ЖЭТФ, 2006, том 130, вып. 4 (10), стр. 609–620

ТЕОРИЯ ЧАСТОТНО-МОДУЛЯЦИОННОЙ СПЕКТРОСКОПИИ КОГЕРЕНТНЫХ ТЕМНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Ю. В. Владимирова [a], *Б. А. Гришанин* [a*], *В. Н. Задков* [a], *В. Бьянкалана* [b], *Д. Бевилаква* [b], *Й. Данчева* [b], *Л. Мой* [b]

[a] *Международный лазерный центр Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова 119899, Москва, Россия*

[b] *Университет Сиены 53100, Сиена, Италия*

Поступила в редакцию 21 марта 2006 г.

Впервые выполнен теоретический анализ взаимодействия трехуровневого атома в Λ-конфигурации с частотно-модулированным (ЧМ) полем. Представлена и проанализирована двухчастотная модель для решения задачи ЧМ-спектроскопии когерентных темных резонансов на примере трехуровневой Λ-системы. Эффективность двухчастотной модели продемонстрирована путем сравнения результатов, полученных с ее помощью, с результатами решения точной задачи о взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем, решаемой при помощи метода матрицы плотности. Показано, что простая двухчастотная модель соответствует точному решению и качественно согласуется с данными экспериментов.

PACS: 42.50.Hz, 42.50.Gy

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект когерентного пленения населенностей (КПН) широко используется в различных приложениях, таких как магнитометрия, метрология и других [1–5]. Наиболее ярко этот эффект проявляется в трехуровневой системе для Λ-переходов между двумя близко расположенными долгоживущими уровнями, оптически связанными с третьим короткоживущим уровнем с помощью двух непрерывных когерентных полей (вставка на рис. 1). В спектре поглощения когерентная суперпозиция близко расположенных уровней приводит к очень узкому провалу на фоне линии поглощения или, что эквивалентно, к темному резонансу в случае наблюдения резонансной флуоресценции.

Для трехуровневой модели явление КПН может быть полностью описано аналитически и соответствующие ссылки приведены в обзоре Аримондо [6]. В случае многоуровневых систем модель становится значительно сложнее — усложнение энергетической структуры многоуровневых атомов, особенно в присутствии внешних магнитных полей, приводит к существенной модификации резонансных зависимостей от параметров действующих полей, вследствие чего получение аналитических результатов в большинстве случаев становится невозможным [7].

Традиционная экспериментальная техника для наблюдения спектров темных резонансов с использованием двух резонансных лазерных полей в настоящее время широко используется для многих приложений. Однако необходимо развитие более простой экспериментальной техники для спектроскопии темных резонансов в многоуровневых атомах, которая будет использовать, например, только одно лазерное поле, но модулированное по частоте (ЧМ). Такие эксперименты проводятся в группе Луиджи Моя в Университете Сиена в Италии [8], и они фактически инициировали данное исследование по теории ЧМ-спектроскопии темных резонансов.

Модуляционные методы активно начали развиваться применительно к оптической спектроскопии в начале 80-х годов прошлого столетия. Уже хорошо известные к тому времени в микроволновой спектроскопии и спектроскопии ядерного магнитного резо-

*E-mail: grishan@comsim1.phys.msu.ru

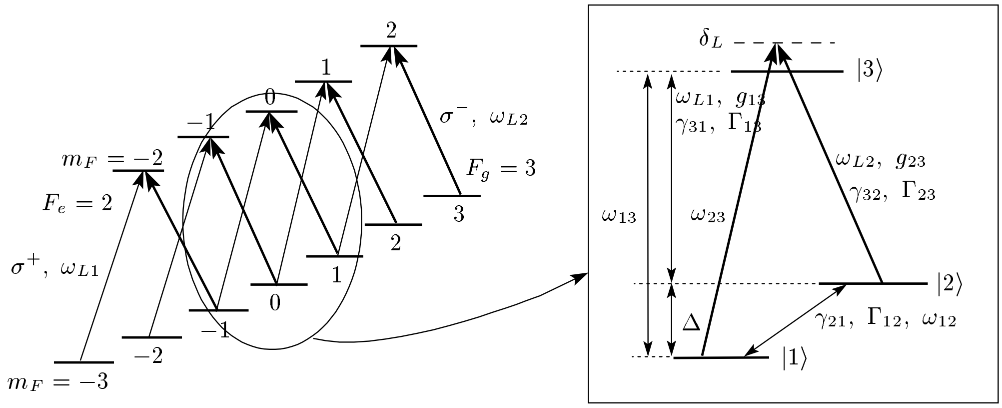

Рис. 1. Λ-системы, формируемые зеемановскими подуровнями на переходах $F_g = 3 \to F_e = 2$, индуцированных σ^+- и σ^--компонентами лазерного поля с соответствующими частотами ω_{L1} и ω_{L2}, разность которых равна расстоянию между зеемановскими подуровнями с $\Delta m_F = 2$. На вставке показана схема трехуровневой системы в Λ-конфигурации и параметры: ω_{L1}, ω_{L2} — частоты лазерных полей, действующих на переходы в системе; g_{13}, g_{23} — частоты Раби; δ_L — лазерная расстройка от перехода $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$; γ_{31}, γ_{32} — скорости распада из возбужденного состояния $|3\rangle$ на низколежащие уровни $|1\rangle$ и $|2\rangle$; γ_{12} и w — соответственно скорости распада и накачки уровня $|1\rangle$ через уровень $|2\rangle$; Γ_{13}, Γ_{23} и Γ_{12} — соответственно скорости дефазировки переходов $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$

нанса ЧМ-методы получили новое развитие в лазерной спектроскопии и широко используются для стабилизации лазеров. Оптическая ЧМ-спектроскопия в настоящее время продолжает играть центральную роль в прецизионных измерениях в таких областях физики как детектирование гравитационных волн, стандарты частоты, измерение слабых магнитных полей и др. (см. обзор [9] и ссылки в нем).

Несмотря на значительный прогресс в развитии техники оптической ЧМ-спектроскопии, теоретические модели были детально разработаны и изучены только для двухуровневых систем, которые позволяют выполнить анализ аналитически [9]. Теоретический же анализ многоуровневых, в простейшем случае трехуровневых, систем, взаимодействующих с ЧМ-полем (полями), который и представляет интерес в нашем случае, на настоящий момент по нашим сведениям в литературе отсутствует.

В данной работе мы приводим результаты теоретического анализа ЧМ-спектроскопии когерентных темных резонансов, который позволяет строить эффективные модели простых систем, взаимодействующих с ЧМ-полем, и рассчитывать их динамику и спектральные зависимости. Модель в общем случае применима к Λ-системам, у которых в качестве основного состояния могут быть выбраны либо сверхтонкие подуровни, либо зеемановские подуровни одного сверхтонкого уровня. В расчетах же, проводимых в данной работе, основным состоянием Λ-системы являются зеемановские подуровни одного сверхтонкого уровня. Для простоты изложения мы вынуждены будем ограничиться рассмотрением отдельной трехуровневой Λ-системы, взаимодействующей с ЧМ-полем, чтобы на ее примере выявить наиболее существенные особенности взаимодействия Λ-систем с ЧМ-полем. Дальнейшее обобщение модели на многоуровневые системы, например цепочки Λ-систем, формируемых зеемановскими подуровнями в приложенном магнитном поле (см. рис. 1), является прозрачным и может быть легко выполнено при численном моделировании.

Суть представленной двухчастотной модели взаимодействия Λ-системы с ЧМ-полем сводится к рассмотрению взаимодействия системы с двумя монохроматическими полями, эффективно заменяющими взаимодействие с ЧМ-полем. Для контроля полученных результатов были также рассчитаны спектры поглощения ЧМ-поля путем решения точного уравнения для матрицы плотности, описывающего взаимодействие системы с истинным ЧМ-полем.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведены основные результаты теории КПН в рамках простейшей трехуровневой модели в Λ-конфигурации. Особенности поведения Λ-системы, взаимодействующей с ЧМ-полем, рассмотрены в разд. 3. В разд. 4 изложена используемая математическая техника расчета резонансов КПН в случае взаимодействия Λ-системы с двумя полями, упрощенная двухчастотная модель взаимодействия Λ-системы с ЧМ-полем и результаты ее применения. В разд. 5 приведены результаты расчета спектров поглощения путем решения точного уравнения для матрицы плотности. Основные выводы содержатся в разд. 6.

2. ЭФФЕКТ КОГЕРЕНТНОГО ПЛЕНЕНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ В Λ-СИСТЕМЕ ПРИ БИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ДВУМЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ

В простейшей трехуровневой системе атомных переходов в Λ-конфигурации два нижних долгоживущих уровня $|1\rangle$ и $|2\rangle$ с частотным расщеплением ω_{12} связаны с верхним возбужденным энергетическим уровнем $|3\rangle$ двумя световыми полями (рис. 1). Если переход $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ в дипольном приближении запрещен и два монохроматических поля $E_1 \exp(-i\omega_{L1}t - i\varphi_1)$, $E_2 \exp(-i\omega_{L2}t - i\varphi_2)$ находятся в резонансе с соответствующими переходами $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$, то в результате квантовой интерференции формируется узкий резонанс КПН. Он проявляется в спектре поглощения как резкий минимум, когда одно из действующих полей, например ω_{L1}, сканируется и рамановская расстройка $\delta_R = \omega_{L1} - \omega_{L2} - \omega_{12}$ проходит через соответствующее точному резонансу нулевое значение.

Для описания динамики взаимодействия Λ-системы с полем следует использовать представление взаимодействия с гамильтонианом невозмущенного движения

$$\mathcal{U}_0(t) = \exp\left[-(i/\hbar)\hat{\mathcal{H}}_0 t\right],$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar(\omega_{L1}|3\rangle\langle 3| - \Delta|2\rangle\langle 2|),$$

а $\Delta = \omega_{L2} - \omega_{L1} \approx \omega_{12}$ — расстройка лазерных полей. Для обсуждения основных эффектов КПН полезно записать гамильтониан взаимодействия атом–поле в базисе «светлого» и ортогонального ему «темного» состояний, соответственно

$$|+\rangle = g_\Lambda^{-1}\left(g_{13}e^{-i\varphi_1}|1\rangle + g_{23}e^{-i\varphi_2}|2\rangle\right),$$

$$|-\rangle = -g_\Lambda^{-1}\left(g_{23}e^{-i\varphi_1}|1\rangle - g_{13}e^{-i\varphi_2}|2\rangle\right).$$

В приближении вращающихся волн [10] гамильтониан взаимодействия приводится к виду

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_\Lambda = \hbar\Bigg[\left(\delta_L + \delta_R\frac{g_{13}^2}{g_\Lambda^2}\right)|+\rangle\langle +| &+ \\ + \left(\delta_L + \delta_R\frac{g_{23}^2}{g_\Lambda^2}\right)|-\rangle\langle -|\Bigg] &+ \\ + \hbar\delta_R\frac{g_{13}g_{23}}{g_\Lambda^2}\left[e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}|+\rangle\langle -| + \text{H.c.}\right] &+ \\ + \frac{\hbar g_\Lambda}{2}\left(|+\rangle\langle 3| + \text{H.c.}\right). &\quad (1)\end{aligned}$$

В базисе $\{|3\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$ соответствующие гамильтониану взаимодействия матрицы примут вид

$$H_\Lambda = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \hbar g_\Lambda/2 & 0 \\ \hbar g_\Lambda/2 & \hbar\delta_L & 0 \\ \hline 0 & 0 & \hbar\delta_L \end{array}\right) + \frac{\hbar\delta_R}{g_\Lambda^2} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{13}^2 & g_{13}g_{23}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \\ 0 & g_{13}g_{23}e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)} & g_{23}^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Осцилляции между состоянием $|+\rangle$ и возбужденным состоянием $|3\rangle$ происходят с эффективной частотой Раби $g_\Lambda = \sqrt{g_{13}^2 + g_{23}^2}$, само состояние в приближении вращающихся волн не осциллирует. При $\delta_R = 0$ матрица (2) распадается на прямую сумму матрицы размерностью 2×2, описывающей двухуровневую систему $|3\rangle \oplus |+\rangle$, которая формируется из возбужденного и «светлого» состояний, и матрицу 1×1, единственный элемент которой описывает темное состояние. При этом собственные значения гамильтониана (2) равны $\pm g_\Lambda/2$, 0 и соответствуют прецессии между уровнями $|+\rangle$ и $|3\rangle$ с частотой Раби g_Λ. Матричный же элемент $\langle 3|H_\Lambda|-\rangle = 0$, т. е. переходов из «темного» состояния в возбужденное не происходит, что и проявляется в форме резонанса КПН.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ Λ-СИСТЕМЫ С ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫМ ПОЛЕМ

Взаимодействие трехуровневой Λ-системы с ЧМ-полем даже в отсутствие шумов, как показывают эксперименты, существенно усложняет структуру спектров поглощения. В отличие от рассмотренного выше случая взаимодействия с двумя полями, когда наблюдается один резонанс КПН, при взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем в спектре поглощения наблюдаются дополнительные резонансы. Эксперименты по ЧМ-спектроскопии темных резонансов проводятся со щелочными атомами (например, Cs, Rb) в слабых магнитных полях. Наличие магнитного поля приводит к усложнению энергетической структуры атомов за счет эффекта Зеемана (рис. 1). Например, переход $F_g = 3 \to F_e = 2$ в атоме Cs является рабочим в эксперименте [8]. Уровни $F_g = 3$ и $F_e = 2$ расщепляются в магнитном поле на $2F+1$ подуровней каждый. Пары основных подуровней с $\Delta m_F = 2$ (m_F — магнитное квантовое число) и зеемановские подуровни возбужденного состояния образуют цепочку Λ-систем. Излучение лазера линейно поляризовано, поэтому Λ-системы формируются зеемановскими подуровнями на переходах $F_g = 3 \to F_e = 2$, индуцированных σ^+- и σ^--компонентами лазерного поля с соответствующими частотами ω_{L1} и ω_{L2}, разность которых равна расстоянию между зеемановскими подуровнями с $\Delta m_F = 2$. Число Λ-систем в цепочке зависит от полного углового момента основного состояния. В типичных экспериментах по ЧМ-спектроскопии когерентных темных резонансов в атомах Cs атомная среда находится в однородном магнитном поле, величина напряженности которого порядка 10 мкТл.

Поле в случае гармонической модуляции с модуляционным индексом M и частотой модуляции Ω_{mod} представляет собой суперпозицию гармоник вида:

$$E(t) = E_0 \exp[i(\omega_0 t + M \sin(\Omega_{mod} t))] = \\ = E_0 \exp(i\omega_0 t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) \exp(in\Omega_{mod} t). \quad (3)$$

Амплитуды соответствующих спектральных компонент пропорциональны функциям Бесселя $J_n(M)$. Рисунок 2 иллюстрирует изменение спектра поля при изменении индекса модуляции M и частоты модуляции Ω_{mod}. Когда частота модуляции Ω_{mod} фиксирована, увеличение индекса модуляции ведет к увеличению числа полос в спектре, расстояние между которыми равно Ω_{mod}.

При взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем каждая пара частотных компонент спектра дает вклад в резонанс КПН, который наблюдается, когда частотное расстояние между этими компонентами совпадает с зеемановским расщеплением ω_{12} основного состояния (рис. 1), обусловленным присутствием постоянного магнитного поля, т. е. в спектре возникают дополнительные резонансы КПН на частотах, кратных Ω_{mod}. Экспериментально резонансы КПН наблюдаются при сканировании частоты модуляции в небольшом диапазоне вокруг двухфотонного резонанса при фиксированной величине внешнего магнитного поля или при фиксированной частоте модуляции путем сканирования магнитного поля в соответствующем диапазоне [8, 11–13]. Для простоты расчетов в данной работе влияние движения атомов не учитывалось.

4. ДВУХЧАСТОТНАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СПЕКТРОВ РЕЗОНАНСОВ КПН

Рассмотрим задачу о взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем в рамках двухчастотной модели эффективного поля. Для этой цели выполним сначала расчет лиувиллиана трехуровневого атома в случае двух заданных монохроматических полей, чтобы затем ввести соответствующие параметры поля для эффективной двухчастотной модели.

4.1. Расчет лиувиллиана трехуровневого атома, взаимодействующего с двумя монохроматическими полями

Для описания динамики систем с релаксацией будем использовать супероператорную технику, которая позволяет представить преобразования, соответствующие супероператорам (т. е. операторам, действующим на операторы) в физически наглядной форме с помощью записи супероператоров в символическом представлении с использованием символа подстановки $\odot$ матрицы плотности [14].

С использованием этой техники временная эволюция системы с релаксацией определяется кинетическим уравнением вида

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{L}_t \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_r \hat{\rho}, \quad (4)$$

где $\mathcal{L}_t$ — супероператор, описывающий полный лиувиллиан N-уровневого атома. В общем случае в лазерном поле в приближении вращающихся волн он представляется суммой вкладов $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\delta + \mathcal{L}_i$, где $\mathcal{L}_r$, $\mathcal{L}_e$, $\mathcal{L}_i$ — супероператоры соответственно радиационного затухания, упругой дефазировки и взаимодействия с лазерным полем, а $\mathcal{L}_\delta$ — супероператор лазерной расстройки, дополняющий выбранный супероператор невозмущенной эволюции до супероператора свободной динамики атома в нулевом лазерном поле. Последний включает соответствующие расстройки всех действующих лазерных полей с учетом того, что свободная прецессия с частотами этих полей включена в супероператор невозмущенной динамики.

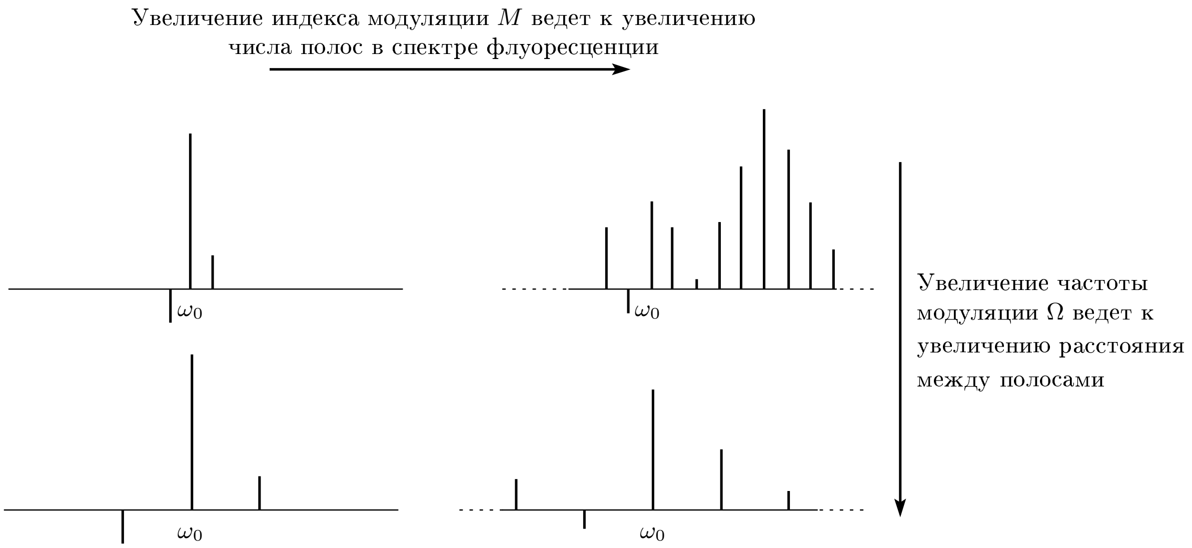

Рис. 2. Модификация спектра ЧМ-поля при изменении частоты модуляции Ω и изменении индекса модуляции M

Супероператор радиационного затухания можно представить в форме Линдблада

$$\mathcal{L}_r = \sum_{kl} \gamma_{kl} \left(\hat{P}_{lk} \odot \hat{P}_{kl} - \frac{1}{2} \left[\hat{P}_{kk}, \odot \right]_+ \right),$$

где двумерный массив γ_{kl} описывает скорости спонтанного распада для $k > l$ и накачки для $k < l$. Супероператор упругой дефазировки описывается суммой:

$$\mathcal{L}_e = \sum_{k<l} \left(\mathcal{L}_{in}^{kl} + \mathcal{L}_{ex}^{kl} \right) = \\ = -\Gamma_{in}^{kl} (\hat{P}_{kk} \odot \hat{P}_{ll} + \hat{P}_{ll} \odot \hat{P}_{kk}) - \Gamma_{ex}^{kl} \left[\hat{I}_{kl}, \odot \right]^2,$$

где $\Gamma_{in}^{kl}, \Gamma_{ex}^{kl}$ — скорости дефазировки. Супероператоры лазерной расстройки и взаимодействия с лазерным полем имеют, соответственно, вид

$$\mathcal{L}_\delta = i \sum_k \delta_k \left(\hat{P}_{kk} \odot - \odot \hat{P}_{kk} \right),$$

$$\mathcal{L}_i = -\frac{i}{2} \sum_{k<l} \Omega_{kl} \left[(\hat{P}_{kl} + \hat{P}_{lk}), \odot \right],$$

где δ_k — массив частотных расстроек, Ω_{kl} — двумерный массив частот Раби kl-переходов.

Матричные представления $N^2 \times N^2$-супероператоров $\mathcal{L}_t$, $\mathcal{L}_r$, $\mathcal{L}_e$, $\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_\delta$ рассчитываются с использованием формулы $L_{mn} = (\hat{e}_m, \mathcal{L}\hat{e}_n)$, где $\{\hat{e}_k\}$ — ортонормированный базис, а скобки описывают скалярное произведение двух операторов вида $\mathrm{Tr}(\hat{A}^+\hat{B})$, антилинейное по первому сомножителю и линейное по второму.

Базис $\{\hat{e}_k\}$ является эрмитовым и выражается через операторы $\hat{P}_{kl}$-переходов, представленные матрицами $N \times N$ с единственным ненулевым kl-элементом $P_{kl}(k,l) = 1$. Нумерация уровней выбрана в соответствии с возрастанием их энергий $E_1 \le E_2 \le \ldots \le E_N$ и соответствующий базис строится следующим образом:

$$\hat{e}_{j(k,l)} = \begin{cases} \hat{P}_{kk}, & k = l, \\ \dfrac{\hat{P}_{kl} + \hat{P}_{lk}}{\sqrt{2}}, & k < l, \\ -i\dfrac{\hat{P}_{kl} - \hat{P}_{lk}}{\sqrt{2}}, & k > l, \end{cases} \qquad (5)$$

где $j(k,l)$ — нумерующий индекс, т. е. взаимно-однозначное отображение двумерного множества чисел kl: $k,l = 1,N$ в одномерный индекс $j = 1,N^2$. Он, в частности, может быть конкретизирован следующим, универсальным для любых N, образом:

$$j = \begin{cases} k, & k = l, \\ (2k-1)N - (k+1)^2 + k + 2l, & k < l, \\ (2l-1)N - (l+1)^2 + l + 2k + 1, & k > l. \end{cases}$$

4.2. Расчет средних значений

Среднее значение оператора произвольной динамической переменной $\hat{A}$ в представлении взаимодействия записывается в виде

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \mathrm{Tr}\, S_t(t)\, \hat{\rho}_0\, \mathcal{U}_0^{-1}(t) \hat{A}\, \mathcal{U}_0(t), \qquad (6)$$

где

$$S_t = \exp\left(\mathcal{L}_t t\right), \quad \mathcal{L}_t = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_\delta$$

— полный супероператор возмущенной эволюции и соответствующий ей лиувиллиан. Равновесные значения атомных переменных при этом задаются выражением

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_{st}\,\hat{A}(t) = \langle 0|\hat{A}(t)\rangle, \tag{7}$$

где $\hat{\rho}_{st}$ — стационарная матрица плотности, $\langle 0|$ — соответствующий ей вектор при матричном представлении супероператоров. Векторное представление $\langle 0|$ стационарной матрицы плотности $\langle \hat{\rho}_{st}|$ рассчитывается из уравнения

$$\langle 0|\mathcal{L}_t = 0. \tag{8}$$

Основные свойства эффекта КПН, как известно, определяются величиной поглощения приложенного поля, которое пропорционально среднему значению оператора населенности возбужденного уровня $\hat{A}(t) \equiv n_3$ в случае трехуровневой Λ-системы. Зависимость этой величины от времени в адиабатическом приближении определяется нестационарностью квазиравновесного состояния $\langle 0|$, зависящего от времени в случае нестационарности лиувиллиана $\mathcal{L}_t$, обусловленной, например, флуктуациями приложенного поля.

4.3. Расчет лиувиллиана трехуровневого атома в случае частотно-модулированного поля

Задачу о взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем можно свести к задаче о взаимодействии системы с двумя эффективными полями с использованием описанного ниже приближения. При этом следует исходить из того, что основной интерес представляет зависимость населенности $n_3(\omega_{12}) = \langle 0|\,\hat{n}_3\rangle$ возбужденного состояния от величины расщепления основного состояния ω_{12}.

Спектр ЧМ-поля (3) состоит из эквидистантных компонент на частотах $\omega_0 + n\Omega_{mod}$, расстояние между которыми равно частоте модуляции Ω_{mod} (рис. 3). Для данного значения ω_{12} будем выбирать из всего спектра ЧМ-поля две частотных компоненты. Первая — $\omega_{n_1} = n_1\Omega_{mod}$ с номером n_1 (n_1 — целое число), для которой максимально эффективен однофотонный резонанс на переходе 1–3, т. е. принимает максимальное значение величина

$$\frac{(g_{13}J_{n_1}(M))^2}{\gamma_{31}^2 + (\omega_{n_1} - \omega_{13})^2},$$

и вторая компонента $\omega_{n_2} = n_2\Omega_{mod}$ с номером n_2 (n_2 — целое число), для которой максимально эффективен однофотонный резонанс на переходе 2–3, т. е. максимальна величина

$$\frac{(g_{23}J_{n_2}(M))^2}{\gamma_{32}^2 + (\omega_{n_2} - \omega_{23})^2}.$$

Поскольку при изменении величины расщепления основного состояния ω_{12} изменяется расстояние ω_{13} и ω_{23} соответственно между уровнями 1–3 и 2–3, для каждого значения ω_{12} такая замена сводит ЧМ-спектр к двум зависящим от ω_{12} наиболее эффективным компонентам с номерами n_1 и n_2, дающим максимальный вклад в формирование резонанса КПН.

Лиувиллиан $\mathcal{L}_t$ в матричном представлении в базисе (5) в случае данной двухчастотной модели имеет вид

$$L_t = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|cc}
-w & \gamma_{12} & \gamma_{31} & 0 & 0 & 0 & \frac{g'_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
w & -\gamma_{12} & \gamma_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g'_{23}}{\sqrt{2}} \\
0 & 0 & -\gamma_{31}-\gamma_{32} & 0 & 0 & 0 & -\frac{g'_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{g'_{23}}{\sqrt{2}} \\
\hline
0 & 0 & 0 & A & B-\omega_{12} & 0 & \frac{g'_{23}}{2} & 0 & \frac{g'_{13}}{2} \\
0 & 0 & 0 & -B+\omega_{12} & A & -\frac{g'_{23}}{2} & 0 & \frac{g'_{13}}{2} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g'_{23}}{2} & C & \delta_L & 0 & 0 \\
-\frac{g'_{13}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{g'_{13}}{\sqrt{2}} & -\frac{g'_{23}}{2} & 0 & -\delta_L & C & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g'_{13}}{2} & 0 & 0 & D & \delta_L - B \\
0 & -\frac{g'_{23}}{\sqrt{2}} & \frac{g'_{23}}{\sqrt{2}} & -\frac{g'_{13}}{2} & 0 & 0 & 0 & -\delta_L + B & D
\end{array}\right), \tag{9}$$

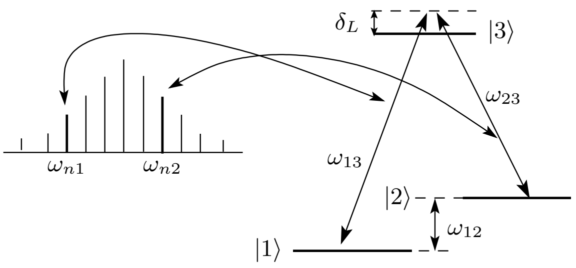

Рис. 3. В двухчастотной модели ЧМ-спектр заменяется на два эффективных монохроматических поля с частотами ω_{n_1} и ω_{n_2}, для которых максимально эффективны однофотонные резонансы на переходах соответственно $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ и $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$

где

$$g'_{23} = g_{23} J_{n_2}(M), \quad g'_{13} = g_{13} J_{n_1}(M),$$

$$A = \frac{-\gamma_{12} - w - 2\Gamma_{12}}{2}, \quad B = \omega_{n_1} - \omega_{n_2},$$

$$C = \frac{-2\gamma_{32} - 2\gamma_{31} - 2w}{4}, \quad D = \frac{-2\gamma_{32} - 2\gamma_{31} - 2\gamma_{12}}{4}.$$

Приведенная матрица L_t имеет блочную структуру, где четыре диагональных блока L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{44} описывают соответственно динамику населенностей n_1, n_2, n_3 и когерентностей подсистем 1–2, 1–3 , 2–3. Блоки L_{13}, L_{31} и L_{14}, L_{41} и сопряженные им описывают осцилляции Раби соответственно на переходах $1-3$ и $2-3$. Остальные недиагональные блоки описывают межмодовые связи поляризации основного состояния с поляризациями переходов 1–3, 2–3.

Решая уравнение (8) для набора значений ω_{12}, получим зависимость населенности $n_3(\omega_{12})$ возбужденного состояния от величины расщепления основного состояния ω_{12}, включающую также и зависимость от однофотонной лазерной расстройки δ_L.

4.4. Расчет спектра поглощения

4.4.1. Случай отсутствия частотной модуляции поля

Для проверки описанного выше метода двух эффективных полей рассмотрим наиболее простой случай взаимодействия Λ-системы с одним резонансным полем в отсутствие частотной модуляции. Это сводится к тому, что в лиувиллиане (9) индекс модуляции $M = 0$, и на оба перехода действует одно поле $E(t)$. Результаты в отсутствие модуляции легко предсказуемы и проверка их справедливости при использовании расчета ЧМ-спектров методом двух эффективных полей в соответствующем частном случае ($M = 0$) является естественным инструментом контроля правильности предлагаемого метода.

На рис. 4*a* приведены зависимости населенности возбужденного состояния от величины лазерной расстройки и величины частотного расщепления основного состояния ω_{12}, полученные на основе двухчастотной модели. Соответствующие значения параметров выбраны, исходя из эксперимента [8]. Оценим ширину резонанса по формуле [6]

$$\Delta_0 = \Gamma + \frac{\Omega^2}{\gamma}, \tag{10}$$

где Γ — скорость поперечной релаксации между нижними уровнями, $\gamma = \gamma_{31} + \gamma_{32}$. Ширина резонанса, рассчитанная по этой формуле и оцененная из рис. 4*a*, равна 0.5γ. Из полученного спектра также следует, что в случае взаимодействия Λ-системы только с одним полем темный резонанс наблюдается, когда система вырождена ($\omega_{12} = 0$), т. е. когда внешнее магнитное поле равно нулю.

4.4.2. Случай частотно-модулированного поля

Пользуясь двухчастотной моделью, описанной выше, мы рассчитали трехмерную зависимость населенности верхнего уровня от величины расщепления основного состояния ω_{12} и лазерной расстройки (рис. 5*a*). Однако нагляднее рассмотреть сечение, соответствующее условию $\delta_L = 0$, т. е. случай, когда частота поля на переходе 1–3 находится в точном резонансе с частотой перехода ω_{13}. На рис. 6*a* приведена зависимость населенности верхнего уровня при $\delta_L = 0$ от величины расщепления основного состояния ω_{12} для значения $M = 10$ при частоте модуляции равной $\Omega_{mod} = 6\gamma$ ($\gamma = 1$ МГц). Из графика следует, что в спектре наблюдаются дополнительные резонансы КПН на частотах, кратных частоте модуляции.

Рассмотрим качественно механизм формирования темных резонансов в спектре Λ-системы под действием частотно-модулированного лазерного поля (рис. 7). Резонанс КПН формируется, когда расстояние между нижними подуровнями основного состояния ω_{12} в точности равно расстоянию между полосами в спектре излучения, т. е. когда величина расщепления между зеемановскими подуровнями ($\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 = 2\mu_B g_F B$, где μ_B — магнетон Бора, g_F — фактор Ланде, B — напряженность магнитного поля) равна частоте модуляции Ω_{mod}. Все пары компонент, расстояние между которыми равно частоте модуляции Ω_{mod} (например, пара, отмеченная

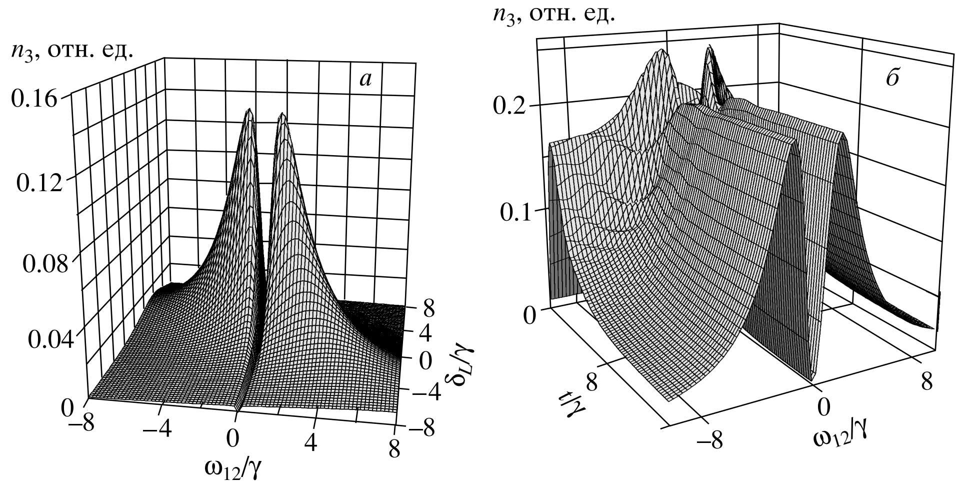

Рис. 4. Зависимости населенности n_3 возбужденного состояния Λ-системы, взаимодействующей с одним полем без модуляции ($M = 0$) *а*) от величины лазерной расстройки δ_L и величины частотного расщепления основного состояния ω_{12}/γ, рассчитанные с использованием двухчастотной модели, *б*) от времени и от ω_{12}/γ, полученные при помощи расчета точной динамики Λ-системы методом матрицы плотности. В расчетах использовались следующие параметры: $g_{13} = g_{23} = 1$ отн. ед., $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma = 1$ отн. ед. (1 отн. ед. $= \gamma = 1$ МГц), остальные релаксационные параметры полагались равными нулю

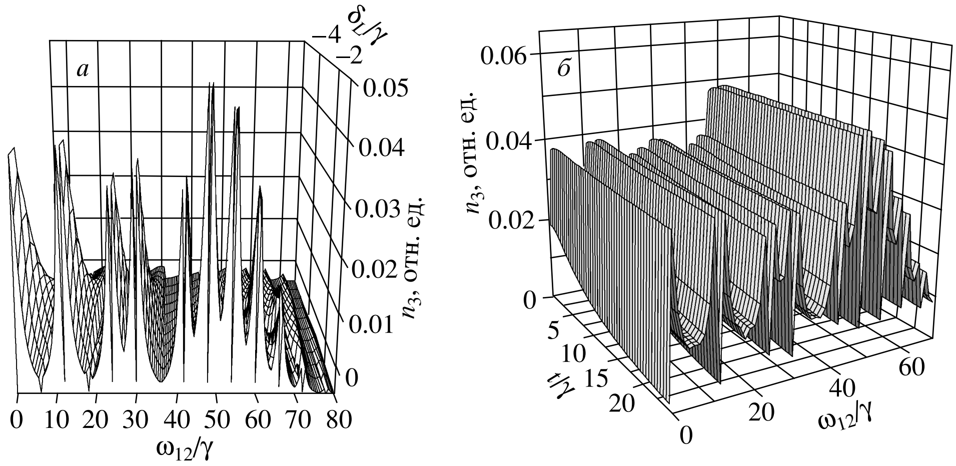

Рис. 5. Зависимости населенности n_3 возбужденного состояния Λ-системы, взаимодействующей с ЧМ-полем $M = 10$, Ω_{mod} *а*) от величины лазерной расстройки δ_L и величины частотного расщепления основного состояния ω_{12}, рассчитанные с использованием двухчастотной модели, *б*) от времени и от ω_{12}, полученные при помощи расчета точной динамики Λ-системы методом матрицы плотности. В расчетах использовались те же параметры, что и для расчета рис. 4*б*

сплошными стрелками на рис. 7), вносят вклад в резонанс, для которого $\omega_{12} = \Omega_{mod}$. Аналогично, все пары компонент, расстояние между которыми равно удвоенной частоте модуляции $2\Omega_{mod}$ (например, пара, отмеченная пунктирными стрелками на рис. 7), вносят вклад в резонанс, для которого $\omega_{12} = 2\Omega_{mod}$, и т. д. Отсюда следует, что расстояние между соседними резонансами, наблюдаемыми в спектре, равно частоте модуляции Ω_{mod}.

Амплитуды полос в спектре пропорциональны функциям Бесселя $J_n(M)$ при фиксированном индексе модуляции M и стремятся к нулю с увеличением n, поэтому число полос в спектре приблизительно равно M и число реально наблюдаемых резонансов

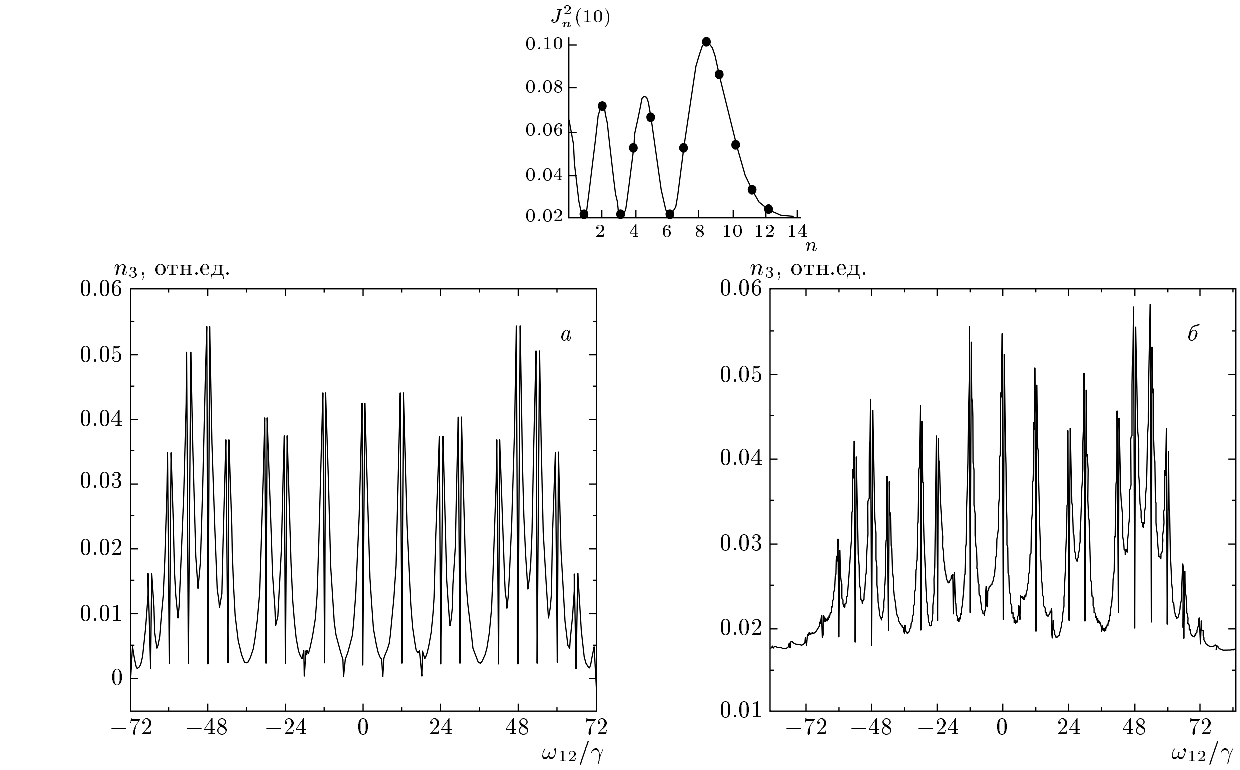

Рис. 6. Населенность возбужденного состояния симметричной Λ-системы в зависимости от ω_{12} для индекса модуляции $M = 10$, частоты модуляции $\Omega_{mod} = 6\gamma$ и частот Раби $g_{13} = g_{23} = 0.8\gamma$. Результаты получены *а*) с использованием двухчастотной модели, *б*) при помощи расчета точной динамики Λ-системы методом матрицы плотности. На вставке показан квадрат функции Бесселя $J_n^2(M)$ для $M = 10$

порядка M.

Из рис. 6*а* следует, что резонансы на определенных частотах практически отсутствуют, так, при $M = 10$ практически отсутствуют резонансы на частотах $\omega_{12} = \pm\Omega_{mod}, \pm 3\Omega_{mod}, \pm 6\Omega_{mod}$. Это объясняется тем, что в случае взаимодействия системы с модулированным полем двухфотонные резонансы КПН наблюдаются на фоне однофотонных. Как было показано, например, в работе [15], зависимость мощности прошедшего через среду модулированного сигнала для данного значения M пропорциональна квадрату функции Бесселя $J_n^2(M)$. Поскольку квадрат функции Бесселя принимает нулевые значения при $n = \pm 1, \pm 3, \pm 6$ для $M = 10$, резонансы на частотах $n\Omega_{mod}$ для этих n практически отсутствуют. Были проведены расчеты для бо́льших значений индекса модуляции порядка 100 и получены аналогичные зависимости: резонансы наблюдаются на тех частотах $n\Omega_{mod}$, кратных частоте модуляции, для которых квадрат функции Бесселя принимает ненулевые значения.

Механизм появления дополнительных резонансов КПН с увеличением индекса модуляции пояснен на рис. 8, где приведена зависимость населенности верхнего уровня от величины расщепления основного состояния ω_{12} при фиксированной частоте модуляции $\Omega_{mod} = 2$ для различных значений индекса модуляции $0 < M < 5$. При $M = 0$ модуляция отсутствует и темный резонанс наблюдается, как и следовало ожидать, при $\omega_{12} = 0$, т. е. когда система вырождена. Дальнейшее увеличение индекса модуляции ведет к появлению дополнительных резонансов при условии, когда $\omega_{12} = n\Omega_{mod}$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Это связано с тем, что с увеличением индекса модуляции число боковых полос в спектре, согласно формуле (3), увеличивается.

Расчеты также показывают, что с увеличением скорости распада возбужденного состояния γ относительная величина резонансов и их контраст резко уменьшаются, а с увеличением частоты Раби относительная величина резонансов и их контраст возрастают.

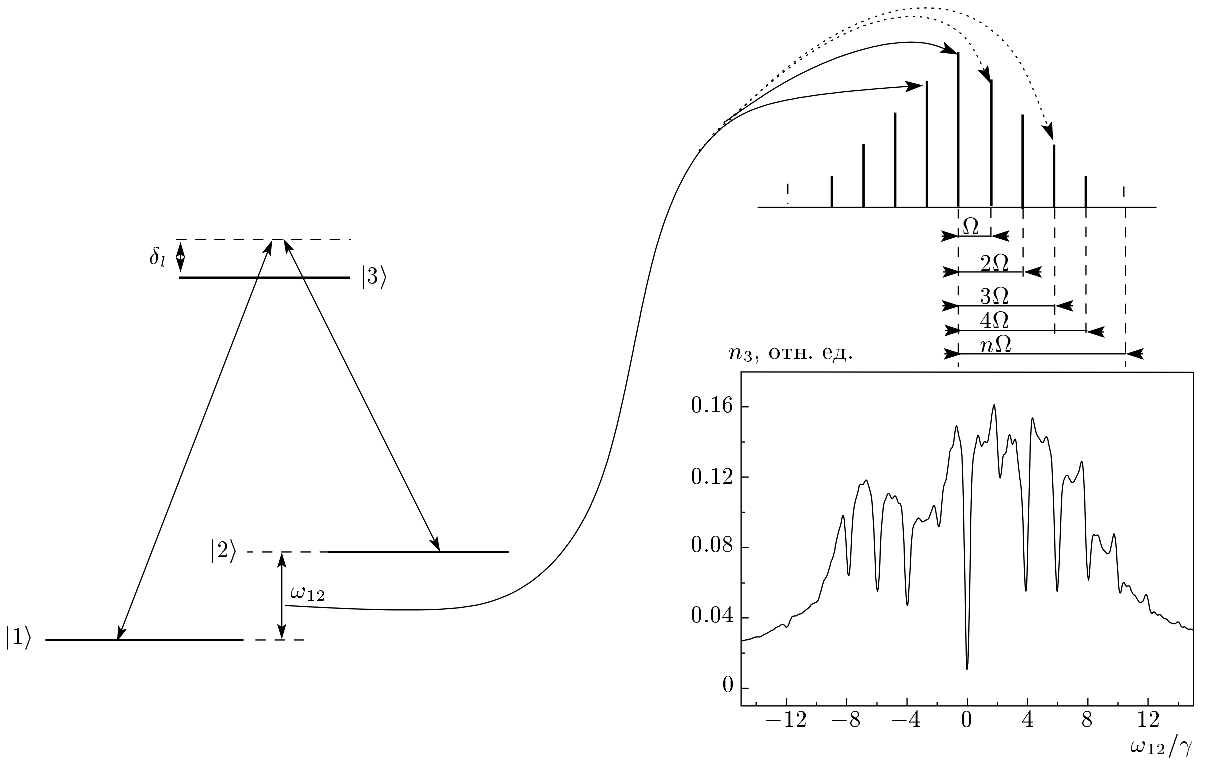

Рис. 7. Механизм формирования темных резонансов в случае Λ-системы, взаимодействующей с частотно-модулированным лазерным полем

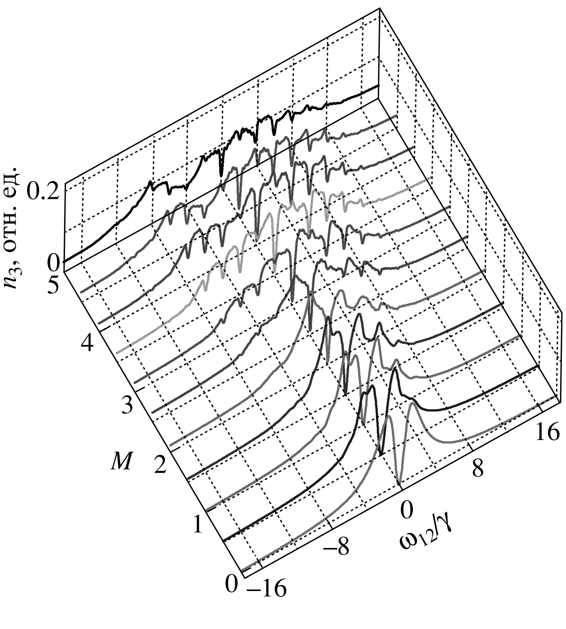

Рис. 8. Населенность возбужденного состояния в зависимости от ω_{12} и модуляционного индекса M. Другие параметры системы равны: $\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma$, $\Omega_{mod} = 2\gamma$, $g_{13} = g_{23} = 0.8\gamma$, $\gamma = 1$ МГц

5. ТОЧНЫЙ РАСЧЕТ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СПЕКТРОВ КПН

Для оценки точности результатов, полученных при помощи простой двухчастотной модели, рассмотрим точную задачу о взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем при помощи метода матрицы плотности, временная эволюция которой определяется кинетическим уравнением вида (4). Гамильтониан взаимодействия Λ-системы с частотно-модулированным полем (3) имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{i\Delta(t)}g_{13} \\ 0 & -\omega_{12} & e^{i\Delta(t)}g_{23} \\ e^{-i\Delta(t)}g_{13} & e^{-i\Delta(t)}g_{23} & \delta_L \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

где $\Delta(t) = M\sin(\Omega t)$. Подставляя выражение для $\mathcal{L}_r$ и (11) в уравнение (4), мы получаем систему из девяти дифференциальных уравнений, решение которой дает нам, в частности, зависимость $\rho_{33}(t)$, которая описывает изменение населенности возбужденного состояния Λ-системы от времени для данного значения ω_{12}. Рассчитав таким образом населенность для диапазона значений ω_{12}, получим трехмерную зависимость, описывающую формирование резонансов КПН во времени для различных значений расщепления основного состояния. Соответствующие расчеты были выполнены нами, и их результаты в сравнении с простой двухчастотной моделью приведены ниже.

По аналогии с п. 4.4 рассмотрим сначала случай, когда система взаимодействует с одним полем (рис. 4*б*). При $M = 0$ модуляция отсутствует и темный резонанс наблюдается, как и следовало ожидать, при $\omega_{12} = 0$, т. е. когда система вырождена, что полностью совпадает с результатом, полученным с использованием супероператорного подхода (рис. 4*а*).

Зависимости населенности возбужденного состояния от времени и величины расщепления основного состояния в случае ЧМ-поля, рассчитанные при помощи метода матрицы плотности, приведены на рис. 5*б*. На рис. 6*б* приведено сечение $t = 25\gamma^{-1}$, соответствующее режиму, когда резонансы КПН сформировались. Из сравнения графиков на рис. 6*а* и рис. 6*б* следует качественное согласие результатов, полученных разными методами. При этом, однако, видно, что метод матрицы плотности не позволяет точно оценить ширину и контраст резонансов, поскольку стационарное состояние достигается при $t \to \infty$, в то время как в данном методе расчета рассматривается конечный промежуток времени, из-за чего полученные результаты для поглощения завышены.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами предложена и проанализирована простая двухчастотная модель для решения задачи ЧМ-спектроскопии темных резонансов на примере трехуровневой Λ-системы. Показано, что поскольку спектр ЧМ-поля представляет собой набор эквидистантных частотных компонент, механизм описания взаимодействия Λ-системы с ЧМ-полем возможен путем замены ЧМ-спектра на два эффективных монохроматических поля. Применимость и точность двухчастотной модели была продемонстрирована путем сравнения результатов, полученных с ее помощью, с результатами решения точной задачи о взаимодействии Λ-системы с ЧМ-полем (разд. 5).

С использованием предложенной двухчастотной модели нами были рассчитаны спектры поглощения Λ-системы, взаимодействующей с ЧМ-полем. Показано, что в случае Λ-системы, взаимодействующей с одним резонансным полем без модуляции ($M = 0$), темный резонанс в спектре наблюдается только в случае нулевого расщепления основного состояния, т. е. вырожденной Λ-системы. При наличии модуляции в спектре формируются дополнительные резонансы КПН на частотах, кратных частоте модуляции Ω_{mod}, т. е. резонанс формируется, когда межмодовое расстояние $n\Omega_{mod}$ равно зеемановскому расщеплению основного состояния ω_{12}. Число резонансов зависит от индекса модуляции M и увеличивается с его ростом. Для разных значений M интенсивность разных резонансов различна и регулируется аргументами функции Бесселя $J_n(M)$, определяющими амплитуды частотных гармоник. Когда положение резонанса приходится на минимум этой функции, его интенсивность практически равна нулю. Показано, что полученные при помощи двухчастотной модели результаты качественно подтверждают образование в экспериментальных спектрах дополнительных резонансов КПН на частотах, кратных частоте модуляции.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 04-02-17554).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cimento B **36**, 5 (1976).
2. A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **61**, 826 (1996).
3. A. V. Taichenachev, V. I. Yudin, R. Wynands, M. Stahler, J. Kitching, and L. Hollberg, Phys. Rev. A **67**, 033810 (2003).
4. A. Godone, F. Levi, S. Micalizio, and J. Vanier, Phys. Rev. A **62**, 053402 (2000).
5. A. Kasapi, Phys. Rev. Lett. **77**, 1035 (1997).
6. E. Arimondo, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, Elsevier, Amsterdam (1996), Vol. 35, p. 257.
7. Ю. В. Владимирова, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, Н. Н. Калачевский, А. В. Акимов, Н. А. Кисилев, С. И. Канорский, ЖЭТФ **123**, 710 (2003).
8. C. Andreeva, G. Bevilacqua, V. Biancalana, S. Cartaleva, Y. Dancheva, T. Karaulanov, C. Marinelli, E. Mariotti, and L. Moi, Appl. Phys. B **76**, 667 (2003).

9. G. E. Hall and S. W. North, Annu. Rev. Phys. Chem. **51**, 243 (2000).

10. L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).

11. G. Bevilacqua, V. Biancalana, E. Breschi, Y. Dancheva, C. Marinelli, E. Mariotti, L. Moi, Ch. Andreeva, T. Karaulanov, and S. Cartaleva, 13^{th} Int. School Quant. Electr.: Laser Phys. and Applications, SPIE Proc. **5830**, 150 (2005).

12. E. B. Alexandrov, M. Azuzinsh, D. Budker, D. F. Kimbal, S. M. Rochester, and V. V. Yashchuk, E-print archives, physics/0405049.

13. Yu. Malakyan, S. M. Rochester, D. Budker, D. F. Kimbal, and V. V. Yashchuk, Phys. Rev. A **69**, 013817 (2004).

14. Б. А. Гришанин, *Квантовые случайные процессы*, http://comsim1.phys.msu.su/people/grishanin/teaching/qsp/.

15. J. M. Supplee, E. A. Whittaker, and W. Lenth, Appl. Opt. **33**, 6294 (1994).