

# СОЛИТОННАЯ ДИНАМИКА ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ В СИСТЕМЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КВАНТОВЫХ ОБЪЕКТОВ

С. В. Сазонов<sup>a\*</sup>, Н. В. Устинов<sup>b\*\*</sup>

<sup>a</sup>Российский государственный университет им. И. Канта  
236041, Калининград, Россия

<sup>b</sup>Томский государственный университет  
634050, Томск, Россия

Поступила в редакцию 20 апреля 2006 г.

Теоретически исследовано нелинейное распространение векторного предельно короткого импульса в системе анизотропных квантовых центров в условиях неприменимости приближения медленно меняющихся огибающих. Показано, что если спектральная ширина импульса значительно превышает частоту квантовых переходов, то динамика его обыкновенной компоненты подчиняется модифицированному уравнению синус-Гордона, которое относится к классу интегрируемых моделей, но до сих пор не имело физических приложений. Необыкновенная составляющая импульса, динамически сдвигающая вследствие эффекта Штарка частоты переходов, оказывается при этом связанной с обыкновенной компонентой алгебраическим соотношением. Проведена классификация солитонных решений выведенного уравнения. В зависимости от длительности солитона возможны решения в виде  $2\pi$ -импульсов (кинков и антикинков) или стационарных бегущих  $0\pi$ -импульсов (нейтральных кинков), не имеющих соответствия в изотропном случае. Изучены поведение среды при прохождении солитонов различных типов и процессы их столкновений между собой.

PACS: 42.65.Tg, 42.50.Hz

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Появившаяся в восьмидесятых и девяностых годах прошлого столетия возможность генерации в лабораторных условиях импульсов длительностью до одного периода электромагнитных колебаний [1, 2] (предельно коротких импульсов) явилась мощным стимулом для теоретических исследований по взаимодействию таких импульсов с веществом [3–14]. По понятным причинам здесь несправедливо традиционное для нелинейной оптики квазимонохроматических импульсов приближение медленно меняющихся огибающих.

Пожалуй, впервые отказались от приближения медленно меняющихся огибающих в работах [15, 16] при альтернативном подходе к теории самоиндуцированной прозрачности [17, 18]. В основе этого

подхода лежит предположение о малой плотности двухуровневых частиц, которое тоже выполнялось в экспериментах. Поскольку отраженная волна в этом случае мала, можно применить приближение однонаправленного распространения и понизить порядок производных в волновом уравнении для поля импульса. В результате была получена редуцированная система Максвелла–Блоха, которая так же, как и уравнения самоиндуцированной прозрачности, оказалась интегрируемой с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [19, 20].

В работах [3, 4] отказались как от приближения медленно меняющихся огибающих, так и от предположения о малой плотности частиц. С помощью условия спектрального перекрытия

$$\varepsilon \equiv (\omega_0 \tau_p)^2 \ll 1, \quad (1)$$

где  $\tau_p$  и  $\omega_0$  — соответственно характерный временной масштаб импульса и частота квантовых пе-

\*E-mail: barab@newmail.ru

\*\*E-mail: n\_ustinov@mail.ru

реходов, было показано, что взаимодействие предельно коротких импульсов со средой описывается уравнением синус-Гордона (СГ). При использовании же прямо противоположного (1) предела оптической прозрачности для электрического поля предельно коротких импульсов было получено модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза [4]. Учет нелинейности электронного отклика среды с помощью условия оптической прозрачности и ионной дисперсии в пределе спектрального перекрытия привел Шефера и Уэйна [21] к новому волновому уравнению, которое оказалось интегрируемым с помощью МОЗР [22]. Заметим, что данное уравнение является частным случаем полученного ранее в [10] уравнения, где помимо ионной дисперсии проведен в приближении оптической прозрачности также учет дисперсии электронного отклика.

Для предельно коротких импульсов, подчиняющихся условию (1), вопрос о применимости модели двухуровневых частиц требует отдельного обсуждения. Покажем, что в некоторых случаях эта модель по-прежнему остается справедливой. Пусть энергии основного состояния и ближайшего к нему возбужденного различаются на величину  $\hbar\omega_0$  и пусть  $\omega'$  — частота перехода с одного из этих уровней на еще один возбужденный. Последним переходом можно пренебречь, если он удален по шкале энергии от первых двух настолько, что не захватывается спектром импульса. Спектральная ширина импульса  $\delta\omega \sim 1/\tau_p$ , поэтому это условие можно записать в виде  $(\omega'\tau_p)^2 \gg 1$ . Пусть длительность предельно коротких импульсов  $\tau_p \sim 10$  фс. Тогда условие спектрального перекрытия хорошо выполняется для  $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , при этом  $\omega' \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ . Таким образом, спектром предельно коротких импульсов эффективно перекрываются квантовые переходы инфракрасного диапазона. Это могут быть переходы в системах колебательных [3, 12], туннельных [23] переходов или переходов в низкоразмерных полупроводниковых структурах [24].

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию нелинейной динамики оптических импульсов (в том числе и предельно коротких импульсов) в средах несимметричных квантовых объектов (НКО) [25–34]. Данные объекты характеризуются отличными от нуля постоянными дипольными моментами (ПДМ) в собственно энергетических состояниях. В таких условиях оптический импульс не только вызывает квантовые переходы между этими состояниями, но и динамическим образом сдвигает частоту переходов за счет эффекта Штарка.

Редуцированная система уравнений Максвел-

ла–Блоха с постоянным дипольным моментом, выведенная в предположении о малой плотности НКО, тоже оказалась интегрируемой с помощью МОЗР [27]. Как и в изотропном случае, при ее выводе было использовано приближение однонаправленного распространения. Кроме того, считалось, что только одна компонента поля импульса не равна нулю.

Векторный характер оптического импульса был, в частности, учтен в работах [30–32]. Квантовые частицы там считались двухуровневыми с двукратно вырожденным возбужденным уровнем ( $\sigma$ -переход). При наложении дополнительного условия равенства ПДМ вырожденных состояний задача может быть сведена унитарным преобразованием к обычной двухуровневой. Заметим, что строгое выполнение данного условия является трудно достижимым. Тем не менее к нему можно обращаться в случаях НКО, у которых величины ПДМ достаточно близки. Применение приближений однонаправленного распространения и медленно меняющихся огибающих к уравнениям, полученным в результате унитарного преобразования, породило еще одну нелинейную интегрируемую систему (см. [32] и ссылки там же). Это обстоятельство позволило детально изучить различные режимы резонансного распространения векторных электромагнитных импульсов в средах, обладающих ПДМ.

Из сказанного выше следует, что изучение динамики векторных предельно коротких импульсов с системе НКО является актуальной задачей. Подчеркнем, что ее рассмотрение не может быть проведено с использованием приближения медленно меняющихся огибающих. Настоящая работа посвящена решению данной задачи для импульсов, удовлетворяющих условию спектрального перекрытия.

Статья построена следующим образом. Во втором разделе приводится физическая модель системы НКО, взаимодействующих с электромагнитным импульсом, состоящим из обыкновенной и необыкновенной компонент. В рамках данной модели получена самосогласованная система материальных и волновых уравнений, описывающая распространение векторного предельно короткого импульса через среду, содержащую НКО. Третий раздел посвящен выводу из этой системы нелинейного волнового уравнения на основе предположения, что спектральная ширина импульса значительно превышает частоту квантовых переходов НКО. Это уравнение, известное в математике с 1974 года, в настоящей работе впервые получено при рассмотрении конкретной физической задачи. В разд. 4 используются пред-

ставление нулевой кривизны и техника преобразования Дарбу для построения одно-, двухсолитонных и бризерных решений данного уравнения. Выделены классы солитонных решений и изучены их свойства, а также особенности столкновений солитонов. В заключении подведены основные итоги.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ И ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим среду, в которой находятся НКО. Будем считать матрицу, содержащую НКО, изотропной и характеризовать ее показателем преломления  $n$ , а НКО — аксиально симметричными с осью симметрии, совпадающей с осью  $z$  декартовой системы координат. В качестве НКО можно выбрать, например, несимметричные квантовые ямы. Если НКО являются квантовые нити, то они должны быть выстроены вдоль оси  $z$ .

Предположим, что асимметрия НКО обусловлена их внутренним электрическим полем. Тогда энергетические уровни НКО вырождены по модулю проекции  $M$  электронного углового момента на ось  $z$ . Будем считать, что основному состоянию соответствует  $M = 0$ , а возбужденному —  $M = \pm 1$ .

Пусть оптический импульс распространяется в среде перпендикулярно формируемой НКО оптической оси  $z$  в направлении, например, оси  $y$ . Тогда уравнения для элементов  $\rho_{\mu\nu}$  матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , описывающих динамику электронных состояний, примут вид [30]

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i \left( \omega_{\mu\nu} - \frac{D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu}}{\hbar} E_e \right) \rho_{\mu\nu} + i \left[ \hat{\Omega}, \hat{\rho} \right]_{\mu\nu}. \quad (2)$$

Здесь  $\omega_{\mu\nu}$  — частота перехода  $\mu \rightarrow \nu$  ( $\omega_{21} = \omega_{31} = -\omega_{12} = -\omega_{13} = \omega_0$ ;  $\omega_{23} = \omega_{32} = 0$ ),  $E_o \equiv E_x$  и  $E_e \equiv E_z$  — обыкновенная и необыкновенная компоненты электрического поля импульса,  $[\cdot, \cdot]_{\mu\nu}$  — матричный элемент коммутатора,

$$\hat{\Omega} = \frac{E_o}{\hbar} \hat{d} = \frac{E_o}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{21} \\ d_{31} & d_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  и  $d_{21}$ ,  $d_{31}$  — соответственно диагональные и недиагональные элементы матрицы оператора дипольного момента. В уравнениях (2) не предполагается суммирование по повторяющимся индексам,

а матрица плотности определена следующим образом:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

Величина  $D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu}$  называется ПДМ перехода  $\mu \leftrightarrow \nu$ .

Из формул (2) и (3) видно, что в рассматриваемой здесь геометрии распространения оптического импульса функции его обыкновенной и необыкновенной составляющих строго дифференцированы: первая вызывает переходы между задействованными квантовыми уровнями, вторая динамически сдвигает частоты данных переходов.

Компоненты электрического поля импульса подчиняются волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial y^2} - \left( \frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{\mu=2}^3 d_{\mu 1} (\rho_{\mu 1} + \rho_{\mu 1}^*), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial y^2} - \left( \frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{\mu=1}^3 D_{\mu\mu} \rho_{\mu\mu}, \quad (5)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $N$  — средняя электронная концентрация в НКО.

Система (2), (4), (5) самосогласованным образом описывает нелинейное взаимодействие между векторным полем оптического импульса и системой НКО. В работах [30–32] она изучалась при условии равенства ПДМ квантовых переходов  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 3$ .

## 3. МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОНА

Исключим из уравнений (2), (4) и (5) материальные переменные, используя условие (1). Также будем считать, что величины  $\omega_0$  и  $(D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu})E_e/\hbar$  одного порядка (см. ниже). Отметим, что если ПДМ переходов гораздо меньше по модулю дипольных моментов  $d_{21}$  и  $d_{31}$  (слабая асимметрия НКО), то данное утверждение может быть справедливым при сравнимых значениях полей  $E_e$  и  $E_o$ . В противном случае  $E_e \ll E_o$ .

Поскольку  $\partial \rho_{\mu\nu} / \partial t \sim \rho_{\mu\nu} / \tau_p$ , а  $\omega_0$  и  $(D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu})E_e/\hbar$  суть величины одного порядка, при  $\mu \neq \nu$  отношение слагаемых в правых частях (2) вне коммутатора к левым частям этой

же системы имеет порядок  $\sqrt{\varepsilon}$ . Поэтому в нулевом приближении по  $\varepsilon$  в правых частях (2) слагаемые вне коммутатора должны быть отброшены. При этом существенно, что с исчезновением обыкновенной компоненты импульса недиагональные элементы  $\hat{\rho}$  также должны обращаться в нуль. Данное предположение представляется естественным, так как именно обыкновенная составляющая возбуждает квантовые переходы, наводя в их системе квантовую когерентность, характеризуемую недиагональными элементами  $\hat{\rho}$ .

С учетом сказанного в нулевом приближении уравнение (2) может быть записано в операторной форме:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = i [\hat{\Omega}, \hat{\rho}]. \quad (6)$$

Учитывая, что матрица  $\hat{\Omega}$  коммутирует сама с собой в различные моменты времени (см. (3)), решение (6) представим в виде

$$\hat{\rho} = \exp \frac{i\hat{\psi}}{2} \hat{\rho}(-\infty) \exp \left( -\frac{i\hat{\psi}}{2} \right), \quad (7)$$

где

$$\hat{\psi} = 2 \int_{-\infty}^t \hat{\Omega} dt',$$

$\hat{\rho}(-\infty)$  — матрица плотности электрона до импульсного воздействия.

Нетрудно видеть, что при любом натуральном  $k$  выполняются равенства

$$\hat{\psi}^{2k+1} = \psi^{2k} \hat{\psi}, \quad \hat{\psi}^{2(k+1)} = \psi^{2k} \hat{\psi}^2,$$

где

$$\psi = 2 \frac{d}{\hbar} \int_{-\infty}^t E_o dt', \quad d = \sqrt{d_{21}^2 + d_{31}^2}.$$

Подставляя эти соотношения в разложения для операторных экспонент, входящих в (7), получим после их суммирования

$$\exp \left( \pm \frac{i\hat{\psi}}{2} \right) = \hat{I} \pm i \frac{d}{\hbar} \sin \frac{\psi}{2} - 2 \frac{d^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\psi}{4}, \quad (8)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица.

Пусть  $\hat{\rho}(-\infty) = \text{diag}(W_3, W_2, W_1)$ , где  $W_1, W_2, W_3$  — начальные заселенности уровней. Энергии второго и третьего уровней совпадают, поэтому в соответствии с бальцмановским распределением будем считать, что  $W_3 = W_2$ . Тогда из формул (7) и (8) найдем

$$\begin{aligned} \rho_{\mu 1} &= i \frac{W_1 - W_2}{2} \frac{d_{\mu 1}}{d} \sin \psi, \\ \rho_{32} &= (W_1 - W_2) \frac{d_{21} d_{31}}{d^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \rho_{11} &= W_1 - (W_1 - W_2) \sin^2 \frac{\psi}{2}, \\ \rho_{\mu \mu} &= W_2 + (W_1 - W_2) \frac{d_{\mu 1}^2}{d^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$\mu = 2, 3$ .

Заметим, что непосредственная подстановка первого выражения (9) в правую часть (4) обращает последнюю в нуль, т. е. нестационарный дипольный момент квантовых объектов исчезает в нулевом приближении по  $\varepsilon$ . Первое приближение соответствует подстановке (9) в правую часть (2). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{\mu 1} + \rho_{\mu 1}^*) &= (W_1 - W_2) \frac{d_{\mu 1}}{d} \times \\ &\times \left( \omega_0 - \frac{D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu}}{\hbar} E_e \right) \sin \psi \end{aligned}$$

для  $\mu = 2, 3$ . Подстановка данного выражения в уравнение (4), а выражений (9) для диагональных элементов  $\hat{\rho}$  в (5) приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_o}{\partial y^2} - \left( \frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} &= \\ = \frac{4\pi d N}{c^2} (W_1 - W_2) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \omega_0 + \frac{D}{\hbar} E_e \right) \sin \psi \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_e}{\partial y^2} - \left( \frac{n}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} &= \\ = -\frac{4\pi d N}{c^2} \frac{D}{\hbar} (W_1 - W_2) \frac{\partial}{\partial t} (E_o \sin \psi). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$D = \frac{d_{21}^2 (D_{11} - D_{22}) + d_{31}^2 (D_{11} - D_{33})}{d_{21}^2 + d_{31}^2}. \quad (12)$$

Данную величину можно определить как эффективный ПДМ квантовой системы.

Правые части уравнений (10) и (11) пропорциональны малому параметру

$$\sqrt{\varepsilon} \sim \left( \omega_0 + \frac{D E_e}{\hbar} \right) \tau_p \sim \frac{D E_o}{\hbar} \tau_p.$$

Обсудим, при каких условиях каждое из слагаемых в левых частях (10), (11) много больше соответствующих правых частей. Из самих уравнений получаем

$$E_o \sim E_e \gg 4\pi d N \sqrt{\varepsilon}.$$

В то же время

$$E_o \sim \frac{\hbar\psi}{2d\tau_p} \sim \frac{\hbar}{d\tau_p}.$$

Следовательно,

$$\eta\varepsilon \ll 1, \tag{13}$$

где  $\eta = 4\pi d^2 N / \hbar\omega_0$ .

Заметим, что неравенство (13) является менее жестким, чем условие малой плотности  $\eta \ll 1$  [15, 16]. Случай  $\eta \gg 1$  заведомо исключен из рассмотрения (поскольку мы не учитываем прямое диполь-дипольное взаимодействие между НКО), поэтому здесь может выполняться условие  $\eta \sim 1$ .

Малость правых частей уравнений (10), (11) позволяет использовать приближение однонаправленного распространения [15, 16]. Для этого введем «локальное» время  $\tau = t - ny/c$  и «медленную» координату  $\zeta = \sqrt{\varepsilon}y$ . Легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{n}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Пренебрегая квадратом величины  $\sqrt{\varepsilon}$ , запишем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\sqrt{\varepsilon} \frac{n}{c} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta}.$$

Тогда после интегрирования получившихся в новых переменных волновых уравнений по  $\tau$  и перехода к переменным  $\tau$  и  $y$  будем иметь

$$\frac{\partial E_o}{\partial y} = -\frac{2\pi dN}{cn}(W_1 - W_2) \left(\omega_0 + \frac{D}{\hbar} E_e\right) \sin \psi, \tag{14}$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial y} = \frac{2\pi dN}{cn} \frac{D}{\hbar} (W_1 - W_2) E_o \sin \psi. \tag{15}$$

Здесь нами принимались во внимание нулевые значения полей импульса на бесконечности.

Найденные уравнения обладают следующим интегралом движения:

$$\left(E_e + \frac{\hbar\omega_0}{D}\right)^2 + E_o^2 = \left(\frac{\hbar\omega_0}{D}(1 + f(\tau))\right)^2,$$

где  $f(\tau)$  — функция, определяемая условиями на входе предельно короткого импульса в среду. Аналогичный интеграл был выведен в работе [35] без использования условия (1), но в приближении среды малой плотности. Разрешая данное квадратное уравнение относительно  $E_e$ , получим

$$E_e = \frac{\hbar\omega_0}{D} \left[ \sqrt{(1 + f(\tau))^2 - \tau_c^2 u^2} - 1 \right], \tag{16}$$

где

$$u = \frac{2d}{\hbar} E_o, \quad \tau_c = \frac{|D|}{2d\omega_0}.$$

Предположим вначале, что  $f(\tau) = 0$ . Будем так же считать, что в правой части (16) берется арифметический корень, соответствующий случаю  $E_e \rightarrow 0$  при  $E_o \rightarrow 0$ . Подставляя (16) в (14) и учитывая соотношение

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \tau},$$

придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \tau} = -\beta \sqrt{1 - \tau_c^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2} \sin \psi, \tag{17}$$

где

$$\beta = \frac{4\pi d^2 N \omega_0}{\hbar cn} (W_1 - W_2).$$

Уравнение (17) переходит в уравнение СГ при  $\tau_c = 0$  и известно как модифицированное уравнение синус-Гордона (МСГ) [36–39]. Вместе с другими уравнениями, упомянутыми во Введении и выведенными различными способами из уравнений Максвелла–Блоха, оно тоже интегрируемо с помощью МОЗР. Применение условия спектрального перекрытия (1) при изучении распространения оптических импульсов в среде симметричных квантовых объектов привело, как и следовало ожидать, к уравнению СГ [3, 4].

Если  $f(\tau) \neq 0$ , то из формул (14) и (16) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1 + f(\tau)|} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \tau} &= \\ &= -\beta \sqrt{1 - \tau_c^2 \left(\frac{1}{|1 + f(\tau)|} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right)^2} \sin \psi. \end{aligned}$$

Так как это уравнение сводится к (17) с помощью замены независимой переменной

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \int_{-\infty}^{\tau} |1 + f(\tau')| d\tau',$$

в дальнейшем будем полагать  $f(\tau) = 0$ . Тогда, как видно из (16), подтверждается справедливость сделанного выше предположения о том, что величины  $\omega_0$  и  $DE_e/\hbar$  одного порядка.

Следует особо отметить, что в настоящей работе уравнение (17) впервые выведено на основе рассмотрения конкретной физической задачи. Ранее, в работах [36–39], оно было найдено в ходе сугубо математического исследования свойств преобразования Бэклунда для уравнения СГ.

**4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ И АНАЛИЗ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ**

Уравнение МСГ можно записать в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial \tau} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0, \tag{18}$$

в котором матрицы  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  имеют вид

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iu & \lambda [\sqrt{1 - \tau_c^2 u^2} - i\tau_c u] \\ \lambda [\sqrt{1 - \tau_c^2 u^2} + i\tau_c u] & -iu \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\hat{A} = -\frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} -i\tau_c \sin \psi & \frac{\exp(i\psi)}{\lambda} \\ \frac{\exp(-i\psi)}{\lambda} & i\tau_c \sin \psi \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Уравнение (18) является условием совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= \hat{L}\xi, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \hat{A}\xi, \end{aligned} \tag{21}$$

где  $\xi = \xi(\tau, y, \lambda) = (\xi_1, \xi_2)^T$  — векторное решение пары Лакса,  $\lambda$  — спектральный параметр. Условие совместности (18) должно выполняться при любом значении спектрального параметра.

Хорошо известно, что солитонные решения интегрируемых уравнений можно найти, не только используя аппарат МОЗР, но и применяя более простые алгебраические методы. Так, многосолитонные решения уравнения МСГ были получены в работе [38] с помощью техники преобразования Бэклунда. В настоящей работе к построению решений будет привлечена техника преобразования Дарбу [40]. Особенность данной техники состоит в том, что она позволяет получать бесконечную последовательность решений интегрируемого уравнения вместе с соответствующими решениями ее пары Лакса.

Пусть  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$  — решение системы (21) при  $\lambda = \mu$ . Тогда пара Лакса (21) ковариантна относительно преобразования Дарбу  $\{\xi_1, \xi_2, \psi\} \rightarrow \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\psi}\}$  следующего вида

$$\tilde{\xi}_1 = \exp \left[ \frac{i}{2} (\tilde{\psi} - \psi) \right] \left( \mu \xi_1 - \lambda \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \xi_2 \right), \tag{22}$$

$$\tilde{\xi}_2 = \exp \left[ \frac{i}{2} (\psi - \tilde{\psi}) \right] \left( \mu \xi_2 - \lambda \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \xi_1 \right), \tag{23}$$

$$\tilde{\psi} = \psi + i \ln \frac{\varphi_1^2 - \tau_c \mu \varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2^2 - \tau_c \mu \varphi_1 \varphi_2}. \tag{24}$$

Соотношение (24) определяет новое («одетое») решение уравнения (17). При  $\tau_c = 0$  равенства (22)–(24) переходят в преобразование Дарбу для уравнения СГ [40]. В случае  $\tau_c \neq 0$  эти выражения являются новыми.

Выберем в качестве исходного решения данного уравнения нулевой фон:  $\psi = 0$ . Тогда выражения для компонент решения  $\varphi$  пары Лакса (21) при  $\lambda = \mu$  имеют вид

$$\varphi_1 = c_1 \exp(\chi/2) + c_2 \exp(-\chi/2),$$

$$\varphi_2 = c_1 \exp(\chi/2) - c_2 \exp(-\chi/2),$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — произвольные постоянные,

$$\chi = \frac{\tau - \beta \tau_p^2 y}{\tau_p}, \quad \tau_p = \frac{1}{\mu}.$$

В дальнейшем будем полагать, используя сдвиги по переменным  $\tau$  и  $y$ , произвольные постоянные равными заданным величинам, выбранным из соображений удобства.

Если параметр  $\mu$  веществен и  $\varphi_2 = \varphi_1^*$ , то, подставив выражения для компонент  $\varphi$  в (24) и опустив значок тильды в левой части, получим вещественное односолитонное решение уравнения МСГ:

$$\psi = 2 \arccos \frac{q - \text{th } \chi}{\sqrt{1 - 2q \text{th } \chi + q^2}}, \tag{25}$$

где

$$q = \frac{\tau_c}{\tau_p}.$$

В качестве свободного параметра данного решения нами выбрана величина  $\tau_p$ . Легко видеть, что переменную  $\chi$  можно записать следующим образом:

$$\chi = \frac{t - y/v}{\tau_p},$$

где скорость  $v$  солитона (25) в лабораторной системе координат определена равенством

$$v = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{n}{c} \beta \tau_p^2 \right)^{-1}. \tag{26}$$

Выражение для обыкновенной компоненты солитона имеет вид

$$E_o = \frac{\hbar}{d\tau_p} \operatorname{sch} \chi \frac{1 - q \operatorname{th} \chi}{1 - 2q \operatorname{th} \chi + q^2}. \quad (27)$$

Необыкновенная компонента связана с обыкновенной соотношением (16). Уравнения (9) и (25) дают соответствующие выражения для населенностей квантовых уровней:

$$\rho_{11} = W_1 - (W_1 - W_2) \frac{\operatorname{sch}^2 \chi}{1 - 2q \operatorname{th} \chi + q^2}, \quad (28)$$

$$\rho_{\mu\mu} = W_2 + (W_1 - W_2) \frac{d_{\mu 1}^2}{d^2} \frac{\operatorname{sch}^2 \chi}{1 - 2q \operatorname{th} \chi + q^2}, \quad (29)$$

$\mu = 2, 3$ .

Для «площади» обыкновенной компоненты солитона  $A_s \equiv \psi|_{\tau \rightarrow \infty}$ , определяющей его топологический заряд  $A_s/2\pi$ , имеем

$$A_s = \begin{cases} 2\pi \operatorname{sign} \tau_p, & |q| < 1, \\ 0, & |q| > 1. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, односолитонные импульсы можно разбить на три семейства в зависимости от их топологического заряда 1, -1 или 0. Первые два семейства существуют у уравнения СГ тоже и соответствуют кинкам и антикинкам (т.е.  $2\pi$ -импульсам). Солитоны из последнего семейства можно назвать нейтральными кинками. В отличие от бризерного решения уравнения СГ, «площадь» которого тоже равна нулю ( $0\pi$ -импульс), эти решения являются стационарными: их профиль в сопутствующей системе отсчета не претерпевает изменений. Случай  $|q| = 1$ , соответствующий границе семейств, будет обсужден ниже. Из выражения для  $q$  видно, что величина  $\tau_c$  имеет смысл критической длительности, разделяющей  $2\pi$ -импульсы ( $|\tau_p| > \tau_c$ ) и нейтральные кинки ( $|\tau_p| < \tau_c$ ).

Возвращаясь к физическим переменным, видим, что если  $|q| < 1$ , то обыкновенная составляющая  $E_o$  односолитонного импульса является однополярной и состоящей из одного горба при  $|q| < 1/\sqrt{2}$  или двух симметричных горбов при  $|q| > 1/\sqrt{2}$  (рис. 1а). В первом случае ее амплитуда равна

$$\frac{\hbar}{|d\tau_p|} \sqrt{1 - q^2},$$

тогда как во втором она достигает предельного (наибольшего по абсолютной величине) значения

$$\mathcal{E}_m = \frac{\hbar\omega_0}{|D|},$$

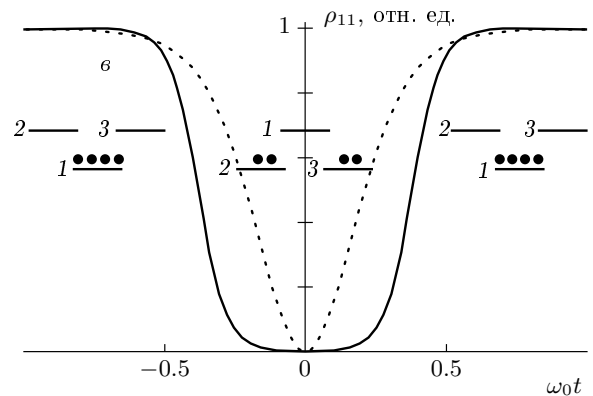
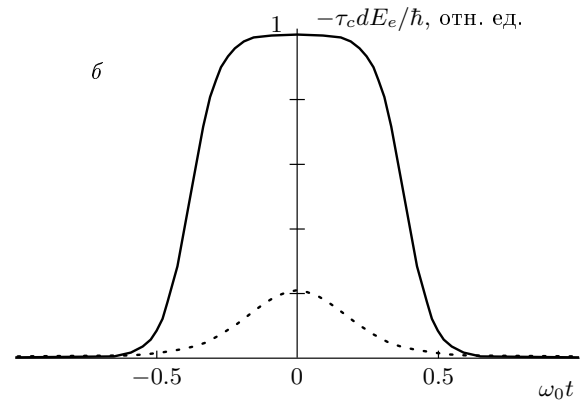
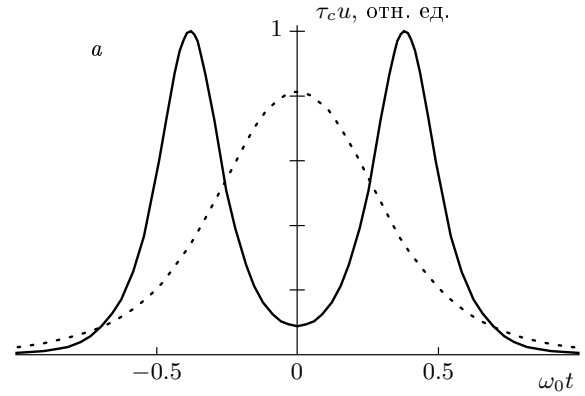


Рис. 1. Временные зависимости обыкновенной (а), необыкновенной (б) компонент импульса и населенности основного уровня (в) при  $\tau_c = 0.1/\omega_0$ ,  $W_1 = 1$  для  $\tau_p = 0.1001/\omega_0$  (сплошные линии),  $0.22/\omega_0$  (точечные линии)

зависящего только от параметров НКО. Горбы разделены временным интервалом

$$2|\tau_p| \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{q^2}{1 - q^2} - 1},$$

при этом значение необыкновенной компоненты

между ними стремится к

$$-2 \operatorname{sign}(D) \mathcal{E}_m$$

(см. рис. 1б). То, что знак  $E_e$  определен знаком  $D$ , явно указывает на асимметрию по полярности необыкновенной компоненты в данной задаче. Ее присутствие в центре импульса меняет местами положения основного и возбужденных уровней вследствие эффекта Штарка (см. (14) и динамику квантовых уровней на рис. 1в).

При  $|q| > 1$  обыкновенная составляющая является двухполярной и состоит из двух антисимметричных горбов, временной промежуток между которыми равен

$$2|\tau_p| \operatorname{arch} \sqrt{1 + \frac{q^2}{q^2 - 1}}.$$

Амплитудные значения обыкновенной и необыкновенной компонент здесь такие же, как при  $1/\sqrt{2} < |q| < 1$  (рис. 2а,б).

При  $|q| = 1$  интервал между горбами становится неограниченным. При этом решение (27) состоит из одного горба, амплитуда и модуль площади которого равны соответственно  $\mathcal{E}_m$  и  $\pi$ .

В симметричном случае ( $\tau_c = q = 0$ ) прохождение солитона вызывает полную инверсию населенности квантовых уровней с последующим возвратом к исходному состоянию вне зависимости от значения параметра  $\tau_p$ . В несимметричном же случае, как следует из выражений (28) и (29), при  $|q| < 1$  возбуждение квантовых частиц оказывается полным, а при  $|q| > 1$  — неполным. Так, для населенности  $\rho_{11}^{(c)}$  основного уровня в центре импульса, где достигается ее наибольшее изменение, имеем следующие выражения:

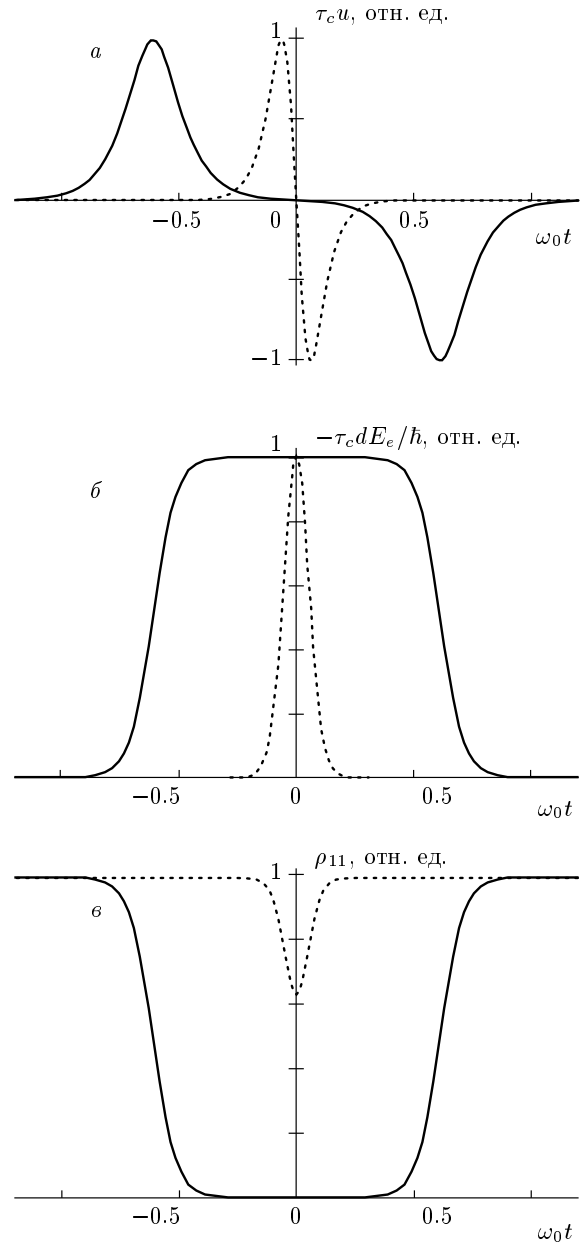
$$\rho_{11}^{(c)} = \begin{cases} W_2, & |q| < 1, \\ W_1 - \frac{W_1 - W_2}{q^2}, & |q| > 1. \end{cases}$$

Графики населенности основного уровня при различных значениях параметра  $\tau_p$  представлены на рис. 1в, 2в. При  $|q| \gg 1$  из формул (27), (16) и (28) получаем

$$E_o = -2 \frac{\hbar \omega_0}{D} \operatorname{th} \chi \operatorname{sch} \chi,$$

$$E_e = -\frac{\hbar \omega_0}{D} \left( 1 - \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \chi \operatorname{sch}^2 \chi} \right),$$

$$\rho_{11} = W_1 - \frac{W_1 - W_2}{q^2} \operatorname{sch}^2 \chi \approx W_1.$$

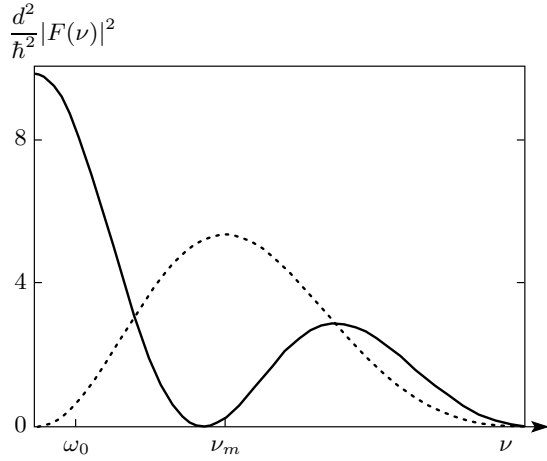


**Рис. 2.** Временные зависимости обыкновенной (а), необыкновенной (б) компонент импульса и населенности основного уровня (в) при  $\tau_c = 0.1/\omega_0$ ,  $W_1 = 1$  для  $\tau_p = (0.1-10^{-6})/\omega_0$  (сплошные линии),  $0.06/\omega_0$  (точечные линии)

Таким образом, распространение такого суперкороткого солитона ( $\omega_0|\tau_p| \ll |D/2d| \ll 1$ ) сопровождается практическим пленением населенностей квантовых уровней.

Объяснить данный эффект можно на основе спектрального анализа. Выполнив с (27) преобразо-





**Рис. 3.** Частотные зависимости спектральной плотности при  $\tau_c = 0.1/\omega_0$  для  $\tau_p = 0.1001/\omega_0$  ( $|q| < 1$ , сплошная кривая) и  $\tau_p = 0.099/\omega_0$  ( $|q| > 1$ , точечная кривая)

вание Фурье

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E_o \exp(i\nu t) dt,$$

получим для спектральной плотности

$$|F(\nu)|^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2d^2} \operatorname{sch}^2 \frac{\pi \nu \tau_p}{2} \times \left[ 1 + \operatorname{sign}(1 - q^2) \cos \left( \nu \tau_p \ln \left| \frac{1 + q}{1 - q} \right| \right) \right]. \quad (31)$$

При  $|q| < 1$  спектр обыкновенной компоненты импульса центрирован на нулевой частоте и хорошо перекрывает квантовый переход вследствие условия (1) (см. рис. 3). При этом необыкновенная компонента сдвигает частоту перехода в красную область, где спектральная плотность больше. Если  $|q| > 1$ , то минимум спектральной плотности приходится на нулевую частоту, и штарковский сдвиг будет эффективно уводить импульс от резонанса. В пределе  $|q| \gg 1$  из выражения (31) получаем

$$|F(\nu)|^2 = \left( \frac{\pi \hbar}{d} \frac{\nu \tau_p}{q} \right)^2 \operatorname{sch}^2 \frac{\pi \nu \tau_p}{2}.$$

Максимум спектральной плотности в этом случае соответствует частоте  $\nu_m$ , такой что  $\nu_m \tau_p \approx 0.76$ . В силу условия (1) в спектре импульса практически отсутствуют фурье-компоненты, резонансные рассматриваемому здесь квантовому переходу, что и обуславливает его слабое возбуждение. Взяв

для структур типа GaAs/Al<sub>0.14</sub>Ga<sub>0.86</sub> с запирающими барьерами из Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.3</sub>As [41]  $|D/d| \approx 0.2$ ,  $\omega_0 \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , найдем  $\tau_c \sim 10 \text{ фс}$ . Заметим, что в средах НКО с высокой степенью асимметрии, у которых  $|D/d| \geq 1$ , могут существовать только двухполярные импульсы, для которых  $|\tau_p| < \tau_c$ . Возможность же формирования однополярных импульсов вступает в противоречие с условием (1). Импульсы обоих типов возможны только в средах, где ПДМ мал по сравнению с дипольными моментами квантовых переходов.

Обыкновенная и необыкновенная компоненты солитонов, для которых  $A_s = \pm 2\pi$ , являются однополярными и обращаются в нуль при  $t \rightarrow \pm\infty$  вместе с недиагональными элементами матрицы плотности. При  $A_s = 0$  обыкновенная составляющая обращается в нуль еще и в центре солитона, где  $\psi = \pi$ . Как видно из формулы (9), при этом  $\rho_{21} = \rho_{31} = 0$ . В случае, когда расстояние между разнополярными горбами обыкновенной компоненты меньше или сравнимо с длительностью  $\tau_p$  каждого из них, данная область малости величины  $E_o$  является сравнительно узкой и не может сказываться сколько-нибудь существенно на динамике квантовых состояний. В противоположном случае среда между горбами находится в стационарных состояниях, где доминирует необыкновенная компонента солитона. Здесь ситуация аналогична штарковскому сдвигу в стационарном поле с инверсией квантовых уровней друг относительно друга, что достаточно ясно с физической точки зрения описывается проанализированным здесь солитонным решением. Таким образом, пренебрежение в нулевом приближении слагаемыми вне коммутатора в правой части (2) находит свое физическое обоснование при анализе солитонного решения.

Двукратное проведение преобразования Дарбу (22)–(24) дает следующее выражение для «одетого» решения уравнения (17):

$$\tilde{\psi} = \psi + i \ln \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad (32)$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \psi_1 & \lambda \psi_2 \\ \varphi_1 & \mu \varphi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_c^2 & \tau_c & 1 \\ \psi_1 & \lambda \psi_2 & \lambda^2 \psi_1 \\ \varphi_1 & \mu \varphi_2 & \mu^2 \varphi_1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \psi_2 & \lambda \psi_1 \\ \varphi_2 & \mu \varphi_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \tau_c^2 & \tau_c & 1 \\ \psi_2 & \lambda \psi_1 & \lambda^2 \psi_2 \\ \varphi_2 & \mu \varphi_1 & \mu^2 \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Вещественные решения уравнения МСГ можно получить из (32) двумя способами. Ниже мы подроб-

но рассмотрим эти способы, считая, что исходным решением является нулевой фон ( $\psi = 0$ ). В этом случае равенство (32) будет давать двухсолитонные решения.

Построим решение, описывающее взаимодействие двух односолитонных импульсов, изученных выше. Пусть параметры  $\mu$  и  $\lambda$  вещественны, и выполняются соотношения  $\varphi_2 = \varphi_1^*$ ,  $\psi_2 = \psi_1^*$ . Тогда, подставив выражения для компонент решений  $\varphi$  и  $\psi$  пары Лака в (32), мы можем записать данное решение следующим образом:

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\tau_p + \tilde{\tau}_p}{\tau_p - \tilde{\tau}_p} \frac{\operatorname{sh} \frac{\chi - \tilde{\chi}}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\chi + \tilde{\chi}}{2}} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\tau_p + \tilde{\tau}_p}{\tau_p - \tilde{\tau}_p} \frac{(1 - q\tilde{q}) \operatorname{sh} \frac{\chi - \tilde{\chi}}{2} - (q - \tilde{q}) \operatorname{ch} \frac{\chi - \tilde{\chi}}{2}}{(1 + q\tilde{q}) \operatorname{ch} \frac{\chi + \tilde{\chi}}{2} - (q + \tilde{q}) \operatorname{sh} \frac{\chi + \tilde{\chi}}{2}}, \quad (33)$$

где

$$\tilde{\chi} = \frac{\tau - \beta \tilde{\tau}_p^2 y}{\tilde{\tau}_p} = \frac{t - y/\tilde{v}}{\tilde{\tau}_p}, \quad \tilde{q} = \frac{\tau_c}{\tilde{\tau}_p}, \quad \tilde{\tau}_p = \frac{1}{\lambda},$$

выражение для  $\tilde{v}$  совпадает с (26) с точностью до замены  $\tau_p \rightarrow \tilde{\tau}_p$ .

Из соотношения (33) следует, что результатом взаимодействия импульсов являются их пространственные и временные сдвиги. Абсолютная величина временного сдвига солитона с параметром  $\tau_p$  после взаимодействия равна

$$|\Delta t| = 2\omega_0 |\tau_p| \ln \left| \frac{\tau_p - \tilde{\tau}_p}{\tau_p + \tilde{\tau}_p} \right|.$$

Этот сдвиг положителен, если  $|\tau_p| > |\tilde{\tau}_p|$ , что означает меньшую скорость у данного солитона.

Отметим, что, хотя форма односолитонного импульса зависит как от  $\tau_p$ , так и от  $\tau_c$ , величина сдвига полностью определена первым параметром. Однако ход взаимодействия существенным образом зависит от соотношения между  $\tau_c$  и параметрами импульсов. Профили обыкновенной компоненты поля, представленные на рис. 4, иллюстрируют это утверждение в случае, когда параметр  $\tilde{q}$  близок по модулю к единице, а  $q$  — нет. Солитон с параметром  $\tau_p$  взаимодействует с пиками второго солитона независимо, сдвигаясь на каждом этапе на  $\Delta t/2$ . Если этот солитон является нейтральным кинком, то его полярность меняется дважды в ходе взаимодействия (рис. 4б).

Переходя в выражении (33) к пределу  $\tilde{\tau}_p \rightarrow \tau_p$ , получим

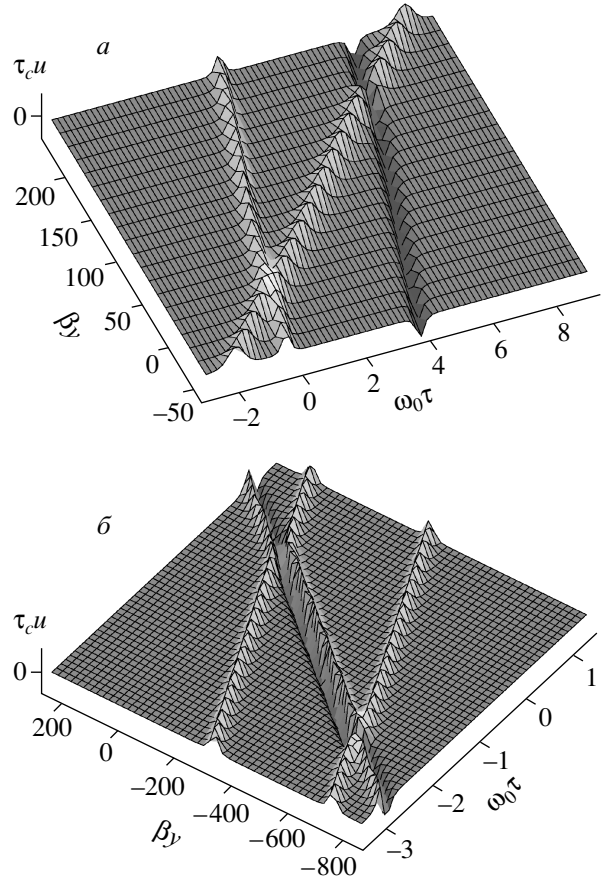


Рис. 4. Профили обыкновенной компоненты поля при взаимодействии солитонов с параметрами  $\tau_p = 0.18/\omega_0$  и  $\tilde{\tau}_p = (0.1 - 10^{-19})/\omega_0$  (а),  $\tau_p = 0.06/\omega_0$  и  $\tilde{\tau}_p = (0.1 + 10^{-19})/\omega_0$  (б). Параметр  $\tau_c = 0.1/\omega_0$

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\tau_p} \frac{\tau + \beta \tau_p^2 y}{\operatorname{ch} \chi} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\tau_p} \frac{(1 - q^2)(\tau + \beta \tau_p^2 y) - 2\tau_c}{(1 + q^2) \operatorname{ch} \chi - 2q \operatorname{sh} \chi}. \quad (34)$$

Данное решение описывает взаимодействие солитонов, скорости распространения которых одинаковы при  $|\tau| \rightarrow \infty$  (см. рис. 5а и 5б для случаев  $|q| < 1$  и  $|q| > 1$ ). Заметим, что полярности солитонов, столкновение которых описывается с помощью формулы (34), всегда противоположны.

В случае, когда  $|q| = 1$ , переменная  $u$  решения (34) состоит не из двух импульсов, площадь каждого из которых равна по модулю  $\pi$ , а из трех. Средний импульс при таком тройном столкновении не испытывает сдвига, а полярности двух других противоположны (рис. 6).

Таким образом, двухсолитонное решение не поз-

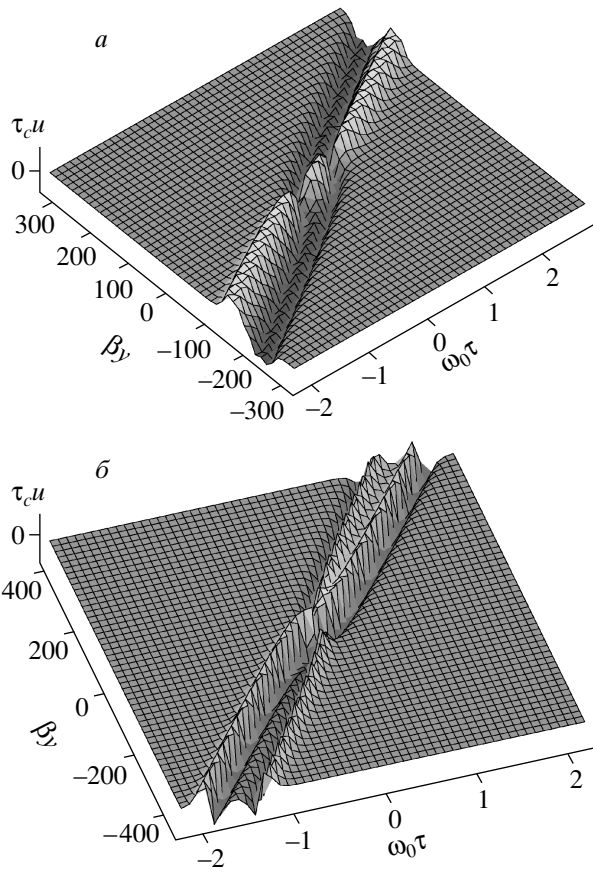


Рис. 5. Профили обыкновенной компоненты поля при столкновении солитонов с одинаковыми параметрами  $\tau_p = 0.11/\omega_0$  (а),  $0.06/\omega_0$  (б) для случая  $\tau_c = 0.1/\omega_0$

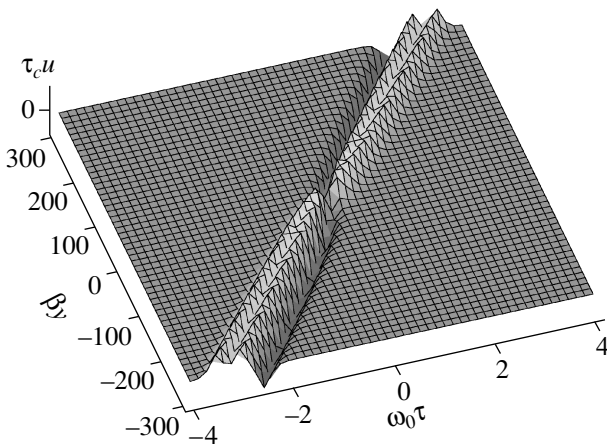


Рис. 6. Профиль обыкновенной компоненты поля при тройном столкновении солитонов с  $|q| = 1$ ,  $\tau_c = 0.1/\omega_0$

воляет описать столкновение двух солитонов с одинаковыми скоростями и полярностями или с параметрами  $\tau_p = \pm \tau_c$ . По-видимому, это указывает на то, что солитоны в таких конфигурациях сближаться не будут.

Если в формуле (34) параметр  $\tau_p$  таков, что  $1/\sqrt{2} < |q| < 1$  ( $1 < |q|$ ), то расстояние между пиками у солитона, до столкновения идущего впереди, уменьшается (увеличивается), а у догоняющего — увеличивается (уменьшается). Можно показать, что изменение расстояний растет, когда  $|q|$  стремится к единице. Вследствие этого изменения взаимодействие солитонов, каждый из которых состоит из двух разделенных пиков, происходит как последовательность не четырех двойных столкновений, а как двух тройных столкновений (ср. рис. 5а и рис. 6) или одного четверного столкновения.

Перейдем теперь к рассмотрению бризерного решения уравнения (17). Для его получения будем считать в (32), что  $\lambda = \mu^*$ ,  $\psi_1 = \varphi_2^*$ ,  $\psi_2 = \varphi_1^*$ . В результате имеем

$$\psi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega \tau_p} \frac{\sin \chi_I}{\operatorname{ch} \chi_R} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega \tau_p} \frac{(1 - q_R^2 - q_I^2) \sin \chi_I - 2q_I \cos \chi_I}{(1 + q_R^2 + q_I^2) \operatorname{ch} \chi_R - 2q_R \operatorname{sh} \chi_R}, \quad (35)$$

где

$$\chi_R = \frac{t - y/v_g}{\tau_p}, \quad \chi_I = \omega(t - y/v_{ph}),$$

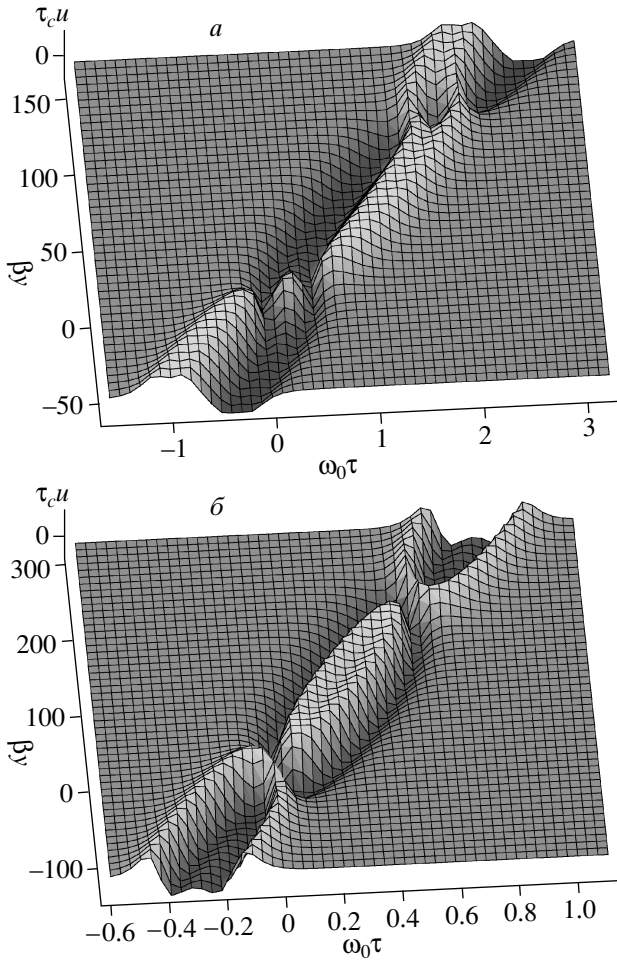
$$q_R = \frac{\tau_c}{\tau_p}, \quad q_I = \tau_c \omega, \quad \frac{1}{\tau_p} = \frac{\mu + \mu^*}{2}, \quad \omega = \frac{\mu - \mu^*}{2i}.$$

Свободными параметрами бризера (35) являются постоянные  $\tau_p$  и  $\omega$ , определяющие соответственно его длительность и несущую частоту. Не теряя общности, будем считать, что эти параметры положительны. Фазовая  $v_{ph}$  и групповая  $v_g$  скорости данного импульса в лабораторной системе координат определяются следующими выражениями:

$$v_{ph} = \frac{c}{n} \left( 1 - \frac{n}{c} \frac{\beta \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \right)^{-1}, \quad v_g = \frac{c}{n} \left( 1 + \frac{n}{c} \frac{\beta \tau_p^2}{1 + \omega^2 \tau_p^2} \right)^{-1}. \quad (36)$$

Как и у уравнения СГ, «площадь» бризерного решения уравнения (17) равна нулю.

При  $\omega \rightarrow 0$  решение (35) переходит в (34). Вследствие этого бризерное решение с  $\omega \tau_p \leq 1$  можно рассматривать как связанное состояние двух односолитонных импульсов с одинаковыми параметрами  $\tau_p$



**Рис. 7.** Профили обыкновенной компоненты поля бризерного импульса в виде связанного состояния кинка и антикинка при  $\tau_p = 0.12/\omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  (а) и нейтральных кинков противоположных полярностей при  $\tau_p = 0.05/\omega_0$ ,  $\omega = 3\omega_0$  (б) для случая  $\tau_c = 0.1/\omega_0$

(рис. 7). Полярности солитонов, образующих данное связанное состояние, противоположны (ср. с рис. 5).

Из выражения (35) видно, что амплитуда поля убывает с увеличением длительности. Поэтому динамика сильноосциллирующего ( $\omega\tau_p \gg 1$ ) бризерного решения уравнения (17) мало отличается от таковой в случае уравнения СГ.

Из условия (1) следует, что для сильноосциллирующего бризера  $\omega \gg \omega_0$ . Поэтому в его спектре практически отсутствуют резонансные фурье-компоненты, что приводит к незначительному возбуждению среды. Покажем, что в рассматриваемом пределе бризерное решение уравнения (17) переходит в нерезонансный солитон огибающей

нелинейного уравнения Шредингера.

Определим комплексную огибающую  $Q$  обыкновенной компоненты поля импульса соотношением

$$u = Q \exp[i(\omega\tau - \tilde{q}y)] + \text{с.с.}, \quad (37)$$

где  $\tilde{q} = -\beta/\omega$  — волновое число импульса в сопутствующей системе координат. Для переменной  $\psi$  имеем следующее разложение [10, 42]

$$\begin{aligned} \psi &= \int_{-\infty}^{\tau} Q \exp[i(\omega\tau' - \tilde{q}y)] d\tau' + \text{с.с.} = \\ &= \left( -\frac{i}{\omega}Q + \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{i}{\omega^3} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + \dots \right) \times \\ &\quad \times \exp[i(\omega\tau' - \tilde{q}y)] + \text{с.с.} \quad (38) \end{aligned}$$

Кроме того, в силу слабого возбуждения среды положим в уравнении (17)  $\sin \psi \approx \psi - \psi^3/6$ . Тогда, подставляя (38) в (17) и учитывая только низшие порядки относительно  $\omega\tau_p$  дисперсии и нелинейности, приходим к нелинейному уравнению Шредингера вида

$$i \frac{\partial Q}{\partial y} = -k_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial \tilde{\tau}^2} + b|Q|^2 Q. \quad (39)$$

Здесь  $k_2 = -\beta/\omega^3 < 0$  — параметр дисперсии групповой скорости,

$$b = \frac{\beta(1 + q_I^2)}{2\omega^3}, \quad \tilde{\tau} = \tau - \frac{\beta y}{\omega^2} = t - \frac{y}{v_g^{(l)}},$$

$v_g^{(l)}$  — линейная групповая скорость, определяемая соотношением

$$v_g^{(l)} = \left( \frac{n}{c} - \frac{\beta}{\omega^2} \right)^{-1},$$

в которое переходит второе выражение (36) при  $\omega\tau_p \gg 1$ .

Односолитонное решение уравнения (39) имеет вид

$$Q = Q_m \exp\left(-i \frac{\beta y}{\omega^3 \tau_p^2}\right) \operatorname{sch} \frac{t - y/v_g^{(l)}}{\tau_p}, \quad (40)$$

где

$$Q_m = \frac{2}{\tau_p \sqrt{1 + q_I^2}}.$$

Отсюда и из (37) получаем

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = Q_m \operatorname{sch} \frac{t - y/v_g^{(l)}}{\tau_p} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{y}{v_{ph}} \right) \right].$$

Можно показать, что производная по  $t$  правой части соотношения (35) совпадает в пределе  $\omega\tau_p \gg 1$  ( $|q_R| \ll |q_I|$ ) с данным выражением. Разлагая выражение (16) в ряд по малому параметру  $\tau_c^2 u^2$  с учетом того, что  $f(\tau) = 0$ , будем иметь в этом случае

$$E_c = -\frac{\hbar\omega_0}{D}\tau_c^2|Q|^2.$$

Полагая в (9)  $\sin^2(\psi/2) \approx \psi^2/4$ , найдем

$$\rho_{11} = W_1 - 2\frac{W_1 - W_2}{(1 + q_I^2)\omega^2\tau_p^2} \operatorname{sch}^2 \frac{t - y/v_g^{(l)}}{\tau_p}.$$

Таким образом, как было отмечено выше на основе качественных соображений, возбуждения среды при распространении в ней сильноосциллирующего бризера практически не происходит.

Многосолитонные решения уравнения (17) нетрудно построить, проводя итерации преобразования Дарбу (22)–(24). Эти решения будут описывать взаимодействие изученных выше стационарных солитонов и бризеров. Как и для СГ-уравнения, проведенный анализ двухсолитонного решения достаточен для понимания динамики солитонов в общем случае.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлена первая физическая реализация модифицированного уравнения синус-Гордона (17), которое было найдено в 1974 году [36, 37] на основе исследований сугубо математического характера. Показано, что данное уравнение описывает распространение предельно коротких электромагнитных импульсов в системе несимметричных наноструктур типа квантовых нитей или квантовых ям, обладающих постоянным дипольным моментом. В последнее время эта область физической науки испытывает бурное развитие.

Следует отметить, что в предыдущих теоретических исследованиях, где рассматривалось взаимодействие оптических импульсов с НКО [28, 30–32], на параметры квантовых переходов накладывались дополнительные ограничения, что позволяло сводить системы волновых и материальных уравнений к интегрируемым моделям. В данной же статье подобные ограничения отсутствуют, а использовано приближение (1), выражающее собой большую ширину спектра импульса в сравнении с частотой переходов. Найденное здесь выражение (12) для эффективного ПДМ квантовой системы переходит в аналогичное, использованное в работах [30–32] в частном случае, при  $D_{33} = D_{22}$ . Также заметим, что

в рассматриваемой задаче имеет место асимметрия по полярности сигнала: знак необыкновенной компоненты импульса определен знаком эффективного ПДМ. Существование такой асимметрии является особенностью динамики электромагнитных импульсов в анизотропных средах [29, 32, 33].

С помощью техники преобразования Дарбу нами получены решения модифицированного уравнения синус-Гордона, которые описывают распространение стационарных и бризерных импульсов, а также процессы столкновений солитонов. Оказалось, что уравнение (17) допускает как однополярные (при  $|\tau_c/\tau_p| < 1$ ), так и двухполярные (при  $|\tau_c/\tau_p| > 1$ ) стационарные солитонные решения. В свою очередь, однополярные солитоны при различных значениях параметра  $\tau_p$  могут быть одногорбыми ( $|\tau_c/\tau_p| < 1/\sqrt{2}$ ) и двугорбыми ( $1/\sqrt{2} < |\tau_c/\tau_p| < 1$ ). По этой причине существенное внимание было обращено на выяснение особенностей взаимодействия солитонов различных типов.

Однополярные солитоны при своем распространении полностью инвертируют квантовые переходы с последующим возвращением к исходному состоянию. В то же время двухполярные солитоны вызывают, вообще говоря, только частичное возбуждение среды. При рассмотренной здесь геометрии распространения квантовые уровни возбуждает обыкновенная компонента, тогда как необыкновенная составляющая сдвигает частоты переходов. Обе компоненты распространяются в синхронном режиме. При этом двугорбой однополярной обыкновенной компоненте соответствует однополярная необыкновенная составляющая, которая в промежутках между горбами обыкновенной динамически сдвигает положение квантовых уровней среды таким образом, что основное и возбужденные состояния меняются местами. Первый горб обыкновенной компоненты солитона инвертирует квантовый переход, после чего необыкновенная составляющая сближает, а затем и меняет местами основное и возбужденные состояния. Таким образом, в промежутках между горбами среда эффективно находится в основных энергетических состояниях, которые в отсутствие солитона являются возбужденными и, соответственно, неустойчивыми. С приближением второго горба обыкновенной компоненты необыкновенная составляющая убывает, возвращая взаимное положение квантовых уровней к исходному. В это же время второй горб обыкновенной компоненты солитона переводит электроны в истинное основное состояние. Данный механизм распространения позволяет понять, что на интервал между горбами обыкновенной компонен-

ты солитона не накладывает ограничение, связанное с процессами релаксации. В частности, этот интервал может существенно превышать время энергетической релаксации в силу эффекта динамического сдвига квантовых уровней, вызванного необыкновенной компонентой. Здесь важно, чтобы длительность горбов, определяемая величиной  $\tau_p$ , была гораздо меньше времен как фазовой, так и энергетической релаксации.

В случае стационарных двухполярных импульсов, у которых интервал между горбами превосходит их длительность, взаимодействие компонент солитона со средой происходит подобно описанному выше. В то же время распространение бризеров, как и двухполярных солитонов со сравнимыми длительностью горбов и интервалом между ними сопровождается частичным возбуждением среды и слабым сдвигом квантовых уровней.

Таким образом, проведенное в настоящей работе исследование выявило новые типы предельно коротких электромагнитных солитонов. Данное обстоятельство, по нашему мнению, может стимулировать дальнейшие исследования динамики импульсов в среде несимметричных квантовых объектов.

Авторы благодарят Ю. В. Брежнева за полезные дискуссии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-16422 а).

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. H. Auston, K. P. Cheung, J. A. Valdmanis, and D. A. Kleinman, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1555 (1984).
2. K. Tamura and M. Nakazawa, *Opt. Lett.* **21**, 68 (1996).
3. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).
4. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущиповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
5. А. И. Маймистов, С. О. Елютин, *Опт. и спектр.* **69**, 101 (1991).
6. A. I. Maimistov and S. O. Elyutin, *J. Mod. Opt.* **39**, 2201 (1992).
7. А. И. Маймистов, *Опт. и спектр.* **76**, 636 (1994).
8. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **27**, L7 (1994).
9. A. E. Kaplan and P. L. Shkolnikov, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2316 (1995).
10. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997).
11. Th. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
12. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **119**, 419 (2001).
13. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, Yu. A. Shpolyansky, and I. Walmsley, *Phys. Rev. A* **66**, 013811 (2002).
14. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, *ЖЭТФ* **123**, 919 (2003).
15. J. C. Eilbeck, *J. Phys. A: Gen. Phys.* **5**, 1355 (1972).
16. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* **6**, 1337 (1973).
17. S. L. McCall and E. L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908 (1967); *Phys. Rev.* **183**, 457 (1969).
18. G. L. Lamb, Jr., *Rev. Mod. Phys.* **43**, 99 (1971).
19. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
20. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, Москва (1988).
21. T. Schafer and C. E. Wayne, *Physica D* **196**, 90 (2004).
22. A. Sakovich and S. Sakovich, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, L361 (2006).
23. С. В. Нестеров, С. В. Сазонов, *ФТТ* **45**, 303 (2003).
24. В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*, Логос, Москва (2000).
25. L. W. Casperson, *Phys. Rev. A* **57**, 609 (1998).
26. A. Brown and W. J. Meath, *Phys. Rev. A* **63**, 013403 (2000).
27. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
28. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
29. A. I. Maimistov and J.-G. Caputo, *Phys. Lett. A* **296**, 34 (2002); А. И. Маймистов, Дж.-Ги Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 275 (2003).
30. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
31. С. В. Нестеров, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **126**, 741 (2004).

32. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **127**, 289 (2005); Изв. РАН, сер. физ. **69**, 1132 (2005).
33. С. О. Елютин, ЖЭТФ **128**, 17 (2005).
34. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, КЭ **35**, 701 (2005).
35. А. А. Заболотский, Письма в ЖЭТФ **76**, 709 (2002).
36. M. D. Kruskal, Lect. Appl. Math. **15**, 61 (1974).
37. H.-H. Chen, Phys. Rev. Lett. **33**, 925 (1974).
38. A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **49**, 1167 (1980).
39. А. Б. Борисов, С. А. Зыков, ТМФ **116**, 199 (1998).
40. V. B. Matveev and M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1991).
41. S. Kočinac, Z. Ikonić, and V. Milanović, Opt. Comm. **140**, 89 (1997).
42. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).