ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 5, стр. 863–870

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СПИНОВЫХ ВОЛН В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ГАЗАХ В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР

Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин [*]

Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 декабря 2005 г.

Выведено точное в больцмановском (бинарном) приближении кинетическое уравнение для поляризованного парамагнитного газа. Уравнение записано в компактном виде и применимо как для ферми-, так и для бозе-газа в широком диапазоне температур, пока остается применимым больцмановское приближение. С помощью полученного уравнения исследованы условия распространения спиновых волн в поляризованных ферми- и бозе-газах. Выведен универсальный критерий распространения слабозатухающих спиновых волн в широком диапазоне температур. Критерий сводится к условию, чтобы вещественные части амплитуд рассеяния частиц (или T-матриц) на нулевой угол значительно превышали их мнимые части. Выведены дисперсионные уравнения для спиновых волн при высоких и низких температурах газа и показано, что распространение спиновых волн возможно в обоих этих предельных случаях.

PACS: 34.10.+x

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможность распространения спиновых волн в поляризованных парамагнитных газах теоретически рассматривалась в работах Башкина [1] и Лалё с соавторами [2] в начале 80-х годов. Ранее вопрос о спиновых колебаниях ферми-жидкости, находящейся в магнитном поле, рассматривался в работе Силина [3]. Экспериментально спиновые волны в поляризованных газах были обнаружены в ^{3}He, в смесях ^{3}He–^{4}He и в атомарном водороде в середине 80-х годов. (см. обзоры [4, 5] и ссылки в них). В последние годы вновь возник интерес к спиновым волнам в парамагнитных, но уже ультрахолодных газах (вплоть до бозе-конденсации), помещенных в магнитные ловушки. В этих условиях был обнаружен ряд новых явлений в парамагнитных газах, в том числе аномально сильные спиновые волны в парах рубидия, приводящие к практически полному пространственному разделению частиц с противоположно направленными спинами в магнитной ловушке [6]. В данном случае речь идет о невырожденной системе уровней, поскольку поляризуются подуровни сверхтонкой структуры основного состояния атома рубидия, в отличие от атомов ^{3}He и водорода. Отметим, что разделение частиц с противоположно направленными спинами наблюдалось ранее в жидких растворах ^{3}He в ^{4}He и в чистом ^{3}He [7]. Аномальная картина спиновых волн в парах рубидия вызвала значительный интерес. Появилось большое количество работ, посвященных интерпретации этого явления. Наиболее подробно картина спиновых волн в охлажденных поляризованных газах рассматривается в обзоре [5].

Теоретическое описание спиновых волн в парамагнитных газах требует точного вычисления интеграла столкновений в уравнении Больцмана с учетом спиновых степеней свободы сталкивающихся атомов. При этом обычно используются методы, разработанные Боголюбовым [8], Вальдманом [9] и Снайдером [10]. Однако использование этих методов для парамагнитных газов приводит к громоздким и плохо обозримым выражениям для интеграла столкновений, сильно затрудняющим исследование частоты и затухания спиновых волн в широком диапазоне температур газа. Поэтому для конкретных вычислений динамики спиновых волн обычно используются

[*] E-mail: rubin@sci.lebedev.ru

модельные варианты интеграла столкновений, чаще всего — модель изотропного s-рассеяния [5, 11].

В настоящей работе методом, основанным на цепочке уравнений Боголюбова, получено точное в больцмановском (бинарном) приближении кинетическое уравнение для спин-поляризованных газов с учетом свойств симметрии тождественных взаимодействующих частиц (в работах [9, 10] симметрия частиц и поляризация газа не учитывались). Полученное уравнение приведено к компактному виду и применимо в широком интервале температур — от высоких, когда тождественность частиц несущественна и преобладает рассеяние вперед, до низких, когда тождественность частиц важна, а рассеяние становится изотропным. Предполагается, что температура газа выше температуры квантового вырождения. С помощью вычисленного интеграла столкновений получен универсальный критерий распространения слабозатухающих спиновых волн в широком интервале температур.

В наших предыдущих работах [12, 13] компактная запись интеграла столкновений не была получена, в результате чего частота и затухание спиновых волн были вычислены только для области высоких температур парамагнитного поляризованного газа.

2. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ В ПАРАМАГНИТНОМ ГАЗЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Отметим, что спиновые волны в газах хотя и исследуются при достаточно низких температурах (например, для паров рубидия температура составляла примерно 0.6 мкК), в этих условиях все еще остается применимым больцмановское приближение [5]. Это обстоятельство позволяет ограничиться учетом только бинарных столкновений. При этом учитывается симметрия тождественных частиц в процессах столкновений. Метод вывода интеграла столкновений основан на цепочке Боголюбова и был использован нами ранее [12].

Состояние частиц удобно описывать с помощью функции Вигнера $f_{\alpha\beta}(x,p)$. Индексы (обозначаемые греческими буквами) нумеруют внутренние состояния атома, в данном случае речь идет о проекции спина на ось квантования. Столкновения рассматриваются в системе центра инерции частиц. Ради краткости представим интеграл столкновений в виде суммы двух слагаемых, описывающих «приход» $I^i_{\alpha\beta}(p,x)$ и «уход» $I^o_{\alpha\beta}(p,x)$ частиц с заданным импульсом p и индексами внутреннего состояния α,β в точке x:

$$I_{\alpha\beta}(p,x) = I^i_{\alpha\beta}(p,x) + I^o_{\alpha\beta}(p,x),$$

где

$$\begin{aligned} I^o_{\alpha\beta}(p,x) &= i(2\pi)^3\hbar^2 \times \\ &\times \int dp_1 \left[T_{\alpha\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right) f_{\sigma\lambda}(p_1) f_{\theta\beta}(p) - \right. \\ &\left. - T^*_{\beta\lambda\theta\sigma}\left(\frac{p-p_1}{2},\frac{p-p_1}{2}\right) f_{\lambda\sigma}(p_1) f_{\alpha\theta}(p)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} I^i_{\alpha\beta}(p,x) &= -16\pi^3\hbar^2 \int f_{\lambda\tau}(x,p_1) f_{\lambda'\tau'}(x,p_2) \times \\ &\times T_{\alpha\gamma\lambda\lambda'}(P,P') T^*_{\beta\gamma\tau\tau'}(P,P') \times \\ &\times \left[-\pi\left(\delta\left(E[\alpha,\gamma] - E[\lambda,\lambda'] + \frac{P^2-P'^2}{4m}\right) + \right.\right. \\ &\left. + \delta\left(E[\beta,\gamma] - E[\tau,\tau'] + \frac{P^2-P'^2}{4m}\right)\right) + \\ &+ i\left(\frac{\mathbf{P}}{-E[\beta,\gamma] + E[\tau,\tau'] - \dfrac{P^2-P'^2}{4m}} + \right. \\ &\left.\left. + \frac{\mathbf{P}}{E[\alpha,\gamma] - E[\lambda,\lambda'] + \dfrac{P^2-P'^2}{4m}}\right)\right] dp_1\, dp_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $T_{\alpha\beta\alpha'\beta'}\left(\dfrac{p-p_1}{2},\dfrac{p'-p'_1}{2}\right)$ — матричный элемент T-матрицы, описывающий столкновение одинаковых атомов $\{\alpha,p\}+\{\beta,p_1\} \Rightarrow \{\alpha',p_2\}+\{\beta',p_3\}$; по повторяющимся спиновым индексам подразумевается суммирование; символ $\mathbf{P}$ обозначает интеграл в смысле главного значения, $E[\alpha,\beta] = E_\alpha + E_\beta$ — сумма внутренних энергий атомов, звездочкой обозначается комплексное сопряжение,

$$P = p - \frac{p_1+p_2}{2}, \quad P' = \frac{p_1-p_2}{2}. \tag{3}$$

Закон сохранения импульса здесь учтен, вследствие чего в (3) не фигурирует вектор импульса p_3 ($p+p_1 = p_2+p_3$). В дальнейшем ради простоты принято $\hbar = 1$.

Отметим, что введенная выше T-матрица может относиться как к бозонам, так и к фермионам. Соответствующие свойства симметрии таковы:

$$T_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(p,q) = \pm T_{\alpha\beta\delta\gamma}(p,-q) = \pm T_{\beta\alpha\gamma\delta}(-p,q). \tag{4}$$

Здесь знаки «+» (верхние) относятся к бозонам, а «−» (нижние) — к фермионам.

В случае вырождения уровней ($E_\alpha = E_\beta$) полюсный член обращается в нуль. Однако, как уже упоминалось выше, в настоящее время активно изучаются спиновые волны большой амплитуды на подуровнях сверхтонкой структуры паров рубидия, т. е. в невырожденной системе. Отметим, что в такой системе закон сохранения электронного спина нарушается из-за сверхтонкого взаимодействия, вследствие чего должен учитываться полюсный член в уравнении Больцмана. Особенно он заметен при низких температурах, когда кинетическая энергия становится меньше энергии расщепления уровней, как это имеет место для паров $^{87}\mathrm{Rb}$ (см. [5]). Однако в настоящей работе полюсный член в интеграле столкновений рассматриваться не будет в предположении, что затухание спина связано в основном с диффузией.

Функция Вигнера для спин-поляризованного газа может быть разложена на скалярную $\varphi(p,x)$ и векторную $M_i(p,x)$ части и имеет вид

$$f_{\alpha\beta}(p,x) = \frac{C(p)}{2}[\varphi(p,x)\delta(\alpha,\beta) + \sigma^i_{\alpha\beta} M_i(p,x)]. \quad (5)$$

Для вектора M принята нормировка $|M| \le 1$. При этой нормировке значение $|M| = 1$ соответствует полностью поляризованному газу. По повторяющимся векторным индексам подразумевается суммирование, для нумерации осей «лабораторной» декартовой системы координат наряду с буквами $\{x,y,z\}$ будет использоваться тройка цифр $\{1,2,3\}$; $C(p)$ — «больцмановская» нормировочная функция:

$$C(p) = \frac{1}{4\pi(mT)^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right), \quad (6)$$

где T — температура, m — масса атома. Здесь ради удобства принята единичная нормировка функции C:

$$\int C(p)\,d^3p = 1$$

(там, где это необходимо, концентрация частиц $n(p)$ будет включена в формулы).

В поляризованном газе вектор $M_r(p,x)$ имеет вид

$$M_r(p,x) = M\delta_{r3} + \mu_r(p,x). \quad (7)$$

Здесь предполагается, что вектор внешней поляризации M постоянен и направлен вдоль оси z, а $\mu_r(p,x)$ — малое возмущение вектора поляризации. При рассмотрении динамики спиновых волн малой амплитуды удобно иметь дело с циклическими компонентами вектора μ_r:

$$\mu_\pm = \mu_x \pm i\mu_y = \mu_1 \pm i\mu_2, \quad (8)$$

поскольку именно для них получаются замкнутые уравнения.

Рассмотрим приведенные выше общие формулы (1) и (2) для циклической компоненты поляризации $\mu_-(p,x) = \mu_x(p,x) - i\mu_y(p,x)$ (уравнение для $\mu_+(p,x)$ можно получить с помощью комплексного сопряжения исходного уравнения). Для конкретных вычислений интеграла столкновений удобно использовать обозначения 1 и 2 для проекций спина соответственно вдоль оси квантования и в противоположном направлении. Теперь член ухода для $\mu_-(p)$ можно записать двумя внешне различными, но на самом деле эквивалентными способами. Первая форма записи отличается компактностью и содержит только мнимые части T-матриц двух типов столкновений при рассеянии на нулевой угол (с параллельными и с противоположно направленными спинами сталкивающихся атомов):

$$I^o[\mu_-(p)] = 32\pi^3 \int C(p)C(p_1)[(\operatorname{Im}T_{1111}(P',P') + \operatorname{Im}T_{1212}(P',P'))\mu_-(p) + (\operatorname{Im}T_{1111}(P',P') - \operatorname{Im}T_{1212}(P',P'))\mu_-(p_1)]\,dp_1. \quad (9)$$

Вторая форма записи получается из первой с помощью оптической теоремы [14]:

$$T_{\alpha\beta\tau\sigma}(p,q) - T^*_{\alpha\beta\tau\sigma}(p,q) = -2\pi i \times \int T^*_{\mu\nu\alpha\beta}(k,p)T_{\mu\nu\tau\sigma}(k,q)\delta[E(p)-E(k)]\,dk. \quad (10)$$

Тогда формулу (9) можно переписать следующим образом:

$$I^o[\mu_-(p)] = -32\pi^4 \int C(p)C(p_1)\delta[E(P')-E(Q)] \times (|T_{1111}(P',Q)|^2 + |T_{1221}(P',Q)|^2 + |T_{1212}(P',Q)|^2) \times \mu_-(p_1)dp_1\,dQ - 32\pi^4 \int C(p)C(p_1)\delta[E(P')-E(Q)] \times (|T_{1111}(P',Q)|^2 - |T_{1221}(P',Q)|^2 - |T_{1212}(P',Q)|^2)\mu_-(p)\,dp_1\,dQ. \quad (11)$$

Здесь $E(q) = q^2/4m$ — кинетическая энергия частиц в системе центра инерции (q — относительный импульс частиц, m — их приведенная масса). В формуле (11) фигурируют интегральные сечения рассеяния трех типов столкновений: помимо столкновений с одинаково направленными спинами присутствуют два типа столкновений с противоположно направленными спинами — с обменом и без обмена спинами.

Член «прихода» может быть записан следующим образом:

$$I^i\left[\mu_-(p)\right] = 32\pi^4 \times \\ \times \int dp_1 dp_2\, C(p_1)C(p_2)\delta\left[E(P') - E(P)\right] \times \\ \times \left\{(|T_{1111}(P,P')|^2 + |T_{1212}(P,P')|^2)\mu_-(p_1) - \right. \\ \left. - |T_{1212}(P,P')|^2\mu_-(p_2)\right\}. \quad (12)$$

Верхние индексы i и o, как и ранее, обозначают соответственно «приход» и «уход». Если газ поляризован, к интегралу столкновений добавляются пропорциональные M мнимые слагаемые:

$$I_M^o\left[\mu_-(p)\right] = -32iM\pi^3 \times \\ \times \int C(p_1)\big(\mathrm{Re}[T_{1111}(P',P') - T_{1212}(P',P')]\mu_-(p) - \\ - \mathrm{Re}\, T_{1221}(P',P')\mu_-(p_1)\big)\, dp_1, \quad (13)$$

$$I_M^i\left[\mu_-(p)\right] = \\ = 64iM\pi^4 \int C(p_1)C(p_2)\delta\left[E(P') - E(P)\right] \times \\ \times \mathrm{Im}[T_{1111}(P,P')T^*_{2121}(P,P')]\mu_-(p_1)\, dp_1\, dp_2. \quad (14)$$

Для краткости совокупность пространственных координат x среди аргументов $\mu(p)$ явно не указана. Кроме того, принято, что элементы $T_{1111}(P,Q)$ и $T_{2222}(P,Q)$ совпадают, поскольку рассматривается случай точного вырождения уровней основного состояния атома. При суммировании по спиновым индексам учитывается закон сохранения спина.

При вычислении матричных элементов T-матрицы использовался следующий базис волновых функций:

$$\psi(p,x) \approx \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)\left(\frac{1}{\hbar}\right)^{3/2},$$

$$\langle\psi(p,x)|\psi(p',x)\rangle = \frac{1}{\hbar^3}\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right).$$

Первое из этих равенств дает асимптотику волновой функции частицы вдали от области взаимодействия (столкновения) частиц. Нормировка волновых функций совпадает с принятой в работе Снайдера [10], а дифференциальное сечение рассеяния $s_{\alpha\beta}$ связано с матричным элементом T-матрицы следующим соотношением:

$$s_{\alpha\beta} = (2\pi)^4\mu^2\hbar^2|T_{\beta\alpha}|^2, \quad (15)$$

где μ — приведенная масса атомов и оператор T имеет размерность энергии.

Отметим, что формулы (9) и (11)–(14) дают компактную и в то же время точную в бинарном (больцмановском) приближении запись интеграла столкновений парамагнитного поляризованного газа для широкого интервала температур. При этом в T-матрице учитывается перестановочная симметрия взаимодействующих частиц (ферми- или бозе-газы). Отсюда, в частности, следует, что при низких температурах (индикатриса рассеяния сферически-симметрична) отсутствуют столкновения ферми-частиц с одинаково ориентированными спинами: матричные элементы $T_{1111} = T_{2222} = 0$ (см. Приложение).

Интеграл столкновений для циклических компонент спина в неполяризованном газе содержит только сечения всех типов столкновений, возможных в парамагнитном газе, которые вещественны и поэтому описывают лишь диффузию спина. Мнимая составляющая интеграла столкновений, пропорциональная степени поляризации газа ($M \neq 0$), ответственна за возникновение спиновых волн в поляризованных ферми- и бозе-газах, и именно ее структурой определяется частота и затухание спиновых волн.

Приведенные выше уравнения позволяют получить условие существования слабозатухающей спиновой волны в поляризованном больцмановском газе в широком диапазоне температур. Для формулировки этого условия можно использовать как T- матрицу, так и амплитуду рассеяния, которые связаны между собой простым соотношением:

$$A_{\alpha\beta} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2}T_{\alpha\beta}. \quad (16)$$

Существенно, что частота спиновой волны определяется вещественной частью амплитуд рассеяния на нулевой угол происходящих в системе столкновений, в то время как диффузионное затухание спиновой волны зависит только от сечений тех же самых процессов. В свою очередь, сечения выражаются через мнимые части амплитуд рассеяния на нулевой угол по оптической теореме. Отсюда вытекает универсальный критерий распространения слабозатухающей спиновой волны: вещественные части амплитуд рассеяния атомов на нулевой угол должны быть значительно больше соответствующих мнимых частей, т. е. амплитуды рассеяния должны быть в основном вещественными. Сделанное утверждение остается справедливым при любых температурах, пока может быть использовано больцмановское приближение. Отметим, что этот критерий заведомо выполняется как при очень низких температурах, когда преобладает s-рассеяние, так и при достаточно высоких температурах, когда применимо борновское приближение. Теперь рассмотрим дисперсионное уравнение для спиновых волн при высоких и низких температурах.

3. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Высокие температуры — это такие температуры, при которых дебройлевская длина волны атомов λ_B много меньше длины рассеяния r. Комнатные температуры попадают в этот диапазон, если имеются в виду столкновения тяжелых атомов (рубидий, цезий). При высоких температурах рассеяние резко анизотропно и направлено вперед, в узком конусе углов. В борновском приближении угол раствора индикатрисы рассеяния равен $\Delta\varphi = \lambda_B/r$. В дальнейшем для анализа дисперсионного уравнения спиновых волн удобно воспользоваться формой записи T-матрицы, инвариантной относительно выбора оси квантования:

$$T_{\alpha\beta\gamma\lambda}(P,P') = t(P,P')\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\lambda} \pm t(-P,P')\delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\gamma} + \theta(P,P')\sigma^i_{\alpha\gamma}\sigma^i_{\beta\lambda} \pm \theta(-P,P')\sigma^i_{\alpha\lambda}\sigma^i_{\beta\gamma}. \quad (17)$$

Здесь t и θ — скалярные функции импульсов, в символах «$\pm$» плюс относится к бозонам, а минус — к фермионам. Результаты вычисления конкретных матричных элементов T-матрицы с фиксированной осью квантования для фермионов и бозонов приведены в Приложении.

Для дальнейших оценок интеграла столкновений необходимо учесть анизотропный характер рассеяния атомов при высоких температурах: рассеяние в основном сосредоточено в узком конусе углов в направлении столкновения атомов [15]. В силу этого обстоятельства основную роль в интеграле столкновений играет мнимое слагаемое, пропорциональное вещественной части амплитуды рассеяния на нулевой угол. Второе мнимое слагаемое содержит интегрирование по углам, и поэтому при высоких температурах оказывается значительно меньше первого. Таким образом, уравнение для пространственно-временной фурье-компоненты $\mu_(\omega,k)$ принимает простой вид:

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}-\omega)\mu_{\{-c\}}(p) = -32M\pi^3 \times \int C(p_1)\,\mathrm{Re}\,\theta(P,P)\big[\mu_-(p)-\mu_-(p_1)\big]\,dp_1, \quad (18)$$

где ω и k — соответственно частота и волновой вектор волны.

Как видно из формулы (18), при высоких температурах ядро интегрального уравнения определяется только обменными столкновениями атомов с противоположно направленными спинами при рассеянии на нулевой угол и не зависит от статистики частиц. Полагая ядро интегрального уравнения постоянным, для частоты спиновой волны в гидродинамическом приближении ($kv \ll \nu_{ex}$) получим

$$\omega = -\frac{k^2\bar{v}^2}{3\nu_{ex}}. \quad (19)$$

Здесь

$$\nu_{ex} = 16M\pi^3\hbar^2 n\,\mathrm{Re}\,\theta(P,P), \quad (20)$$

n — плотность газа в см$^{-3}$. Величина ω определяет частоту спиновой волны, тогда как ее диффузионное затухание определяется характерными частотами в интеграле столкновений для неполяризованного газа.

При $M = 0$ интеграл столкновений описывает диффузию магнитного момента. В приближении высоких температур, когда рассеяние происходит преимущественно вперед, пользуясь инвариантной формой записи матричных элементов T-матрицы (17), нетрудно получить оценку для двух характерных диффузионных частот:

$$\nu_1 \approx \mathrm{Im}\,t(P,P), \quad \nu_2 \sim \mathrm{Im}\,\theta(P,P). \quad (21)$$

Отметим, что при высоких температурах частоты диффузии, как и частоты спиновых волн, для фермионов и бозонов не различаются. Таким образом, критерий распространения слабозатухающей спиновой волны при высоких температурах сводится к условию

$$|\,\mathrm{Re}\,\theta(P,P)| \gg \max\left(|\,\mathrm{Im}\,t(P,P)|, |\,\mathrm{Im}\,\theta(P,P)|\right). \quad (22)$$

Естественно, этот критерий имеет точно такой же вид и для амплитуд рассеяния (см. (16)). В случае, когда обменное рассеяние меньше «прямого» ($\nu_2 < \nu_1$), эту формулу можно переписать так:

$$Q = \frac{|\,\mathrm{Re}\,A_\theta(0)|}{|\,\mathrm{Im}\,A_t(0)|} \gg 1. \quad (23)$$

Теперь воспользуемся оптической теоремой для оценки величины Q и борновским приближением для определения конуса угла рассеяния.

Приведем оценку величины Q для атома рубидия в борновском приближении, используя опубликованные данные о сечениях столкновений атомов рубидия при высоких температурах [16]. Для полного сечения в борновском приближении можно написать:

$$\sigma \approx \left(\frac{\Delta\varphi}{4\pi}\right)^2 (\operatorname{Re} A(0))^2.$$

Используя это соотношение и оптическую теорему в виде

$$\operatorname{Im} A(0) = \sigma/2\lambda_B,$$

для величины Q можно получить: $Q \approx 8\pi r\sqrt{\sigma_\theta}/\sigma_t$. Подставляя численные значения величин: $r \approx 10.0$, $\sigma_t \approx 10^4$, $\sigma_\theta \approx 10^3$ в атомных единицах для атомов рубидия, приведенные в работе [5], окончательно получим $Q \approx 1$ при температуре 300 K. Эта оценка показывает, что частота и ширина спиновой моды являются величинами одного порядка. Такую моду трудно назвать слабозатухающей, но ее наблюдение представляется нам вполне возможным.

Отметим, что полученная нами ранее оценка отношения частоты и затухания спиновой волны, полностью основанная на борновском приближении, была сильно завышена, что связано с неприменимостью борновского приближения к рассеянию щелочных атомов при комнатных температурах [15]. В приведенной выше оценке борновское приближение использовалось только для оценки анизотропии индикатрисы рассеяния (величина $\Delta\varphi$), а все остальные величины брались из эксперимента.

4. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Теперь рассмотрим другой предельный случай — низкие температуры, когда дебройлевская длина волны частиц становится много больше длины рассеяния. Именно такое условие выполняется в экспериментах с ультрахолодными газами в ловушках (см. обзор [5]). В этих условиях амплитуду рассеяния с хорошей точностью можно считать изотропной и почти вещественной [15]. Дисперсионное уравнение для спиновой волны имеет тот же вид (18), но с другим ядром интегрального уравнения. Теперь ядра для фермионов и бозонов различны. В частности, изотропное рассеяние фермионов с одинаково направленными спинами, как известно, отсутствует: $T_{1111}(P,P) \approx 0$. Конкретные выражения для ядер интегрального уравнения для фермионов и бозонов могут быть получены из общих формул для матричных элементов T-матрицы, записанных в инвариантной форме и с учетом изотропности рассеяния (см. Приложение). Вместо величины $\operatorname{Re}\theta(P,P)$, определяющей ядро интегрального уравнения (18) при высоких температурах, теперь следует писать $\operatorname{Re}(t-3\theta)$ для фермионов и $\operatorname{Re}(t+\theta)$ для бозонов. Критерий слабого затухания спиновой волны для фермионов и бозонов, соответственно, теперь принимает вид

$$\operatorname{Re}(t-3\theta) \gg \operatorname{Im}(t-3\theta), \quad \operatorname{Re}(t+\theta) \gg \operatorname{Im}(t+\theta), \tag{24}$$

а решение дисперсионного уравнения в гидродинамическом приближении дает следующее выражение для частоты спиновой волны:

$$\omega = -\frac{k^2\bar{v}^2}{3\nu_0}. \tag{25}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &\nu_0 = 16M\pi^3\hbar^2 n \operatorname{Re}(t-3\theta) \text{ (фермионы)}, \\ &\nu_0 = 16M\pi^3\hbar^2 n \operatorname{Re}(t+\theta) \text{ (бозоны)}. \end{aligned} \tag{26}$$

При низких температурах, т. е. при рассеянии медленных частиц, амплитуда рассеяния имеет вид $A = 1/(g - iq)$. Здесь g — вещественная величина, а мнимая добавка iq мала при низких температурах, поскольку $q = 2\pi/\lambda_B \sim \sqrt{T}$ [15]. Как известно, спиновые волны в парах рубидия наблюдались при низких температурах в магнитной ловушке [6]. Режимы распространения спиновой волны в свободном газе и в ловушке различны, но оценки сечений столкновений атомов рубидия, приведенные в работе [5], естественно, могут быть использованы в настоящей работе. При $T = 0.6$ мкК амплитуды рассеяния атомов рубидия как с обменом спина, так и без него, примерно равны и составляют, согласно [5], приблизительно $100a_0$ (a_0 — боровский радиус). При $T = 0.6$ мкК дебройлевская длина волны атома рубидия $\lambda_B \approx 8 \cdot 10^3$ ат. ед., вещественная часть амплитуды рассеяния $g \approx 0.01$ ат. ед., что в итоге дает для отношения g/q величину порядка 10. Таким образом, согласно (24), критерий распространения спиновой волны в этих условиях выполняется с хорошим запасом.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе получено точное в больцмановском (бинарном) приближении кинетическое уравнение для поляризованного парамагнитного газа с учетом тождественности сталкивающихся частиц. Как уже упоминалось выше, выполненные в последнее время эксперименты по исследованию спиновых волн в охлажденных парах рубидия вплоть до температур 600 нК все еще относятся к области применимости больцмановской статистики. Благодаря компактной записи интеграла столкновений удалось получить универсальный критерий распространения слабозатухающих спиновых волн в ферми- и бозе-газах в широком интервале температур. Критерий сводится к условию, чтобы вещественная часть амплитуды рассеяния (или T-матрицы) на нулевой угол значительно превышала ее мнимую часть. Отметим, что этот критерий заведомо должен выполняться в предельных случаях очень высоких и очень низких температур. В первом случае применимо борновское приближение, когда амплитуда рассеяния на нулевой угол в основном вещественна. Во втором случае при низких температурах рассеяние сферически-симметрично с малой мнимой частью амплитуды рассеяния. С помощью полученного уравнения исследованы условия распространения спиновых волн в поляризованных ферми- и бозе-газах. Получены дисперсионные уравнения для спиновых волн при высоких и низких температурах газа и показано, что распространение спиновых волн возможно в обоих этих предельных случаях.

При высоких температурах дисперсионные уравнения для спиновых волн в ферми- и бозе-газах совпадают, причем частота спиновой волны ν_{ex} определяется вещественной частью амплитуды обменного рассеяния спинов на нулевой угол. Диффузионное затухание спиновой волны определяется двумя характерными частотами ν_1 и ν_2 (21). Отметим, что частоты ν_1 и ν_2 пропорциональны полным (интегральным по углам) сечениям столкновений соответственно без изменения спина и с обменом спина. Согласно литературным данным о сечениях этих процессов для щелочных атомов (Rb, Cs и др.), при высоких температурах величина ν_1 превышает величину ν_2 примерно на порядок [16]. В связи с этим критерий слабого затухания спиновой волны принимает вид: $\nu_{ex}/\nu_1 \gg 1$. При высоких температурах рассеяние сосредоточено в основном в узком конусе углов вблизи нулевого угла рассеяния. Как показывают оценки для атома рубидия, приведенные в разд. 3, параметр ν_{ex}/ν_1 по порядку величины близок к 1 при комнатных температурах. При таких условиях частота и диффузионная ширина спиновой моды — величины одного порядка. В этих условиях наблюдение спиновой волны в принципе представляется возможным.

При низких температурах частота спиновых волн начинает зависеть от статистики газа (ферми- или бозе-газ). Условие распространения волны при низких температурах может быть выполнено сравнительно легко, поскольку в этом случае рассеяние практически изотропно, а амплитуда рассеяния почти вещественна. Частота спиновой волны в этих условиях зависит не только от обменного рассеяния θ, но и от рассеяния без изменения спинов t, причем для фермионов и бозонов эта зависимость разная (см. разд. 4).

Отметим, что при низких температурах спиновая волна может распространяться за счет столкновений без изменения спина, поскольку столкновения тождественных частиц сопровождаются значительным изменением импульса. Фактически здесь речь идет о другом механизме распространения спиновых волн в газах при низких температурах по сравнению с распространением при высоких температурах. При высоких температурах столкновения происходят с малым изменением импульса и обменом спинами сталкивающихся частиц (обменное рассеяние θ), что и обеспечивает распространение спиновой волны. При низких температурах спиновая волна может распространяться не только за счет обмена спинами, но и вследствие изменения импульсов сталкивающихся тождественных частиц.

Авторы благодарны И. Л. Бейгману за полезные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-17460), в рамках Программы поддержки научных школ (грант Президента РФ № НШ-1254.2003.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем инвариантную форму записи матричных элементов T-матрицы всех типов столкновений, происходящих между атомами при различных ориентациях спина сталкивающихся частиц. Формулы для фермионов:

$$T_{1111}(P,P') = T_{2222}(P,P') = -t\,(-P,P') + t\,(P,P') - \theta\,(-P,P') + \theta\,(P,P'), \quad (\text{П.1})$$

$$T_{1212}(P,P') = T_{2121}(P,P') = t\,(P,P') - 2\theta\,(-P,P') - \theta\,(P,P'), \quad (\text{П.2})$$

$$T_{1221}(P,P') = T_{2112}(P,P') = -t\,(-P,P') + \theta\,(-P,P') + 2\theta\,(P,P'). \quad (\text{П.3})$$

Формулы для бозонов:

$$T_{1111}(P,P') = T_{2222}(P,P') = t\,(-P,P') + \\ + t\,(P,P') + \theta\,(-P,P') + \theta\,(P,P')\,, \quad (\Pi.4)$$

$$T_{1212}(P,P') = T_{2121}(P,P') = \\ = t\,(P,P') + 2\theta\,(-P,P') - \theta\,(P,P')\,, \quad (\Pi.5)$$

$$T_{1221}(P,P') = T_{2112}(P,P') = \\ = t\,(-P,P') - \theta\,(-P,P') + 2\theta\,(P,P')\,. \quad (\Pi.6)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Башкин, Письма в ЖЭТФ **33**, 11 (1981).

2. C. Lhuiller and F. Laloë, J. Physique **43**, 225 (1982).

3. В. П. Силин, ЖЭТФ **33**, 1227 (1957).

4. Е. П. Башкин, УФН **148**, 433 (1986).

5. J. N. Fuchs, D. M. Cangardt, and F. Laloë, Europ. Phys. J. D **25**, 5775 (2003).

6. J. M. McGuirk, H. J. Lewandowski, D. M. Harber et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 090402 (2002).

7. В. В. Дмитриев, И. А. Фомин, Письма в ЖЭТФ **59**, 353 (1994).

8. Н. Н. Боголюбов. *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, Москва (1946).

9. L. Waldmann, Z. Naturforsch. **13a**, 609 (1958).

10. R. F. Snider, J. Chem. Phys. **32**, 1051 (1960).

11. F. Laloë and W. J. Mullin, J. Stat. Phys. **59**, 725 (1990).

12. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, ЖЭТФ **115**, 865 (1999).

13. Т. Л. Андреева, П. Л. Рубин, В. Н. Сорокин, ЖЭТФ **121**, 1270 (2002).

14. Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, Москва (1969).

15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, Москва (1963).

16. H. O. Dickinson, M. R. H. Rudge, J. Phys. B **3**, 1448 (1970).