ЖЭТФ, 2006, том 129, вып. 5, стр. 938–944

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРОВОЛОКИ ИЗ МЕТАЛЛА

*Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов**

Московский государственный университет леса
141005, Мытищи, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 июля 2005 г.

Вычислена высокочастотная проводимость прямой металлической проволоки прямоугольного сечения. Рассмотрен случай, когда поперечные размеры проволоки во много раз меньше ее длины. В качестве граничных условий задачи принято условие диффузного отражения электронов от внутренних поверхностей проволоки. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

PACS: 78.67.-n

1. ВВЕДЕНИЕ

Электрические свойства проводников, линейный размер R которых сравним с длиной свободного пробега Λ электронов, существенно отличается от свойств «массивных» проводников [1, 2].

В фундаментальной работе [2], посвященной расчету электрической проводимости тонкой цилиндрической проволоки (отношение ее радиуса к длине много меньше единицы), рассматривались только стационарные электрические поля. Вопросы, касающиеся проводимости тонкой цилиндрической проволоки, помещенной в магнитное поле, обсуждались в работах [3–7]. В упомянутых работах применяется подход, основанный на решении кинетического уравнения Больцмана для электронов проводимости в металле.

В работе [8], в которой измерялось электрическое сопротивление тонких металлических проволок прямоугольного сечения, был подтвержден важный факт: удельное электрическое сопротивление тонких металлических проволок (при заданной температуре) зависит от их геометрии.

Заметим, что задачи о проводимости тонких металлических проволок становятся особенно актуальными в связи с бурным развитием микроэлектроники, где такие проволоки широко применяются.

В настоящей работе кинетическим методом рассчитана функция распределения, описывающая линейный отклик электронов в однородной проволоке прямоугольного сечения на переменное электрическое поле, ориентированное вдоль оси проволоки. По найденной функции распределения удается рассчитать зависимости интегральной проводимости как от отношения диагонали поперечного сечения проволоки к длине свободного пробега электронов, так и от отношения поперечных размеров проволоки и частоты.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ

Рассматривается прямая проволока прямоугольного сечения из немагнитного металла с поперечными размерами a и b и длиной L (считаем, что $L \gg a, b$), к концам которой приложено переменное напряжение частоты ω. При этом направление электрического поля совпадает с осью проволоки. Скин-эффект не учитывается (предполагается, что $a, b < \delta$, где δ — глубина скин-слоя).

Однородное периодическое по времени электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{1}$$

воздействует на электроны внутри проволоки и вызывает отклонение f_1 их функции распределения f от равновесной фермиевской функции f_0:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

$$\varepsilon = m\mathbf{v}^2/2,$$

*E-mail: yushkanov@mtu-net.ru

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{v}$ — скорость электрона, m — эффективная масса электрона в металле.

Это приводит к возникновению высокочастотного тока с плотностью

$$\mathbf{j} = e\int \frac{2\mathbf{v}f}{h^3}\, d^3(mv) = 2e\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \mathbf{v} f_1 d^3 v, \qquad (2)$$

где e — заряд электрона в металле, h — постоянная Планка. Его расчет будем проводить в прямоугольной декартовой системе координат xyz с осью z, проходящей через точку пересечения диагоналей и направленной вдоль оси проволоки.

В формуле (2) используется стандартная нормировка функции распределения f, при которой плотность электронных состояний равна $2/h^3$.

Для равновесной функции $f_0(\varepsilon)$ далее используется ступенчатая аппроксимация [9]:

$$f_0(\varepsilon) = \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_F, \\ 0, & \varepsilon_F < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ — энергия Ферми (v_F — скорость Ферми). Предполагается, что ферми-поверхность имеет сферическую форму.

Задача сводится к отысканию отклонения f_1 функции распределения электронов от равновесной функции f_0, возникающего под действием высокочастотного поля (1). В линейном приближении по внешнему полю функция f_1 удовлетворяет кинетическому уравнению [9, 10]

$$-i\omega f_1 + \mathbf{v}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{f_1}{\tau}, \qquad (3)$$

где предполагается стационарная зависимость от времени ($f_1 \propto \exp(-i\omega t)$), а интеграл столкновений взят в приближении времени релаксации τ электронов:

$$\left(\frac{df_1}{dt}\right)_s = -\frac{f_1}{\tau}.$$

Решая уравнение (3) методом характеристик [11], получаем

$$f_1 = A\left[\exp(-\nu t') - 1\right]/\nu, \quad t' \ge 0, \qquad (4)$$

где

$$\nu = \frac{1}{\tau} - i\omega, \quad A = e\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \qquad (5)$$

причем величины ν и A постоянны вдоль траектории (характеристики). Параметр t' в выражении (4) имеет смысл времени движения электрона вдоль траектории от границы, на которой происходит отражение, до точки $\mathbf{r}$ со скоростью $\mathbf{v}$.

Для однозначного определения функции f_1 необходимо задать для нее граничные условия на внутренних поверхностях проволоки. В качестве таковых принимаем условие диффузного отражения электронов от этих поверхностей [10]:

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0 \text{ при } \begin{cases} x = a/2 \quad \text{или } x = -a/2, \\ xv_x < 0, \end{cases} \qquad (6)$$

а также

$$f_1(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0 \text{ при } \begin{cases} y = b/2 \quad \text{или } y = -b/2, \\ yv_y < 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Распределение плотности тока в поперечном сечении проволоки можно получить, например, для первой координатной четверти ($0 \le x \le b/2$, $0 \le y \le a/2$). Из-за симметрии задачи распределение плотности тока в других четвертях будет аналогичным.

При отражении электрона от внутренних граней проволоки параметр t' в выражении (4) определяется по следующим формулам:

$$t_1 = \frac{2x - b}{2v_x} \quad \text{для правой грани, где } v_x < 0, \qquad (8)$$

$$t_2 = \frac{2x + b}{2v_x} \quad \text{для левой грани, где } v_x > 0, \qquad (9)$$

$$t_3 = \frac{2y - a}{2v_y} \quad \text{для верхней грани, где } v_y < 0, \qquad (10)$$

$$t_4 = \frac{2y + a}{2v_y} \quad \text{для нижней грани, где } v_y > 0. \qquad (11)$$

Соотношениями (4), (5) и (8)–(11) полностью определено решение f_1 уравнения (3) с граничными условиями (6) и (7), что позволяет рассчитать плотность тока (2).

Поле (1) в прямоугольных декартовых координатах имеет лишь z-компоненту (ось проволоки совпадает с осью z):

$$\mathbf{E} = E_z\mathbf{e}_z, \quad E_z = E_0 e^{-i\omega t}.$$

Соответственно и вектор плотности тока (2) обладает лишь z-компонентой (линии тока являются прямыми, параллельными оси z):

$$j_z = \frac{3ne^2}{4\pi v_F^3}\, E_z \int v_z^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)\frac{1 - \exp(-\nu t')}{\nu}\, d^3 v.$$

Здесь мы учли, что концентрация электронов проводимости в металлах определяется как

$$n = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int f_0 d^3 v = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi v_F^3.$$

Воспользовавшись свойствами δ-функции, имеем

$$\delta(\varepsilon-\varepsilon_F) = \frac{2}{m}\delta(v_z^2+v_\perp^2-v_F^2) = \frac{2}{m}\delta\left[v_z^2-(v_F^2-v_\perp^2)\right] = \\ = \frac{2}{m}\delta\left[\left(v_z-\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}\right)\left(v_z+\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}\right)\right] = \\ = \frac{1}{m\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}}\left[\delta\left(v_z-\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}\right)+ \right. \\ \left. + \delta\left(v_z+\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}\right)\right].$$

В силу симметрии задачи интегрирование по всему диапазону скоростей v_z заменяется интегрированием по положительному диапазону, и результат удваивается, поэтому

$$j_z = \frac{3ne^2E_z}{2\pi v_F^3 m}\int \frac{v_z^2\delta\left(v_z-\sqrt{v_F^2-(v_x^2+v_y^2)}\right)}{\sqrt{v_F^2-(v_x^2+v_y^2)}} \times \\ \times \frac{1-\exp(-\nu t')}{\nu}\,dv_x\,dv_y\,dv_z.$$

Проинтегрировав по переменной v_z (в пределах от 0 до ∞), имеем

$$j_z = \frac{3ne^2E_z}{2\pi m v_F^3}\iint \sqrt{v_F^2-(v_x^2+v_y^2)} \times \\ \times \frac{1-\exp(-\nu t')}{\nu}\,dv_x\,dv_y. \quad (12)$$

При вычислении интеграла (12) удобно перейти к цилиндрическим координатам в пространстве скоростей ($v_\perp$, α, v_z; полярная ось — ось v_z). Этот переход позволяет выделить в пространстве скоростей следующие характерные области интегрирования по углу α ($0 \le \alpha \le 2\pi$):

1) при отражении электронов от правой грани

$$-\operatorname{arctg}\frac{a+2y}{b-2x} \le \alpha \le \operatorname{arctg}\frac{a-2y}{b-2x},$$

2) при отражении электронов от левой грани

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{a-2y}{b+2x}\right)+\pi \le \alpha \le \operatorname{arctg}\left(\frac{a+2y}{b+2x}\right)+\pi,$$

3) при отражении электронов от верхней грани

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{b-2x}{a-2y}\right)+\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \operatorname{arctg}\left(\frac{b+2x}{a-2y}\right)+\frac{\pi}{2},$$

4) при отражении электронов от нижней грани

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{b-2x}{a+2y}\right)+\frac{3\pi}{2} \le \alpha \le \operatorname{arctg}\left(\frac{b+2x}{a+2y}\right)+\frac{3\pi}{2}.$$

При этом формулы (8)–(11) принимают следующий вид:

$$t_1 = \frac{b-2x}{2v_\perp\cos\alpha} \quad \text{(для правой грани)},$$

$$t_2 = \frac{b+2x}{|2v_\perp\cos\alpha|} \quad \text{(для левой грани)},$$

$$t_3 = \frac{a-2y}{2v_\perp\sin\alpha} \quad \text{(для верхней грани)},$$

$$t_4 = \frac{a+2y}{|2v_\perp\sin\alpha|} \quad \text{(для нижней грани)}.$$

Тогда

$$j_z = j_{z1}+j_{z2}+j_{z3}+j_{z4}, \quad (13)$$

где

$$j_{zk} = \frac{3ne^2E_z}{2\pi m v_F^3} \times \\ \times \int_0^{v_F} dv_\perp \int_{\alpha_k}^{\beta_k} v_\perp\sqrt{v_F^2-v_\perp^2}\,\frac{1-\exp(-\nu t_k)}{\nu}\,d\alpha, \\ k = 1,2,3,4.$$

Здесь

$$\alpha_1 = -\operatorname{arctg}\frac{a+2y}{b-2x}, \quad \beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{a-2y}{b-2x},$$

$$\alpha_2 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{a-2y}{b+2x}\right)+\pi,$$

$$\beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a+2y}{b+2x}\right)+\pi,$$

$$\alpha_3 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b-2x}{a-2y}\right)+\frac{\pi}{2},$$

$$\beta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b+2x}{a-2y}\right)+\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_4 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b-2x}{a+2y}\right)+\frac{3\pi}{2},$$

$$\beta_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b+2x}{a+2y}\right)+\frac{3\pi}{2}.$$

Для дальнейших вычислений и анализа результатов введем новые переменные:

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \rho = \frac{v_\perp}{v_F}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad K = \frac{a}{b},$$

$$\Delta = \nu\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_F} = \left(\frac{1}{\tau}-i\omega\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_F} = \lambda - i\Omega.$$

Тогда

$$j_{z1} = j_0 \int_0^1 d\rho \int_{N_1}^{V_1} \rho\sqrt{1-\rho^2} \times \times \frac{1}{\Delta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta(1-2\xi)}{2\rho\cos\alpha\sqrt{1+K^2}}\right)\right] d\alpha,$$

$$j_{z2} = j_0 \int_0^1 d\rho \int_{N_2}^{V_2} \rho\sqrt{1-\rho^2} \times \times \frac{1}{\Delta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta(1+2\xi)}{2|\rho\cos\alpha|\sqrt{1+K^2}}\right)\right] d\alpha,$$

$$j_{z3} = j_0 \int_0^1 d\rho \int_{N_3}^{V_3} \rho\sqrt{1-\rho^2} \times \times \frac{1}{\Delta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta K(1-2\eta)}{2\rho\sin\alpha\sqrt{1+K^2}}\right)\right] d\alpha,$$

$$j_{z4} = j_0 \int_0^1 d\rho \int_{N_4}^{V_4} \rho\sqrt{1-\rho^2} \times \times \frac{1}{\Delta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta K(1+2\eta)}{2|\rho\sin\alpha|\sqrt{1+K^2}}\right)\right] d\alpha.$$

Здесь

$$j_0 = \frac{3ne^2\sqrt{a^2+b^2}\,E_z}{2\pi m v_F},$$

$$N_1 = -\operatorname{arctg}\frac{K(1+2\eta)}{1-2\xi}, \quad V_1 = \operatorname{arctg}\frac{K(1-2\eta)}{1-2\xi},$$

$$N_2 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{K(1-2\eta)}{1+2\xi}\right) + \pi,$$

$$V_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{K(1+2\eta)}{1+2\xi}\right) + \pi,$$

$$N_3 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\xi}{K(1-2\eta)}\right) + \frac{\pi}{2},$$

$$V_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2\xi}{K(1-2\eta)}\right) + \frac{\pi}{2},$$

$$N_4 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\xi}{K(1+2\eta)}\right) + \frac{3\pi}{2},$$

$$V_4 = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2\xi}{K(1+2\eta)}\right) + \frac{3\pi}{2}.$$

Проинтегрировав выражение (13), определяем полный ток I через поперечное сечение прямоугольной проволоки (множитель 4 перед интегралом возникает из-за того, что интегрирование ведется по четверти всего сечения проволоки):

$$I = \frac{3ne^2\sqrt{a^2+b^2}\,E_z}{2\pi m v_F}\, ab\cdot 4\int_0^{1/2} d\xi \int_0^{1/2} \sigma\, d\eta,$$

где σ — безразмерная локальная проводимость проволоки:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{4} \int_0^1 d\rho \int_{N_k}^{V_k} \rho\sqrt{1-\rho^2}\frac{1}{\Delta}\left[1 - \exp\left(-T_k\right)\right] d\alpha,$$

где

$$T_1 = \frac{\Delta(1-2\xi)}{2\rho\cos\alpha\sqrt{1+K^2}}, \quad T_2 = \frac{\Delta(1+2\xi)}{2|\rho\cos\alpha|\sqrt{1+K^2}},$$

$$T_3 = \frac{\Delta K(1-2\eta)}{2\rho\sin\alpha\sqrt{1+K^2}}, \quad T_4 = \frac{\Delta K(1+2\eta)}{2|\rho\sin\alpha|\sqrt{1+K^2}}.$$

Затем, формально воспользовавшись законом Ома в виде $I = GU$, где U — напряжение на концах проволоки, получаем формулу для расчета интегральной проводимости G_p проволоки (электрическое поле внутри проволоки однородное, поэтому $U = E_z L$):

$$G_p = \frac{3ne^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi m v_F}\,\frac{ab}{L}\cdot 4\int_0^{1/2} d\xi \int_0^{1/2} \sigma\, d\eta. \tag{14}$$

В случае стационарного электрического поля (когда $\Omega = 0$, $\Delta = \lambda = \sqrt{a^2+b^2}/\Delta$) теоретический результат (14) можно качественно сравнить с экспериментальным результатом работы [8]. К сожалению, прямое сравнение затруднено, так как в металлы, из которых изготавливались проволоки, добавлялись различные примеси (для прямого сравнения необходимы эксперименты с чистыми металлами, для которых точно известно значение средней длины свободного пробега электронов). Однако и такое сравнение является полезным, поскольку позволяет провести оценку длины свободного пробега электронов в конкретном сплаве. На рис. 1 приведены взятые из работы [8] экспериментальные данные для серебряных (с некоторой примесью) проволок. По этим данным максимальное сближение теоретических и экспериментальных результатов происходит, когда $\lambda \approx 2.5$, т. е. эффективное значение длины свободного пробега электронов (при заданной температуре) в таких проволоках около 48 нм.

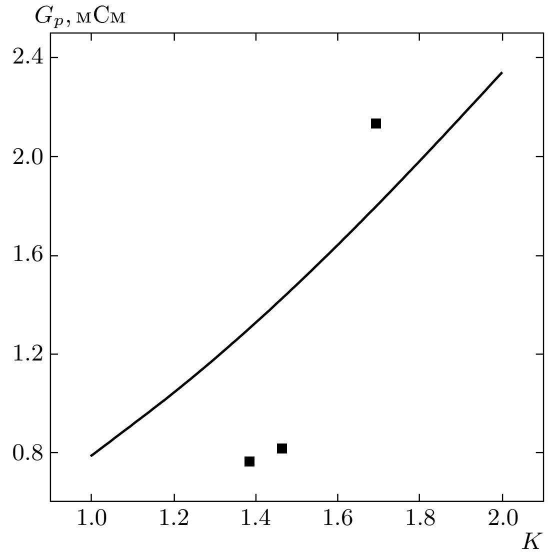

Рис. 1. Сравнение теоретических и экспериментальных данных для серебряных (с некоторой примесью) проволок: линия построена с использованием теоретического результата (формула (14)), точки соответствуют данным эксперимента [8]

K	$F(K)$
0.1	0.552
0.2	0.883
0.3	1.125
0.4	1.305
0.5	1.435
0.6	1.527
0.7	1.588
0.8	1.626
0.9	1.646
1.0	1.651

Интегральную проводимость (14) (заметим, что она является комплексной величиной) представим в виде

$$G_p = G_0 P(\lambda, \Omega, K),$$

где

$$G_0 = \frac{3ne^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi m v_F}\,\frac{ab}{L},$$

$$P(\lambda, \Omega, K) = 4\int_0^{1/2} d\xi \int_0^{1/2} \sigma\, d\eta.$$

Численный расчет модуля $M(\lambda, \Omega, K)$ и аргумента $A(\lambda, \Omega, K)$ (фазы) безразмерной интегральной проводимости $P(\lambda, \Omega, K)$ вытянутой прямоугольной проволоки представлен ниже на рис. 2, 3.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Особый интерес представляет случай, когда частота внешнего поля ω низка по сравнению с частотой столкновений электронов с поверхностью частицы, а длина свободного пробега Λ электронов существенно превышает поперечные размеры проволоки. Именно такое предположение использовалось при описании электромагнитных свойств малых металлических частиц в работе [12]. В этом случае экспоненты, входящие в выражение (13), можно разложить по известной формуле Тейлора (достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения). Описанный выше прием позволяет значительно упростить формулу (14) для расчета интегральной проводимости G_p проволоки в приближении большой длины свободного пробега электронов Λ ($\lambda \ll 1$). Соответствующий расчет приводит к следующему выражению для проводимости в указанном приближении:

$$G_p = \frac{3ne^2\sqrt{a^2+b^2}}{2\pi m v_F}\,\frac{ab}{L} F(K),$$

где $F(K)$ — затабулированная функция, значения которой для некоторых K приведены в таблице, причем $F(K) = F(1/K)$ ввиду очевидной симметрии задачи. В связи с этим в таблице приведены значения функции $F(K)$ при $0 < K \le 1$.

В работе [13] авторы описывали электромагнитные свойства цилиндрической проволоки. Используя материал этой статьи, легко получить формулу, аналогичную формуле (14), для расчета интегральной проводимости тонкой цилиндрической проволоки:

$$G_{cyl} = \frac{6ne^2R^3}{m v_F L}\int_0^1 d\xi \int_0^1 \int_0^{\pi} \rho\sqrt{1-\rho^2}\times \\ \times \frac{1-\exp(-\mu\zeta/\rho)}{\mu}\, d\rho\, d\alpha \quad (15)$$

(R — радиус цилиндрической проволоки, L — ее длина),

$$\zeta = \xi\cos\alpha + \sqrt{1-\xi^2\sin^2\alpha}, \quad \mu = \left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\frac{R}{v_F}.$$

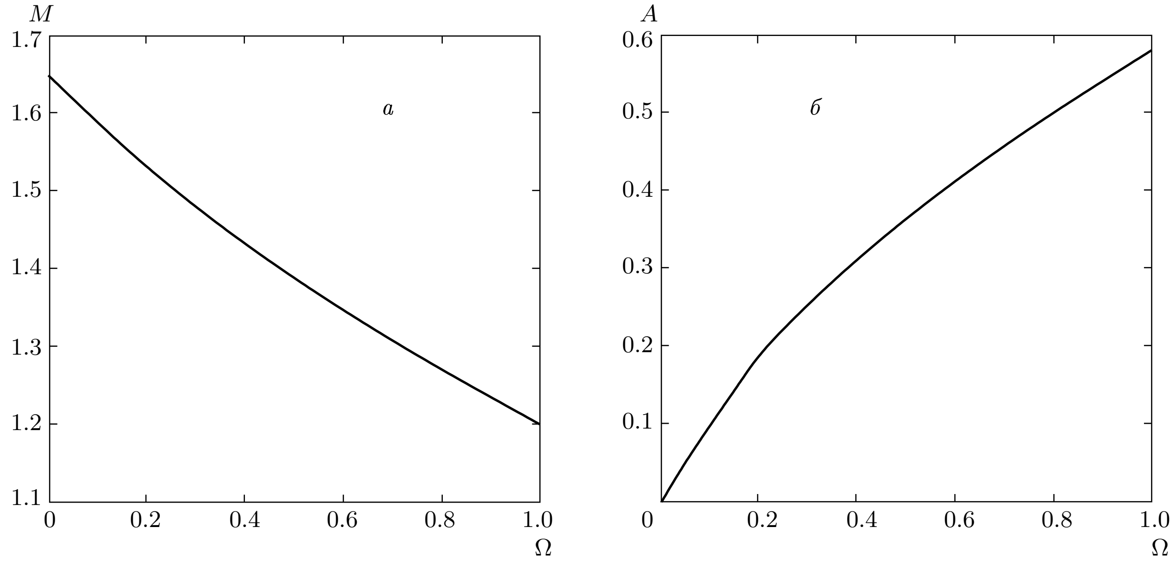

Рис. 2. Зависимости *а*) модуля M и *б*) аргумента A (фазы) безразмерной интегральной проводимости P проволоки от безразмерной частоты электрического поля Ω ($\lambda \approx 0$, $K = 1$)

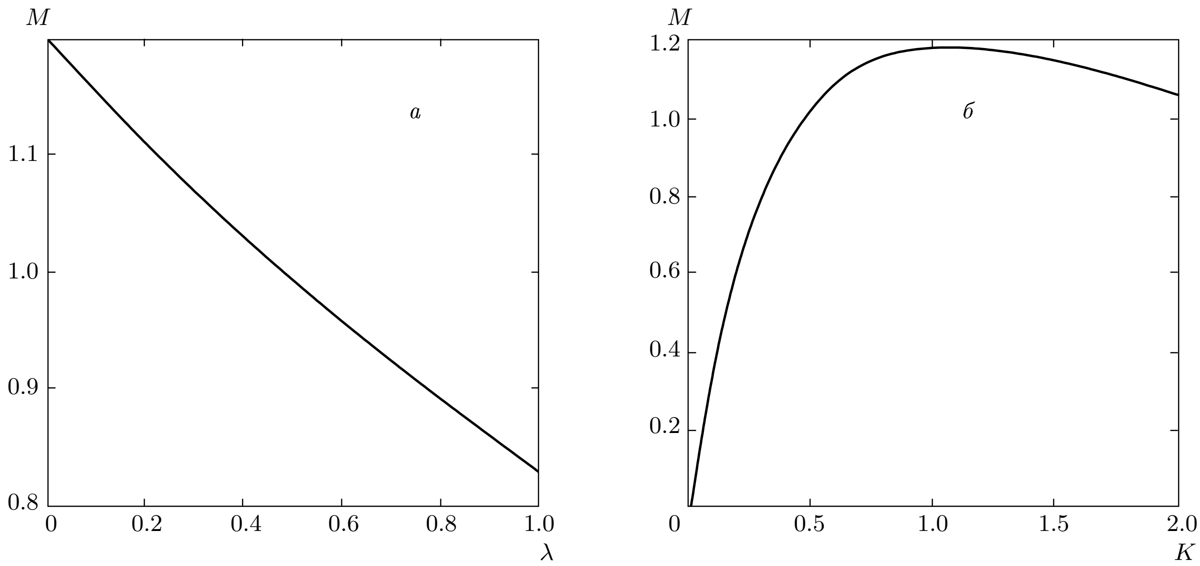

Рис. 3. Зависимость модуля M безразмерной интегральной проводимости P проволоки от *а*) безразмерной обратной длины свободного пробега электронов λ ($\Omega = 1$, $K = 1$) и *б*) отношения поперечных размеров проволоки K ($\lambda \approx 0$, $\Omega = 1$)

Из формулы (15) также достаточно просто получить выражение для проводимости цилиндрической проволоки в приближении большой длины свободного пробега Λ электронов:

$$G_{cyl} = \frac{2\pi n e^2 R^3}{m v_F L}\,.$$

Найдя отношение удельных проводимостей прямоугольной σ_p и цилиндрической σ_{cyl} проволок одинаковой длины, имеющих одинаковые площади поперечного сечения и изготовленных из одного металла, в пределе бесконечной длины свободного пробега электронов получаем

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{cyl}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{1+K^2}{\pi K}}\, F(K).$$

Из приведенной формулы, в частности, следует, что при $K = 1$ (для проволоки квадратного сечения) это отношение равно 0.988.

На рис. 2 представлены зависимости модуля M и аргумента A (фазы) безразмерной интегральной проводимости P от безразмерной частоты Ω электрического поля. Из анализа хода кривой на рис. 2*а* следует, что величина M монотонно убывает по мере увеличения безразмерной частоты Ω, а величина A (рис. 2*б*) монотонно возрастает и при больших значениях Ω достигает насыщения (ток опережает по фазе напряжение на $\pi/2$, т. е. в этом пределе проводимость становится чисто мнимой величиной).

На рис. 3*а* приведен график зависимости модуля M безразмерной интегральной проводимости P от безразмерной обратной длины свободного пробега λ электронов. Из рисунка видно, что величина M также монотонно убывает по мере увеличения λ. В случае больших значений λ имеет место макроскопическая асимптотика.

По рис. 3*б* анализируется зависимость модуля M безразмерной интегральной проводимости P от отношения K поперечных размеров проволоки для случая достаточно чистого металла (электроны обладают большой длиной свободного пробега по отношению к характерному линейному размеру $\sqrt{a^2+b^2}$), из которого изготовлена проволока ($\lambda \approx 0$). График имеет очевидный максимум, приходящийся на значение $K = 1$ (т. е. модуль безразмерной интегральной проводимости максимален, если поперечное сечение представляет собой квадрат). Это легко понять исходя из физической сути рассматриваемого явления: выбор в качестве параметра K отношения a к b равнозначен выбору в качестве данного параметра и обратного отношения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Петров, *Физика малых частиц*, Наука, Москва (1984).
2. R. B. Dingle, Proc. Roy. Soc. London A **201**, 545 (1950).
3. D. K. C. MacDonald, Nature **163**, 637 (1949).
4. R. G. Chambers, Proc. Roy. Soc. London A **202**, 378 (1950).
5. D. K. C. MacDonald, Proc. Phys. Soc. London A **63**, 290 (1950).
6. R. G. Chambers, Proc. Phys. Soc. London A **65**, 458 (1952).
7. G. K. White and S. B. Woods, Phil. Mag. **1**, 846 (1956).
8. F. Pierre, A. B. Gougam, A. Anthore et al., Phys. Rev. B **68**, 85413 (2000).
9. У. Харрисон, *Теория твердого тела*, Мир, Москва (1972).
10. Дж. Займан, *Электроны и фононы*, Москва (1962).
11. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1962).
12. Э. А. Маныкин, П. П. Полуэктов, Ю. Г. Рубежный, ЖЭТФ **70**, 2117 (1976).
13. Э. В. Завитаев, А. А. Юшканов, ЖТФ **75**, 1 (2005).