа весьма своеобразны — с увеличением длительности импульса скорость этих солитонов опускается до некоего минимального значения, после чего увеличивается и выходит на константу. Можно предположить, что указанные эффекты доступны для экспериментального наблюдения. В самом деле, несмотря на очень малое значение параметра пространственной дисперсии $\kappa = 10^{-7}$, из наших результатов следует, что уже при длительностях порядка $(100-200)/\Omega \sim 10^{-12} \text{ с}$ скорость оптического солитона замедляется существенно меньше, чем в стандартной теории СИП. Кроме того, в этих условиях возможно возбуждение экситонных импульсов с совершенно другой зависимостью скорости солитона от длительности. Наконец, усиление

эффектов пространственной дисперсии вследствие нелинейного уменьшения скорости распространения оптических импульсов может иметь более общий характер, чем рассмотренный здесь простой случай импульсов СИП, что требует развития соответствующих разделов нелинейной оптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967).
2. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
3. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
4. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов*, Наука, Москва (1965).
5. В. М. Агранович, *Теория экситонов*, Наука, Москва (1968).
6. В. М. Агранович, В. И. Рупасов, ФТТ **18**, 81 (1976).
7. *Экситоны*, под ред. Э. И. Рашба, М. Д. Стерджа, Наука, Москва (1985).
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (2001).
9. *Confined Electrons and Photons: New Physics and Applications*, ed. by E. Burstein and C. Weisbuch, Plenum, New York (1995).
10. А. М. Камчатнов, *Nonlinear Periodic Waves and Their Modulations — An Introductory Course*, World Sci., Singapore (2000).
11. А. М. Камчатнов and М. V. Pavlov, Phys. Lett. A **301**, 269 (2002).
12. А. М. Камчатнов, М. В. Павлов, ЖЭТФ **107**, 44 (1995).
13. И. А. Полуэктов, Ю. М. Попов, В. С. Ройтберг, УФН **114**, 97 (1974).
14. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1970).