

СТРУКТУРА АНОДНОЙ ПЛАЗМЫ ГАЗОВОГО РАЗРЯДА С УЧЕТОМ ИОНИЗАЦИОННОГО «ВЫГОРАНИЯ» ГАЗА

*А. В. Жаринов, В. П. Шумилин**

*Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 марта 2006 г.

Рассмотрена задача о структуре анодной плазмы газового разряда с интенсивной ионизацией («выгоранием») нейтральных атомов (нейтралов). Получены аналитические решения уравнения квазинейтральности для распределения потенциала, а также условие существования анодной плазмы в одномерном случае при произвольных зависимостях частоты выгорания нейтралов и концентрации электронов от потенциала. Рассмотрены частные случаи постоянной частоты выгорания нейтралов, ионизации максвелловскими электронами и ионизации интенсивным электронным пучком в условиях бесстолкновительного движения ионов и больцмановского распределения тепловых электронов. Решения для первых двух случаев при нулевом параметре выгорания, т. е. при постоянной концентрации газа, совпадают с решениями, полученными [1] путем разложения в степенные ряды. Показано, что в случае ионизации максвелловскими электронами формирование анодной плазмы при разумных расходах рабочего газа возможно только при достаточно высокой температуре электронов (если в качестве рабочего газа используется, например, ксенон, то $T_e \geq 5$ эВ). Стационарные решения уравнения квазинейтральности при ионизации интенсивным электронным пучком существуют, только если отношение плотности электронного пучка к максимальной плотности тепловых электронов не превышает некоторого предельного значения.

PACS: 52.25.Ya, 52.40.Kh, 52.75.Di, 52.80.Vp

1. ВВЕДЕНИЕ

В классической работе Тонкса и Ленгмюра 1929 г. [1] рассмотрена структура плазмы различной геометрии (плоская, цилиндрическая и сферическая) при различных давлениях как при постоянной скорости ионизации, так и при скорости ионизации, пропорциональной электронной плотности. Поскольку предметом исследования являлась плазма достаточно слабых разрядов, концентрация нейтрального газа предполагалась постоянной. В интенсивных разрядах это условие уже не выполняется и подаваемый в разрядную область рабочий газ в значительной степени «выгорает», т. е. ионизируется. Такая ситуация реализуется, например, в некоторых типах ионных реактивных двигателей [2], оптимальным режимом работы которых является практически полная переработка потока нейтрального газа в поток ускоренных ионов. В этой связи возникает задача о стационарных распре-

делениях потенциала, концентрации заряженных частиц и атомов нейтрального газа (нейтралов) в плазме с учетом интенсивного ионизационного выгорания последних.

Газоразрядные приборы со значительным выгоранием нейтралов в анодной плазме в зависимости от области их применения сильно различаются своими конструктивными особенностями, диапазоном рабочих параметров (в частности, рабочим давлением, а следовательно, режимом движения ионов) и физикой основных процессов. Тем не менее существует ряд устройств, для которых в качестве первого приближения можно рассматривать одномерное движение ионов в режиме свободного пролета. Речь идет, например, об ионных ускорителях с замкнутым холловским током электронов [2, 3] при сильнонеоднородном магнитном поле, когда магнитное поле вблизи анода пренебрежимо мало, либо о газоразрядных источниках ионов без магнитного поля, аналогичных описанным в работе [4]. По этой причине мы ограничимся одномерной задачей и будем

*E-mail: vladimirshumilin@yahoo.com

рассматривать только случай больших длин свободного пробега ионов. При этом уравнение квазинейтральности представляет собой интегральное уравнение Абеля (см., например, [5]) и имеет аналитическое решение, что впервые, по-видимому, было отмечено Фирсовым в 1956 г. [6].

Оказывается, что некоторые свойства анодной плазмы в этом случае не зависят ни от частоты выгорания нейтралов (по аналогии с частотой ионизации, частотой выгорания будем называть коэффициент, стоящий перед концентрацией нейтральных атомов в правой части уравнения непрерывности для нейтралов), ни от вида функции электронной концентрации от потенциала. Такими свойствами являются, в частности, равенство потенциалов и ионных потоков на обеих границах плазмы. Некоторые свойства определяются только зависимостью электронной концентрации от потенциала, например, критическое значение параметра выгорания, выносимая заряженными частицами анодной плазмы на анод мощность, обобщенный критерий Бома образования слоя пространственного заряда и др. По этой причине в разд. 2 рассмотрено решение уравнения квазинейтральности для анодной плазмы с ионизационным выгоранием газа при произвольной частоте выгорания нейтралов и произвольной зависимости электронной концентрации от потенциала. В общем случае получено условие существования анодной плазмы.

В разд. 3 рассмотрен ряд частных случаев: случай бoльцмановского распределения тепловых электронов при постоянной частоте выгорания и при частоте выгорания, пропорциональной электронной плотности; случай, когда газ ионизуется пучком быстрых электронов. Достаточно трудно представить себе физическую ситуацию с постоянной частотой выгорания, разве что несамостоятельный разряд при ионизации однородным потоком рентгеновского излучения. Включение этой модели в настоящую работу оправдано тем, что при постоянной концентрации нейтралов она исследовалась другим методом [1]. Случай ионизации тепловыми электронами вполне применим для ионных ускорителей с замкнутым холловским током электронов при сильнeоdнородном магнитном поле, когда магнитное поле вблизи анода пренебрежимо мало. В случае ионизации пучком быстрых электронов рассматривается газоразрядный ионный источник без магнитного поля, описанный в работе [4]. Рабочий газ при этом поступает через катодную поверхность, вблизи которой расположен цилиндрический полый анод. Анодная плазма отделена от катода слоем пространствен-

ного заряда с полной разностью потенциалов. Через анодную плазму проходит поток быстрых электронов (точнее, два потока — прямой и обратный), а катод подвергается бомбардировке только быстрыми ионами. Квазинейтральность плазмы в этом случае обеспечивается радиальным уходом медленных электронов на анод. Если высота цилиндрического анода много меньше радиуса катода, то задачу можно считать одномерной.

2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Будем считать, что в некоторой точке анодной плазмы потенциал $\varphi(x)$ имеет максимальное значение. Выберем начало отсчета координаты и потенциала в этой точке:

$$\varphi(0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Нейтральный газ подается с плоскости $x = x_a$ ($x_a < 0$), причем обратный поток нейтралов отсутствует. Все ионы, рожденные в области между этой плоскостью и максимумом потенциала, возвращаются обратно, рекомбинируют на поверхности x_a и в виде нейтралов поступают обратно в объем разряда. Таким образом, поток нейтралов с плоскости $x = x_a$ превышает расход газа, которому соответствует плотность потока нейтралов в максимуме потенциала, q_0 . В области между x_a и максимумом потенциала в стационарном состоянии ионы оказываются «запертыми». В самом деле, в силу сохранения тяжелой компоненты

$$eq(x) + j_i(x) = eq_0, \tag{1}$$

где $q(x)$ — плотность потока нейтралов, $j_i(x)$ — плотность ионного тока, e — элементарный заряд, $q(0) = q_0$, поскольку $j_i(0) = 0$.

Рассмотрим общий случай, когда частота выгорания нейтралов является произвольной функцией потенциала. Уравнение непрерывности для нейтралов имеет вид

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\omega(\eta)n_g(x), \tag{2}$$

где $q(x) = n_g(x)v_0$, $v_0 = \text{const}$ — средняя скорость направленного движения нейтралов, $n_g(x)$ — их концентрация, $\omega(\eta) = \omega_0 f(\eta)$, $\omega_0 = \text{const}$ — постоянный коэффициент с размерностью с^{-1} , значение которого определяется выбранной моделью ионизации рабочего газа, $f(\eta)$ — безразмерная функция потенциала,

$$\eta = -e\varphi(x)/T_e,$$

T_e — температура плазменных электронов в энергетических единицах. Принимая безразмерный потенциал в качестве независимой переменной, получаем

$$n_g(\eta) = \frac{q_0}{v_0} \exp \left[-\frac{\omega_0 l}{v_0} \int_0^\eta f(\xi) \frac{ds(\xi)}{d\xi} d\xi \right], \quad (3)$$

$s = x/l$, l — характерная длина задачи.

Считая, что зависимость электронной концентрации от потенциала имеет вид

$$n_e(\eta) = n_0 g(\eta),$$

где n_0 — характерная концентрация медленных электронов, $g(\eta)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, а ионы рождаются с нулевой скоростью, запишем уравнение квазинейтральности плазмы в безразмерном виде:

$$g(\eta) = \pm \int_0^\eta \frac{d\xi}{\sqrt{\eta - \xi}} \times \left\{ f(\xi) \exp \left[-\varepsilon \int_0^\xi f(\zeta) \frac{ds(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \right] \right\} \frac{ds(\xi)}{d\xi}, \quad (4)$$

где множитель перед интегралом принят равным единице, т. е.

$$l = \frac{n_0 v_0}{\omega_0 q_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

M — масса иона. В выражении (4) и далее верхний знак относится к области $s \geq 0$, а нижний знак — к области $s \leq 0$. Параметр выгорания,

$$\varepsilon = \frac{n_0}{q_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

не зависит от ω_0 , поскольку выгорание нейтралов и рождение ионов — это один и тот же процесс ионизации.

Уравнение (4) представляет собой интегральное уравнение Абеля [5] и имеет единственное решение

$$f(\eta) \exp \left[-\varepsilon \int_0^\eta f(\xi) \frac{ds(\xi)}{d\xi} d\xi \right] \frac{ds(\eta)}{d\eta} = \pm \frac{1}{\pi} \frac{dF(\eta)}{d\eta}, \quad (5)$$

где

$$F(\eta) = \int_0^\eta \frac{g(\xi)}{\sqrt{\eta - \xi}} d\xi = 2g(0)\sqrt{\eta} + 2 \int_0^\eta \frac{dg(\xi)}{d\xi} \sqrt{\eta - \xi} d\xi. \quad (6)$$

Из выражения (5) несложно получить дифференциальное уравнение второго порядка для функции $s(\eta)$:

$$f(\eta) \frac{ds(\eta)}{d\eta} \frac{d^2 F(\eta)}{d\eta^2} = \left[\frac{df(\eta)}{d\eta} \frac{ds(\eta)}{d\eta} + f(\eta) \frac{d^2 s(\eta)}{d\eta^2} - \varepsilon f^2(\eta) \left(\frac{ds(\eta)}{d\eta} \right)^2 \right] \frac{dF(\eta)}{d\eta},$$

которое при условии $s(0) = 0$ имеет общее решение

$$s(\eta) = \int_0^\eta \frac{dF(\xi)/d\xi}{f(\xi) [K - \varepsilon F(\xi)]} d\xi, \quad (7)$$

где K — произвольная постоянная. Сравнивая решение (7) с выражением (5) при $\varepsilon = 0$, несложно получить значение этой постоянной $K = \pm\pi$. Окончательно имеем

$$s(\eta) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{dF(\xi)/d\xi}{f(\xi) \left[1 \mp \frac{\varepsilon}{\pi} F(\xi) \right]} d\xi. \quad (8)$$

На границах анодной плазмы $ds(\eta)/d\eta = 0$, т. е. потенциал границ определяется из уравнения

$$\left. \frac{dF(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_0} = 0,$$

или

$$g(0) = -\sqrt{\eta_0} \int_0^{\eta_0} \frac{dg(\xi)/d\xi}{\sqrt{\eta_0 - \xi}} d\xi, \quad (9)$$

причем физический смысл имеет лишь ближайший к началу координат положительный корень. Отметим, что значение η_0 не зависит ни от параметра выгорания ε , ни от частоты $\omega(\eta)$, а определяется только видом функции $g(\eta)$.

Из выражений (3), (5) и (8) несложно получить зависимость плотности потока нейтралов от потенциала:

$$\frac{q(\eta)}{q_0} = 1 \mp \frac{\varepsilon}{\pi} F(\eta), \quad (10)$$

а следовательно, с учетом уравнения (1) для плотности ионного тока имеем

$$\frac{j_i(\eta)}{eq_0} = \pm \frac{\varepsilon}{\pi} F(\eta). \quad (11)$$

На границах анодной плазмы при $\eta = \eta_0$

$$\frac{q(\eta_0)}{q_0} = 1 \mp \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \quad \frac{j_i(\eta_0)}{eq_0} = \pm \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}, \quad (12)$$

где

$$\frac{1}{\varepsilon_*} = \frac{F(\eta_0)}{\pi} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{\xi dg(\xi)/d\xi}{\sqrt{\eta_0 - \xi}} d\xi,$$

ε_* — критическое значение параметра выгорания, при котором правая граница плазмы ($s_0 = s(\eta_0) > 0$) уходит на бесконечность и весь поток нейтралов выгорает в плазменной области. Значение ε_* также определяется только видом функции $g(\eta)$. Таким образом, при любом значении параметра выгорания половина из рожденных в плазме ионов уходит на левую границу ($s_a = s(\eta_0) < 0$), а половина — на правую, несмотря на асимметрию распределения потенциала, чего, впрочем, и следовало ожидать исходя из закона сохранения плотности потока импульса. Отметим также, что даже при полном выгорании рабочего газа общее число нейтралов в анодной плазме остается конечным:

$$N = \int_{x_a}^{x_0} n_g(x) dx = \frac{2lq_0}{v_0} \int_0^{\eta_0} \frac{1}{f(\xi)} \frac{dF(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{2\pi lq_0}{v_0} s_0 \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (13)$$

Поскольку значение η_0 не зависит от параметра выгорания, по мере его приближения к своему критическому значению на правой ветви распределения потенциала $\eta(s)$ образуется сначала одна, а потом две точки перегиба. Обозначая ближайшую к правой границе плазмы точку перегиба через η_1 и пренебрегая значением электрического поля в этой точке, запишем обобщенный критерий Бома образования слоя положительного пространственного заряда в виде

$$v_i(\eta_1) > \sqrt{\frac{T_e}{M}} \sqrt{\frac{g(\eta_1)}{-dg(\eta)/d\eta|_{\eta=\eta_1}}}. \quad (14)$$

Используя этот критерий, легко убедиться, что параметр выгорания, а следовательно, и концентрация анодной плазмы ограничены. В самом деле, $j_i \leq eq_0$ на границе слоя. С другой стороны, в соответствии с критерием Бома (14), скорость ионов в точке $\eta = \eta_1$ должна превышать определенное значение, т. е.

$$n_i < \frac{\sqrt{2} q_0}{\sqrt{2T_e/M}} \sqrt{\frac{-dg(\eta)/d\eta|_{\eta=\eta_1}}{g(\eta_1)}}.$$

В силу квазинейтральности и электронная концентрация в этой точке должна удовлетворять этому неравенству, следовательно

$$\varepsilon < \sqrt{2} \sqrt{\frac{-dg(\eta)/d\eta|_{\eta=\eta_1}}{g^3(\eta_1)}}, \quad (15)$$

что дает оценку для ε_* .

Критерий Бома (14) позволяет записать еще одно полезное неравенство. В силу закона сохранения энергии

$$v_i(\eta_1) < \sqrt{2\eta_1} \sqrt{\frac{T_e}{M}},$$

откуда следует

$$\eta_1 > -\frac{1}{2} \frac{g(\eta_1)}{dg(\eta)/d\eta|_{\eta=\eta_1}}. \quad (16)$$

Уравнение квазинейтральности (4) и его решение (8) при $\varepsilon = 0$ и соответствующем выборе функций $f(\eta)$ и $g(\eta)$ дают результаты работы [1]. Соотношения (10)–(12) такого предельного перехода не имеют, так как хотя из выражения (3) следует, что при $\varepsilon = 0$ концентрация газа постоянна, но в рамках рассматриваемой задачи выгорание газа при этом не происходит и ионы вообще не рождаются (см. (1)). При $n_g = \text{const}$ вместо уравнений (1) и (2) следует рассматривать уравнение непрерывности для ионов. Более того, наличие предельного перехода решения (8) к результатам работы [1] при данной постановке задачи имеет формальный характер и связано с тем, что при $\varepsilon = 0$ исходное уравнение (4) совпадает с рассмотренными [1] уравнениями для одномерного случая. В самом деле, левая часть уравнения Пуассона имеет вид

$$\left(\frac{r_D}{l}\right)^2 \frac{d^2\eta}{ds^2},$$

где $r_D^2 = T_e/4\pi e^2 n_0$ — дебаевский радиус. Но $r_D^2 \propto \varepsilon^{-1}$, а $l \propto \varepsilon^k$, где $k = 0$ (при $\omega_0 \propto n_0$, когда газ ионизируется максвелловскими электронами) или $k = 1$ (при $\omega_0 = \text{const}$) в зависимости от выбора рассматриваемой модели ионизации газа, т. е. правая часть уравнения Пуассона пропорциональна ε^{-1-2k} и при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Таким образом, при $\varepsilon \neq 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ решение уравнения квазинейтральности (4) теряет смысл.

Параметр выгорания ε не является независимым параметром задачи, поскольку максимальная концентрация n_0 анодной плазмы не определена. Аналогично работе [1], можно определить концентрацию n_0 , если задаться общим размером L анодной плазмы. Тогда

$$|s_a| + s_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{dF(\xi)/d\xi}{f(\xi) \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} F^2(\xi)\right]} d\xi = \frac{L}{l} = \frac{1}{\varepsilon^k} \Lambda, \quad (17)$$

где Λ представляет собой независимый параметр задачи, задание которого и определяет концентрацию n_0 в зависимости от рода газа, расхода q_0 , электронной температуры T_e , частоты ω_0 , размера L и скорости v_0 . При $\Lambda \rightarrow \infty$ параметр $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_*$, т.е. полное выгорание потока газа происходит на конечной длине L . Максимум потенциала при этом прижимается к поверхности, с которой подается рабочий газ, так как

$$\frac{|x_a|}{L} \sim \frac{1}{\Lambda}.$$

Несложно видеть, что интеграл в выражении (17) является монотонно возрастающей функцией ε , поэтому, сравнивая (17) и (13), можно записать условие существования анодной плазмы в виде

$$q_0 > \frac{v_0}{\pi L} N. \quad (18)$$

Неравенство (18) является строгим, так как из предыдущих рассуждений ясно, что случай $\varepsilon = 0$ при данной постановке задачи не имеет физического смысла.

Уход ионов из плазмы должен компенсироваться соответствующим уходом тепловых электронов. Если источником рабочего газа является катодная поверхность [4], то тепловые электроны уходят в радиальном направлении. Если же газ подается с анодной поверхности и слой пространственного заряда на катодной границе плазмы имеет достаточно большую разность потенциалов $e\varphi_p \gg T_e$, то медленные (больцмановские) электроны могут уходить только на анод:

$$2eq_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} = \frac{en_0}{4} \sqrt{\frac{8T_e}{\pi m}} \exp(-\eta_a),$$

где m — масса электрона, т.е. величина отрицательного анодного падения потенциала составит

$$\eta_a = -\ln \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{\varepsilon_*} \sqrt{\frac{m}{M}} \right). \quad (19)$$

В этом случае представляет интерес мощность, выносимая на анод заряженными частицами. Поскольку мы имеем дело с отрицательным анодным падением, каждый электрон, как известно, выносит на анод энергию $2T_e$, т.е. электронная составляющая плотности мощности, Q_e , определяется соотношением

$$\frac{Q_e}{q_0 T_e} = 4 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}.$$

Ионная составляющая плотности мощности на краю слоя, $Q_i(\eta_0)$, равна

$$\begin{aligned} \frac{Q_i(\eta_0)}{q_0 T_e} &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\eta_0} F(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} 2\eta_0 - \frac{2\varepsilon}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{g(\xi)\xi}{\sqrt{\eta_0 - \xi}} d\xi. \end{aligned}$$

Кроме этого необходимо учесть, что в анодном слое все ионы приобретают энергию $\eta_a - \eta_0$, поэтому ионная составляющая плотности мощности на аноде равна

$$\frac{Q_i}{q_0 T_e} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \left[\eta_a + \eta_0 - \frac{2\varepsilon_*}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{g(\xi)\xi}{\sqrt{\eta_0 - \xi}} d\xi \right].$$

На поверхности анода ионы рекомбинируют с выделением энергии $I_i - e\varphi_i$, где I_i — энергия ионизации, а $e\varphi_i$ — работа выхода материала катода. Если считать, что вся эта энергия выделяется на аноде, то суммарная плотность мощности будет равна

$$\begin{aligned} \frac{Q}{q_0 T_e} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \times \\ &\times \left[\eta_a + \eta_0 + 4 - \frac{2\varepsilon_*}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{g(\xi)\xi}{\sqrt{\eta_0 - \xi}} d\xi + \frac{I_i - e\varphi_i}{T_e} \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

1. Постоянная частота выгорания нейтралов. В этом случае

$$\omega_0 = \text{const}, \quad f(\eta) = 1.$$

Значение ω_0 можно трактовать как величину, пропорциональную интенсивности внешнего ионизирующего излучения. Аналогично работе [1], будем считать, что тепловые электроны имеют больцмановское распределение,

$$n_e(\eta) = n_0 e^{-\eta}, \quad (21)$$

где n_0 — концентрация электронов в максимуме потенциала, т.е. $g(\eta) = e^{-\eta}$. Тогда, согласно (6),

$$F(\eta) = \sqrt{\pi} e^{-\eta} \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta}), \quad (22)$$

где

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(t^2) dt,$$

а потенциал на границах плазмы определяется из уравнения (9)

$$\sqrt{\pi\eta_0} \exp(-\eta_0) \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta_0}) = 1,$$

решением которого является значение

$$\eta_0 \approx 0.854033. \quad (23)$$

При $\varepsilon = 0$ решение (8) имеет вид $s(\eta) = \pm s_L(\eta)$. Оно симметрично относительно оси $s = 0$, причем¹⁾

$$s_L(\eta) = \frac{1}{\pi} F(\eta) = \frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta}). \quad (24)$$

Общее решение (8) в этом случае имеет вид

$$s(\eta) = -\frac{1}{\varepsilon} \ln [1 \mp \varepsilon s_L(\eta)],$$

а для критического значения параметра выгорания $\varepsilon = \varepsilon_*$, при котором катодная граница плазмы уходит на бесконечность и весь поток нейтралов выгорает в плазменной области, получаем

$$\varepsilon_* = \frac{1}{s_L(\eta_0)} = \pi\sqrt{\eta_0} \approx 2.903268. \quad (25)$$

По этой причине максимальная концентрация анодной плазмы не может превышать значения

$$n_0 \leq \frac{q_0}{\sqrt{2T_e/M}} \varepsilon_* \approx 5.15 \cdot 10^{13} \frac{q_0}{\sqrt{T_e}},$$

где в качестве примера рассматривается поток нейтралов ксенона, плотность которого измеряется в А/см² (1 А расхода нейтрального газа соответствует $6.24 \cdot 10^{18}$ част./с), а температура электронов в эВ. На рис. 1а изображены распределения потенциала для трех значений параметра выгорания.

Поскольку $\eta_0 > \eta_1$, неравенство (15) дает

$$\varepsilon < \sqrt{2} \exp(\eta_0) \approx 3.322,$$

¹⁾ В работе [1] это решение получено в виде степенного ряда, однако для η_0 приводится неверное значение 0.9244. Из выражения (24) легко получить

$$\begin{aligned} s_L(\eta) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\eta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \sqrt{\pi}}{2\Gamma(i + 3/2)} \eta^i = \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\eta} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i 2^i}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i + 1)} \eta^i, \end{aligned}$$

что совпадает с решением, полученным в [1]. Учет семи членов этого ряда дает правильное значение $\eta_0 \approx 0.8540$, кроме того, в [1] приведено правильное значение $s_0 = s_L(\eta_0) = 1/\pi\sqrt{\eta_0} \approx 0.344439$. Поэтому неверное значение η_0 в [1] следует рассматривать как опечатку.

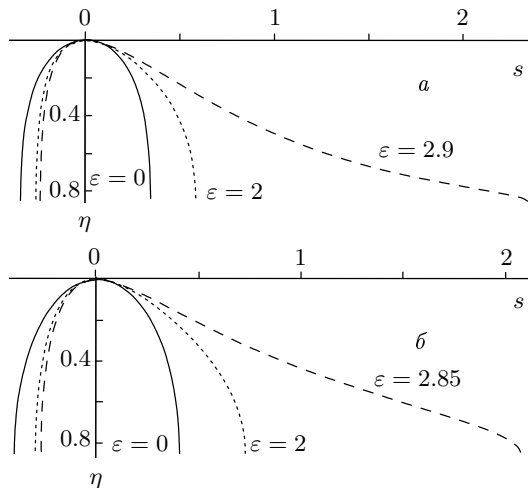


Рис. 1. Распределения потенциала в случае однородной интенсивности внешнего ионизирующего излучения (а) и в случае ионизации максвелловскими электронами (б) для трех значений параметра выгорания ε ; $\eta_0 \approx 0.854033$, $\varepsilon_* \approx 2.903268$

а из неравенства (16) получаем

$$\eta_1 > 0.5.$$

Задавшись общим размером L плазменной области, из выражения (17) получим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} = \frac{1 - \exp(-\Lambda_L)}{1 + \exp(-\Lambda_L)},$$

где $\Lambda_L = L\omega_0/v_0$ представляет собой независимый параметр задачи и при изменении интенсивности внешнего ионизирующего излучения может меняться от нуля до бесконечности. Условие существования анодной плазмы в этом случае выполняется тривиальным образом и не дает новой информации, так как общее число нейтралов в анодной плазме пропорционально плотности потока q_0 нейтрального газа,

$$N = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \frac{2\pi q_0}{\omega_0}.$$

Величина анодного падения потенциала (19) в данном случае составит

$$\eta_a \approx -0.892822 - \ln \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad (26)$$

что, например, для ксенона дает $\eta_a \approx 5.300$, т. е. в прианодном слое пространственного заряда сосредоточена разность потенциалов $\eta_a - \eta_0 \approx 4.446$.

Суммарная плотность мощности, выносимой на анод заряженными частицами, согласно выражению (20) будет равна

$$\frac{Q}{q_0 T_e} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*} \left[\eta_a + \eta_0 + 3 + \frac{I_i - e\varphi_i}{T_e} \right]. \quad (27)$$

Если в качестве рабочего газа используется ксенон, а материалом анода является углерод, то это составит

$$\frac{Q}{q_0 T_e} \approx \left(9.154 + \frac{7.43}{T_e} \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}. \quad (28)$$

2. Ионизация максвелловскими электронами. В этом случае

$$\omega_0 = n_0 \gamma(T_e), \quad f(\eta) = e^{-\eta},$$

где $\gamma(T_e) = \text{const}$. Если аппроксимировать функцию сечения ионизации газа электронами от их энергии, например, линейной зависимостью

$$\sigma_i(v_e) = C \left(\frac{mv_e^2}{2} - I_i \right),$$

где C — некоторая зависящая от рода газа константа, которую для оценок можно считать равной $\sigma_m/4I_i$, σ_m — максимальное значение сечения ионизации, то (см., например, [7])

$$\gamma(T_e) = C \sqrt{\frac{8T_e}{\pi m}} (I_i + 2T_e) \exp\left(-\frac{I_i}{T_e}\right). \quad (29)$$

Поскольку мы по-прежнему считаем, что тепловые электроны имеют больцмановское распределение (21), а функция $F(\eta)$ определяется только видом функции $g(\eta)$, соотношения (22), (23), (25) остаются в силе и для этого случая. Общее решение задачи имеет вид

$$s(\eta) = \pm \frac{1}{\pi} \int_0^\eta \frac{e^\xi dF(\xi)/d\xi}{1 \mp \varepsilon s_L(\xi)} d\xi.$$

При постоянной концентрации газа (при $\varepsilon = 0$) функция $s(\eta)$ симметрична относительно оси $s = 0$, $s(\eta) = \pm s_T(\eta)$, где

$$s_T(\eta) = \frac{1}{\pi} \left[e^\eta \sqrt{\eta} + \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \text{erfi}(\sqrt{\eta}) \right].$$

Разложение этой функции в степенной ряд совпадает с приведенным в работе [1] решением, однако, как и ранее, это связано с формальным совпадением рассматриваемых уравнений.

Поскольку мы и в этом случае считаем, что квазинейтральность анодной плазмы обеспечивается отрицательным анодным падением, остаются в силе

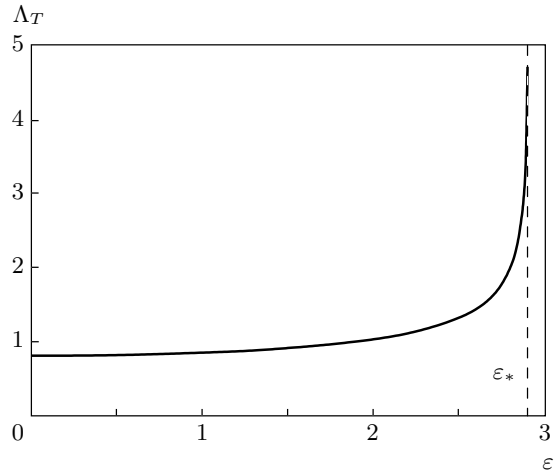


Рис. 2

формула (26) и все рассуждения о прианодном слое пространственного заряда. Несмотря на другой закон выгорания нейтрального газа, соотношения (27) и (28), касающиеся выносимой на анод мощности, сохраняются.

Распределения потенциала в этом случае для $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 2.85$ изображены на рис. 1б. Видно, что распределения более чувствительны к значению параметра выгорания.

Если задаться общим размером анодной плазмы, то концентрацию анодной плазмы будет определять независимый параметр задачи

$$\Lambda_T = \frac{L}{l} = \frac{L\gamma(T_e)q_0}{v_0\sqrt{2T_e/M}},$$

т.е., согласно (17), задание этого параметра однозначно определяет величину ε :

$$\Lambda_T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\eta_0} \frac{e^\xi dF(\xi)/d\xi}{1 - \varepsilon^2 s_L^2(\xi)} d\xi.$$

Зависимость параметра $\Lambda_T(\varepsilon)$ представлена на рис. 2. При $\varepsilon = 0$ имеем

$$\Lambda_T(0) = 2s_T(\eta_0) = \frac{\exp(\eta_0)}{\pi\sqrt{\eta_0}} \approx 0.809123.$$

Очевидно, $\Lambda_T(\varepsilon) > \Lambda_T(0)$, что эквивалентно условию (18) существования анодной плазмы, поскольку общее число нейтралов в анодной плазме для этого случая определяется только электронной температурой и родом газа:

$$q_0 > \frac{v_0 \Lambda_T(0)}{\gamma(T_e)L} \sqrt{\frac{2T_e}{M}},$$

или, с учетом выражения (29),

$$q_0 > \frac{2\sqrt{\pi} v_0 \Lambda_T(0) \exp(I_i/T_e)}{\sigma_m L(1 + 2T_e/I_i)} \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

Правая часть этого неравенства является очень быстро спадающей функцией электронной температуры. Так, приняв в качестве скорости нейтралов ксенона значение $v_0 \approx 4 \cdot 10^4$ см/с и положив $\sigma_m \approx 5 \cdot 10^{-16}$ см² и $L = 2$ см, получим, что $q_0 > 6000$ А/см² при $T_e = 1$ эВ и $q_0 > 0.23$ А/см² при $T_e = 5$ эВ. Отметим, что типичная плотность потока ксенона для холловских двигателей составляет $q_0 \approx (0.1-1.0)$ А/см². В работе [8] приводятся экспериментально измеренная электронная температура для холловского двигателя с сильнонеоднородным магнитным полем при плотности потока ксенона $q_0 \approx (0.3-0.54)$ А/см². Вблизи анода ускорителя она составила примерно 5 эВ.

3. Ионизация пучком быстрых электронов.

Как отмечалось во Введении, этот случай ориентирован на конструкцию ионного источника без магнитного поля [4]. Сначала рассмотрим ионизацию внешним пучком электронов с постоянной плотностью. Такая ситуация реализуется, если энергия пучка много больше температуры плазменных электронов. Практически этот случай сводится к первому случаю при постоянной частоте выгорания нейтралов,

$$\omega(\eta) = \omega_0 = n_b v_b \sigma_i = \text{const},$$

где $n_b = \text{const}$ — плотность электронного пучка (имеется в виду суммарная плотность прямого и обратного потоков электронов), $v_b = \text{const}$ — скорость электронов, σ_i — сечение ионизации. Предполагая, что тепловые электроны по-прежнему имеют максвелловское распределение, для функции $g(\eta)$ имеем

$$g(\eta) = \beta + e^{-\eta}, \quad (30)$$

где $\beta = n_b/n_0$. Тогда

$$F(\eta) = 2\beta\sqrt{\eta} + \sqrt{\pi} e^{-\eta} \text{erfi}(\sqrt{\eta}),$$

а потенциал границ анодной плазмы определяется из уравнения

$$\beta = \sqrt{\pi\eta_0} \exp(-\eta_0) \text{erfi}(\sqrt{\eta_0}) - 1. \quad (31)$$

Несложно видеть, что решение η_0 этого уравнения существует далеко не при любом значении параметра β . Оказывается, что имеется максимальное значение β , выше которого производная $ds(\eta)/d\eta$ уже

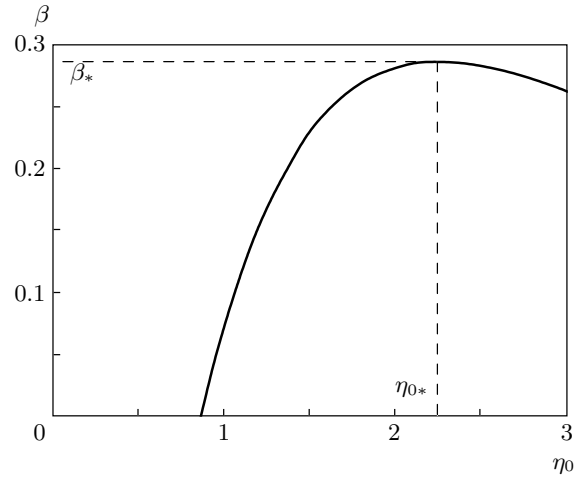


Рис. 3. Зависимость $\beta(\eta_0)$ для случая ионизации пучком электронов с постоянной плотностью; $\beta_* \approx 0.284749$, $\eta_{0*} \approx 2.256$

не обращается в нуль и слои пространственного заряда не возникают. На рис. 3 изображена зависимость $\beta(\eta_0)$, которая получена путем решения уравнения (31). Видно, что плазменные решения возможны только при

$$\beta \leq \beta_* \approx 0.284749. \quad (32)$$

При выполнении этого неравенства решение задачи имеет вид

$$s(\eta) = -\frac{1}{\varepsilon} \ln \left\{ 1 \mp \varepsilon \left[\frac{2\beta}{\pi} \sqrt{\eta} + s_L(\eta) \right] \right\}. \quad (33)$$

Правая граница плазмы уходит на бесконечность, т. е. полное выгорание потока рабочего газа происходит при

$$\varepsilon_*(\beta) = \frac{\pi \sqrt{\eta_0(\beta)}}{1 + \beta [1 + 2\eta_0(\beta)]}.$$

Ограничение (32) для параметра β является следствием критерия образования слоя пространственного заряда на правой границе плазмы (критерия Бома) и закона сохранения энергии. Из неравенства (16) для функции (30) получим

$$\beta < \exp(-\eta_1)(2\eta_1 - 1) < 2e^{-3/2} \approx 0.446.$$

Оба параметра, ε и β , не являются независимыми. Поэтому для анализа задачи можно задаться постоянным значением их произведения

$$\Lambda_b = \varepsilon\beta = \frac{n_b}{q_0} \sqrt{\frac{2T_e}{M}} = \frac{j_b}{\varepsilon q_0} \sqrt{\frac{m}{M}} \sqrt{\frac{T_e}{e\varphi_b}}, \quad (34)$$

где $e\varphi_b = mv_b^2/2$ — энергия электронов пучка, $j_b = en_bv_b$ — его плотность тока (в терминах работы [4] значение j_b равно удвоенной плотности электронного тока с катода). Однако наибольший физический интерес представляет случай, когда электрическое поле на катоде равно нулю. Тогда

$$j_b \sqrt{\frac{m}{M}} = j_i(\eta_0) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*(\beta)} eq_0, \quad (35)$$

и из соотношения (34) следует

$$\eta_b(\beta) = \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_*^2(\beta)}, \quad (36)$$

где $\eta_b = e\varphi_b/T_e$. При $\beta = \beta_*$ получим $\eta_b(\beta_*) \approx 3.6572$, что явно противоречит исходному предположению о постоянстве концентрации пучка ($\eta_b \gg 1$). Поэтому считать плотность пучка постоянной можно только при $\beta \ll \beta_*$.

Учтем зависимость скорости электронов пучка от потенциала. Тогда вместо выражения (30) имеем

$$g(\eta) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \eta/\eta_b}} + e^{-\eta}, \quad (37)$$

где $\beta = n_{b0}/n_0$, n_{b0} — плотность электронов пучка в максимуме потенциала. Тогда

$$F(\eta) = \beta \sqrt{\eta_b} \ln \left(\frac{\sqrt{\eta_b} + \sqrt{\eta}}{\sqrt{\eta_b} - \sqrt{\eta}} \right) + \sqrt{\pi} e^{-\eta} \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta}),$$

а потенциал границ анодной плазмы определяется из уравнения

$$\beta = \frac{\eta_b - \eta_0}{\eta_b} [\sqrt{\pi \eta_0} \exp(-\eta_0) \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta_0}) - 1]. \quad (38)$$

Если считать, что электрическое поле на катоде по-прежнему равно нулю, то одновременно с (38) должно выполняться соотношение (36), которое в данном случае можно представить в виде

$$\beta = \frac{\sqrt{\pi} \exp(-\eta_0) \operatorname{erfi}(\sqrt{\eta_0})}{\sqrt{\eta_b} \left(\pi - \ln \frac{\sqrt{\eta_b} + \sqrt{\eta_0}}{\sqrt{\eta_b} - \sqrt{\eta_0}} \right)}. \quad (39)$$

Система уравнений (38), (39) имеет решение только при $\eta_b \geq 6.3287$, причем $\beta \leq 0.1924$. Модель пучка с постоянной плотностью даже при $\eta_b \approx 6.3287$ дает $\beta \approx 0.1847$, т. е. при $\eta_b \geq 6.3287$ значения β с хорошей точностью можно определять из этой модели. Однако этого нельзя сказать о значениях потенциала на границах плазмы, η_0 . На рис. 4 сплошной кривой представлена зависимость $\eta_0(\eta_b)$ для модели (37) в случае пучка с переменной плотностью, т. е.

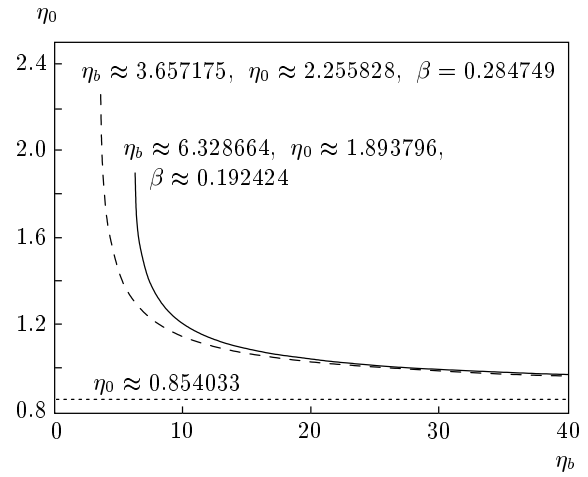


Рис. 4. Зависимости $\eta_0(\eta_b)$ при ионизации электронным пучком с переменной плотностью (сплошная кривая) и при ионизации пучком с постоянной плотностью (штриховая кривая). Пунктирная прямая — асимптотическое значение (23). Около кривых приведены координаты предельных левых точек и соответствующие значения параметра β

решение системы уравнений (38), (39), а штриховой кривой — для модели (30) в случае пучка с постоянной плотностью. При $\eta_b \rightarrow \infty$ обе кривые стремятся к своему асимптотическому значению (23), поскольку при этом $\beta \rightarrow 0$. Видно, что модель (30) с хорошей точностью применима при $\eta_b \geq 20$.

Если теперь при $\eta_b \geq 20$ задаться полной длиной анодной плазмы, то из выражений (17) и (33) с учетом (35) получим соотношение

$$\Lambda_{b1} = \frac{1}{z} \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad (40)$$

где $z = \varepsilon/\varepsilon_*(\beta)$, а Λ_{b1} представляет собой независимый параметр задачи

$$\Lambda_{b1} = \frac{L\sigma_i q_0}{v_0} \sqrt{\frac{m}{M}}. \quad (41)$$

Правая часть соотношения (40) является монотонно возрастающей функцией z , причем $\Lambda_{b1} = 2$ при $z = 0$, т. е.

$$q_0 > \frac{2v_0}{\sigma_i L} \sqrt{\frac{m}{M}},$$

что эквивалентно условию (18) существования анодной плазмы, так как в этом случае $N = (2\pi/\sigma_i)\sqrt{m/M}$. Так, для ксенона при $v_0 \approx 4 \cdot 10^4$ см/с, $\sigma_i \approx 5 \cdot 10^{-16}$ см² и $L = 1$ см получим $q_0 > 0.05$ А/см². При $q_0 = 0.5$ А/см² из соотношений (40) и (41) имеем $1 - z \approx 4 \cdot 10^{-9}$, т. е. практически весь поток газа в анодной плазме выгорает.

Рассматриваемая модель ионизации внешним пучком электронов с постоянной плотностью применима при выполнении неравенства

$$\beta \gg \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma(T_e)}{v_b \sigma_i} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_m}{\sigma_i} \sqrt{\frac{T_e}{e\varphi_b}} \times \left(1 + \frac{2T_e}{I_i}\right) \exp\left(-\frac{I_i}{T_e}\right).$$

Функция $\alpha^{-1}(T_e)$ является быстрорастущей функцией электронной температуры. Так, для ксенона $\alpha^{-1} \approx 1.25 \cdot 10^{-7}$ при $e\varphi_b = 200$ эВ (при этом $\sigma_i \approx \sigma_m$) и $T_e = 1$ эВ и $\alpha^{-1} \approx 7.19 \cdot 10^{-3}$ при $T_e = 5$ эВ. Очевидно, что при $\beta \rightarrow 0$ ионизация происходит преимущественно благодаря максвелловским электронам. Поэтому имеет смысл учесть оба процесса ионизации. Это несложно сделать, положив для частоты выгорания

$$\omega_0 = n_b v_b \sigma_i, \quad f(\eta) = 1 + e^{-\eta} / \alpha \beta.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о структуре анодной плазмы интенсивного газового разряда с учетом выгорания нейтралов. Получено в общем виде и проанализировано в частных случаях условие существования анодной плазмы. Полученные результаты могут быть использованы при анализе свойств анодной плазмы таких вакуумных приборов, как источники интенсивных ионных пучков. При реализации отрицательного анодного падения потенциала поверхностная плотность выносимой на анод заряженными частицами мощности при полном выгорании рабочего газа в анодной плазме может достигать значений

равных примерно $10q_0 T_e$. Существенным моментом является тот факт, что половина рожденных в анодной плазме ионов уходит на анод, снижая энергетическую эффективность прибора. Возможно, что создание вблизи анода области сильного магнитного поля позволит получить положительное анодное падение потенциала и устранить этот недостаток.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. А. Коваленко за плодотворные обсуждения и А. Н. Ермилову за поддержку.

Работа частично финансирована РФФИ (гранты №№ 05-02-08030-офи-а, 05-02-16081-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Tonks and I. Langmuir, *Phys. Rev.* **34**, 876 (1929).
2. С. Д. Гришин, *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*, т. IV, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), с. 291.
3. А. И. Морозов, *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*, т. III, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), с. 383.
4. А. В. Жаринов, *Прикладная физика* № 4, 79 (2005).
5. *Математическая энциклопедия*, т. I, Изд.-во Советская Энциклопедия, Москва (1977), с. 26.
6. О. Б. Фирсов, *ЖТФ* **26**, 445 (1956).
7. В. Л. Грановский, *Электрический ток в газе*, Гостехиздат, Москва (1952), т. I.; Наука, Москва (1971), т. II.
8. L. Dorf, V. Semenov, and Y. Raiteses, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 2551 (2003).