

# ЭФФЕКТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ПРОЗРАЧНОСТИ В ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПАРАМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ

С. В. Сазонов<sup>a\*</sup>, Н. В. Устинов<sup>b\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Российский государственный университет им. И. Канта  
236041, Калининград, Россия*

<sup>b</sup> *Томский государственный университет  
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 18 ноября 2005 г.

Теоретически исследована нелинейная динамика продольных акустических импульсов в низкотемпературном парамагнитном кубическом кристалле, находящемся под действием постоянной и однородной внешней деформации, направленной вдоль одной из осей симметрии четвертого порядка. В качестве парамагнитных примесей выбраны ионы с эффективным спином  $S = 1$ , испытывающие наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки. В такой среде уровни энергии, первоначально вырожденные по проекции  $S$ , расщепляются из-за квадрупольного эффекта Штарка, и акустический импульс не только вызывает квантовые переходы, но также динамически смещает их частоту. Выведена самосогласованная система уравнений, которая описывает распространение импульсов в кристалле под произвольным углом к направлению статической деформации вне рамок приближения медленно меняющихся огибающих. Получены решения этой системы в виде однополярных и бризероподобных импульсов, убывающих экспоненциально и рационально. Изучение свойств найденных решений выявило асимметрию по полярности сигнала, зависящую от типа внешнего воздействия на кристалл (растяжение или сжатие) и направления распространения акустических импульсов. Так, обнаружен пороговый характер акустической прозрачности для однополярных импульсов деформации. В случае бризероподобных упругих импульсов знак их временной площади (нулевой гармоники) таков, что частота квантовых переходов динамически уменьшается в среднем на периоде осцилляций. Это определяет эффективность генерации высших гармоник акустических импульсов в деформированных парамагнитных кристаллах.

PACS: 43.25.+y, 43.25.Rq, 43.25.Ts

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с шестидесятых годов двадцатого столетия (после создания лазеров импульсного излучения) интенсивное развитие получила оптика нелинейных когерентных процессов. Одним из наиболее ярких представителей соответствующих явлений до сих пор остается эффект самоиндуцированной прозрачности (СИП). С момента его открытия и теоретического объяснения МакКоллом и Ханом в 1967 году [1] он по сегодняшний день продолжает привлекать к себе пристальное внимание исследователей. Вскоре после наблюдения СИП был обнаружен и объяснен ее акустический аналог (АСИП) в пара-

магнитных кристаллах при температурах жидкого гелия [2–4]. Это дало толчок возникновению новой отрасли физики, известной как магнитная квантовая акустика [5], в рамках которой был затем выявлен ряд других прямых аналогий между оптическими и акустическими явлениями.

В последнее время значительно возрос интерес к вопросам нелинейного взаимодействия оптических импульсов с несимметричными средами [6–16]. Такие среды характеризуются наличием у находящихся в них квантовых частиц постоянных дипольных моментов в собственных энергетических состояниях. Из-за этого поле импульса не только вызывает переходы между энергетическими уровнями, но и смещает динамическим образом частоты переходов. Теоретические исследования показали, что при про-

\*E-mail: barab@newmail.ru

\*\*E-mail: n\_ustinov@mail.ru

хождении лазерных импульсов через двулучепреломляющие несимметричные среды возможны солитонные режимы резонансной прозрачности, отличающиеся от СИП [12]. Классификация таких режимов, основанная на степени возбуждения среды и скорости распространения импульсов, дана в работах [13, 14].

Возвращаясь к оптико-акустическим аналогиям, отметим, что поле деформации в твердом теле, взаимодействуя с парамагнитными примесными ионами, тоже выполняет двойную функцию. Так, в присутствии внешнего магнитного поля оно вызывает квантовые переходы внутри зеемановских мультиплетов и одновременно смещает частоты соответствующих переходов [5]. Такой характер динамики находит свое физическое объяснение на основе квадрупольного эффекта Штарка. Импульс деформации создает в кристалле локальные градиенты электрического поля, которые вызывают, во-первых, электро-квадрупольные переходы между зеемановскими подуровнями (механизм Ван Флека [17]), во-вторых, изменение за счет квадрупольного штарк-эффекта энергии этих подуровней. Как известно, при штарк-эффекте снимается вырождение по модулю проекции  $S_z$  эффективного спина  $S$  (или полного углового момента) парамагнитного иона на направление внешнего электрического поля. По этой причине энергетические уровни с разными абсолютными значениями  $S_z$  смещаются в поле импульса деформации неодинаково. В результате возникает динамический сдвиг частоты у соответствующих квантовых переходов внутри зеемановских мультиплетов.

Солитонные режимы резонансной акустической прозрачности при распространении продольно-поперечных импульсов в парамагнитном кубическом кристалле вдоль внешнего магнитного поля исследовались в работе [18]. Направление магнитного поля было параллельным одной из его осей симметрии четвертого порядка. Роли компонент импульса деформации в такой геометрии (геометрии Фарадея) строго дифференцированы, как это также имеет место в случае лазерных импульсов, распространяющихся в оптически одноосной среде перпендикулярно ее оптической оси [12]. Квантовые переходы между зеемановскими подуровнями вызывает поперечная составляющая, а продольная смещает их частоту. В соответствующем солитонном режиме акустической прозрачности поперечная компонента импульса оказывается модулированной на частоте, близкой резонансной, тогда как продольная представляет собой однополярный видеоимпульс, т. е. во-

обще не имеет несущей частоты. Поэтому в данной задаче нельзя использовать стандартное для квазимонохроматических импульсов приближение медленно меняющихся огибающих. Заметим, однако, что такой продольно-поперечный солитон может формироваться в среде, в которой отличие линейных скоростей продольного и поперечного звуков мало, например, как в ионных кристаллах галогенидов щелочных металлов [19]. В подавляющем же большинстве твердых тел скорость продольного звука значительно превышает скорость поперечного [20]. Вследствие этого они распространяются через среду практически независимо.

Таким образом, изучение особенностей акустической прозрачности в парамагнитных кристаллах в условиях, когда однокомпонентный импульс деформации (например, продольной) одновременно вызывает квантовые переходы и динамически сдвигает их частоты, является актуальной задачей. Как известно [21], наиболее сильное взаимодействие с колебаниями кристаллической решетки испытывают парамагнитные ионы, обладающие эффективным спином  $S = 1$ . В качестве таковых можно, например, рассматривать примеси  $\text{Fe}^{2+}$  или  $\text{Ni}^{2+}$ , внедренные в матрицу кубического кристалла  $\text{MgO}$  [22]. Наблюдение АСИП в экспериментах [2, 3] было проведено именно для этого случая.

Настоящая работа посвящена исследованию солитонных режимов распространения продольных акустических импульсов в кристаллах, содержащих парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$  и подверженных статической деформации. В отличие от обычной АСИП здесь предполагается, что внешнее магнитное поле отсутствует. По этой причине вырождение спиновых состояний снимается не полностью. Также мы не используем приближение медленно меняющихся огибающих, поскольку акустический импульс может содержать, вообще говоря, произвольное число колебаний. Поскольку уже длительное время существуют методы генерации гиперзвуковых импульсов пикосекундной длительности [23, 24], это предположение находится в рамках возможностей эксперимента.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 выводится самосогласованная система уравнений, описывающая распространение продольных акустических импульсов под произвольным углом к направлению постоянной и однородной внешней деформации, параллельной одной из осей симметрии четвертого порядка парамагнитного кристалла. Мы используем полуклассический подход, в котором рассмотрение динамики эффективных спинов про-

водится квантовомеханически, а поля упругого импульса — классически, на основе гамильтонова формализма. Матричная размерность и порядок производных в уравнениях редуцируются с помощью унитарного преобразования и приближения однонаправленного распространения. Также в этом разделе обсуждается связь полученной системы с уравнениями, описывающими эволюцию оптических импульсов в несимметричной среде. В разд. 3 изучаются свойства решений данной системы в виде стационарных однополярных и бризероподобных импульсов, убывающих как экспоненциально, так и рационально. Показано, что в рассматриваемой задаче имеет место асимметрия по полярности акустических импульсов, которая зависит от типа внешнего воздействия на кристалл (растяжение или сжатие) и направления их распространения. Выяснены особенности проявления этой асимметрии и поведения среды для однополярных и бризероподобных акустических импульсов. В Заключении подведены итоги и намечены некоторые перспективы исследований.

## 2. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИИ И ЭФФЕКТИВНЫХ СПИНОВ

Пусть кубический кристалл, содержащий парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$ , подвергнут действию однородной статической деформации  $\mathcal{E}^{(0)} = \mathcal{E}_{z'z'}^{(0)}$ , направленной вдоль оси  $z'$ , которая совпадает с одной из его осей симметрии четвертого порядка. Приложенная деформация снимает вырождение по модулю проекции  $S_{z'}$  эффективного спина вследствие квадрупольного штарк-эффекта. Остальные оси декартовой системы координат направим вдоль двух других осей симметрии кристалла. Введем еще одну систему координат, оси  $x$  и  $z$  которой повернуты относительно  $x'$  и  $z'$ , как показано на рис. 1, а оси  $y'$  и  $y$  совпадают между собой. Предположим, что вдоль оси  $z$  распространяется продольный акустический импульс, который характеризуется компонентой  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{zz} = du/\partial z$  тензора деформации, где  $u = u(z, t)$  — поле локальных смещений кристалла вдоль оси  $z$ .

Как известно, в кристаллах в общем случае не существует сугубо продольных или сугубо поперечных волн. Однако при условии близости направлений вектора смещений и волновой нормали говорят о квазипродольной волне [25]. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполняется,

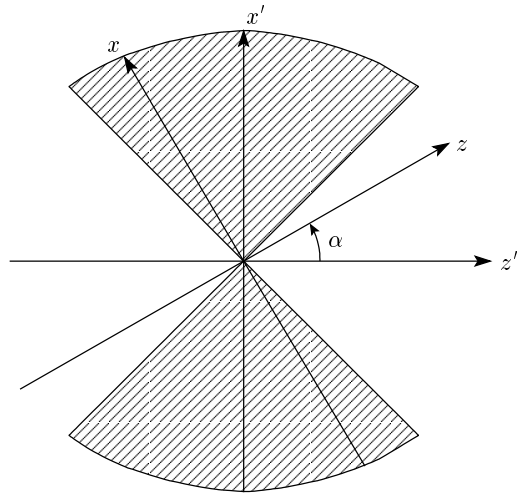


Рис. 1. Схема осей координат. Штриховкой выделены области с  $\cos(2\alpha) < 0$

и ограничим рассмотрение случаем распространения квазипродольного звука. Генерация поперечного звука за счет взаимодействия с парамагнитными примесями будет мала из-за существенной разницы линейных скоростей продольной и поперечной акустических волн. Кроме того, мы не будем учитывать дифракционные эффекты и будем считать импульсные фронты плоскими. Эти допущения оправданы, если апертура  $D$  импульсов достаточно велика. Оценить ее можно из тех соображений, что длина дифракционной расходимости  $l_d = D^2/\lambda$ , где  $\lambda$  — характерная длина или длина волны акустического поля, должна значительно превосходить размер кристаллического парамагнитного образца. В первых экспериментах Шайрена по АСИП [2] образцы имели характерный размер  $l \sim 1$  см. Взяв для частоты значение  $\omega \sim 10^{10}$  с<sup>-1</sup>, найдем  $\lambda = 2\pi a/\omega \sim 5 \cdot 10^{-4}$  см, где для скорости продольного звука принята оценка  $a \sim 10^6$  см/с. Тогда неравенство  $l_d \gg l$  дает  $D \gg 10^{-2}$  см.

В указанных условиях гамильтониан парамагнитного иона, взаимодействующего с полем деформации, можно записать следующим образом [17, 21]:

$$\hat{H} = G \left( \mathcal{E}^{(0)} \hat{S}_{z'}^2 + \mathcal{E} \hat{S}_z^2 \right). \quad (1)$$

Здесь  $G = G_{11}$  — компонента тензора спин-фононного взаимодействия, связывающая парамагнитные ионы с продольным полем деформации; базисные спиновые матрицы  $\hat{S}_j$  ( $j = x', y', z'$ ) в представлении собственных функций  $\hat{S}_{z'}$  имеют вид [21]

$$\begin{aligned} \hat{S}_{x'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{y'} &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{z'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

переход от «штрихованных» матриц к «нештрихованным» совершается с помощью преобразования поворота

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \hat{S}_{x'} \cos \alpha - \hat{S}_{z'} \sin \alpha, \\ \hat{S}_z &= \hat{S}_{z'} \cos \alpha + \hat{S}_{x'} \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha$  — угол между осями  $z'$  и  $z$ .

Первое слагаемое в скобках в правой части (1) соответствует квадрупольному штарк-эффекту, т. е. упомянутому во Введении механизму Ван Флека, в статическом поле внешней деформации. Динамическое спин-фононное взаимодействие, описываемое вторым слагаемым, также осуществляется за счет этого механизма.

Для самосогласованности задачи дополним уравнения (1)–(3) гамильтонианом акустического поля,

$$H_a = \frac{1}{2} \int \left( \frac{p^2}{\rho} + \rho a^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right) d\mathbf{r}, \quad (4)$$

где  $p$  — плотность импульса среды, соответствующая локальным деформационным смещениям;  $\rho$  — равновесная плотность кристалла.

Для вывода уравнений, описывающих динамику эффективных спинов и поля деформаций, мы воспользуемся полуклассическим подходом [26]. В соответствии с ним эволюция спиновой подсистемы

подчиняется квантовомеханическому уравнению для матрицы плотности:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (5)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, а  $\hat{\rho}$  представляется в виде

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Поле же акустического импульса описывается классическими уравнениями Гамильтона для сплошной среды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u} \left( H_a + \int n \langle \hat{H} \rangle d\mathbf{r} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta p} \left( H_a + \int n \langle \hat{H} \rangle d\mathbf{r} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

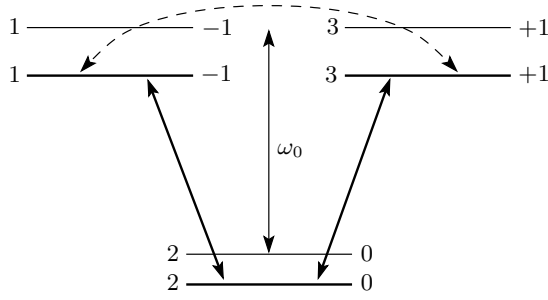
где  $n$  — концентрация примесных парамагнитных ионов,  $\langle \hat{H} \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{H})$  — квантовое среднее  $\hat{H}$ .

Заметим, что в уравнении (5) отсутствуют слагаемые, содержащие релаксацию. Характерное время необратимой фазовой релаксации для переходов внутри зеемановских мультиплетов имеет порядок  $T_2 \sim 10^{-5} - 10^{-6}$  с [2, 5], а время энергетической релаксации  $T_1$  гораздо больше  $T_2$ . Поэтому уравнение (5) хорошо описывает взаимодействие эффективных спинов с акустическими импульсами длительностью  $T_p < 10^{-6}$  с.

В системе (7) мы отбросили слагаемые, учитывающие собственное затухание акустических волн в отсутствие парамагнитных ионов, которое обусловлено ангармонизмом колебаний узлов кристаллической решетки, а также наличием дефектов. Этим затуханием при температуре жидкого гелия и ниже можно с хорошей точностью пренебречь [21].

Используя формулы (1)–(3), запишем

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 + (1 + \cos^2 \alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2} & \sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} & \sin^2 \alpha \frac{G\mathcal{E}}{2} \\ \sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} & \sin^2 \alpha G\mathcal{E} & -\sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} \\ \sin^2 \alpha \frac{G\mathcal{E}}{2} & -\sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} & \hbar\omega_0 + (1 + \cos^2 \alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2} \end{pmatrix}. \quad (8)$$



**Рис. 2.** Расщепление спинового триплета в поле статической деформации (тонкие линии) и положение уровней и квантовые переходы под действием акустического импульса. Слева от уровней указаны их порядковые номера, справа — значения проекции эффективного спина  $S_{z'}$  на ось статической деформации; сплошными стрелками изображены квантовые переходы с изменением энергии спина, штриховыми — без изменения

Здесь мы ввели обозначение  $\omega_0 = G\mathcal{E}^{(0)}/\hbar$  для частоты штарковского квадрупольного расщепления спинового триплета (см. рис. 2). Для определенности считаем, что внешняя деформация такова, что энергия состояния с  $S_{z'} = 0$  меньше энергий состояний с  $S_{z'} = \pm 1$ . В этих условиях основное состояние парамагнитного иона характеризуется порядковым номером 2, а уровни вырожденного возбужденного состояния — номерами 1 и 3 (рис. 2). Рассмотрение обратного случая проводится аналогично.

Объединяя формулы (4), (7) и (8), находим неоднородное волновое уравнение для поля деформации акустического импульса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} = \\ = \frac{nG}{2\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ (3 \sin^2 \alpha - 2) \rho_{22} + \sin^2 \alpha (\rho_{13} + \rho_{31}) + \right. \\ \left. + \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{2}} (\rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{12} - \rho_{21}) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Обсудим, при каких значениях параметров данное уравнение допускает понижение порядка с помощью приближения однонаправленного распространения [27]. Взяв для ионов  $\text{Fe}^{2+}$  в матрице  $\text{MgO}$  величины  $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $n \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ,  $\rho \approx 2 \text{ г/см}^3$ ,  $G \sim 10^{-13} \text{ эрг}$  [17, 21] и  $a \sim 5 \cdot 10^5 \text{ см/с}$ , получим оценку для безразмерного параметра

$$\eta = \frac{nG^2}{\hbar\omega_0\rho a^2} \sim 10^{-3},$$

характеризующего вклад правой части (9). При

этом значении  $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$  соответствует упругой статической деформации

$$\mathcal{E}^{(0)} = \frac{\hbar\omega_0}{G} \sim 10^{-4}.$$

Выполнение условия  $\eta \ll 1$  позволяет провести в уравнении (9) приближение однонаправленного распространения подобно тому, как это делалось в работе [27]. Действительно, введем локальное время  $\tau = t - z/a$  и медленную координату  $\zeta = \eta z$ . В этих переменных  $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau$ , а

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} + \eta \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Пренебрегая слагаемым, пропорциональным  $\eta^2$ , запишем приближенно

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\frac{\eta}{a} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta}$$

для левой части (9) и

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \approx \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

для правой. Интегрируя получившееся в новых переменных волновое уравнение по  $\tau$  и переходя к исходным переменным, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \\ = \frac{nG}{4\rho a^3} \frac{\partial}{\partial t} \left[ (3 \sin^2 \alpha - 2) \rho_{22} + \sin^2 \alpha (\rho_{13} + \rho_{31}) + \right. \\ \left. + \frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{2}} (\rho_{23} + \rho_{32} - \rho_{12} - \rho_{21}) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что поле деформации и элементы матрицы плотности удовлетворяют следующим начальным условиям при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\mathcal{E} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \rho_{jj} \rightarrow W_j, \quad \rho_{jk} \rightarrow 0, \quad (11)$$

$j, k = 1, 2, 3; k \neq j$ . Очевидно, что они соответствуют импульсному режиму распространения продольного звука.

Отметим, что редукция волнового уравнения (9) второго порядка к уравнению первого порядка (10) соответствует пренебрежению отраженной от парамагнитных примесей акустической волной. Основанием для этого является малая плотность примесей ( $\eta \ll 1$ ).

Производные в правой части (10) можно исключить с помощью выражений (5), (6) и (8). Проведение соответствующих громоздких, но простых вычислений дает следующее уравнение для поля деформации акустического импульса:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = i \sin(2\alpha) \frac{n\omega_0 G}{4\sqrt{2}\rho a^3} (\rho_{12} + \rho_{23} - \rho_{21} - \rho_{32}). \quad (12)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести матрицу  $\hat{\rho}'$ , связанную с матрицей плотности унитарным преобразованием:

$$\hat{\rho}' = \hat{R} \hat{\rho} \hat{R}^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (5) получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}'}{\partial t} = [\hat{H}', \hat{\rho}'], \quad (14)$$

в котором гамильтониан  $\hat{H}' = \hat{R} \hat{H} \hat{R}^{-1}$  оказывается приведенным к блочно-диагональному виду:

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 + G\mathcal{E} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \alpha G\mathcal{E} & -\sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2} \\ 0 & -\sin(2\alpha) \frac{G\mathcal{E}}{2} & \hbar\omega_0 + \cos^2 \alpha G\mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Благодаря этому обстоятельству систему уравнений (5) и (12), переписанную в терминах элементов матрицы  $\hat{\rho}'$ , удастся расщепить на две подсистемы так, что взаимодействие продольного звука с парамагнитным кристаллом в присутствии поля постоянной внешней деформации будет полностью описываться одной из них:

$$\frac{\partial \rho'_{11}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho'_{22}}{\partial t} = i \sin(2\alpha) \frac{G}{2\hbar} \mathcal{E} (\rho'_{21} - \rho'_{12}), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'_{12}}{\partial t} = & -i \left( \omega_0 + \cos(2\alpha) \frac{G}{\hbar} \mathcal{E} \right) \rho'_{12} + \\ & + i \sin(2\alpha) \frac{G}{2\hbar} \mathcal{E} (\rho'_{22} - \rho'_{11}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = i \sin(2\alpha) \frac{n\omega_0 G}{4\rho a^3} (\rho'_{12} - \rho'_{21}). \quad (17)$$

При этом элемент  $\rho'_{33}$  является постоянным:

$$\rho'_{33} = \frac{W_1 + W_3}{2}, \quad (18)$$

а другие элементы матрицы  $\hat{\rho}'$  удовлетворяют однородной системе линейных уравнений с переменными коэффициентами, которая имеет тривиальное (нулевое) решение в случае равных начальных заселенностей верхних квантовых уровней. Последнее условие имеет прозрачный физический смысл и соответствует бальцмановской начальной заселенности. Поэтому в дальнейшем будем считать, что  $W_3 = W_1$ .

Таким образом, задача о нелинейном распространении продольного акустического импульса в деформированном парамагнитном кристалле в случае спина  $S = 1$  свелась к исследованию взаимодействия импульса с системой двухуровневых квантовых частиц. В общем случае, как видно из уравнений (15) и (16), поле деформации играет двойную роль: во-первых, вызывает квантовые переходы, изменяя населенность уровней; во-вторых, динамически смещает их частоту. Отметим еще раз, что при выводе системы нелинейных уравнений приближение медленно меняющихся огибающих использовано не было.

Из формул (15)–(17) следует, что при распространении вдоль поля постоянной внешней деформации ( $\alpha = 0, \pi$ ) или перпендикулярно ему ( $\alpha = \pm\pi/2$ ) продольный звук не взаимодействует с парамагнитными примесями. В терминах блоховских переменных

$$W = \frac{\rho'_{11} - \rho'_{22}}{2}, \quad U = \frac{\rho'_{12} + \rho'_{21}}{2}, \quad V = \frac{\rho'_{21} - \rho'_{12}}{2i}$$

система (15)–(17) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -(\omega_0 + q\Omega_p)V, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= (\omega_0 + q\Omega_p)U + \Omega_p W, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\Omega_p V, \\ \frac{\partial \Omega_p}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega_p}{\partial t} &= \sin^2(2\alpha) \frac{n\omega_0 G^2}{2\hbar\rho a^3} V, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\Omega_p = \sin(2\alpha) G\mathcal{E}/\hbar$ ,  $q = \text{ctg}(2\alpha)$ .

Если  $\alpha = \pm\pi/4$  или  $\alpha = \pm 3\pi/4$ , то  $q = 0$  и система (19) сводится к хорошо известным в нелинейной оптике редуцированным уравнениям Максвелла–Блоха для изотропной двухуровневой среды [27], которые интегрируемы с помощью метода обратной задачи рассеяния [28–30]. При произвольном  $q$  (или угле  $\alpha$ ) система (19) отличается только

обозначениями от редуцированных уравнений Максвелла–Блоха, описывающих распространение однокомпонентных оптических импульсов в среде с постоянными дипольными моментами. В работе [8] было показано, что система редуцированных уравнений Максвелла–Блоха с постоянными дипольными моментами тоже интегрируема. Особенности динамики ее импульсных решений исследовались численно и аналитически в работах [15, 16].

Таким образом, мы приходим к еще одной аналогии между оптическими и акустическими явлениями. Роль параметра анизотропии, обусловленного постоянными дипольными моментами, здесь играет величина  $q$ . Изменение направления распространения подаваемого на парамагнитный образец гиперзвукового сигнала по отношению к направлению приложения внешней статической деформации позволяет варьировать данный параметр от нуля до сколь угодно больших (по абсолютной величине) значений. Это обстоятельство выгодно отличает нелинейную акустику парамагнитных кристаллов от оптики несимметричных сред. Так, в случае гетерогенных полупроводниковых структур наибольшее значение параметра анизотропии не достигает и десяти, а отрицательные значения он может принимать в несимметричных средах с выраженным положительным двулучепреломлением, где достаточно велико различие линейных скоростей обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн [14].

Отметим, что населенности спиновых подуровней выражаются через инверсию  $W$  с учетом соотношения (13) следующим образом:

$$\rho_{11} = \rho_{33} = \frac{1}{2} \left( W_1 + \frac{W_1 + W_2}{2} + W \right),$$

$$\rho_{22} = \frac{W_1 + W_2}{2} - W.$$

В результате проведенного рассмотрения физическая модель фактически свелась к уравнениям, описывающим взаимодействие акустического поля с системой двухуровневых квантовых объектов (спин-фононных переходов). Поскольку приближение медленно меняющихся огибающих здесь нами нигде не используется, а спектр солитонов системы (19) не всегда может содержать фурье-компоненты, резонансные данному переходу, следует кратко обсудить вопрос о границах применимости нашей модели. Как выше отмечалось, характерные значения частоты расщепления  $\omega_0 \sim 10^{10} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует статической деформации  $\mathcal{E}^{(0)} \sim 10^{-4}$ . Дальнейшее увеличение значения  $\mathcal{E}^{(0)}$  (а с ним и  $\omega_0$ )

чревато разрушением кристалла. Квантовые переходы с рассматриваемых спиновых подуровней на подуровни других мультиплетов соответствуют частотам микроволнового и инфракрасного диапазонов, что значительно превышает величину  $\omega_0$ , а также частоты из спектрального состава изучаемых ниже акустических солитонов. По этой причине переходы на другие мультиплеты можно не учитывать и ограничиться предложенной здесь моделью.

### 3. ОДНОПОЛЯРНЫЕ И БРИЗЕРОПОДОБНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ИМПУЛЬСЫ

Так называемые многосолитонные решения уравнений (15)–(17) можно получить алгебраическими методами теории солитонов, в частности, с помощью техники преобразования Дарбу [31]. Поскольку простейший, односолитонный импульс является стационарным, его можно найти, непосредственно интегрируя уравнения, как, например, в случае системы полных уравнений Максвелла–Блоха для среды с постоянными дипольными моментами [10, 11]. С учетом начальных условий (11) приходим к следующим выражениям для односолитонного решения:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \frac{\mu + \cos(2\alpha)}{\mu \operatorname{ch} \xi + \cos(2\alpha)}, \quad (20)$$

$$W = W_0 \left[ 1 - \frac{2 \sin^2(2\alpha)}{\omega_0^2 \tau_p^2 (1 + \omega_0^2 \tau_p^2) (\mu \operatorname{ch} \xi + \cos(2\alpha))^2} \right], \quad (21)$$

где

$$\xi = \frac{1}{\tau_p} \left( t - \frac{z}{v} \right), \quad \mu = \frac{\mathcal{E}_m}{2\mathcal{E}^{(0)}} + \cos(2\alpha),$$

$$W_0 = \frac{W_1 - W_2}{2}.$$

Скорость  $v$  и параметр  $\tau_p$  данного импульса связаны с  $\mathcal{E}_m$  соотношениями

$$v = a \left( 1 - \frac{nG^2 W_0}{2\hbar\omega_0 \rho a^2} \frac{\sin^2(2\alpha)}{\mu^2 + \sin^2(2\alpha)} \right)^{-1}, \quad (22)$$

$$\tau_p^{-2} = \omega_0^2 (\mu^2 - \cos^2(2\alpha)).$$

Для определенности будем далее считать, что среда до прохождения импульса находится в термодинамически равновесном состоянии ( $W_0 < 0$ ).

Значение вещественного параметра  $\mathcal{E}_m$ , определяющего величину поля деформации  $\mathcal{E}$  в центре

импульса, должно быть таким, чтобы выполнялось условие  $\tau_p^2 \geq 0$ . Вследствие этого в рассматриваемой задаче имеет место асимметрия по полярности импульса. В работах [10, 11, 15] такая асимметрия была обнаружена при аналитическом и численном исследовании динамики электромагнитных импульсов в среде с постоянными дипольными моментами. Здесь эта асимметрия зависит от угла распространения  $\alpha$  и величины поля внешней деформации  $\mathcal{E}^{(0)}$ : параметр  $\mathcal{E}_m$  не может лежать в интервале  $(-4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha), 0)$  при  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) > 0$  и в интервале  $(0, -4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha))$  при  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) < 0$ . Иными словами, амплитуда импульса  $|\mathcal{E}_m|$  может быть любой, если  $\mathcal{E}_m \mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) > 0$ , тогда как в противном случае она не может быть меньше  $4|\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)|$ .

Асимметрия по полярности имеет ряд других интересных проявлений. Так, из формулы (22) следует, что у импульсов с одинаковой амплитудой, но разных полярностей скорости различны, если  $\cos(2\alpha) \neq 0$ . Сильнее отличаться от линейной скорости будет скорость импульса с противоположными знаками  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$  и  $\mathcal{E}_m$ . В дальнейшем случай  $\cos(2\alpha) = 0$  будем называть симметричным. Нетрудно видеть, что именно в этом случае будет наибольшее замедление в скорости распространения среди импульсов фиксированной амплитуды.

Для временной площади однополярного импульса (20) и его длительности  $T_p$ , равной удвоенной разности между значениями переменной  $t$ , в которых величина  $|\mathcal{E}|$  максимальна и в два раза меньше максимального значения  $|\mathcal{E}_m|$ , имеем следующие выражения:

$$A_p \equiv \frac{|G|}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dt = 8 \operatorname{sign}(\mathcal{E}_m) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m + 4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)}}, \quad (23)$$

$$T_p = \tau_p \operatorname{arch} \left( 2 + \frac{\cos(2\alpha)}{\mu} \right).$$

В симметричном случае или при одинаковых знаках величин  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$  и  $\mathcal{E}_m$  длительность импульса может принимать любое значение ( $0 < T_p < \infty$ ). При разных знаках этих величин  $T_p$  всегда меньше некоторого максимального значения  $T_r$ , соответствующего пределу  $\mathcal{E}_m \rightarrow -4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$ , который будет подробно рассмотрен ниже. Временная площадь не зависит от амплитуды только в симметричном случае, когда она равна  $\pm 2\pi$ . Если  $\mathcal{E}_m \mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) > 0$ , то ее модуль не превышает

$2\pi$ , и чем он меньше, тем существеннее отличается скорость импульса от линейной. В случае, когда  $\mathcal{E}_m \mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) < 0$ , модуль временной площади лежит в пределах от  $2\pi$  до  $4\pi$ . При этом, чем больше временная площадь импульса по абсолютной величине, тем сильнее отличается его скорость от линейной скорости.

Подводя итог сказанному выше, мы видим, что динамика импульсов, полярность которых противоположна знаку  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$ , носит пороговый характер: их амплитуда и временная площадь не могут быть меньше определенных значений. Длительность таких импульсов тоже не может быть произвольной и ограничена сверху. Для слабых однополярных импульсов, у которых характер динамической деформации (растяжение или сжатие) совпадает (не совпадает) с типом внешней деформации, среда оказывается прозрачной, только если они распространяются в области  $\cos(2\alpha) > 0$  ( $\cos(2\alpha) < 0$ ; см. рис. 1). Эти особенности могут быть использованы для генерации мощных акустических импульсов экстремально коротких длительностей.

Если  $\mathcal{E}_m \rightarrow -4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$ , то в выражениях для односолитонного решения возникает неопределенность. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим следующие выражения:

$$\mathcal{E} = -\frac{4\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)}{1 + [\omega_0 \cos(2\alpha) (t - z/v_r)]^2}, \quad (24)$$

$$W = W_0 - \frac{2W_0 \sin^2(4\alpha)}{(1 + [\omega_0 \cos(2\alpha) (t - z/v_r)]^2)^2}, \quad (25)$$

где

$$v_r = a \left( 1 - \sin^2(2\alpha) \frac{nGW_0}{2\mathcal{E}^{(0)} \rho a^2} \right)^{-1}.$$

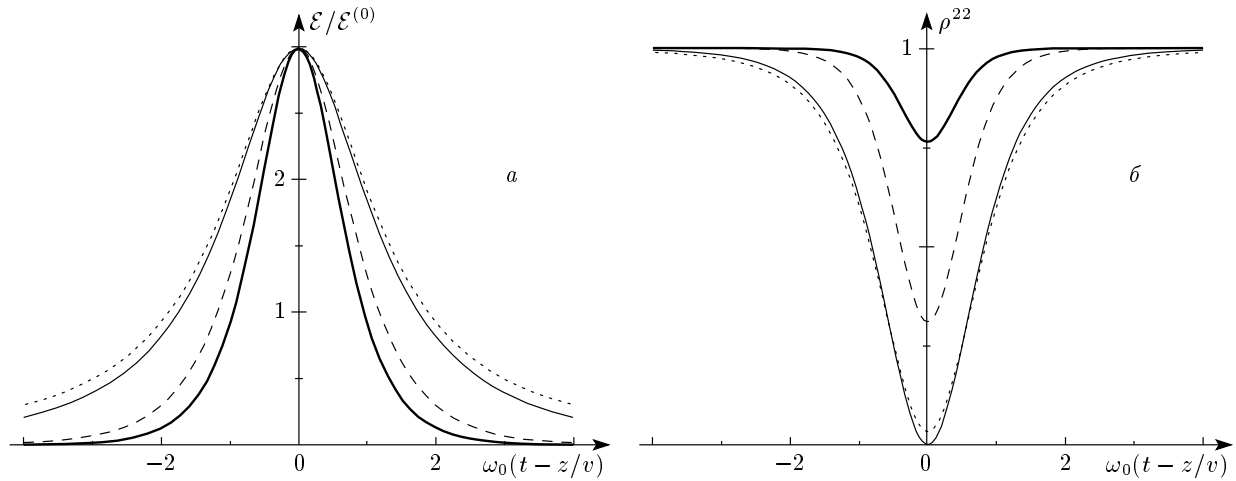
Эти формулы дают алгебраически убывающее решение. Его длительность равна

$$T_r = \frac{2}{\omega_0 |\cos(2\alpha)|}.$$

В случае противоположных знаков величин  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$  и  $\mathcal{E}_m$  длительность односолитонного импульса, как отмечалось выше, не превышает  $T_r$ . Среди импульсов, распространяющихся под фиксированным углом к направлению внешней деформации, скорость алгебраически убывающего импульса наиболее сильно отличается от линейной. Абсолютная величина его временной площади максимальна и равна  $4\pi$ .

В конце предыдущего раздела было показано, что система (15)–(17) эквивалентна возникаю-





**Рис. 3.** Временные зависимости поля деформации (а) и населенности основного уровня (б) при  $\mathcal{E}_m = 2\mathcal{E}^{(0)}/\cos(0.8\pi/3)$ ,  $W_2 = 1$  для различных углов распространения:  $\alpha = 0.4\pi/3$  (жирные линии),  $\alpha = 1.1\pi/3$  (тонкие линии), и в симметричном случае (штриховые кривые); алгебраически убывающее решение с  $\alpha = 0.5 \arccos[0.5/\cos(2.2\pi/3)]$  — пунктирные линии

щим в оптике редуцированным уравнениям Максвелла–Блоха с постоянными дипольными моментами (19). В этой связи необходимо отметить, что существование рационально убывающих электромагнитных импульсов является отличительной чертой несимметричных сред. Так, алгебраический однокомпонентный предельно короткий импульс был найден в работах [10, 11], а двух- и однокомпонентные однопараметрические ультракороткие импульсы были построены в работах [14, 16].

Графики поля деформации и населенности нижнего уровня импульса (20), (21) при различных  $\alpha$  и одинаковом  $\mathcal{E}_m$  представлены на рис. 3. Там же изображен алгебраически убывающий однополярный импульс (24), (25).

Обсудим особенности поведения среды при прохождении импульсов различной полярности. Из формулы (21) следует, что если  $\mathcal{E}_m \mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) > 0$ , то наибольшее изменение населенности нижнего уровня достигается в нефизическом пределе  $|\mathcal{E}_m| \rightarrow \infty$  ( $T_p \rightarrow 0$ ), как и в симметричном случае. При этом скорость импульса стремится к линейной скорости акустической волны. Более интересная ситуация имеет место при  $\mathcal{E}_m \mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha) < 0$ . Здесь среда возбуждается сильнее, поскольку импульсы динамически уменьшают частоту перехода (см. (16)). Кривые на рис. 3б с  $\alpha = 0.4\pi/3$  и  $\alpha = 1.1\pi/3$ , которые соответствуют импульсам противоположной полярности, иллюстрируют это утверждение. Если  $|\text{ctg}(2\alpha)| \leq 1$ , то наиболь-

шее изменение населенности вызывают импульсы конечной амплитуды, у которых

$$\mathcal{E}_m = -\frac{2\mathcal{E}^{(0)}}{\cos(2\alpha)}.$$

В этом случае коэффициент при  $\rho'_{12}$  в правой части уравнения (16) меняется от  $i\omega_0$  на краях импульса до  $-i\omega_0$  в его центре. Можно сказать, что данные импульсы динамически сдвигают уровни энергии таким образом, что частота перехода будет в среднем на их длительности равна нулю. Именно по этой причине среда испытывает наиболее сильное возбуждение, и основной уровень может оказаться полностью незаселенным в центре импульса (см. график с  $\alpha = 1.1\pi/3$  на рис. 3б). Изменение скорости распространения таких импульсов оказывается меньшим по сравнению, например, с алгебраически убывающими импульсами. Если  $|\text{ctg}(2\alpha)| > 1$ , то возбуждают среду в наибольшей степени алгебраически убывающие импульсы, скорость которых, как отмечалось выше, сильнее всего отличается от линейной. В этом состоит еще одна особенность взаимодействия продольных акустических импульсов с парамагнитными примесями.

Простейшее нестационарное решение уравнений (15)–(17) можно построить с помощью преобразования Дарбу [31]. Применяя его дважды на нулевом фоне, получим или решение, описывающее нелинейное взаимодействие изученных выше однополярных импульсов, или так называемый бризероподобный

импульс [16]. В последнем случае для поля деформации имеем следующее выражение:

$$\mathcal{E} = -\frac{4\hbar}{G} \frac{\partial}{\partial t} \times \arctg \left[ \frac{4 \operatorname{ctg}(2\alpha) a_I \Omega \operatorname{sh} B_R + Z_+ T^{-1} \cos B_I}{Z_- \Omega \operatorname{ch} B_R - 4 \operatorname{ctg}(2\alpha) a_R T^{-1} \sin B_I} \right]. \quad (26)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} B_R &= \omega_0 T^{-1} \sin(2\alpha) \left( t - \frac{z}{v_g} \right), \\ B_I &= \omega_0 \Omega \sin(2\alpha) \left( t - \frac{z}{v_{ph}} \right), \\ \Omega &= a_R \frac{Z_+}{Z}, \quad T^{-1} = a_I \frac{Z_-}{Z}, \\ Z &= 4(a_R^2 + a_I^2), \quad Z_{\pm} = Z \pm \operatorname{ctg}^2(2\alpha). \end{aligned}$$

Вещественные безразмерные постоянные  $a_R$  и  $a_I$  являются свободными параметрами бризероподобного импульса, а его групповая  $v_g$  и фазовая  $v_{ph}$  скорости определяются соотношениями

$$v_g = a \left( 1 - 2(Z_+^2 + 4Z + 16a_R^2 \operatorname{ctg}^2(2\alpha)) \times \frac{ZnG^2W_0}{A\hbar\omega_0\rho a^2} \right)^{-1}, \quad (27)$$

$$v_{ph} = a \left( 1 + 2(Z_-^2 - 4Z - 16a_I^2 \operatorname{ctg}^2(2\alpha)) \frac{ZnG^2W_0}{A\hbar\omega_0\rho a^2} \right)^{-1},$$

где

$$A = Z_+^4 + 8Z_+^2(Z - 4a_R^2 \operatorname{ctg}^2(2\alpha)) + 16(1 - 4a_R^2)(Z^2 - 4a_R^2 \operatorname{ctg}^4(2\alpha)).$$

Выражения для элементов матрицы плотности громоздки и поэтому здесь не приводятся.

Нетрудно видеть, что при  $|\Omega T| \gg 1$  бризероподобный импульс (26) переходит в солитон огибающей (ультракороткий импульс). Его временная площадь в общем случае не равна нулю:

$$A_b \equiv \frac{|G|}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E} dt = -8 \operatorname{sign}(\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)) \times \arctg \left[ |T \operatorname{ctg}(2\alpha)| \frac{a_I^2}{a_R^2 + a_I^2} \right]. \quad (28)$$

Этим данное решение отличается от обычного бризерного импульса. Существование решения такого типа (ненулевого бризера) было обнаружено при

численном исследовании системы редуцированных уравнений Максвелла–Блоха с постоянными дипольными моментами (19) в работе [15]. Асимметрия бризероподобных импульсов проявляется в том, что знаки  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$  и временной площади  $\mathcal{E}$  противоположны. За счет этого эффективная частота перехода будет понижаться при прохождении такого импульса (см. уравнение (16)).

Физический смысл свободных параметров бризероподобного импульса не столь прозрачен, как в случае бризеров нулевой площади. Как следует из выражений для  $B_R$ ,  $B_I$ ,  $Z_{\pm}$  и  $Z$ , характерные длительность  $\tau_b$  и частота  $\omega$  бризерного спектра связаны с  $a_R$  и  $a_I$  соотношениями

$$\tau_b^{-1} \equiv \omega_0 T^{-1} \sin(2\alpha) = \omega_0 a_I \sin(2\alpha) \left( 1 - \frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha)}{4(a_R^2 + a_I^2)} \right),$$

$$\omega \equiv \omega_0 \Omega \sin(2\alpha) = \omega_0 a_R \sin(2\alpha) \left( 1 + \frac{\operatorname{ctg}^2(2\alpha)}{4(a_R^2 + a_I^2)} \right).$$

В симметричном случае, когда импульс только возбуждает квантовые переходы, имеем  $\omega_0 a_I = 1/\tau_b$ ,  $\omega_0 a_R = \omega$ , т. е.  $a_R$  и  $a_I$  пропорциональны соответственно обратной длительности бризера и его центральной частоте. Если же симметрия отсутствует и роль бризера состоит как в возбуждении квантовых переходов, так и динамическом сдвиге их частоты, длительность  $\tau_b$  и частота  $\omega$  определяются по отдельности обоими параметрами  $a_R$  и  $a_I$ .

Следует отметить, что в случае термодинамически равновесной среды скорость однополярного импульса, а также групповая скорость бризероподобного импульса меньше линейной скорости продольного звука (см. выражения (22) и (27)), чего, вообще говоря, нельзя сказать о фазовой скорости бризера.

Изучим различные предельные случаи бризероподобного импульса. Предположим, что асимметрия мала:  $|\cos(2\alpha)| \ll 1$ . Тогда из формулы (26) получим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \cos(2\alpha) \mathcal{E}_1, \quad (29)$$

где

$$\mathcal{E}_0 = 8\mathcal{E}^{(0)}\Omega \frac{\Omega T \operatorname{ch} B'_R \sin B'_I + \operatorname{sh} B'_R \cos B'_I}{\Omega^2 T^2 (\operatorname{ch}(2B'_R) + 1) + \cos(2B'_I) + 1}, \quad (30)$$

$$\mathcal{E}_1 = -8\mathcal{E}^{(0)}\Omega^2 T^2 \times \frac{(\operatorname{ch}(2B'_R) + 1)(\cos(2B'_I) + 1)}{(\Omega^2 T^2 (\operatorname{ch}(2B'_R) + 1) + \cos(2B'_I) + 1)^2}, \quad (31)$$

$$B'_R = \omega_0 T^{-1} \left( t - \frac{z}{v'_g} \right), \quad B'_I = \omega_0 \Omega \left( t - \frac{z}{v'_{ph}} \right),$$

$$v'_g = a \left( 1 - \frac{T^2((\Omega^2 + 1)T^2 + 1)}{((\Omega + 1)^2T^2 + 1)((\Omega - 1)^2T^2 + 1)} \times \frac{nG^2W_0}{2\hbar\omega_0\rho a^2} \right)^{-1},$$

$$v'_{ph} = a \left( 1 + \frac{T^2((\Omega^2 - 1)T^2 + 1)}{((\Omega + 1)^2T^2 + 1)((\Omega - 1)^2T^2 + 1)} \times \frac{nG^2W_0}{2\hbar\omega_0\rho a^2} \right)^{-1}.$$

В правой части соотношения (29) мы ограничились первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора по  $\cos(2\alpha)$ . Здесь безразмерные коэффициенты  $\Omega$  и  $T$ , характеризующие основную несущую частоту и длительность импульса, можно считать его свободными параметрами.

Выражения (30) и (31) показывают, что модуль преобразования Фурье  $\mathcal{E}_0$  имеет максимумы на нечетных гармониках основной частоты  $\Omega\omega_0$ , а модуль преобразования Фурье  $\mathcal{E}_1$  — на нулевой гармонике и других четных. При этом побочные гармоники сильнее локализованы в центре импульса по сравнению с основной.

Для иллюстрации сказанного выше рассмотрим более подробно бризеры, имеющие высокочастотное заполнение ( $|\Omega T| \gg 1$ ). Из формул (30), (31) имеем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{4\mathcal{E}^{(0)} \sin B'_I}{T \operatorname{ch} B'_R}, \quad (32)$$

$$\mathcal{E}_1 = -2\mathcal{E}^{(0)} \left( \frac{2 \cos B'_I}{\Omega T \operatorname{ch} B'_R} \right)^2. \quad (33)$$

Преобразования Фурье выражений (32) и (33),

$$\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_{0,1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\nu t) \mathcal{E}_{0,1} dt,$$

дают

$$\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_0) = -2i\pi \frac{\hbar}{G} \exp\left(-\frac{iT\theta_R\nu}{\omega_0}\right) \times \left\{ \frac{\exp[i(\theta_I - \Omega T\theta_R)]}{\operatorname{ch}[\pi T(\nu + \omega_0\Omega)/2\omega_0]} - \frac{\exp[i(\Omega T\theta_R - \theta_I)]}{\operatorname{ch}[\pi T(\nu - \omega_0\Omega)/2\omega_0]} \right\},$$

$$\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_1) = -2\pi \frac{\hbar \exp(-iT\theta_R\nu/\omega_0)}{G\omega_0\Omega^2} \left\{ \frac{2\nu}{\operatorname{sh}[\pi T\nu/2\omega_0]} + (\nu + 2\omega_0\Omega) \frac{\exp[2i(\theta_I - \Omega T\theta_R)]}{\operatorname{sh}[\pi T(\nu/2\omega_0 + \Omega)]} + (\nu - 2\omega_0\Omega) \frac{\exp[2i(\Omega T\theta_R - \theta_I)]}{\operatorname{sh}[\pi T(\nu/2\omega_0 - \Omega)]} \right\},$$

где  $\theta_R$  и  $\theta_I$  — значения  $B_R$  и  $B_I$  при  $t = 0$ .

Отсюда следует, что максимумы модулей  $\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_0)$  и  $\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_1)$  достигаются на частотах соответственно  $\nu = \omega_0\Omega$  и  $\nu = 0, 2\omega_0\Omega$ . При этом ширина линий спектра равна  $\omega_0 T^{-1}$ , а максимальные значения  $|\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E}_1)|$  пропорциональны  $\Omega^{-2} T^{-1}$ . Как следствие, эффективность генерации побочных гармоник должна расти с уменьшением несущей частоты падающего на парамагнитный кристалл акустического импульса или с увеличением статической деформации кристалла. Такой же эффект должен иметь место при уменьшении длительности входящего в среду импульса вследствие уширения его спектральной линии.

Теперь вернемся к рассмотрению бризероподобного импульса в общем случае. Графики поля деформации  $\mathcal{E}$ , населенности основного уровня и модуля преобразования Фурье  $\mathcal{F}(\nu, \mathcal{E})$  при различных углах  $\alpha$  и фиксированных значениях  $\omega$  и  $\tau_b$  представлены на рис. 4. Видно, что с ростом  $|\operatorname{ctg}(2\alpha)|$  положение центрального максимума по оси  $\nu$  спектра Фурье смещается в красную область и одновременно максимальные значения побочных гармоник в спектре увеличиваются. Это подтверждает сделанные выше выводы об эффективности генерации побочных гармоник. Поскольку данный процесс является нелинейным, необходимо также учитывать поведение среды.

Среди представленных на рис. 4 случаев наибольшее возбуждение среды вызывает импульс с  $\alpha = \pi/14$  (см. рис. 4а), у которого основная несущая частота оказывается самой маленькой по сравнению с резонансной частотой  $\omega_0$ . Наименьшее возбуждение среды происходит в симметричном случае, хотя здесь основной максимум фурье-спектра даже больше, чем у импульса с  $\alpha = \pi/8$  (ср. соответствующие кривые на рис. 4а и 4б). Такое поведение является, очевидно, следствием ненулевой площади бризероподобного импульса, т.е. присутствием в спектре нулевой гармоники. Благодаря ей такой импульс сдвигает частоту перехода в красную область и может эффективно оказаться в резонансе со средой. С дальнейшим увеличением  $|\operatorname{ctg}(2\alpha)|$  частотный сдвиг оказывается настолько велик, что импульс снова оказывается не в резонансе и возбуждение среды становится меньше. Если основная несущая частота импульса больше резонансной, то динамический сдвиг частоты только увеличивает отстройку от резонанса, так что импульс практически не вызывает квантовых переходов. По этой причине побочные гармоники таким импульсом порождаться не будут. Данные обстоятельства могут быть исполь-

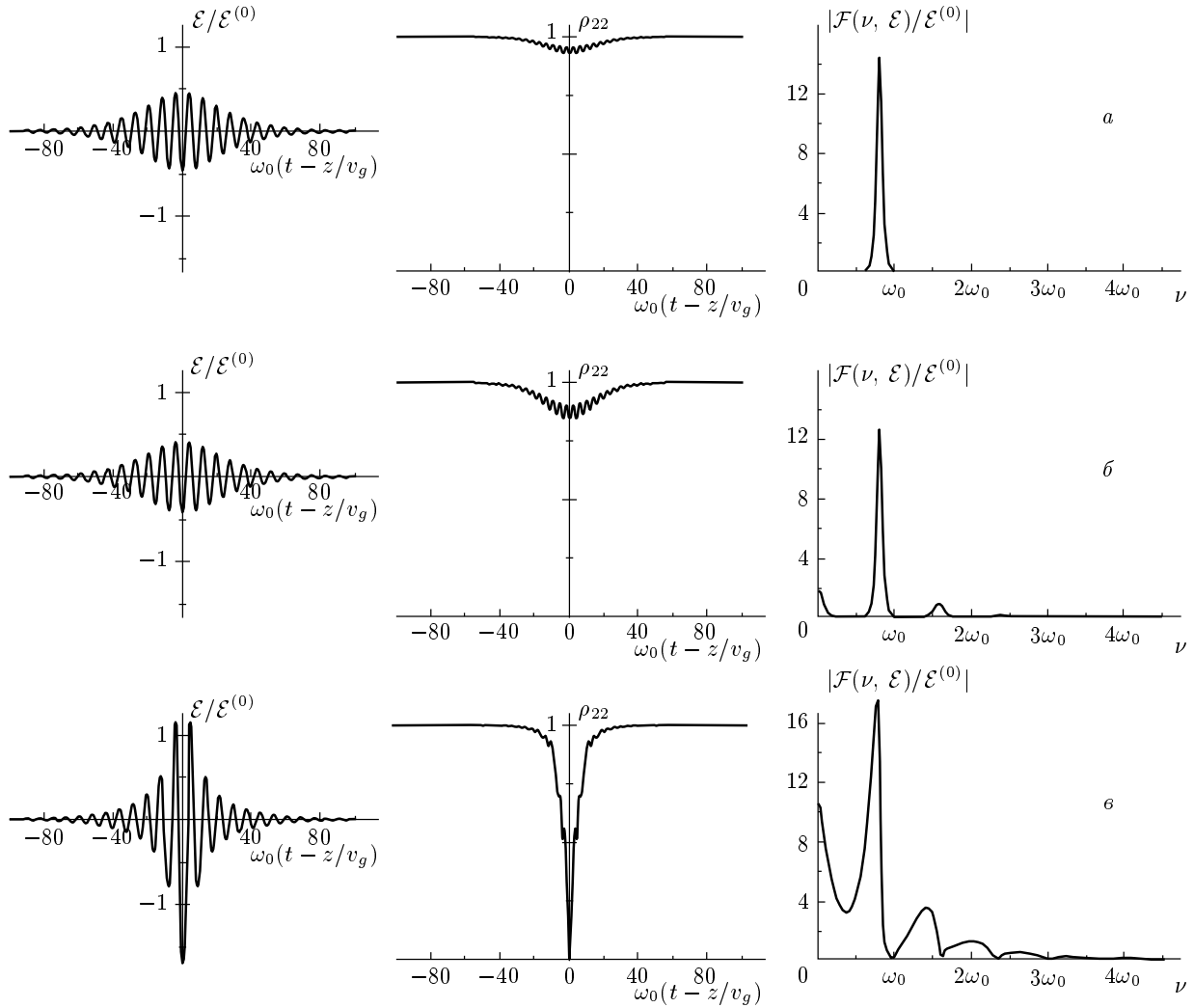


Рис. 4. Профили поля деформации, населенности основного уровня и модуля преобразования Фурье при  $\omega = 0.8\omega_0$ ,  $\tau_b = 20/\omega_0$  для  $\alpha = \pi/4$  (а, симметричный случай),  $\pi/8$  (б),  $\pi/14$  (в)

зованы для получения высокочастотных акустических импульсов.

Так же, как в случае однополярных импульсов, существует рационально убывающий бризероподобный импульс. Действительно, в пределе  $T \rightarrow \infty$  (или  $2(a_R + ia_I) \rightarrow \text{ctg}(2\alpha) \exp(i\varphi)$ ) из формулы (26) получим

$$\mathcal{E} = -2\mathcal{E}^{(0)} \sin(4\alpha) \cos \varphi \text{ctg} \varphi \times \frac{\xi_1 \sin^2 \varphi \cos \xi_2 + (\cos^2 \varphi - 2) \sin \xi_2 + 2 \sin \varphi}{(\xi_1 \sin \varphi + \cos \xi_2)^2 + \text{ctg}^2 \varphi (1 - \sin \varphi \sin \xi_2)^2},$$

где

$$\xi_1 = \omega_r \left( t - \frac{z}{\tilde{v}_g} \right), \quad \xi_2 = \omega_r \left( t - \frac{z}{\tilde{v}_{ph}} \right),$$

$$\tilde{v}_g = a \left( 1 - \frac{(\omega_0^2 + \omega_r^2) \sin^2(2\alpha)}{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2} \frac{n\omega_0 G^2 W_0}{2\hbar \rho a^2} \right)^{-1},$$

$$\tilde{v}_{ph} = a \left( 1 - \frac{\sin^2(2\alpha)}{\omega_0^2 - \omega_r^2} \frac{n\omega_0 G^2 W_0}{2\hbar \rho a^2} \right)^{-1}.$$

Произвольным параметром данного решения может быть выбрана постоянная  $\varphi$ , связанная с основной несущей частотой  $\omega_r$  соотношением  $\omega_r = \omega_0 \cos(2\alpha) \cos \varphi$ .

Величина  $\omega_r$  для такого бризера всегда меньше резонансной частоты  $\omega_0$ , а модуль временной площади равен  $4\pi$ . Как и у импульса, изображенного на рис. 4в, положение максимумов гармоник на оси  $\nu$  в спектре Фурье рационально убывающего бризера сильно сдвинуто в красную область, и пики имеют явную асимметрию.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье мы рассмотрели распространение продольных акустических импульсов в кубическом кристалле, содержащем парамагнитные примеси с эффективным спином  $S = 1$  и подвергнутом действию постоянной и однородной внешней деформации. Упругий импульс в такой среде не только вызывает переходы между квантовыми уровнями, но также сдвигает за счет квадрупольного штарк-эффекта частоты переходов. По этой причине исследование проводилось вне рамок приближения медленно меняющихся огибающих.

На основе полуклассического подхода выведена самосогласованная система уравнений для нелинейной динамики поля деформации и эффективных спинов. При этом направление внешней деформации выбрано параллельным одной из осей симметрии четвертого порядка парамагнитного кристалла, а направление распространения акустического импульса произвольно. С использованием унитарного преобразования и приближения однонаправленного распространения, которые позволяют редуцировать матричную размерность и порядок производных в волновом и материальных уравнениях, нами получена система (15)–(17). Показано, что эта система сводится к уравнениям, описывающим эволюцию однокомпонентных электромагнитных импульсов в двухуровневой среде с постоянными дипольными моментами. Таким образом, установлена еще одна связь между оптическими и акустическими явлениями. В отличие от рассмотрения оптических задач коэффициент, играющий роль постоянного дипольного момента, может здесь принимать любые значения в зависимости от угла  $\alpha$  между направлениями статической деформации  $\mathcal{E}^{(0)}$  кристалла и распространения акустического импульса.

Анализ решений системы (15)–(17) в виде стационарных однополярных и бризероподобных импульсов показал, что имеет место асимметрия по полярности, которая зависит от типа внешнего воздействия на кристалл (растяжение или сжатие) и направления распространения импульса. Так, для однополярных импульсов, знак поля деформации которых противоположен знаку  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$ , существуют ограничения на амплитуду, длительность и временную площадь. По этой причине акустическая прозрачность для таких импульсов имеет пороговый характер. В случае бризероподобных импульсов асимметрия проявляется в том, что знаки  $\mathcal{E}^{(0)} \cos(2\alpha)$  и временной площади поля деформации противоположны. Как следствие, частота перехода динамичес-

ки сдвигается в красную область при прохождении таких импульсов. Из-за этого наиболее эффективно порождать высшие гармоники могут лишь импульсы, основная несущая частота которых меньше резонансной. Примечательно, что временная площадь бризероподобных импульсов имеет тот знак, при котором как раз наблюдается пороговый характер акустической прозрачности у однополярных импульсов. Обнаруженные особенности акустической прозрачности могут быть использованы для получения предельно коротких импульсов деформации и генерации высших акустических гармоник.

Следует отметить, что квантовые переходы внутри зеемановских мультиплетов парамагнитных ионов обладают, вообще говоря, существенным неоднородным уширением. Относительная неоднородная ширина спектральных линий может лежать в интервале от единиц до десятков процентов от величины соответствующих частот переходов [2]. Учет неоднородного уширения может пролить свет на теорему площадей в случае несимметричных сред как для задач оптики, так и акустики. Важной особенностью изученных здесь солитонных и бризерных импульсных решений является зависимость их полной временной площади от амплитуды и других параметров (см. выражения (23) и (28)). Знание теоремы площадей может оказаться чрезвычайно важным для ответа на вопрос об устойчивости данных импульсов. Не менее актуальными представляются исследования, связанные с влиянием поперечных возмущений на динамику рассмотренных в настоящей работе решений, включая эффекты самодифракции.

Заметим, что вследствие существенного отличия линейных скоростей продольного и поперечного звука мы не учитываем эффекты, связанные с влиянием поперечной акустической волны. Можно показать, что уравнения (15)–(17) также описывают в некоторых случаях динамику сугубо поперечных акустических импульсов в данной задаче. Однако, чтобы не загромождать статью различными частными случаями, мы ограничили рассмотрение только продольными импульсами. С другой стороны, данное замечание подчеркивает большее разнообразие эффектов акустической нелинейной прозрачности на системе квантовых объектов, по сравнению с соответствующими оптическими явлениями.

Представленные здесь исследования выявляют отмеченную во Введении и в ряде предыдущих работ [1–5, 18, 24, 26] общность явлений нелинейной резонансной оптики и физической акустики. Данная параллель прослеживается по сегодняшний день,

начиная с середины шестидесятых годов прошлого столетия. Есть все основания надеяться, что и в дальнейшем параллельные исследования оптических и акустических когерентных процессов будут стимулировать и взаимно дополнять друг друга, обнаруживая как взаимное сходство, так и различия.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16422а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. S. L. McCall and E. L. Hahn, Phys. Rev. Lett. **18**, 908 (1967); Phys. Rev. **183**, 457 (1969).
2. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
3. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974).
4. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).
5. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1997).
6. L. W. Casperson, Phys. Rev. A **57**, 609 (1998).
7. A. Brown and W. J. Meath, Phys. Rev. A **63**, 013403 (2000).
8. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, Physica D **138**, 134 (2000).
9. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **121**, 1012 (2002).
10. A. I. Maimistov and J.-G. Caputo, Phys. Lett. A **296**, 34 (2002).
11. А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, Опт. и спектр. **94**, 275 (2003).
12. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **124**, 803 (2003).
13. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, Proc. SPIE **5402**, 72 (2003); С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Изв. РАН, сер. физ. **68**, 1280 (2004).
14. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **127**, 289 (2005); Изв. РАН, сер. физ. **69**, 1132 (2005).
15. С. О. Елютин, ЖЭТФ **128**, 17 (2005).
16. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, КЭ **35**, 701 (2005).
17. С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев, *Электронный парамагнитный резонанс соединений элементов промежуточных групп*, Наука, Москва (1972).
18. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
19. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1963).
20. О. Андерсон, в сб. *Физическая акустика*, т. 3, ч. Б, под ред. У. Мэзона, Мир, Москва (1968).
21. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
22. E. V. Tucker, Phys. Rev. **143**, 264 (1966).
23. В. Э. Гусев, А. А. Карабутов, *Лазерная оптоакустика*, Наука, Москва (1991).
24. С. А. Ахманов, В. Э. Гусев, УФН **162**, 3 (1992).
25. В. А. Красильников, В. В. Крылов, *Введение в физическую акустику*, Наука, Москва (1984).
26. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **118**, 20 (2000).
27. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A: Math. Gen. **6**, 1337 (1973).
28. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
29. Дж. Л. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, Москва (1983).
30. Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.), *Солитоны*, Мир, Москва (1983).
31. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1991).