

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ РАЗМНОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СТУПЕНЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ ГЕЛИЯ

*А. Я. Паршин**

*Институт физических проблем Российской академии наук
119334, Москва, Россия*

В. Л. Цымбаленко

*Российский научный центр «Курчатовский институт»,
Институт сверхпроводимости и физики твердого тела
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 марта 2006 г.

В рамках приближения слабой связи рассматривается нелинейная динамика элементарных ступеней на атомно-гладкой границе кристалл–жидкость. Фактически речь может идти о гранях на поверхности твердый–сверхтекучий гелий при низких температурах, когда диссипативные процессы слабо влияют на динамику ступеней. Для получения основных результатов необходимы численные вычисления. Определены закон дисперсии ступени и зависимость ее формы от скорости движения. Показана возможность кинематического размножения ступеней: при достаточно высоких скоростях одиночная ступень оказывается неустойчивой относительно рождения пары ступеней противоположного знака, что приводит к образованию нового атомного слоя. Кроме того, при столкновении ступеней противоположного знака, наряду с обычной аннигиляцией ступеней при таких столкновениях, при определенных условиях возможны как «переброс» ступеней в соседний ряд с образованием нового атомного слоя (прохождение), так и отражение ступеней друг от друга. Таким образом, предложен качественно новый механизм роста кристаллов с атомно-гладкими гранями в отсутствие возобновляемых источников, таких как винтовые дислокации. Рассмотрено также влияние диссипации и внешнего пересыщения на динамику ступеней. Обсуждаются возможности экспериментального наблюдения предложенных механизмов размножения ступеней и их возможная связь с необычными режимами роста кристаллов гелия при низких температурах.

PACS: 67.80.-s, 68.08.-p

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что ограниченный кристалл растет за счет движения элементарных ступеней на гранях, причем непрерывный рост возможен либо при наличии непрерывно действующих источников ступеней, таких как винтовые дислокации и источники Франка–Рида, либо благодаря генерации новых ступеней при двумерном зародышеобразовании. Движение самих ступеней возможно как за счет поверхностной диффузии, так и за счет присоединения частиц другой фазы (жидкости или пара), находящейся в контакте с кристаллом. В обычных условиях скорость ступени достаточно мала, так что кинети-

ческая энергия ступени, будучи малой величиной по сравнению с «энергией покоя», обычно не принимается во внимание при рассмотрении динамики ступеней [1, 2]. Между тем очевидно, что в противоположном предельном случае законы сохранения энергии и импульса при подходящем законе дисперсии допускают распад ступени на две, три и т. д. При учете граничных условий на бесконечности речь может идти о генерации пар ступеней противоположного знака, т. е. фактически о генерации быстро движущейся ступенью зародышей новых атомных слоев.

Классическая теория роста кристаллов допускает далее, что ступени не могут пересекаться. Это означает, что из рассмотрения исключаются конфигурации с большой избыточной энергией, такие как нависание одного атомного слоя над другим,

*E-mail: parshin@kapitza.ras.ru

что соответствовало бы пересечению ступеней одного знака. В применении к ступеням противоположного знака указанное условие означает, что при соприкосновении двух таких ступеней они аннигилируют в области соприкосновения, тем самым уменьшая суммарную длину ступеней и, соответственно, их энергию. Это свойство ступеней, безусловно, должно иметь место в квазистатическом случае, когда ступени движутся достаточно медленно, так что в любой момент времени каждый участок ступени можно считать находящимся в состоянии равновесия, а ее кинетической энергией можно пренебречь. Условие квазистатичности означает, что соответствующее время релаксации мало по сравнению с «временем столкновения» w/V , где V — относительная скорость ступеней, а w — характерная ширина ступени, по порядку величины равная межатомному расстоянию. Это условие обычно хорошо выполняется, однако оно легко может быть нарушено в случае поверхности кристаллов гелия при очень низких температурах, когда скорость диссипации энергии стремится к нулю, так что время релаксации неограниченно возрастает, а скорости движения ступеней могут быть очень высокими, вплоть до скорости звука [3]. Естественно предположить, что в таком случае сталкивающиеся ступени противоположного знака уже не обязательно аннигилируют, а могут «по инерции» проходить одна над другой, образуя новый атомный слой (см. рис. 1), или отражаться друг от друга.

В данной работе мы покажем, что при определенных условиях все перечисленные выше неклассические процессы действительно могут осуществляться. В этих условиях кинетика роста кристаллов с атомно-гладкими гранями существенно изменяется по сравнению с предсказаниями классической теории. В заключительном разделе статьи обсуждаются возникающие экспериментальные возможности. Краткое изложение некоторых из полученных результатов опубликовано в работе [4].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для исследования динамических процессов с участием элементарных ступеней нам необходима достаточно реалистическая модель, описывающая микроскопического масштаба смещения поверхности кристалла гелия. При выборе такой модели следует учесть, что на границе раздела сверхтекучего и твердого гелия велики квантовые флуктуации [5], так что корреляционная длина, а с ней и эффективная ширина ступени оказываются большими по срав-

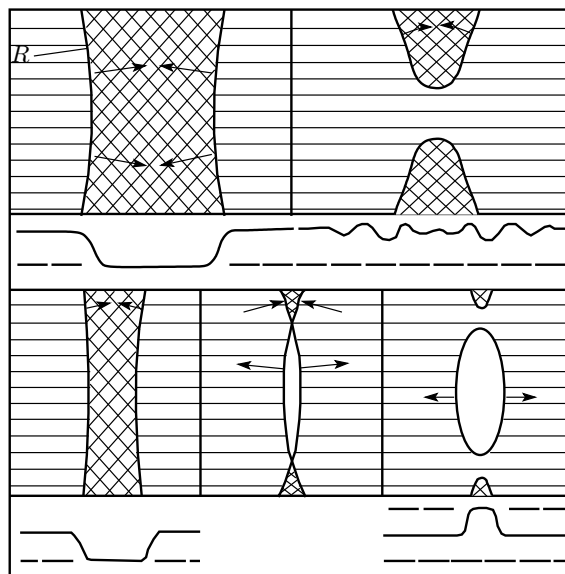


Рис. 1. Столкновение ступеней. Верхний ряд — квазистатический случай с аннигиляцией ступеней, нижний — динамический случай с рождением нового слоя. Различные атомные слои обозначены разной штриховкой

нению с межатомным расстоянием [6]. В этих условиях наиболее подходящей для наших целей представляется модель типа \sin -Гордон с непрерывной переменной $\zeta(\mathbf{r})$, представляющей собой усредненное по флуктуациям локальное смещение поверхности относительно положений равновесия в эффективном периодическом потенциале, описывающем связь поверхности с решеткой кристалла [6–8]. При этом эффективный пиннингующий потенциал оказывается слабым по сравнению с поверхностной энергией, что соответствует приближению слабой связи, широко используемому (см., например, [9]) в теории фазовых переходов, связанных с возникновением огранки кристаллов (переход шероховатости). Кроме того, наличие такой переменной позволяет использовать уравнения макроскопической гидродинамики для описания движения жидкости, сопровождающего процессы кристаллизации и плавления.

Стандартная теория, использующая приближение слабой связи для исследования динамики ступеней [9, 10], не принимает во внимание кинетическую энергию системы, т.е. ограничивается описанием квазистационарных процессов. Учет кинетической энергии расширяет область применимости этой теории до пределов области применимости концепции бездиссипативной кристаллизации [5]. Согласно современным экспериментальным данным (см. об-

зор [11]), эта область простирается по крайней мере до скоростей порядка скорости звука в жидком гелии ($c = 3.6 \cdot 10^4$ см/с) и частот порядка 10^{11} Гц. Что же касается допустимой области температур, то она ограничена только температурой T_R фазового перехода ограничения/шероховатости на поверхности данной ориентации (так, для грани (0001) $T_R = 1.3$ К). Фактически, однако, далее всюду за исключением разд. 4.2 мы будем считать, что температура достаточно низка, чтобы можно было пренебречь диссипацией. Кроме того, мы ограничимся скоростями ступеней меньше скорости звука, что позволит считать жидкость, как и кристалл, несжимаемой.

Функция Лагранжа системы имеет вид

$$L = - \int \left[\frac{\alpha}{2} (\nabla \zeta)^2 + U_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi \zeta}{a} \right) \right] d^2 \mathbf{r} + \int \frac{\rho^*}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 d^2 \mathbf{r} + \int \frac{\rho_l}{2} v_l^2 dV, \quad (1)$$

где a — межплоскостное расстояние (высота ступени), α — поверхностное натяжение (пренебрегаем анизотропией α и соответственно не делаем различия между поверхностной энергией и поверхностной жесткостью), ρ_l и v_l — соответственно плотность и скорость жидкости, а U_0 может быть выражено через β — энергию единицы длины неподвижной ступени:

$$U_0 = \frac{\pi^2}{16} \frac{\beta^2}{\alpha a^2}. \quad (2)$$

Последние два члена в формуле (1) представляют кинетическую энергию системы, причем первый из них (поверхностный вклад), обусловленный перестройкой расположения атомов в поверхностном слое при переходе из жидкости в кристаллическое состояние [12], относительно мал и не влияет на качественные результаты. Что же касается объемного члена, то его можно преобразовать в интеграл по поверхности, считая, что несжимаемая жидкость заполняет полупространство $z > 0$, и принимая во внимание сохранение массы при кристаллизации:

$$\int \frac{\rho_l}{2} v_l^2 dV = \frac{(\rho_c - \rho_l)^2}{4\pi\rho_l} \times \int \frac{\partial \zeta(t, \mathbf{r})}{\partial t} \frac{\partial \zeta(t, \mathbf{r}')}{\partial t} \frac{d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3)$$

где ρ_c — плотность кристалла. Оставляя в кинетической энергии только этот член, получаем уравнение движения поверхности

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial^2 \varphi(t, \mathbf{r}')}{\partial t^2} \frac{d^2 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \Delta \varphi + \sin \varphi = 0, \quad (4)$$

и интегралы движения — полную энергию

$$E = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{r})}{\partial t} \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{r}')}{\partial t} \frac{d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + 1 - \cos \varphi \right] d^2 \mathbf{r} \quad (5)$$

и импульс

$$\mathbf{P} = - \frac{1}{2\pi} \int \nabla \varphi(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{r}')}{\partial t} \frac{d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6)$$

В выражениях (4)–(6) безразмерные координаты x , y измеряются в единицах ξ , а время — в единицах τ :

$$\xi = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{4\pi^2 U_0}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{(\rho_c - \rho_l)^2}{\rho_l} \frac{a^2}{4\pi^2 U_0}} \xi, \quad \varphi = \frac{2\pi \zeta}{a}. \quad (7)$$

Приведем также численные значения для грани (0001) кристалла ${}^4\text{He}$: $\alpha = 0.25$ эрг/см² [13–15], $\beta/a = 0.014$ эрг/см² [15] и остальные параметры:

$$U_0 \approx 1.5 \cdot 10^{-3} \alpha, \quad \xi \approx 4a, \quad \tau \approx 5 \cdot 10^{-12} \text{ с}, \quad V_0 = \xi/\tau \approx 2.8 \cdot 10^4 \text{ см/с} < c \approx 3.6 \cdot 10^4 \text{ см/с}. \quad (8)$$

Здесь необходимо отметить следующее. При выводе формулы (4) существенно использовалось условие $|\nabla \zeta| \ll 1$, т. е. $|\nabla \varphi| \ll 2\pi \xi/a$. Имея в виду численные величины (8), заключаем, что для грани (0001) это условие хорошо выполняется, поскольку характерные значения $|\nabla \varphi|$ в формуле (4), вообще говоря, порядка единицы. С другой стороны, само условие применимости приближения слабой связи, выраженное в форме $a/\xi \ll 1$, выполнено с небольшим запасом. Кроме того, величина V_0 лишь немного ниже скорости звука в жидкости. Поэтому излагаемые здесь результаты могут претендовать лишь на качественно правильное описание свойств ступеней на грани (0001). Что же касается остальных граней, то для них величина U_0 , а тем самым и V_0 , существенно ниже [11], что обеспечивает хорошую выполнимость всех необходимых условий.

Реальные ступени на поверхности кристалла всегда несколько искривлены, однако их кривизна обычно мала, так что радиус кривизны R велик по сравнению с ξ . В этом случае в уравнении (4) можно пренебречь зависимостью от одной из координат (например, y). При этом интеграл логарифмически

расходится и должен быть обрезан на размере грани, если он меньше R , либо на самом R (измеренном в единицах ξ). В результате получим

$$\frac{1}{\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x' - x|} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi. \quad (9)$$

3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Все многообразие численных расчетов разделяется на три типа по мере усложнения, причем предыдущий случай использовался для проверки корректности решения более сложного варианта. Перечислим их: а) стационарное движение одиночной ступени, одномерная задача; б) эволюция произвольного профиля, одномерная задача; в) симметричная двумерная задача.

3.1. Стационарный случай

Общее одномерное уравнение движения (9) в случае стационарного движения одиночной ступени со скоростью V может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} - \sin f &= \frac{V^2}{\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x - x'|} \right) \frac{d^2 f}{dx'^2} dx' = \\ &= \frac{V^2}{\pi} \int \frac{df}{dx'} \frac{1}{x' - x} dx', \end{aligned} \quad (10)$$

где $\varphi = f(x - Vt)$, $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(+\infty) = \pm 2\pi$, т. е. сводится к обыкновенному интегро-дифференциальному уравнению. Профиль f определялся итерациями методом стрельбы в следующей последовательности: в качестве начального приближения выбирался профиль неподвижной ступени

$$f_0 = 4 \arctg e^x, \quad (11)$$

затем по этой функции вычислялась свертка в правой части уравнения, после чего уравнение интегрировалось методом Рунге-Кутты четвертого порядка с наклоном в начальной точке $f'(0)$. Производная подбиралась таким образом, чтобы на конце интервала интегрирования $x = 20$ решение сшивалось с асимптотикой, которая, как следует из (10), дается выражением

$$f(x) \sim \pi (1 + \text{sign}(x)) + \frac{2V^2}{x}. \quad (12)$$

Полученное решение подставлялось в правую часть уравнения (10), и процесс повторялся. Для скоростей $V < 1$ сходимость процесса экспоненциально

быстрая, т. е. зависимость наклона в нуле от числа итераций n хорошо приближается формулой

$$f'_n = f'_\infty - \text{const} \exp \left(-\frac{n}{p} \right). \quad (13)$$

Параметр $p \sim 1$ для скоростей $V \leq 0.9$. При больших V скорость сходимости процесса убывает, параметр p доходит при $V \approx 1$ до значения ~ 5 . При еще более высоких скоростях получить стационарный профиль этим методом не удалось.

3.2. Эволюция одномерного профиля

Физически интересные процессы столкновения, аннигиляции и отражения ступеней при произвольных начальных условиях и скоростях приводят к профилю поверхности общего вида, так что приходится непосредственно решать уравнение (9). Для этого типа задач была разработана конечно-разностная схема интегрирования уравнения. Симметричный случай позволяет использовать более эффективный метод преобразования Фурье и, дополнительно, оценить точность используемых алгоритмов вычислений.

Для произвольного случая приведем уравнение (9) преобразованием Гильберта к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \sin \varphi \right) \frac{dx'}{x' - x} \quad (14)$$

с явно выраженной производной по времени. Интегрируя по частям, получаем громоздкое, но более удобное для построения численной схемы выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\pi} \int \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi \right) \Big|_{x'} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi \right) \Big|_x \right] \frac{dx'}{(x' - x)^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где сингулярное ядро под интегралом сходится уже как $1/x^2$. Поскольку мы предполагаем, что профиль описывается непрерывной функцией, имеющих непрерывные производные по крайней мере до четвертого порядка, выражение в правой части (15) интегрируется в смысле главного значения (так же, как в (14) и ранее в (10)). Заменяя производные конечными разностями второго порядка, построим явную разностную схему решения с шагом по времени Δt и по координате Δx . Использование общих формул интегрирования (формула трапеций и т. д.), не учитывающих сингулярности ядра, не обеспечивает необходимой точности вычисления свертки и

приводит к неустойчивости решения. Поэтому интегрирование выполнялось по алгоритму, изложенному в Приложении. Решение устойчиво при соблюдении условия

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^3} < 1, \quad (16)$$

аналогичного условию Куранта для гиперболических уравнений. В большинстве случаев значение шага по координате выбиралось равным 0.1 и по времени — равным 0.02, а число узлов конечно-разностной схемы варьировалось от 1000 до 10000 в зависимости от масштаба эволюции системы. Оценка точности решения выполнялась на сетке с половинным шагом по координате и с шагом по времени 0.005. Различие не превышало 1 %.

Столкновение симметричных ступеней с одинаковыми встречными скоростями позволяет использовать эффективные методы преобразования Фурье. В фурье-компонентах уравнение (14) имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} + |k|^3 \varphi_k = -|k| F_k(\sin \varphi), \quad (17)$$

где φ_k — гармоника профиля с волновым вектором k , а $F_k(\sin \varphi)$ — преобразование Фурье от синуса профиля. Задача сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных между собой функцией в правой части. На каждом шаге по времени после интегрирования системы уравнений выполнялось обратное преобразование Фурье для воссоздания профиля. Затем вычислялось преобразование Фурье от синуса этой функции, которое использовалось для построения следующей итерации. Четность φ позволила выполнять быстрое преобразование Фурье только по косинусам.

Корректность и сходимости методов расчета проверялась на тестовых задачах. Для метода разд. 3.2 проводился счет на установление профиля ступени для ряда скоростей и сравнение установившегося профиля с результатами стационарного случая разд. 3.1. Начальный профиль соответствовал профилю неподвижной ступени (11). Другим критерием точности счета служило сравнение сценариев симметричных столкновений ступеней, выполненное обоими способами. Проверка показала, что к недостаткам алгоритма для произвольного профиля следует отнести недостаточно высокую точность вычисления свертки, что приводило к сглаживанию профиля ступеней и, в результате, к увеличению значения критических скоростей (см. ниже). Сравнение расчетов по этой схеме с более точными расчетами

профиля, энергии и импульса для стационарной ступени (разд. 3.1), а также с результатами расчетов симметричных столкновений позволяет оценить точность решения. Максимальное расхождение между параметрами не превышало $\sim 10\%$. Эта величина и характеризует точность данного расчета.

Дополнительным критерием корректности решения являлась проверка закона сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x' - x|} \right) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} \frac{\partial \varphi(x')}{\partial t} dx dx' + \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 1 - \cos \varphi \right] dx. \quad (18)$$

Подобная проверка проводилась для ряда скоростей и показала, что в пределах 5–10% энергия сохраняется со временем. Это дает нам дополнительную оценку точности вычислений.

3.3. Двумерный случай

Расчет движения ступеней в двумерном случае требует существенно больших ресурсов компьютера, чем в одномерном случае. Это ограничило наши возможности решением симметричной задачи столкновения ступеней. Высокая симметрия задачи позволила использовать эффективный метод, основанный на преобразовании Фурье, аналогично методу предыдущего раздела. Уравнение движения в общем случае имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{d^2 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \Delta \varphi - \sin \varphi. \quad (19)$$

Применив преобразование Фурье, получаем

$$\frac{d^2 f_{km}}{dt^2} + |\mathbf{k}|^3 f_{km} = -|\mathbf{k}| F_{km}(\sin \varphi), \quad (20)$$

где f_{km} — амплитуда гармоники с волновым вектором \mathbf{k} . Мы получили систему $M \times N$ обыкновенных дифференциальных уравнений. В соответствии с симметрией задачи разложение профиля в ряд проводится по косинусам, что вдвое сокращает число уравнений. Специфика быстрого преобразования Фурье уменьшает число уравнений еще в четыре раза.

Алгоритм решения был протестирован на решении одномерной задачи (движение одномерной ступени в двумерном случае, установление профиля, симметричные столкновения). Было получено хорошее согласие решений, как по эволюции профиля, так и по значению критической скорости в пределах указанной ранее точности.

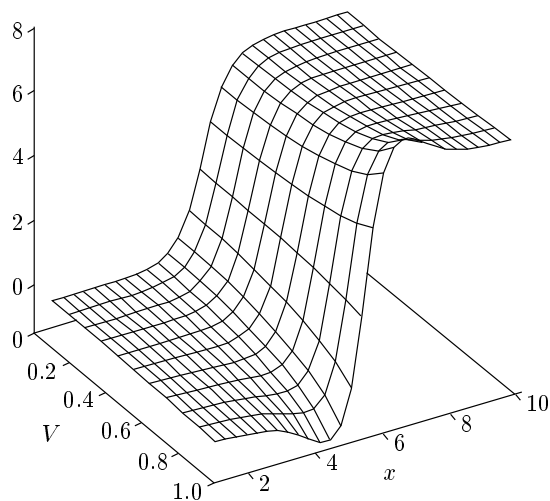


Рис. 2. Профиль равномерно движущейся одиночной ступени при различных скоростях. Масштаб по вертикали: межплоскостное расстояние равно 2π

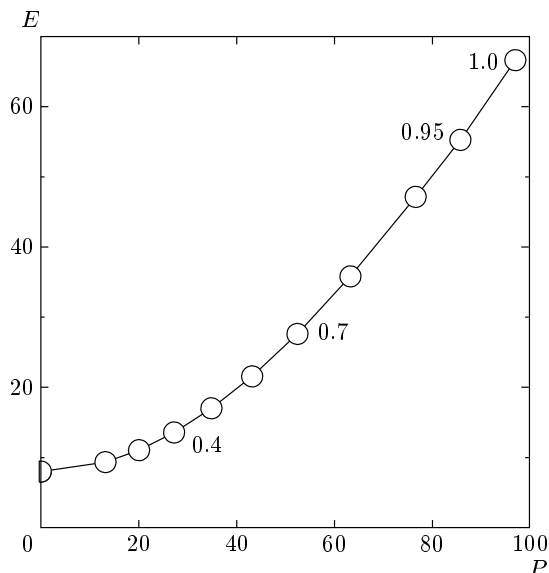


Рис. 3. Зависимость энергии одиночной ступени от импульса. Цифры на графике обозначают значения скорости

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОДИНОЧНОЙ СТУПЕНИ

4.1. Профиль, энергия и импульс одиночной ступени

Решение уравнения (10) при $V = 0$ является монотонной функцией x . С увеличением скорости на профиле появляются два симметричных горба, см. рис. 2. Убывание профиля на бесконечности вместо экспоненциального становится степенным (формула (12)). Подставив профиль в выражение для энергии и импульса, которые в стационарном случае имеют вид

$$E = \frac{MV^2}{2} + \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 1 - \cos \varphi \right] dx, \quad (21)$$

$$P = MV,$$

где параметр M дается выражением

$$M = \frac{1}{\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x' - x|} \right) \frac{\partial \varphi(x')}{\partial x'} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} dx dx', \quad (22)$$

определим закон дисперсии. Результат расчета приведен на рис. 3. При малых скоростях энергия квадратично зависит от импульса. С приближением скорости к единице эта зависимость становится почти линейной («релятивистский» случай). Заметим, что параметр M не является «массой» единицы длины ступени, так как сам зависит от профиля, т. е. от скорости движения. Отдельно был исследован вопрос, как на значениях энергии и импульса сказывается

радиус интегрирования выражений (21)–(22). Значения параметров незначительно, логарифмически, зависят от размеров области интегрирования. В качестве иллюстрации приведем отношения параметров задачи при радиусах интегрирования 100 (а) и 1000 (б) для двух скоростей: $V = 0.2$, $E_b/E_a = 1.06$, $P_b/P_a = 1.44$; $V = 0.95$, $E_b/E_a = 1.24$, $P_b/P_a = 1.32$.

4.2. Движение с учетом пересыщения и диссипации

В общем случае движение поверхности сопровождается диссипацией энергии. При низких температурах диссипация обусловлена в основном взаимодействием с фонами, которое носит существенно нелокальный характер, и его последовательное описание выходит далеко за рамки используемой нами модели. Для качественного описания эффектов диссипации добавим в общее уравнение движения поверхности (4) член, пропорциональный $\partial \varphi / \partial t$. Далее, при наличии диссипации стационарное движение ступени должно поддерживаться пересыщением в системе, что эквивалентно добавлению в уравнение движения постоянного члена. В результате получаем вместо (9)

$$\frac{1}{\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x-x'|} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \sin \varphi + \delta - \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (23)$$

Трение, вообще говоря, приводит к изменению формы ступени. Поскольку так определенные параметры δ и γ при низких температурах малы, искажение формы будет невелико. Численный расчет по схеме, приведенной в разд. 3.1, показывает, что при $\gamma = 0.1$, максимальных скоростях и соответствующих пересыщениях вызванное диссипацией изменение профиля не превышает нескольких процентов.

Скорость изменения полной энергии ступени при наличии пересыщения и диссипации равна

$$\frac{dE}{dt} = \delta \frac{d}{dt} \left(\int \varphi dx \right) - \gamma \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (24)$$

В стационарном случае потери на трение компенсируются пересыщением и мы получаем соотношение для скорости движения ступени

$$V = - \frac{2\pi\delta}{\gamma \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx}. \quad (25)$$

Из этого выражения видно, что скорость будет пропорциональна пересыщению только при малых значениях. При росте скорости изменение формы ступени приведет к отклонению от линейной зависимости. Результат численного расчета зависимости скорости от пересыщения приведен на рис. 4.

Приложение пересыщения приводит к ускорению ступени. Оценим время, необходимое для достижения критической скорости, достаточной для рождения нового слоя. При скоростях $V \leq V_c$, как видно из рис. 3, энергия примерно квадратична по скорости, и можно написать соотношение

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{d}{dt} \left(\frac{MV^2}{2} + \text{const} \right) \approx MV \frac{dV}{dt} = 2\pi\delta V, \quad V = \frac{2\pi\delta}{M} t. \quad (26)$$

Отсюда видно, что характерное время разгона при достижимых в эксперименте значениях пересыщения $\delta \leq 0.1$ порядка $M/\delta \sim 10^3-10^4$.

4.3. Малые колебания

Спектр малых колебаний поверхности (рипплов) в отсутствие ступеней легко получить, линеаризуя уравнение (4):

$$\omega^2 = (\mathbf{k}^2 + 1)|\mathbf{k}|. \quad (27)$$

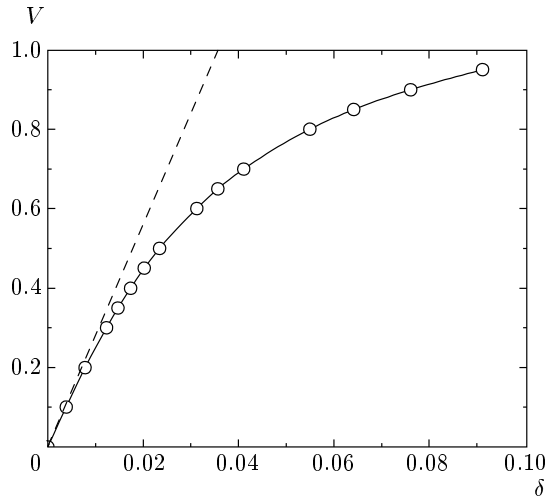


Рис. 4. Скорость стационарного движения одиночной ступени при наличии диссипации и пересыщения

Минимальная фазовая скорость при таком законе дисперсии равна $\sqrt{2}$, так что движение ступени со скоростями, не превышающими $\sqrt{2}$, не сопровождается излучением рипплов.

Спектр малых колебаний самой ступени зависит от ее скорости. В рамках принятой модели каждое такое колебание характеризуется волновым вектором q , направленным вдоль ступени (ось y), и номером соответствующей ветви. Поскольку профиль ступени есть функция непрерывной переменной x , число ветвей, вообще говоря, бесконечно. Среди них есть одна бесщелевая ветвь, соответствующая изгибным колебаниям ступени. Закон дисперсии для этой ветви при малых q и произвольных скоростях V можно найти следующим способом.

Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$\varphi = \varphi_0(x - Vt) + f(x - Vt)e^{-i\omega t + iqy}, \quad (28)$$

где f — малое отклонение от стационарного профиля φ_0 . Линеаризованное уравнение (4) запишется в фурье-компонентах как

$$\begin{aligned} \left(k^2 + q^2 + 1 - \frac{(\omega + kV)^2}{\sqrt{k^2 + q^2}} \right) f_k &= \\ &= \int I_{k'-k} f_{k'} dk', \quad (29) \\ I_k &= \frac{1}{2\pi} \int (1 - \cos \varphi_0(x)) e^{ikx} dx. \end{aligned}$$

Пусть, далее, $f_k = ik\varphi_{0k} + \psi_k$, где $\psi_k \rightarrow 0$ при $q \rightarrow 0$

(и, соответственно, $\omega \rightarrow 0$). Тогда, умножая на $k\varphi_{0k}$ и интегрируя, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\omega + kV)^2}{\sqrt{k^2 + q^2}} - |k|V^2 - \frac{k^2V^2}{\sqrt{k^2 + q^2}} \right) \times \varphi_{0k}^2 k^2 dk = 0, \quad (30)$$

или

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{\infty} \left(q^2 + kV^2 - \frac{k^2V^2}{\sqrt{k^2 + q^2}} \right) k^2 \varphi_{0k}^2 dk}{\int_0^{\infty} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + q^2}} \varphi_{0k}^2 dk}. \quad (31)$$

При малых скоростях

$$\varphi_{0k} = \frac{1}{ik \operatorname{ch}(\pi k/2)},$$

это дает (в логарифмическом приближении по q)

$$\omega^2 = \frac{2q^2}{\pi \ln(1/q)} + \frac{q^2V^2}{2}. \quad (32)$$

Вопрос о величине щели в спектре «оптических» колебаний кратко обсуждается в следующем разделе.

4.4. Устойчивость ступени

Как видно из уравнения (31), частота изгибных колебаний при любых скоростях остается существенно положительной. Это значит, что движущаяся ступень, так же как и неподвижная, устойчива по отношению к возникновению изгибных колебаний, по крайней мере, длинноволновых. С другой стороны, ступень может оказаться неустойчивой по отношению к колебаниям другого типа, связанным с изменением профиля ступени, в том числе и при нулевом q .

Возможность такой неустойчивости связана с тем обстоятельством, что закон дисперсии ступени, представленный на рис. 3, имеет распадный характер. Можно показать, что минимальная скорость, при которой становится возможным распад, соответствует процессу распада одной ступени на три с одинаковыми импульсами и энергиями (распад на две ступени невозможен при сохранении граничных условий на бесконечности). Это явление дает новый качественный механизм размножения ступеней в том же атомном слое либо с возникновением нового слоя в зависимости от того, какой из трех

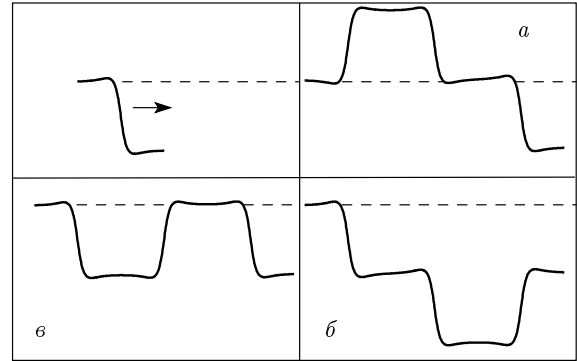


Рис. 5. Возможные сценарии распада ступени выше критической скорости 0.77. Слева сверху — начальная ступень, движущаяся в направлении стрелки. Штриховой горизонталью обозначен уровень растущей плоскости. *a* — Возникновение зародыша в новом слое за фронтом ступени, *б* — образование зародыша перед фронтом, *в* — расщепление ступени на три

возможных сценариев такого распада реально осуществляется (см. рис. 5). Численная оценка по спектру рис. 3 дает значение критической скорости около 0.77. Достижение этой критической скорости не означает, однако, что этот процесс обязательно начнется. Данное условие показывает только, что теперь состояние движущейся изолированной ступени становится метастабильным. Распад из этого состояния может быть индуцирован любой неоднородностью, например локальным искривлением ступени. Беспороговое размножение ступеней начинается при достижении точки абсолютной неустойчивости.

Рассмотрим движение изолированной ступени с постоянной скоростью V в случае, когда появляется отклонение от равновесной формы φ_0 ,

$$\varphi = \varphi_0(x - Vt) + f(x)e^{-i\omega t}. \quad (33)$$

Полагая отклонение малым и пренебрегая членами высших порядков, получим следующее уравнение движения для отклонения:

$$-\frac{1}{\pi} \int \ln \left(\frac{R}{|x-x'|} \right) (-\omega^2 f + 2i\omega V f' + V^2 f'') dx' - f'' + \cos(\varphi_0) f = 0. \quad (34)$$

Выполнив преобразование Фурье, получаем уравнение дисперсии

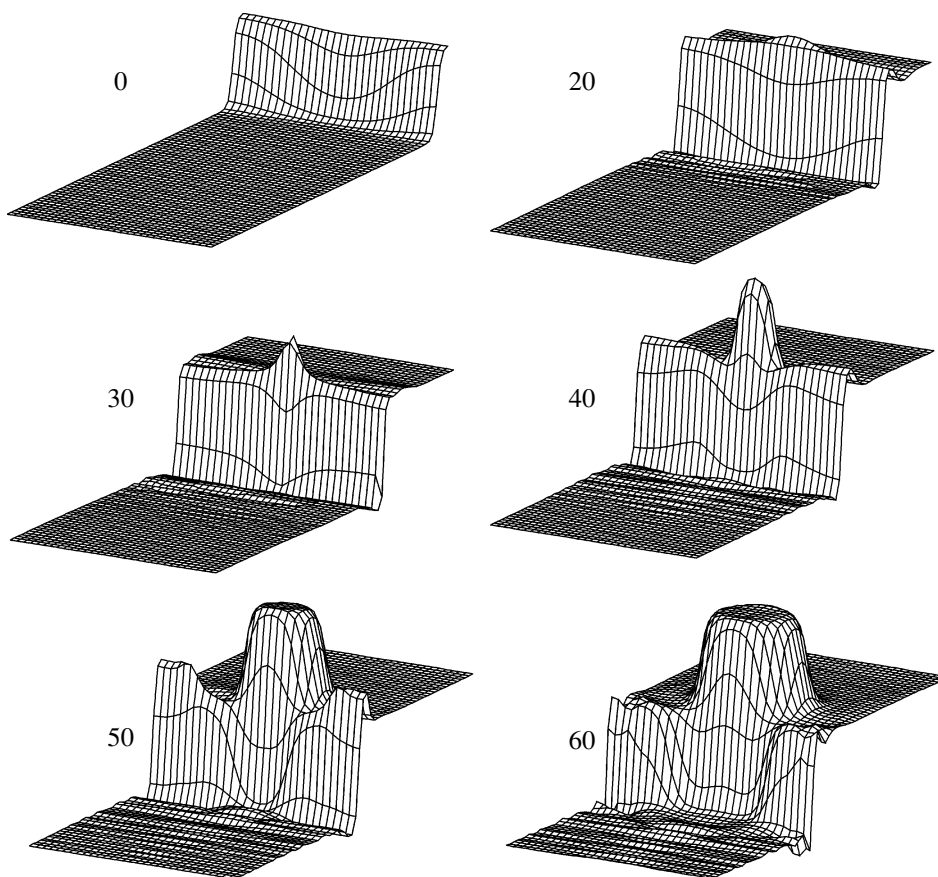


Рис. 6. Развитие неустойчивости при скорости, разрешающей распад ступени. Начальная ступень слабо изогнута, $V = 0.95$. Цифры обозначают моменты времени

$$\begin{aligned}
 f_k \left(1 + k^2 - \frac{\omega^2 + 2V\omega k + V^2 k^2}{|k|} \right) &= \\
 &= \int f_{k'} I_{k'-k} dk', \quad (35) \\
 I_q &= \frac{1}{2\pi} \int (1 - \cos \varphi_0) e^{iqx} dx.
 \end{aligned}$$

Наступление абсолютной неустойчивости соответствует случаю, когда частота обращается в нуль.

Однако, вместо того чтобы решать это уравнение, оказалось проще промоделировать распад ступени, решая непосредственно двумерное уравнение движения (4). В качестве малой неоднородности использовалась слабая начальная кривизна линии ступени. Результат моделирования для $V = 0.95$ представлен на рис. 6. Заметим, что контрольный счет для прямолинейной ступени с той же скоростью не демонстрировал возникновения нового слоя за тот же интервал времени, что согласуется с приведенным выше утверждением о метастабильности таких ступеней. Как видно на рисунке, в середине ступени,

где радиус кривизны линии максимален, начинается подъем поверхности. К моменту $t = 50$ уже сформирован зародыш нового слоя, который в дальнейшем увеличивает свой размер ($t = 60$).

При численном моделировании наблюдается лишь один из трех возможных вариантов распада ступени, изображенных на рис. 5, а именно, вариант *a*, при котором образуется новый атомный слой, причем передний фронт имеет тот же знак, что и исходная ступень. Критическая скорость для такого процесса при слабом начальном возмущении близка к единице. Что же касается двух других вариантов распада, то вопрос об условиях, необходимых для их осуществления, остается неисследованным.

Как отмечалось ранее, при решении одномерной задачи не удавалось найти стационарный профиль ступени при $V > 1$. По-видимому, эта скорость соответствует точке абсолютной неустойчивости. Пример эволюции одномерного профиля ступени со скоростью $V = 1.2$ приведен на рис. 7. Ступень, дви-

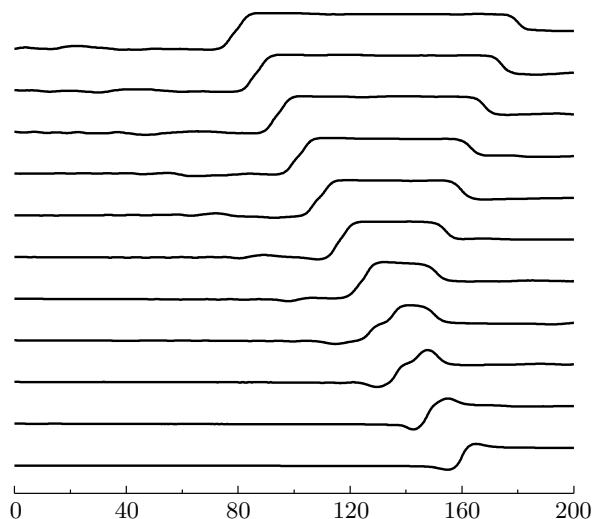


Рис. 7. Распад ступени, разогнанной до скорости 1.2

жущаяся налево, генерирует зародыш следующего слоя, расширяющийся со временем. Интересно, что в прежнем направлении продолжает движение ступень высотой в два межатомных расстояния. Как видно на рис. 6, эта особенность сохраняется и в двумерном случае, по крайней мере в течение интервала времени, использованного в расчетах. Вопрос об устойчивости ступени двойной высоты требует дополнительного исследования.

5. СТОЛКНОВЕНИЕ СТУПЕНЕЙ

При расчетах столкновения ступеней мы предполагали, что пересыщение и диссипация не оказывают существенного влияния на сценарий столкновений, т. е. полагали δ и γ равными нулю. Это предположение оправдывается оценками, приведенными в разд. 4.2. Поскольку, как будет видно ниже, время столкновения лежит в интервале 10–100, за это время энергия системы изменится не более чем на 1 %, что лежит в пределах точности нашего расчета. Таким образом, мы можем рассматривать процесс столкновения ступеней, движущихся по инерции.

5.1. Одномерный случай

Профили ступеней, рассчитанные для заданной скорости по методу разд. 3.1, использовались в качестве начального приближения для решения задач со столкновением, для того чтобы избежать потерь времени на установление стационарной формы ступеней.

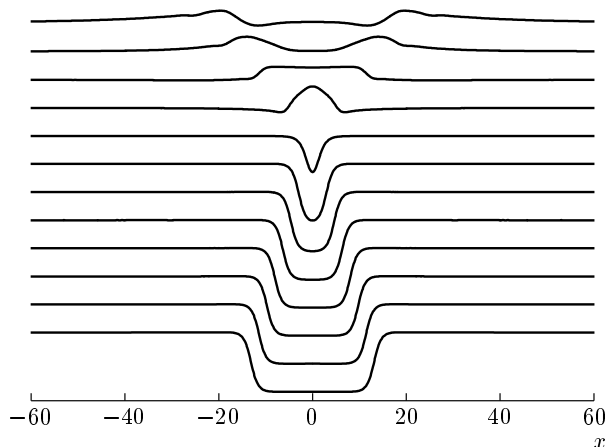


Рис. 8. Симметричное столкновение ступеней с аннигиляцией

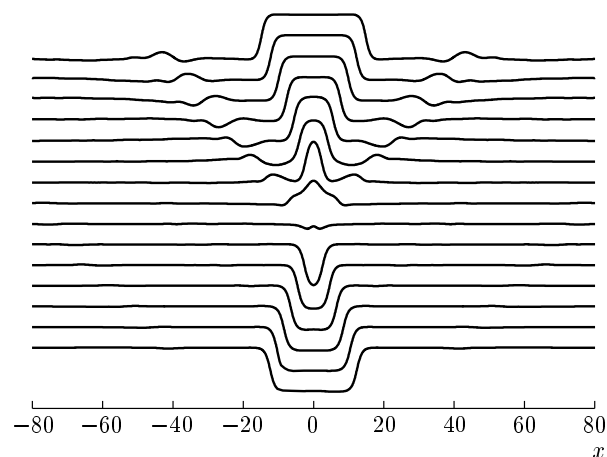


Рис. 9. Симметричное столкновение ступеней с зарождением нового слоя. Видно образование рипплов. Малое изменение скорости ступеней свидетельствует о том, что риппловы уносят незначительную часть энергии

Столкновение ступеней с равными и противоположными скоростями разыгрывалось по двум сценариям. При малых скоростях до достижения критической скорости всегда наблюдалась аннигиляция ступеней с излучением пакета рипплов, см. рис. 8. Выше критической скорости V_c всегда наблюдалось образование нового слоя, как показано на рис. 9. При этом также излучались риппловы, распространяющиеся со скоростью, большей скорости движения ступеней. Как видно на рис. 9, скорость ступеней изменяется незначительно, т. е. энергия излученных рипплов мала по сравнению с энергией ступеней.

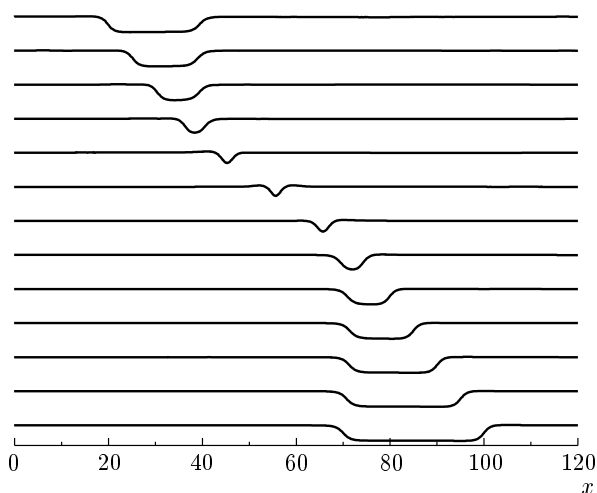


Рис. 10. Отражение ступеней с различными скоростями. По завершении процесса ступени обмениваются скоростями и разлетаются

пеней. Численное значение критической скорости, полученное методом Фурье для симметричного случая, примерно равно 0.4, тогда как общий метод для произвольного профиля дает несколько большее значение критической скорости, примерно равное 0.45. Суммируя результаты, отметим, что уже при скоростях ступеней, значительно меньших скорости звука, столкновения приводят к образованию нового атомного слоя и росту грани кристалла.

Столкновения ступеней с произвольными начальными скоростями, как отмечено выше, рассчитывались общим методом. Сценарии процессов становятся более разнообразными. Помимо описанных в предыдущем разделе процессов аннигиляции и рождения нового слоя, наблюдается отражение ступеней, а также рождение нового слоя с сохранением пары ступеней в прежнем, т. е. рождение новой пары ступеней. Первый сценарий показан на рис. 10. Излучение рипплов незначительно, и ступени обмениваются энергией, практически не изменяя величины скоростей. Второй сценарий, реализуемый при высоких скоростях, более сложен, рис. 11. Начальная энергия перераспределяется между четырьмя ступенями. Интересно отметить, что пара ступеней в новом слое движется в направлении, заданном левой первоначальной ступенью.

Сводный график, отображающий сценарии столкновений при произвольном соотношении скоростей, приведен на рис. 12. Области, очевидно, симметричны относительно биссектрис квадрантов. Этот график дает нам возможность дополнительной

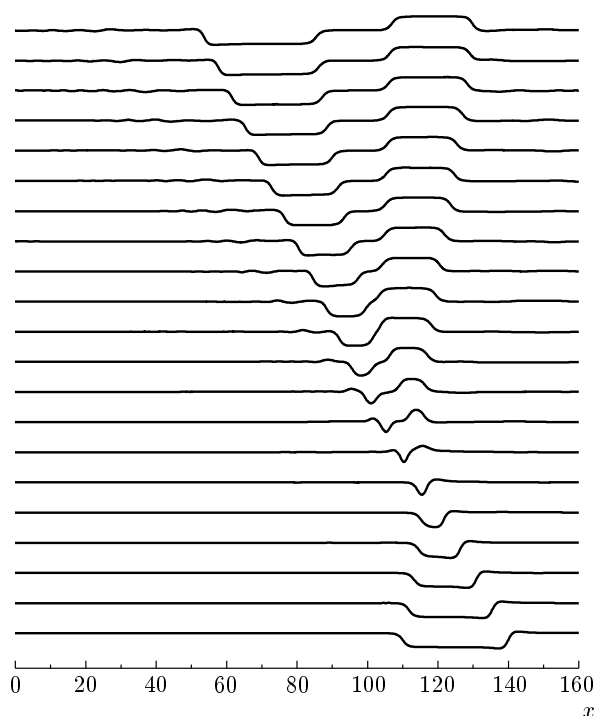


Рис. 11. Столкновение ступеней с различными скоростями, приводящее к рождению нового слоя с сохранением ступеней в прежнем слое. После образования пара ступеней нового слоя удаляется от пары родителей

оценки точности численного счета.

5.2. Двумерный случай

В реальной ситуации маловероятно чисто одномерное столкновение прямых и параллельных ступеней, как рассматривалось выше в одномерном случае. Ступени, порожденные двумерным зародышеобразованием, источниками Франка–Рида или спиральным ростом, искривлены. В предыдущей работе [4] отмечалось, что столкновение ступеней с большим радиусом кривизны качественно должно происходить по сценарию, близкому к одномерному. Это следствие того факта, что возмущение, возникающее в точке пересечения, не накапливается со временем, поскольку сама точка пересечения движется со скоростью, превышающей скорость распространения возмущений вдоль ступени (пока размер области пересечения мал по сравнению с радиусом кривизны).

Проверка этого утверждения и изучение процесса столкновения изогнутых ступеней потребовали решения двумерной задачи. На прямоугольнике с отношением сторон 1 : 2, выбранном так для наблюде-

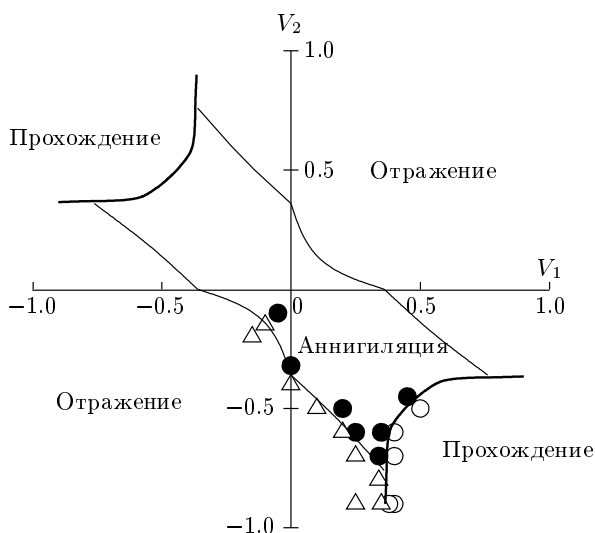


Рис. 12. Диаграмма, построенная по результатам расчетов столкновений в одномерном случае. Внутренняя область соответствует процессам аннигиляции сталкивающихся ступеней. В области высоких скоростей наблюдается прохождение ступеней с рождением нового слоя. При скоростях, не попадающих в эти области, происходит отражение ступеней

ния только за одним столкновением, были сформированы две кольцевые ступени и заданы их начальные скорости, направленные по радиусу от их центра. Шаг по координате составлял 0.2, по времени — 0.02. Это обеспечивало устойчивость алгоритма, см. соотношение (16). На первом этапе рассчитывались столкновения колец с малым радиусом ~ 5 . Выяснилось, что критическая скорость в этом случае подрастает и достигает значения порядка 0.85. Подробно влияние кривизны ступени на значение критической скорости не исследовалось, поэтому ограничимся упоминанием этого факта. На втором этапе для расчета была выбрана область размером 512×1024 . Радиус ступеней равнялся половине меньшего расстояния ~ 50 . Расчет проводился для скоростей 0.3, 0.4 и 0.6.

На рис. 13 в левой колонке показана эволюция поверхности при столкновении колец ступеней со скоростью 0.6. В правой колонке размещены два взаимно перпендикулярных сечения, проходящих через центр симметрии системы. Сплошная линия показывает разрез плоскостью, параллельной короткой стороне прямоугольника, пунктирная — параллельной длинной стороне, масштаб кривых одинаков, см. нижний правый график. Профиль, отображенный сплошной линией, перпендикулярен ступеням в точ-

ке их соприкосновения, т. е. аналогичен профилю одномерной задачи. Видно, что его временная эволюция соответствует результатам одномерной задачи (см. рис. 9), как и предполагалось в работе [4]. Численный счет показал тонкую структуру поверхности после столкновения, которую трудно было установить на основе качественных рассуждений. Действительно, как указывалось в [4], на начальном этапе столкновения скорость распространения возмущений вдоль линии ступени меньше скорости движения геометрической точки пересечения. Как следует из расчета, это приводит к торможению этого участка и образованию поверхности на следующем уровне (два симметричных пика около зародыша нового слоя). Угловая точка на линии пересечения ступеней выравнивается довольно медленно, так что эти два пика наблюдаются до конца расчета. На подробном графике видно, что от угловой точки расходятся волны не только вдоль ступени, но и по всей поверхности. После формирования зародыш нового слоя продолжает увеличиваться в размерах и изменяет форму от овальной до круглой.

Расчет с граничной скоростью 0.4 показал, что центральный зародыш не образуется, но возникают два симметричных долгоживущих пика в месте пересечения ступеней, доходящих до следующего слоя. За время расчета они двигались от центра системы, не увеличиваясь в размерах, но и не рассасываясь, т. е. время их жизни достаточно велико. При скорости 0.3 пики уже не достигают следующего слоя и рассасываются со временем.

Таким образом, можно утверждать, что столкновение изогнутых ступеней также приводит к зарождению нового слоя, как декларировалось ранее в [4]. Новое качественное утверждение состоит в том, что ступеням с малым радиусом кривизны требуется большая скорость для образования следующего кристаллического слоя. Возникновение пиков на поверхности в точке пересечения ступеней, по-видимому, также является общим свойством столкновений. Эти результаты показали, что сценарии столкновения ступеней на кристаллической поверхности могут иметь очень разнообразный характер. Так, расчет столкновения ступеней синусоидальной формы показал, что при схлопывании изолированной области пик возникает уже при достаточно низких скоростях. Поэтому не исключено, что геометрические особенности формы ступеней могут привести не только к увеличению, но и к уменьшению критической скорости.

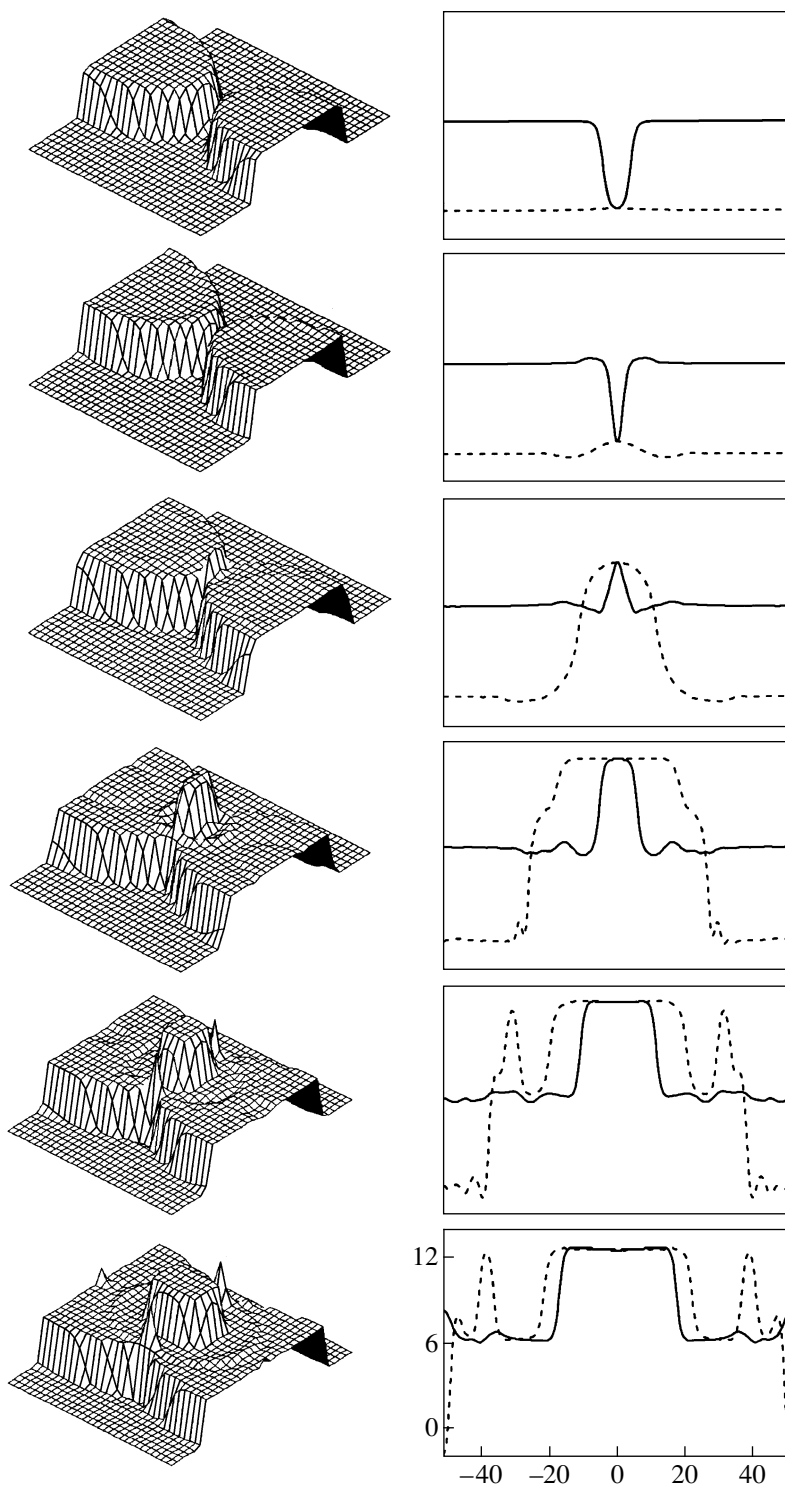


Рис. 13. Столкновение симметричных кольцевых ступеней со скоростью $V = 0.6$. В правой колонке показаны разрезы профиля в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, проходящих через центр симметрии системы

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, используя численное моделирование движения элементарных ступеней на поверхности кристаллов гелия и процессов столкновения ступеней, мы показали, что при достаточно высоких скоростях движения становятся возможными процессы генерации зародышей нового атомного слоя как одиночной движущейся ступенью, так и в результате столкновения ступеней противоположного знака с «перебросом» в соседний слой, а также отражение таких ступеней друг от друга. Тем самым предложен качественно новый механизм роста кристаллических граней, в основе которого лежит явление кинематического размножения элементарных ступеней.

Как отмечалось во Введении, предположение о непересекаемости ступеней лежит в основе классической теории роста атомно-гладких граней и, в частности, теории спирального роста. Одна из основных особенностей спирального роста — его некумулятивный характер, т. е. отсутствие зависимости скорости роста грани от числа ростовых дислокаций, — есть прямое следствие непересекаемости ступеней [2]. При учете эффектов кинематического размножения ступеней следует ожидать появления такой зависимости. Разумеется, зависимость скорости роста от величины пересыщения также должна измениться. Таким образом, существующая теоретическая интерпретация экспериментальных данных по спиральному росту кристаллов гелия [3] нуждается в существенной корректировке.

Условия применимости излагаемой здесь теории, как уже отмечалось, хорошо соблюдаются для всех граней кристаллов ^4He за исключением грани (0001), где они выполнены лишь с небольшим запасом. Поэтому не следует ожидать буквального количественного выполнения предсказаний теории в этом последнем случае. В то же время практически все имеющиеся экспериментальные данные, за небольшим исключением, относятся именно к этой грани. С этой точки зрения наибольший интерес представляют качественно новые явления, в которых могли бы проявляться предсказанные эффекты.

Кинематическое размножение ступеней, возможно, играет важную роль в эффекте «взрывного» роста бездислокационной грани (0001) кристалла ^4He . На рис. 14 приведены данные работы [3], точками отмечены средние значения пересыщения, при которых наблюдался переход грани (0001) в состояние

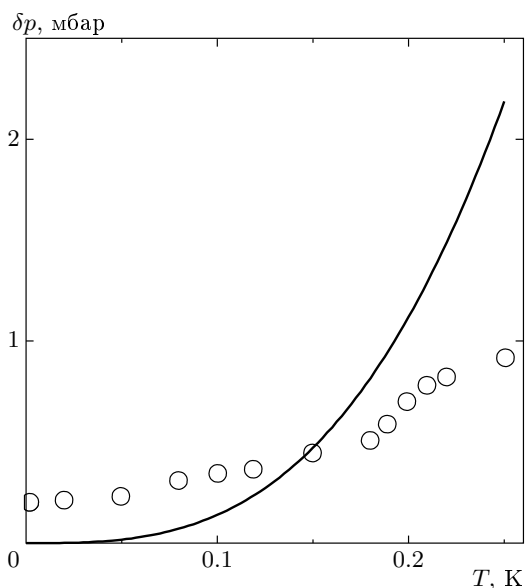


Рис. 14. Сравнение результатов экспериментов по «взрывному» росту [3] с расчетом по формуле (26). Кружки — пересыщения, при которых наблюдался такой рост. Кривая показывает пересыщения, при которых стационарная скорость ступеней достигает критического значения около 0.4. Видно, что до температуры 0.15 К малых пересыщений достаточно для разгона ступеней до скоростей, ведущих к их кинематическому размножению

быстрого роста. Кривая линия — расчет для скорости, равной критической с подвижностью ступеней (трением), взятой из экспериментальных данных этой же работы. Видно, что до температуры 0.15 К величины пересыщений, полученные в эксперименте, достаточны для разгона ступеней до критической скорости, при которой начинается кинематическое размножение. Выше наблюдается обратная ситуация. Однако надо отметить, что не следует ожидать буквального согласия этой приближенной оценки с экспериментом. Процесс «взрывного» роста имеет значительно более сложный характер и не может быть объяснен единственной причиной — появлением качественно нового механизма роста бездислокационной грани. Это ясно, например, из того обстоятельства, что переход в быстрорастущее состояние происходит после достаточно длительного воздействия пересыщения на грань, т. е. зависит от предыстории. Однако, поскольку наблюдаемые пересыщения разгоняют ступени до скоростей, близких к критической, кинематическое размножение ступеней несомненно является существенным фактором «взрывного» роста грани.

Другой эффект — аномально высокие скорости роста граней, наблюдаемые в интервале температур 0.2–0.8 К на свободно растущем кристалле ${}^4\text{He}$ (см. краткий обзор [16]), — также может быть связан с кинематическим размножением ступеней. К настоящему времени совокупность экспериментальных данных позволяет с большой степенью вероятности полагать, что данное явление и «взрывной» рост грани имеют общие физические корни. По этой причине все сказанное выше относится и к аномальному росту. Невысокие значения пересыщений, заведомо недостаточные ни для разрушения переходов ограничения, ни для двумерного зародышеобразования, приводят, тем не менее, к перерождению граней и увеличению скорости их роста на два–три порядка. Пока неизвестен иной механизм, кроме кинематического размножения, способный так существенно изменить кинетику граней при столь невысоких отклонениях от равновесия.

Наконец, отметим, что в недавней работе [17] показано, что эффект кинематического размножения ступеней при их столкновении хорошо объясняет наблюдаемый аномально быстрый рост граней (0001) кристаллов гелия под действием звуковой волны большой амплитуды.

Авторы признательны А. Ф. Андрееву, Г. Е. Воловику, Р. Йохамсену и В. И. Марченко за конструктивное и полезное обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16806-а) и в рамках программы президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-5763.2006.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интеграл вида

$$I = \int \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx \quad (\text{П.1})$$

сходится в смысле главного значения, если функция f дважды непрерывно дифференцируема. Выделим особенность интеграла,

$$I = \int_h^\infty \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx + \int_{-h}^h \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx + \int_{-\infty}^{-h} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} dx. \quad (\text{П.2})$$

Составим численную схему, предполагая, что на малом отрезке $2h$ функция f хорошо приближается полиномом второго порядка. Такая аппроксимация позволит проинтегрировать особенность (второй интеграл). Разобьем ось x на отрезки длиной $2h$ и на каждом таком отрезке заменим функцию f полиномом

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (\text{П.3})$$

Коэффициенты a_i на каждом отрезке выразим через значения функции f из условия равенства значений полинома и функции на краях и в центре отрезка. Подставляя полиномы в выражение (П.2) и явно вычисляя интегралы, получим после приведения подобных членов искомую численную схему:

$$\begin{aligned} f_n &= f(nh), \\ I &\approx \frac{1}{h} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j f_j, \quad c_{-j} = c_j, \\ c_0 &= -4, \quad c_1 = 4 - \frac{5}{4} \ln 3, \\ c_{2k} &= 4 \left[k \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) - 1 \right], \\ c_{2k+1} &= 4 - \frac{1}{2} \left[(4k-1) \ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (4k+5) \ln \left(\frac{2k+3}{2k+1} \right) \right], \quad k = 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

С ростом номера величины коэффициентов убывают как $1/n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. K. Burton, N. Cabrera, and F. C. Frank, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A* **243**, 299 (1951).
2. A. A. Chernov, *Crystal Growth*, Vol. 3 of *Modern Crystallography*, Springer, Berlin (1984).
3. J. P. Ruutu, P. J. Hakonen, A. V. Babkin et al., *J. Low Temp. Phys.* **112**, 117 (1998).
4. А. Я. Паршин, В. Л. Цымбаленко, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 372 (2003).
5. А. Ф. Андреев, А. Я. Паршин, *ЖЭТФ* **75**, 1511 (1978).
6. С. В. Иорданский, С. Е. Коршунов, *ЖЭТФ* **87**, 927 (1984).
7. E. Fradkin, *Phys. Rev. B* **28**, 5338 (1983).
8. D. S. Fisher and J. D. Weeks, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1077 (1983).

9. P. Nozières, *Shape and Growth of Crystals, in Solids Far from Equilibrium*, ed. by C. Godrèche, Cambridge Univ., Cambridge (1992).
10. P. Nozières and F. Gallet, *J. de Phys.* **48**, 353 (1987).
11. S. Balibar, H. Alles, and A. Ya. Parshin, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 317 (2005).
12. L. Puech and B. Castaing, *J. de Phys. Lett.* **43**, L601 (1982).
13. А. В. Бабкин, Д. В. Копелиович, А. Я. Паршин, *ЖЭТФ* **89**, 2288 (1985).
14. О. А. Андреева, К. О. Кешишев, *Письма в ЖЭТФ* **46**, 160 (1987).
15. E. Rolley, C. Guthmann, E. Chevalier, and S. Balibar, *J. Low Temp. Phys.* **99**, 851 (1995).
16. V. L. Tsymbalenko, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 795 (2005).
17. H. Abe, Y. Saitoh, T. Ueda, F. Ogasawara, R. Nomura, Y. Okuda, and A. Ya. Parshin, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**, 023601 (2006).