

ОБОБЩЕННАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ

А. А. Короновский, П. В. Попов*, А. Е. Храмов**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
410012, Саратов, Россия*

Поступила в редакцию 21 апреля 2006 г.

Изучается обобщенная синхронизация в однонаправленно связанных пространственно-распределенных автоколебательных системах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау и демонстрирующих пространственно-временной хаос. Рассмотрены различные способы введения связи между системами. Предложена новая характеристика состояния распределенной системы — максимальный пространственный ляпуновский показатель, описан метод его расчета для распределенной автоколебательной системы. Введен новый тип хаотической синхронизации для пространственно-неоднородных распределенных систем — частичная обобщенная синхронизация. Определены физические механизмы, приводящие к установлению обобщенной хаотической синхронизации в пространственно-распределенных автоколебательных системах. Показано, что вне зависимости от типа связи взаимодействующих систем возникновение обобщенной хаотической синхронизации определяется динамикой модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау с дополнительной диссипацией. Исследовано влияние шума на установление режима обобщенной синхронизации в связанных распределенных системах.

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Tr

1. ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация хаотических колебаний является одним из важнейших фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в настоящее время [1–4]. Подобные исследования имеют, с одной стороны, важное теоретическое значение в плане понимания общих закономерностей взаимодействия сложных нелинейных систем различной природы (химической, физической, биологической и т. д.) [1, 5–8], а с другой стороны, прикладное значение, связанное с проблемами передачи информации с использованием детерминированных хаотических колебаний [9, 10], анализа нейронных ансамблей [11, 12], диагностики заболеваний [13, 14] и т. д.

Исследования хаотической синхронизации в основном проводились с помощью анализа связанных динамических систем с малым числом степеней свободы (поточковые системы с сосредоточенными параметрами или отображения) [1–3, 15]. В настоящее время выделяют различные типы

синхронного поведения таких хаотических систем. Это фазовая синхронизация [2, 16, 17], обобщенная синхронизация [18, 19], синхронизация с запаздыванием [20], перемежающаяся синхронизация с запаздыванием [21] и обобщенная синхронизация [22], индуцированная шумом синхронизация [23–25], полная синхронизация [26–29], синхронизация временных масштабов [30–32]. Все перечисленные типы хаотической синхронизации связаны между собой (см., например, [25, 31–35]), однако соотношение между ними до конца не выявлено. Для каждого типа синхронного поведения существуют свои способы диагностики синхронного поведения связанных автоколебательных систем (см., например, [1, 2]).

В последнее время все большее внимание исследователей привлекает анализ сложной динамики в распределенных автоколебательных системах, демонстрирующих пространственно-временной хаос, процессы образования когерентных структур и т. д. [36–42]. Одновременно начинает активно изучаться возможность управления и синхронизации хаотических пространственно-временных колебаний в цепочках, решетках и сетях связанных

*E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru; popovpv@nonlin.sgu.ru; aeh@nonlin.sgu.ru

осцилляторов [1, 43–45], а также в распределенных автоколебательных средах. Так, в настоящее время проводятся исследования возможности управления и синхронизации в таких распределенных автоколебательных системах как уравнения Гинзбурга–Ландау [1, 46–50], уравнения Курамото–Сивашинского [51], модели автоколебательных химических реакций [5, 52], пучково-плазменные и электронно-волновые системы [53, 54].

Для пространственно-распределенных непрерывных автоколебательных систем, описываемых уравнениями в частных производных, большинство исследований было направлено на изучение полной хаотической синхронизации идентичных и слабоидентичных взаимодействующих систем. Режим полной хаотической синхронизации означает совпадение векторов $\mathbf{x}_1(t) \approx \mathbf{x}_2(t)$, характеризующих поведение связанных хаотических динамических систем [26–29], и возникает при синхронизации идентичных хаотических осцилляторов. В случае, если управляющие параметры слегка различаются, векторы, характеризующие состояние хаотических осцилляторов, близки друг к другу, $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \approx 0$, но остаются различными. Кратко обсудим основные результаты исследований хаотической синхронизации пространственно-распределенных непрерывных автоколебательных систем.

В работах [50, 51, 55, 56] на примере связанных уравнений Гинзбурга–Ландау и Курамото–Сивашинского была показана возможность полной синхронизации при введении различных типов связи между распределенными хаотическими системами, включая однородную по всему пространству и «игольчатую» связи. В последнем случае связь между пространственно-распределенными системами устанавливается только в некоторых точках пространства (обычно располагающихся периодически вдоль пространства системы с некоторым пространственным периодом ΔL) [43, 57]. Отметим, что в работе [58] обсуждалась возможность использования режимов полной хаотической синхронизации в распределенной автоколебательной среде для кодирования информации и эффективной многоканальной передачи данных.

В работе [59] была исследована фазовая синхронизация связанных комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау. Под фазовой синхронизацией понималась ограниченность разности фаз колебаний связанных систем, $|\phi_{u_1}(x, t) - \phi_{u_2}(x, t)| < \text{const}$, а под фазами колебаний — фазы $\phi_u(x, t) = \arg u(x, t)$ комплексных полей $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау. Наконец, в наших ра-

ботах [54, 60] была показана возможность возникновения синхронизации временных масштабов в однонаправленно распределенных связанных электронно-волновых системах с обратной волной, демонстрирующих режимы пространственно-временного хаоса [61].

Другим весьма важным и активно изучаемым типом хаотической синхронизации является обобщенная синхронизация [18], вводимая в рассмотрение для однонаправленно связанных хаотических систем. Наличие режима обобщенной синхронизации означает, что между векторами состояний ведущей $\mathbf{x}_d(t)$ и ведомой $\mathbf{x}_r(t)$ систем после завершения переходного процесса (который может быть достаточно длительным [22]) устанавливается функциональная зависимость $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$. Вид этой зависимости может быть очень сложным, например, фрактальным [19], и в большинстве случаев ее явный вид найти не удастся. В литературе предложено несколько способов диагностики наличия режима обобщенной синхронизации между однонаправленно связанными хаотическими системами [19, 62].

Следует отметить, что обобщенная хаотическая синхронизация была достаточно подробно исследована для потоковых систем с малым числом степеней свободы и отображений [18, 19, 62]. В наших работах [63, 64] были изучены физические механизмы возникновения режимов обобщенной хаотической синхронизации и было показано, что поведение ведомой хаотической системы, находящейся в режиме обобщенной синхронизации, эквивалентно поведению модифицированной системы с дополнительной диссипацией, находящейся под воздействием внешнего хаотического сигнала, генерируемого ведущей системой.

В то же время обобщенная синхронизация для пространственно-распределенных автоколебательных систем, демонстрирующих пространственно-временной хаос, не была подробно изучена. Здесь можно отметить только работу [5], где была показана возможность возникновения обобщенной синхронизации в модели, описывающей химическую реакцию. Поэтому значительный фундаментальный интерес вызывает исследование возникновения режимов обобщенной хаотической синхронизации распределенных автоколебательных систем, а также анализ механизмов ее возникновения в пространственно-распределенных непрерывных системах.

Целью данной работы является изучение обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных распределенных автоколебатель-

ных средах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, с различными типами однонаправленной связи между ведущей и ведомой системами. Выбор в качестве объекта исследования распределенных систем, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау, обусловлен тем, что они являются эталонными моделями для изучения пространственно-временного хаоса и образования структур в различных распределенных средах [2, 43, 46].

2. ИЗУЧАЕМАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Исследуемая математическая модель распределенных автоколебательных сред представляет собой систему двух однонаправленно связанных одномерных уравнений Гинзбурга–Ландау относительно комплексных величин $u(x, t)$ и $v(x, t)$ [46],

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2 u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2 v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon H(t - \tau)\mathcal{F}[u, v], \quad x \in [0, L], \quad (2)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t), \quad (3)$$

где L — пространственный период системы.

Уравнение (1) описывает ведущую (автономную), а уравнение (2) — ведомую распределенные системы. Напомним, что обобщенная синхронизация вводится только для систем с однонаправленной связью. Функция $\mathcal{F}[u, v]$, которую будем называть функцией связи, описывает вид связи между взаимодействующими системами, параметр ε (коэффициент связи) характеризует интенсивность этой связи, $H(\eta)$ — функция Хевисайда: $H(\eta) = 0$, если $\eta < 0$ и $H(\eta) = 1$ в остальных случаях. Время τ определяет интервал переходного процесса, в течение которого распределенные системы не связаны.

Управляющие параметры ведомой (α_r, β_r) и ведущей (α_d, β_d) систем, если это не оговаривается особо, выбирались следующими: $\alpha_d = 1.5, \beta_d = 1.5, \alpha_r = 4.0, \beta_r = 4.0$, пространственный период системы $L = 40\pi$. При этих значениях управляющих параметров в автономных распределенных системах

наблюдаются режимы пространственно-временного хаоса [46, 56].

Начальные условия для комплексных полей $u(x, t = 0)$ и $v(x, t = 0)$ задавались случайными. Численное моделирование уравнений (1) и (2) осуществлялось с помощью явной численной схемы второго порядка точности с параметрами $\Delta t = 0.0002$ и $\Delta x = L/1024$.

Для диагностики обобщенной синхронизации в распределенных системах будем использовать метод вспомогательной системы, впервые предложенный для систем с малым числом степеней свободы в работе [62]. Суть метода заключается в следующем: наряду с ведомой системой с вектором состояния $\mathbf{x}_r(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система с вектором состояния $\mathbf{x}_a(t)$. Начальные условия $\mathbf{x}_a(t_0)$ для вспомогательной системы выбираются отличными от начального состояния $\mathbf{x}_r(t_0)$ ведомой системы, но лежащими в области притяжения одного аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояний ведомой $\mathbf{x}_r(t)$ и вспомогательной $\mathbf{x}_a(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ и, соответственно, $\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ состояния ведомой и вспомогательной систем после завершения переходного процесса должны стать идентичными, $\mathbf{x}_r(t) \equiv \mathbf{x}_a(t)$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса (который, следует отметить, может быть достаточно длительным [22]) является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой хаотическими системами.

Для использования метода вспомогательной системы необходимо рассматривать вспомогательную систему, также описываемую неавтономным уравнением Гинзбурга–Ландау (ср. с уравнением (2))

$$\frac{\partial v_a}{\partial t} = v_a - (1 - i\alpha_r)|v_a|^2 v_a + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v_a}{\partial x^2} + \varepsilon H(t - \tau)\mathcal{F}[u, v_a], \quad x \in [0, L], \quad (4)$$

для которого задаются начальные условия, отличные от начальных условий ведомой автоколебательной системы:

$$v_a(x, t = 0) \neq v(x, t = 0). \quad (5)$$

Если в этом случае после завершения переходного процесса после включения связи в момент време-

ни $t = \tau$ в ведомой и вспомогательной системах установятся идентичные пространственно-временные состояния $v_a(x, t) = v(x, t)$, то можно говорить о том, что в однонаправленно связанных распределенных системах наблюдается режим обобщенной хаотической синхронизации.

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации является расчет максимальной условной экспоненты для однонаправленно связанных систем [65]. Данный метод также находит применение для диагностики обобщенной хаотической синхронизации систем с малым числом степеней свободы [19]. Суть метода заключается в следующем. Рассчитываются ляпуновские экспоненты для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, эти ляпуновские экспоненты отличаются от ляпуновских экспонент автономной ведомой системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя, $\lambda_{c1} < 0$ [19].

При использовании условной ляпуновской экспоненты возникает проблема расчета характеристики пространственно-распределенной системы, аналогичной ляпуновской экспоненте для динамических систем с малым числом степеней свободы. В следующем разделе предложена новая характеристика, определяющая устойчивость пространственно-временных состояний распределенной системы, которая названа пространственной ляпуновской экспонентой, и описан метод расчета этой характеристики, в основу которого положена модификация алгоритма Бенеттина [66] для систем с малым числом степеней свободы.

3. РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЛЯПУНОВСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

Максимальный ляпуновский показатель является весьма важной характеристикой динамической системы с малым числом степеней свободы, которая определяет степень устойчивости того или иного динамического режима [3]. Очевидно, что определение усредненной скорости «разбегания» изначально близких состояний (чем, фактически, и является ляпуновский показатель для систем с малым числом степеней свободы) для описания поведения пространственно-распределенных систем оказывается очень заманчивой и перспективной идеей. Попыт-

ки адаптировать и обобщить понятие максимального ляпуновского показателя для анализа динамики распределенных систем, как правило, сводятся в конечном итоге к расчету ляпуновского показателя теми же самыми способами, что и для систем со сосредоточенными параметрами. Один из возможных способов — вычисление старшего ляпуновского показателя по временной реализации, полученной по сигналу, регистрируемому в одной из точек пространства распределенной системы (см., например, работу [67]), точно так же, как это делается для систем с сосредоточенными параметрами [68, 69]. В качестве альтернативы можно также рассчитывать спектр ляпуновских показателей, пользуясь алгоритмом Бенеттина [66] и работая с дискретной моделью распределенной системы, которая получается при использовании конечно-разностных методов. В этом случае дискретизованная распределенная система рассматривается как конечномерная динамическая система с очень большой размерностью и характеризуется спектром, содержащим очень большое число ляпуновских показателей, из которых затем рассматриваются лишь несколько старших (см., например, [70]).

В настоящей работе вводится в рассмотрение новая количественная величина, характеризующая динамику распределенной системы, названная нами пространственным ляпуновским показателем, которая характеризует неустойчивость пространственно-временных состояний исследуемой распределенной системы.

Пусть исследуемая пространственно-распределенная система характеризуется в момент времени t_0 некоторым состоянием $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t_0)$.

Введем расстояние $s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ между двумя состояниями системы, которое определим как

$$s(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \sqrt{\int_V \|\mathbf{R}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{R}_2(\mathbf{x})\|^2 dV}, \quad (6)$$

где V — объем системы. Рассмотрим динамику системы, стартующей из некоторого состояния $\mathbf{R}^0(\mathbf{x}, t_0)$, и динамику возмущенной системы, стартующей из состояния $\tilde{\mathbf{R}}^0(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{R}^0(\mathbf{x}, t_0) + \tilde{\xi}(\mathbf{x})$, где $\tilde{\xi}(\mathbf{x})$ — случайная функция, $s(\mathbf{R}^0, \tilde{\mathbf{R}}^0) = \epsilon$, причем величина ϵ мала.

Зададимся некоторым интервалом времени T и, решая уравнения, описывающие исследуемую систему, найдем вектор состояния $\mathbf{R}_1(\mathbf{x})$ и его возмущение $\tilde{\mathbf{R}}_1(\mathbf{x})$ в момент времени $t_0 + T$. Отношение $s(\mathbf{R}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1)/\epsilon$ характеризует рост (или затухание) возмущения за время T . Переопределим теперь возму-

щенное состояние $\tilde{\mathbf{R}}_1(\mathbf{x})$ системы так, чтобы его отклонение от невозмущенного состояния $\mathbf{R}_1(\mathbf{x})$ стало равно исходному значению ϵ :

$$\tilde{\mathbf{R}}_1^0(\mathbf{x}) = \epsilon \tilde{\mathbf{R}}_1 / s(\mathbf{R}_1, \tilde{\mathbf{R}}_1).$$

Множественно повторяем процедуру заново (M раз). Изменение амплитуды возмущения за M шагов будет выражаться формулой

$$P = \prod_{k=1}^M \frac{s(\mathbf{R}_k, \tilde{\mathbf{R}}_k)}{\epsilon}.$$

Тогда значение максимального пространственного ляпуновского показателя Λ определяется как

$$\Lambda = \frac{1}{MT} \ln P = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{s(\mathbf{R}_k, \tilde{\mathbf{R}}_k)}{\epsilon}. \quad (7)$$

Как будет показано ниже, предложенный метод позволяет достаточно корректно оценить величину экспоненциальной неустойчивости пространственно-временной динамики (максимальную пространственную ляпуновскую экспоненту) в случае пространственно-однородной системы. В случае пространственно-неоднородной системы, как будет обсуждаться дальше, необходимо внесение модификаций в предложенный алгоритм.

В случае уравнения Гинзбурга–Ландау в качестве состояния \mathbf{R} системы выступает комплексное поле $u(x)$, так что $\mathbf{R}(x) = \{\text{Re } u(x), \text{Im } u(x)\}$, а интегрирование в выражении (6) в случае однородной системы ведется по всей длине пространственного периода системы, т. е. в области $x \in [0, L]$. Для расчета максимального пространственного условного ляпуновского показателя Λ_c однонаправленно связанной системы (1) и (2) находится максимальный пространственный ляпуновский показатель ведомой системы (2) под внешним воздействием сигнала от ведущей системы, что и дает величину Λ_c .

На рис. 1 показаны зависимости максимального пространственного ляпуновского показателя Λ , рассчитанные для автономного уравнения Гинзбурга–Ландау (1) для различных значений управляющих параметров. Видно, что с увеличением параметра β_d наблюдается рост Λ . Легко показать, что решение автономного уравнения Гинзбурга–Ландау (1) неустойчиво при выполнении условия

$$\alpha_d \beta_d > 1. \quad (8)$$

Численный расчет максимального ляпуновского показателя хорошо согласуется с условием (8). Так,

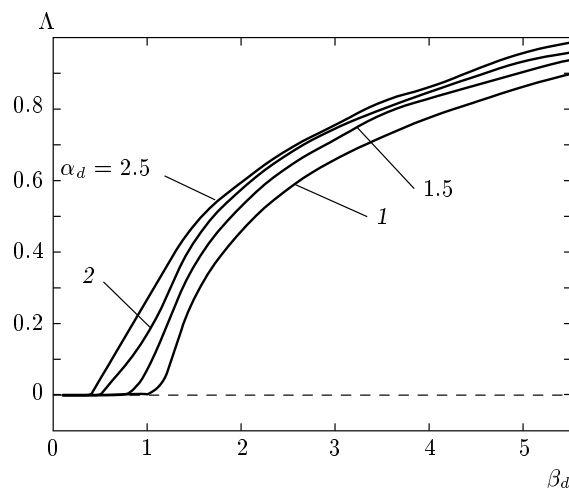


Рис. 1. Зависимости максимальных пространственных ляпуновских показателей автономного уравнения Гинзбурга–Ландау (1) от параметра β_d при различных фиксированных значениях параметра α_d

для каждого фиксированного значения α_d при величине параметра $\beta_d = 1/\alpha_d$ происходит переход к хаосу и максимальный пространственный ляпуновский показатель становится положительным, $\Lambda > 0$. При дальнейшем увеличении параметра β_d величина Λ возрастает. При $\beta_d < 1/\alpha_d$ имеем $\Lambda = 0$, что соответствует периодической динамике системы.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ СВЯЗИ

Рассмотрим вначале случай однородной по пространству однонаправленной диффузионной связи между распределенными автоколебательными системами по всему пространству. В этом случае функция связи имеет вид

$$\mathcal{F}[u, v] = u - v, \quad (9)$$

т. е. диффузионная связь вводится в каждой точке пространства распределенных систем.

Рассмотрим совместное поведение системы связанных уравнений Гинзбурга–Ландау (1) и (2) в случае функции связи (9) при изменении коэффициента связи ϵ и неизменных значениях управляющих параметров $\alpha_{d,r}$ и $\beta_{d,r}$ связанных систем, представленных в разд. 2.

Полученные результаты иллюстрирует рис. 2, на котором показаны пространственно-временные рас-

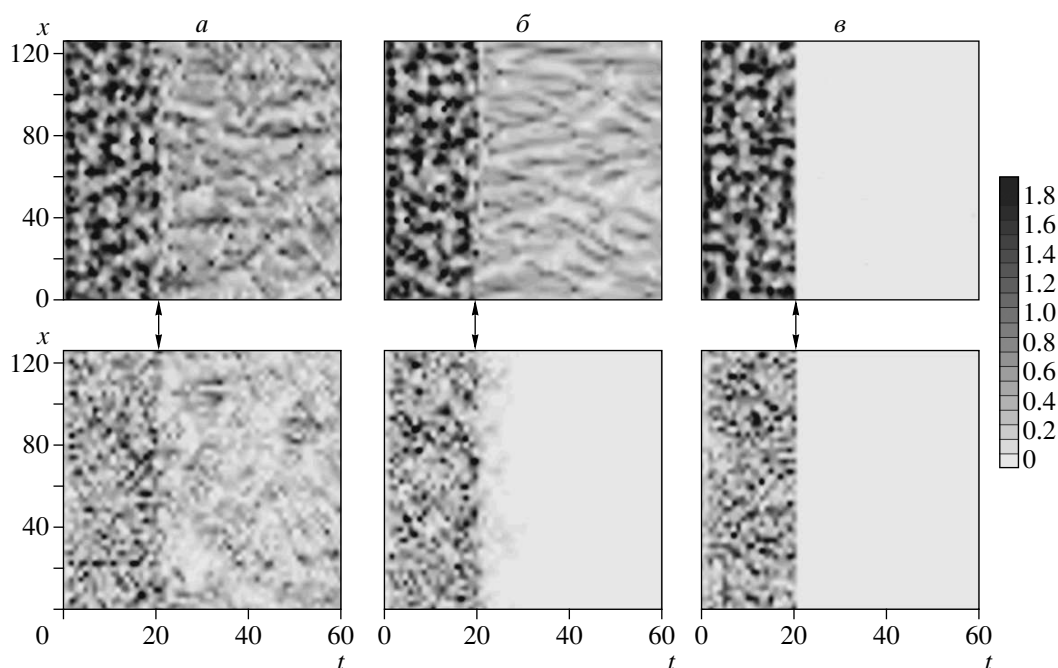


Рис. 2. Пространственно-временные эволюции разностей амплитуд колебаний ведущей и ведомой систем, $|u(x,t) - v(x,t)|$, (сверху) и ведомой и вспомогательной систем, $|v(x,t) - v_a(x,t)|$, (снизу): *a* — $\varepsilon = 0.5$, отсутствие режима обобщенной синхронизации; *б* — $\varepsilon = 0.9$, режим обобщенной синхронизации; *в* — $\varepsilon = 20$, режим полной синхронизации. Стрелками отмечены моменты $t = \tau = 20$ включения связи

пределения разностей амплитуд колебаний ведомой и ведущей, $|v(x,t) - u(x,t)|$, и ведомой и вспомогательной, $|v(x,t) - v_a(x,t)|$, систем для различных увеличивающихся значений коэффициента связи ε .

При малых значениях ε между взаимодействующими системами отсутствует режим обобщенной хаотической синхронизации, что иллюстрирует рис. 2*a*, на котором приведены пространственно-временные диаграммы систем для коэффициента связи $\varepsilon = 0.5$. Видно, что колебания связанных распределенных систем остаются неидентичными в течение всего времени. Одновременно остаются неидентичными и колебания в ведомой $v(x,t)$ и вспомогательной $v_a(x,t)$ системах, что свидетельствует об отсутствии обобщенной хаотической синхронизации. При увеличении параметра связи ε при некотором значении $\varepsilon = \varepsilon_{GS} \approx 0.73$ возникает режим обобщенной хаотической синхронизации. В этом режиме ведущая (1) и ведомая (2) системы демонстрируют неидентичные пространственно-временные колебания, о чем свидетельствует ненулевая разность $|u - v|$ между состояниями систем. В то же самое время колебания в ведомой и вспомогательной системах становятся одинако-

выми, $|v - v_a| = 0$ (см. рис. 2*б*, построенный при $\varepsilon = 0.9$), что свидетельствует о возникновении функциональной зависимости между состояниями ведущей и ведомой автоколебательных систем и, соответственно, об установлении режима обобщенной синхронизации в распределенных системах.

При дальнейшем увеличении коэффициента связи ε взаимодействующие системы переходят в режим полной хаотической синхронизации, что означает полное совпадение состояний ведущей и ведомой хаотических систем. Это иллюстрирует рис. 2*в* ($\varepsilon = 20$), из которого видно, что теперь имеет место нулевая разность состояний не только между ведомой и вспомогательной системами, но и между ведомой и ведущей системами. Таким образом, полная хаотическая синхронизация в связанных распределенных системах, как и в системах с малым числом степеней свободы, является частным случаем обобщенной хаотической синхронизации. Отметим, что режимы полной синхронизации в случае связанных уравнений Гинзбурга–Ландау с неидентичными параметрами наблюдаются при весьма значительных коэффициентах связи между системами.

Аналогичные результаты были получены при

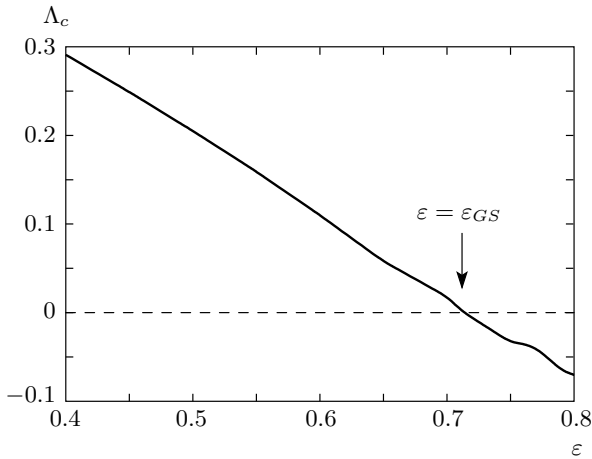


Рис. 3. Максимальный пространственный условный ляпуновский показатель Λ_c связанной системы (1), (2) в зависимости от коэффициента связи ϵ . Обобщенная синхронизация возникает при значении $\epsilon = \epsilon_{GS} \approx 0.73$ (отмечено стрелкой)

анализе максимального пространственного условного ляпуновского показателя Λ_c . На рис. 3 показана зависимость Λ_c от коэффициента связи ϵ между системами. Расчет ляпуновского показателя проводился по методике, изложенной выше в разд. 3, при параметрах численной схемы (7): $M = 1000, T = 4$. Хорошо видно, что величина Λ_c уменьшается с ростом коэффициента связи ϵ и при некотором критическом значении $\epsilon = \epsilon_{GS}$ она обращается в нуль, $\Lambda_c = 0$ (отмечено стрелкой на рис. 3). Это означает, что в связанной системе устанавливается режим обобщенной синхронизации. Последнее подтверждает проведенный выше анализ на основе метода вспомогательной системы. Критические значения ϵ_{GS} коэффициента связи совпадают с величиной, полученной выше с помощью метода вспомогательной системы.

Обсудим теперь механизм установления режима обобщенной хаотической синхронизации в связанных пространственно-распределенных системах.

В нашей работе [63] было показано, что возникновение обобщенной синхронизации хаотических динамических систем с малым числом степеней свободы обусловлено поведением модифицированной системы, получающейся введением дополнительной диссипации в ведомую автоколебательную систему.

Для случая однородной диссипативной связи по всему пространству для анализа установления обобщенной хаотической синхронизации следует рассмотреть собственные колебания v_m следующей модифицированной системы, получающейся из уравне-

ния (2) с учетом функции связи (9) путем приравнивания нулю сигнала ведущей системы, $u(x, t) = 0$:

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} - \epsilon v_m, \quad x \in [0, L]. \quad (10)$$

Следует обратить внимание, что слагаемое $-\epsilon v_m(x, t)$ фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау (10).

Обобщенная хаотическая синхронизация динамических систем возникает при таких значениях параметра ϵ , когда модифицированная система переходит из хаотического режима в стационарный или периодический, либо когда внешнее воздействие ϵu_{ext} настолько превышает по амплитуде собственные колебания v_m модифицированной системы, что выводит состояние системы с аттрактора в область фазового пространства с большим сжатием фазового пространства (бóльшей диссипацией). При этом собственная динамика системы подавляется, и поведение ведомой системы определяется внешним сигналом (появляется функциональная связь между состоянием ведущей и ведомой систем) [25, 63, 71].

В данном случае, в отличие от систем с малым числом степеней свободы [63], реализуются одновременно оба механизма перехода связанных хаотических систем в режим обобщенной синхронизации. Увеличение управляющего параметра ϵ соответствует, с одной стороны, увеличению амплитуды внешнего воздействия на ведомую систему, а с другой стороны, — увеличению диссипации в активной среде (см. также работу [63]). В результате второго процесса в модифицированной системе (10) наблюдается уменьшение амплитуды пространственно-временных хаотических колебаний и при $\epsilon = \epsilon_0 = 1$ в пространственно-распределенной системе устанавливается стационарный в пространстве и времени режим, $|v_m(x, t)| = 0$. На рис. 4а показана зависимость усредненного по пространству и времени квадрата амплитуды колебаний, $\langle v_m^2 \rangle$, для модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау (10). Видно, что с увеличением параметра ϵ мощность колебаний линейно уменьшается из-за роста диссипативного слагаемого $-\epsilon v_m$.

Однако режим обобщенной синхронизации возникает при значениях $\epsilon < \epsilon_0 = 1$, что связано со вторым механизмом установления режима обобщенной синхронизации. Рассмотрим зависимость усредненного по пространству и времени квадрата амплитуды внешнего сигнала, $\langle (\epsilon u)^2 \rangle$, подаваемого на

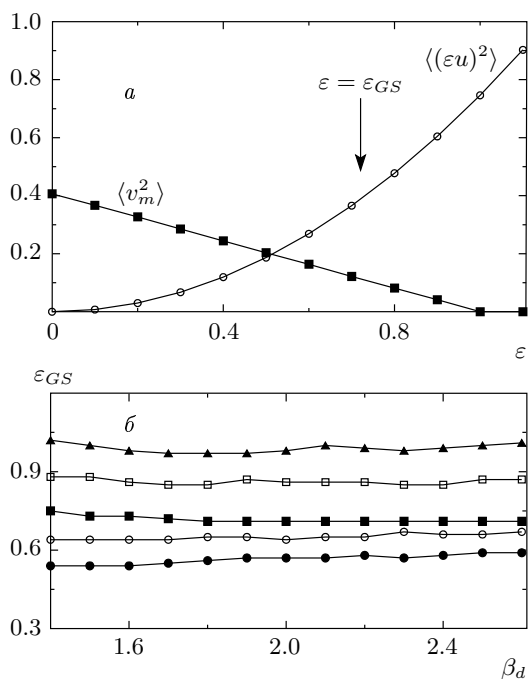


Рис. 4. а) Усредненная мощность колебаний модифицированной системы, $\langle v_m^2 \rangle$, и мощность сигнала, действующего на ведомую систему, $\langle (\varepsilon u)^2 \rangle$, в зависимости от параметра связи ε . б) Зависимости параметра ε_{GS} , при котором происходит установление режима обобщенной синхронизации, от управляющего параметра β_d ведущей системы для различных параметров ведомой системы: $\alpha_r = \beta_r = 3.0$ (\bullet), 3.5 (\circ), 4.0 (\blacksquare), 5.0 (\square), 6.0 (\blacktriangle)

модифицированную систему от ведущей системы. Данная зависимость представлена на рис. 4а. Видно, что мощность внешнего сигнала, воздействующего на модифицированную систему, растет и при $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$ превышает мощность собственных колебаний модифицированной системы примерно в три раза. В этом случае внешнее воздействие перемещает пространственно-временное состояние модифицированной системы в фазовом пространстве в область с сильной диссипацией, в результате чего собственная пространственно-временная хаотическая динамика модифицированной системы оказывается подавленной. Последнее приводит к возникновению режима обобщенной синхронизации при $\varepsilon_{GS} < \varepsilon_0$. Важно отметить, что в диапазоне $(\varepsilon_{GS}, \varepsilon_0)$ значений параметра связи установление режима обобщенной синхронизации реализуется за счет одновременного действия двух описанных выше механизмов, вносящих свой вклад в установление синхронного режима.

Согласно последнему замечанию, установле-

ние режима обобщенной синхронизации зависит от свойств модифицированной системы (10) и не зависит от свойств ведущей системы. Это иллюстрирует рис. 4б, на котором приведены зависимости параметра ε_{GS} , при котором возникает режим обобщенной синхронизации, от параметров ведущей распределенной системы (1). Видно, что в широком диапазоне управляющих параметров величина ε_{GS} практически не зависит от параметров ведущей системы и определяется исключительно параметрами ведомой системы (ср. различные зависимости на рис. 4б, построенные при различных параметрах α_r и β_r ведомой системы), что подтверждает справедливость анализа обобщенной синхронизации с помощью метода модифицированной системы [49, 63].

5. СЛУЧАЙ ТОЧЕЧНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрим теперь случай, когда связь между ведущей и ведомой автоколебательными системами осуществляется только в конечном числе связывающих точек, расположенных друг от друга на равном расстоянии ΔX («игольчатый» тип связи по терминологии работы [57]). Тогда вид функции связи, описывающей взаимодействие систем, будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{F}[u, v] = \delta(x - N\Delta X)(u - v), \quad (11)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака, ΔX — расстояние между точками пространства, в которых введена связь (ΔX можно рассматривать как параметр пространственной неоднородности связи). Случай, рассмотренный в разд. 4, соответствует ситуации $\Delta X = 0$.

Подобный игольчатый тип связи, когда связывается ограниченное число точек пространства распределенных систем, ранее подробно изучался при анализе полной хаотической синхронизации идентичных распределенных систем [51, 56], а также в задачах управления динамикой распределенных систем, демонстрирующих хаотическую динамику [57, 43].

Мы исследуем данный тип связи при тех же значениях управляющих параметров ведомой и ведущей систем, что и в предыдущем разделе. На рис. 5 показаны зависимости разности $|v(x, t) - u(x, t)|$ амплитуд колебаний ведомой и ведущей систем, а также разности $|v(x, t) - v_a(x, t)|$ состояний ведомой и

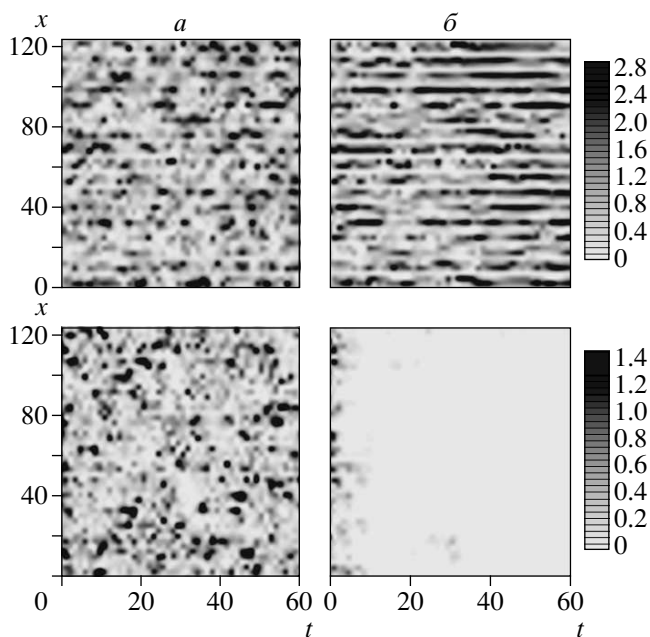


Рис. 5. Пространственно-временные эволюции разностей амплитуд колебаний ведущей и ведомой, $|u(x, t) - v(x, t)|$ (верхний ряд), и ведомой и вспомогательной, $|v(x, t) - v_a(x, t)|$ (нижний ряд), систем при игольчатом типе связи (параметр неоднородности связи $\Delta X = 7.36$): *a* — $\varepsilon = 20$, асинхронный режим; *б* — $\varepsilon = 100$, режим обобщенной синхронизации распределенных автоколебательных систем

вспомогательной систем для расстояния между точками локальной связи $\Delta X = 7.36$ и различной величины коэффициента связи ε . При малом параметре связи ε состояния ведомой и вспомогательной систем различны (рис. 5а, $\varepsilon = 20$), что говорит об отсутствии режима обобщенной хаотической синхронизации. С ростом параметра ε в однонаправленно связанных пространственно-распределенных системах с локальной по пространству связью наблюдается установление режима обобщенной хаотической синхронизации. Это иллюстрирует рис. 5б, построенный при $\varepsilon = 100$, из которого хорошо видно, что в последнем случае после переходного процесса в ведомой и вспомогательной системах устанавливаются одинаковые пространственно-временные состояния, $v(x, t) \equiv v_a(x, t)$, что соответствует режиму обобщенной синхронизации при игольчатом типе связи.

В предыдущем разделе было показано, что в случае однородной по пространству связи порог ε_{GS} возникновения обобщенной синхронизации слабо зависит от управляющих параметров ведущей системы. Аналогичные результаты были получены и при

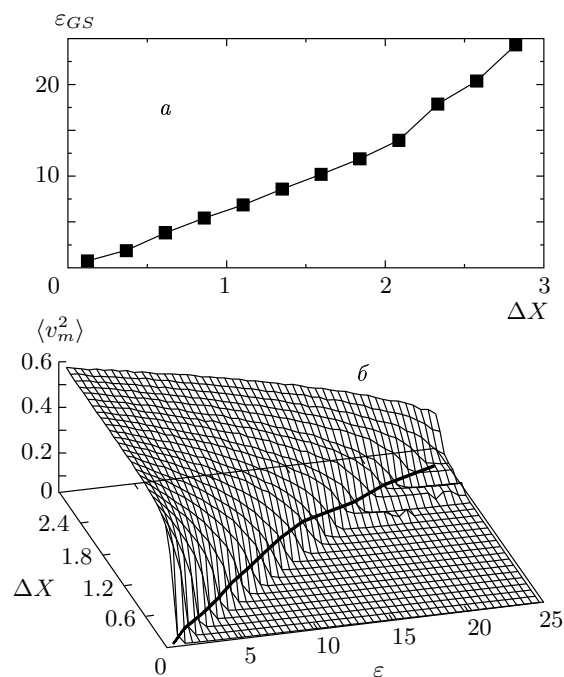


Рис. 6. *a*) Зависимость пороговой величины ε_{GS} , при которой возникает обобщенная синхронизация, от расстояния ΔX между точками пространства, в которых введена связь. *б*) Усредненная по пространству и времени мощность колебаний в модифицированной системе в зависимости от коэффициента связи ε и от параметра неоднородности связи ΔX , а также граница возникновения обобщенной синхронизации с рис. 6а (жирная линия)

локальном игольчатом типе связи между системами. Вместе с тем, как показало исследование, величина коэффициента связи, при которой возникает режим обобщенной хаотической синхронизации, существенно зависит от степени неоднородности связи между системами (от расстояния ΔX между точками пространства, в которых введена связь). Это иллюстрирует рис. 6а, на котором показана величина ε_{GS} порога возникновения обобщенной синхронизации в связанных системах в зависимости от параметра ΔX . Видно, что с ростом неоднородности (увеличением параметра ΔX) пороговая величина ε_{GS} быстро увеличивается (при $\Delta X = 0$ обобщенная синхронизация возникает при $\varepsilon_{GS} \approx 0.76$).

Проведем анализ возникновения обобщенной хаотической синхронизации в случае локальной связи методом модифицированной системы. Для случая неоднородной локальной по пространству диффузионной связи модифицированная система запишется в виде

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} = v_m - (1 - i\alpha_r)|v_m|^2 v_m + (1 + i\beta_r) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \varepsilon \mathcal{F}[0, v_m], \quad x \in [0, L], \quad (12)$$

где функция \mathcal{F} определяется соотношением (11).

Рассмотрим динамику модифицированной системы (12) при изменении коэффициента ε для случая неоднородной по пространству связи. Усредненная по времени и пространству мощность $\langle v_m^2 \rangle$ колебаний в модифицированной системе при различных значениях параметра ε и неоднородности ΔX связи показана на рис. 6б. Как и в случае однородной по пространству связи (см. также [49]), обобщенная синхронизация возникает, когда в модифицированной системе наблюдаются хаотические колебания, амплитуда которых для каждого фиксированного значения ΔX уменьшается с ростом коэффициента связи ε (см. рис. 6б). Мощность внешнего сигнала, пропорциональная ε^2 , с ростом ε начинает существенно превышать мощность $\langle v_m^2 \rangle$ собственных колебаний модифицированной системы. При этом с увеличением параметра пространственной неоднородности ΔX (с уменьшением числа точек пространства, в которых вводится связь) дополнительная диссипация, вводимая в ведомую систему, уменьшается и, как следствие, увеличивается пороговая величина ε_{GS} интенсивности связи, при которой наблюдается обобщенная синхронизация (рис. 6а и жирная линия на рис. 6б). Однако величина средней мощности $\langle v_m^2 \rangle$ колебаний, соответствующая порогу ε_{GS} возникновения обобщенной синхронизации при различных параметрах неоднородности ΔX , остается постоянной в широком диапазоне параметров.

На рис. 7 приведены зависимости максимальных пространственных условных ляпуновских показателей от коэффициента связи ε для различных величин параметра неоднородности ΔX . Хорошо видно, что при одних и тех же значениях параметра ε с ростом степени неоднородности ΔX величина максимального пространственного условного ляпуновского показателя увеличивается, т. е. рост ΔX приводит к увеличению неустойчивости динамики ведомой системы. Обобщенная синхронизация возникает при таких коэффициентах связи $\varepsilon = \varepsilon_{GS}$, при которых величина Λ_c становится отрицательной. Следовательно, с ростом параметра ΔX пороговая величина коэффициента связи ε_{GS} будет увеличиваться, что было показано выше (см. рис. 6а).

Таким образом, при использовании игольчатого типа связи, так же как и при однородной диффузионной связи по всему пространству, возникает обобщенная хаотическая синхронизация распре-

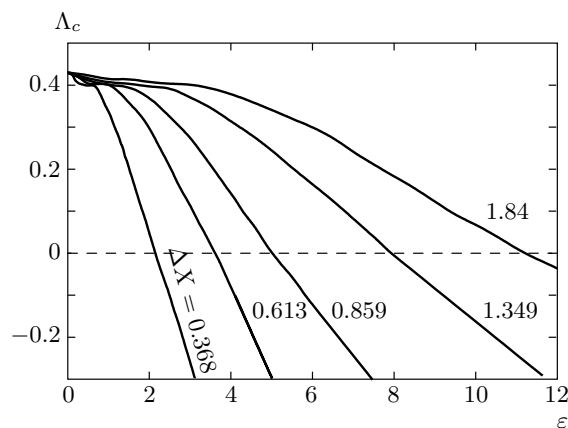


Рис. 7. Максимальные пространственные условные ляпуновские показатели Λ_c связанной системы (1), (2) при игольчатом типе связи между системами в зависимости от коэффициента связи ε для различных параметров неоднородности связи ΔX

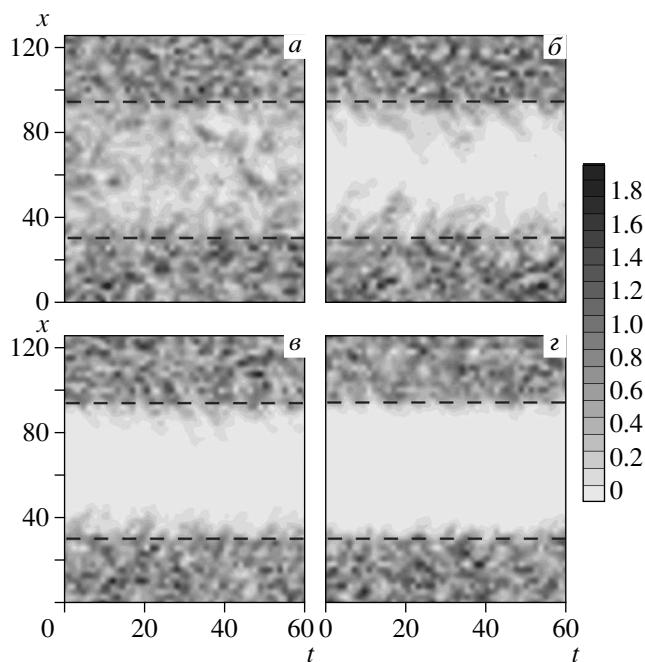


Рис. 8. Пространственно-временные эволюции разности амплитуд колебаний ведомой и вспомогательной систем, $|v(x, t) - v_a(x, t)|$, при однородной диссипативной связи в ограниченной области пространства $D = 0.5L$. Переход от асинхронного режима к режиму обобщенной синхронизации в части пространства: а — $\varepsilon = 0.6$; б — $\varepsilon = 0.825$; в — $\varepsilon = 1.0$; г — $\varepsilon = 1.6$. Область, в которой вводится связь, находится между штриховыми линиями

деленных систем. Граница возникновения обобщенной синхронизации в случае локальной по пространству связи также определяется динамикой модифицированного уравнения Гинзбурга–Ландау (12), в которое дополнительная диссипация вносится только в ограниченном числе точек пространства.

6. СЛУЧАЙ ОДНОРОДНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ СВЯЗИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРОСТРАНСТВА: ЧАСТИЧНАЯ ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

Рассмотрим теперь случай, когда однородной диффузионной связью связывается только часть S пространства распределенных систем шириной D . Остальная часть \tilde{S} пространства шириной $L - D$ остается несвязанной. В этом случае функцию связи $\mathcal{F}[u, v]$ можно записать следующим образом:

$$\mathcal{F}[u, v] = H\left(x - \frac{L - D}{2}\right) \times H\left(\frac{L + D}{2} - x\right) (u - v), \quad (13)$$

где H — ступенчатая функция Хевисайда.

Как показали исследования, для такого типа связи с увеличением ε будет устанавливаться функциональная зависимость между состояниями ведущей и ведомой систем в некоторой подобласти $S_{sync} \in S$, т. е. только в той подобласти пространства ведомой распределенной системы, где введена связь между системами.

В этом случае можно говорить о новом типе хаотической синхронизации, вводимом для пространственно-неоднородных хаотических систем, характеризующемся возникновением функциональной связи между колебаниями в некоторых ограниченных частях пространства S_{sync} связанных систем. Назовем новый тип хаотической синхронизации частичной обобщенной синхронизацией распределенной автоколебательной системы.

Диагностику частичной обобщенной хаотической синхронизации можно проводить методом вспомогательной системы. В этом случае наличие синхронизации означает идентичность колебаний в некоторой ограниченной области пространств ведомой и вспомогательной систем.

Для рассматриваемого случая это иллюстрирует рис. 8, на котором показаны разности амплитуд колебаний в ведомой и вспомогательной системах при

различных увеличивающихся коэффициентах связи. В случае наличия частичной обобщенной синхронизации вспомогательная система $v_a(x, t)$ в области S_{sync} синхронных колебаний (в смысле установления функциональной связи) будет демонстрировать колебания, идентичные колебаниям в этой же области ведомой системы, $v(x, t)$. В остальной части пространства (областях \tilde{S} и $S_{async} = S - S_{sync}$) колебания ведомой и вспомогательной систем будут несинхронизованными (см. рис. 8). Очевидно, что в случае такой сильнонеоднородной связи значительную роль играют краевые эффекты вблизи границы области S , где введена связь в соответствии с формулой (13).

Если зафиксировать ширину области, в которой вводится связь между системами, и начать увеличивать коэффициент связи ε (см. рис. 8), то при малых коэффициентах связи синхронная динамика в связанной системе не наблюдается. Далее с ростом ε возникнет частичная обобщенная синхронизация колебаний (рис. 8б) в части S_{sync} пространства, находящейся в центре области S (в точках с координатами $x \approx L/2$, т. е. в области, где влияние краевых эффектов минимально). Ширина области S_{sync} частичной обобщенной синхронизации с ростом ε будет увеличиваться (рис. 8в, г), однако краевые эффекты вблизи границы области S будут всегда иметь место, и поэтому колебания ведомой и вспомогательной систем в случае наличия частичной обобщенной синхронизации вблизи краев области S будут оставаться неидентичными, т. е. всегда будет справедливо соотношение $S_{sync} < S$.

На рис. 9 приведена зависимость величины коэффициента связи ε , при котором устанавливается режим частичной обобщенной синхронизации, от величины ширины D области S , в которой введена связь. Хорошо видно, что с увеличением ширины D величина параметра ε_{GS} быстро уменьшается. Это связано с тем, что чем меньше ширина области, на которую действует ведущая система, тем больше влияние краевых эффектов на динамику области пространства, находящейся под внешним хаотическим воздействием. Поэтому с уменьшением размеров области, в которой вводится связь, частичная обобщенная синхронизация возникает при больших значениях параметра связи между распределенными системами.

Диагностика частичной обобщенной синхронизации возможна и с помощью пространственных условных ляпуновских показателей, рассчитываемых в некоторых ограниченных областях пространства. В рассматриваемом случае, так как существу-

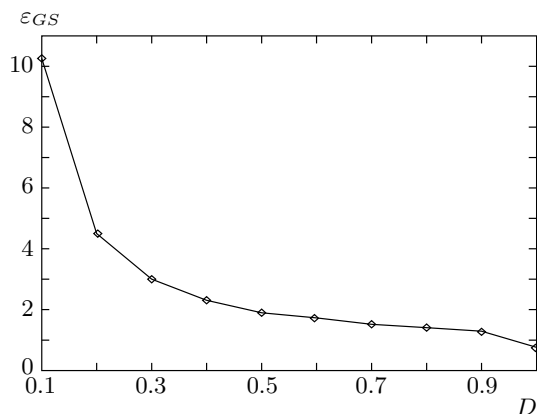


Рис. 9. Коэффициент связи ϵ_{GS} , при котором происходит установление частичной обобщенной синхронизации, в зависимости от ширины области D для случая однородной диссипативной связи в ограниченной области пространства

ют две области (S и \tilde{S}) с принципиально различной динамикой, можно провести анализ максимальных условных ляпуновских показателей для каждой из областей отдельно. В этом случае в качестве области интегрирования в формуле (6) необходимо выбрать ту область пространства систем, в которой необходимо вычислить пространственный ляпуновский показатель.

Рассмотрим величину максимального условного ляпуновского показателя для области S , в которой введена связь. При увеличении параметра ϵ между системами возникает режим частичной обобщенной синхронизации, т. е. появляется область $S_{sync} \in S$, в которой появляется функциональная связь между колебаниями в ведомой и ведущей системах. Максимальный пространственный условный ляпуновский показатель Λ_S для области S_{sync} с ростом коэффициента связи становится отрицательным, что соответствует режиму обобщенной синхронизации. В то же время величина $\Lambda_{\tilde{S}}$ в остальной части пространства (в подобластях \tilde{S} и S_{async}) остается положительной. На рис. 10а приведены графики зависимости $\Lambda_S(\epsilon)$ при различном выборе ширины $d \leq D$ области, в которой рассчитывается экспонента. Видно, что при увеличении коэффициента связи система переходит в режим частичной обобщенной синхронизации (максимальный пространственный условный ляпуновский показатель становится отрицательным).

Таким образом, если в случае неоднородной по пространству связи для диагностики режима частичной обобщенной синхронизации использовать ме-

тод расчета условных ляпуновских показателей, то из-за наличия краевых эффектов в областях, прилегающих к границе области S , будет существовать некая неопределенность коэффициента связи, при котором происходит установление режима частичной обобщенной синхронизации. Последнее показывает, что применение такой характеристики как ляпуновский показатель в случае пространственно-неоднородной системы оказывается достаточно сложным и требует аккуратного анализа.

Рассмотрим интегральный максимальный пространственный условный ляпуновский показатель, определяемый по всему пространству системы, который можно ввести, учитывая линейность процедуры расчета пространственного ляпуновского показателя как суммы двух пространственных ляпуновских показателей, рассчитанных по различным областям пространства, в которых соответственно вводится или не вводится связь:

$$\Lambda_L = \mu(S)\Lambda_S + \mu(\tilde{S})\Lambda_{\tilde{S}}, \tag{14}$$

где $\mu(x)$ — мера множества (в данном случае — относительная длина), по которому проводится расчет пространственного условного ляпуновского показателя, $\mu(S) + \mu(\tilde{S}) = 1$.

Очевидно, что для всех ϵ выполняется условие $\Lambda_{\tilde{S}} = \text{const} > 0$. Одновременно, как было показано выше, наблюдается уменьшение величины Λ_S с увеличением коэффициента связи ϵ . При выполнении условий

$$|\Lambda_S(\epsilon)| > \mu(\tilde{S})\Lambda_{\tilde{S}}/\mu(S), \quad \Lambda_S(\epsilon) < 0$$

интегральный максимальный пространственный условный ляпуновский показатель, характеризующий всю систему в целом, оказывается отрицательным, $\Lambda_L < 0$. Это показано на рис. 10б, на котором приведены зависимости условных ляпуновских показателей Λ_S и $\Lambda_{\tilde{S}}$, а также интегрального максимального пространственного условного ляпуновского показателя Λ_L (14) от коэффициента связи ϵ . Обращение в нуль (при $\epsilon = \epsilon_{GS}$) величины Λ_S с ростом коэффициента связи означает, что в области, где введена связь, устанавливается режим частичной обобщенной хаотической синхронизации. При этом $\Lambda_L(\epsilon_{GS}) > 0$. Однако при дальнейшем увеличении связи при некотором $\epsilon = \epsilon_{PGS}$ имеем $\Lambda_L(\epsilon_{PGS}) = 0$. Последнее означает, что поведение ведомой системы в целом определяется динамикой ведущей системы. Вместе с тем однозначная функциональная связь, как было показано с помощью метода вспомогательной системы, наблюдается

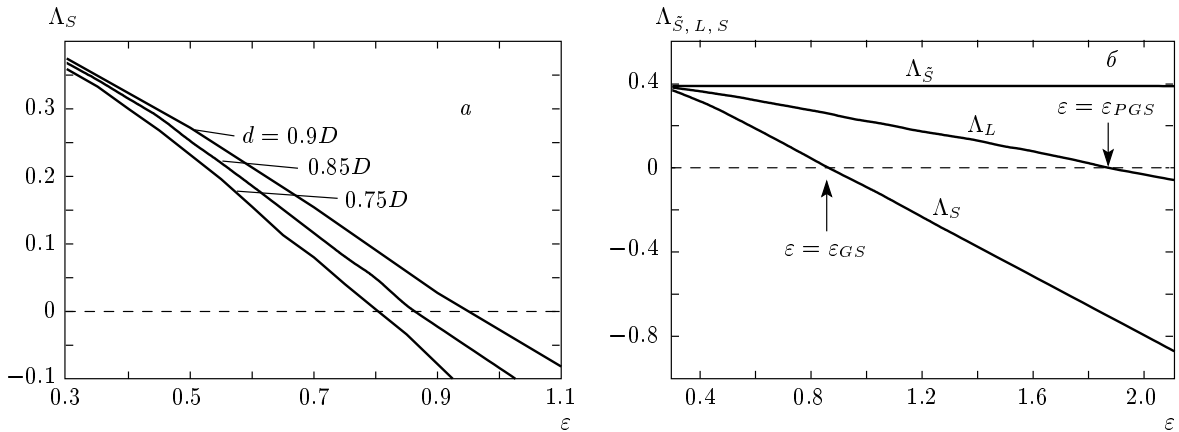


Рис. 10. Максимальные пространственные условные ляпуновские показатели Λ_S , вычисленные по различным областям d , являющимся частью области S , в которой вводится связь (а), и рассчитанные по различным областям пространства величины $\Lambda_{\dot{S}}$, Λ_S и Λ_L (б) в зависимости от коэффициента связи ϵ . Стрелками указаны пороговые значения

только в ограниченной подобласти S пространства исследуемых систем.

Таким образом, в случае однородной диффузионной связи между распределенными системами в ограниченной области пространства наблюдается возникновение частичной обобщенной хаотической синхронизации распределенных автоколебательных систем с неоднородной связью, которая характеризуется возникновением функциональной связи колебаний в системах только в ограниченной области пространства (области синхронных колебаний, в которой колебания ведомой и вспомогательной систем идентичны). В остальной части пространства функциональная связь между колебаниями отсутствует, т. е. ведомая и вспомогательная системы демонстрируют различную пространственно-временную динамику. Применение метода анализа обобщенной синхронизации с использованием старшего условного ляпуновского показателя в этом случае затруднено из-за наличия краевых эффектов вблизи границ области, в которой вводится связь.

7. УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМОВ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В УРАВНЕНИЯХ ГИНЗБУРГА – ЛАНДАУ В ПРИСУТСТВИИ ФЛУКТУАЦИЙ

Реальные нелинейные автоколебательные системы (радиофизические, физиологические, химические и т. д.) обычно функционируют в присутствии различного рода флуктуаций. Поэтому важное значение имеет вопрос о том, как влияет присутствие

шумов на установление режима обобщенной хаотической синхронизации в распределенной системе, т. е. вопрос о структурной устойчивости режимов обобщенной хаотической синхронизации в распределенных автоколебательных системах.

Изучим вопрос о влиянии флуктуаций. Рассмотрим следующую модель двух однонаправленно связанных уравнений Гинзбурга–Ландау под воздействием распределенного в пространстве источника белого шума:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2 u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \zeta(x, t), \quad x \in [0, L], \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2 v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \zeta(x, t) + \epsilon H(t - \tau)\mathcal{F}[u, v], \quad x \in [0, L], \quad (16)$$

где $\zeta(x, t)$ представляет собой случайный дельта-коррелированный гауссовский процесс с нулевым средним,

$$\langle \zeta(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(x, t)\zeta(x', t') \rangle = \tilde{D}\delta(x - x')\delta(t - t'), \quad (17)$$

\tilde{D} — интенсивность шума. В качестве функции связи рассмотрим простейшую однородную по пространству диффузионную связь между системами: $F[u, v] = u - v$.

Для численного решения уравнения Гинзбурга–Ландау с дополнительным стохастическим сла-

гаемым использовалась следующая стандартная численная схема интегрирования стохастических дифференциальных уравнений в частных производных [72]. Искомая комплексная величина $u(x, t)$ представляется как комплексное поле в дискретной одномерной решетке с пространственным шагом Δx . Введем $x_i = i\Delta x$ ($i = 1, \dots, N$), соответствующее значение $u(x_i, t)$ обозначим $u_i(t)$. Тогда $\zeta_i(t)$ есть случайный дельта-коррелированный гауссовский процесс с нулевым средним, для которого удовлетворяется условие

$$\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = \tilde{D}\delta_{ij}\delta(t - t'),$$

где $\tilde{D} = \tilde{D}_{eff}/\Delta x$, \tilde{D}_{eff} — эффективная интенсивность пространственно-временного шума в дискретном пространстве [72]. Лапласиан $\partial^2/\partial x^2$ представляется трехточечной конечно-разностной аппроксимацией [73]. В результате исследуемые стохастические дифференциальные уравнения (15) и (16) в частных производных моделируются как дискретная одномерная решетка отображений с помощью одношагового метода Эйлера [72] с шагом во времени Δt .

Для диагностики обобщенной синхронизации использовался метод вспомогательной системы, при этом предполагалось, что на вспомогательную систему воздействует шумовой источник такой же интенсивности, как и на ведомую систему. Вследствие наличия источника флуктуаций в качестве критерия установления режима обобщенной синхронизации выберем следующий.

Будем считать, что обобщенная синхронизация существует, когда среднеквадратичное отклонение состояний ведущей v и вспомогательной v_a систем удовлетворяет условию

$$\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^L |v(x, t) - v_a(x, t)|^2 dx dt < \delta, \quad (18)$$

где величина δ была выбрана равной 0.01.

На рис. 11 приведены зависимости порога ε_{GS} возникновения обобщенной синхронизации от интенсивности \tilde{D} шума для нескольких значений управляющих параметров системы. Видно, что шум малой интенсивности практически не оказывает влияния на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в распределенных системах. При дальнейшем увеличении интенсивности шума ($\tilde{D} > 0.5$) пороговое значение коэффициента связи ε_{GS} начинает монотонно расти. Такое поведение системы в режиме обобщенной хаотической синхронизации при воздействии внешнего источника шу-

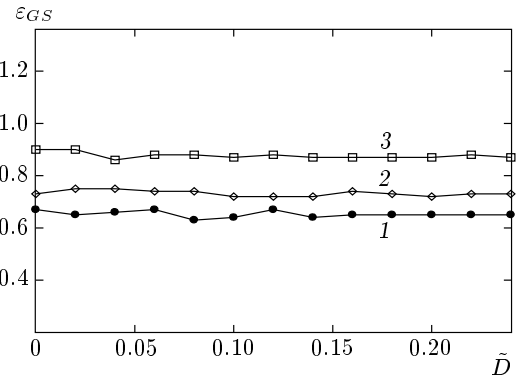


Рис. 11. Зависимость порога установления обобщенной синхронизации в зависимости от уровня шума \tilde{D} для различных управляющих параметров ведущей системы: 1 — $\alpha_r = 3, \beta_r = 3$; 2 — $\alpha_r = 4, \beta_r = 4$; 3 — $\alpha_r = 5, \beta_r = 5$

ма объясняется тем, что, как было показано выше, порог обобщенной синхронизации в первую очередь определяется свойствами модифицированной системы. В этом случае воздействие на модифицированную систему шума с нулевым средним и малой интенсивностью не оказывает значительного влияния на характеристики поведения модифицированной системы и, следовательно, слабо воздействует на порог возникновения обобщенной хаотической синхронизации. Однако шум большой интенсивности может привести к существенному изменению характеристик динамики модифицированной системы и даже к смене динамического режима. Следовательно, в этом случае присутствие шума приводит к изменению порогового значения коэффициента связи ε_{GS} . В данном случае при малой интенсивности шума практически не наблюдается изменения порога установления обобщенной синхронизации, что позволяет сделать вывод о структурной устойчивости исследуемого эффекта в связанных распределенных автоколебательных системах.

8. ВЫВОДЫ

В работе исследована обобщенная синхронизация в распределенных автоколебательных системах, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау и демонстрирующих режимы пространственно-временного хаоса. Для диагностики обобщенной хаотической синхронизации в пространственно-распределенной системе использовались метод вспомогательной системы, примененный ранее для

анализа обобщенной синхронизации распределенной системы в работе [49], и предложенный метод анализа максимального условного пространственного ляпуновского показателя.

Анализ обобщенной синхронизации проводился для различных типов связи между взаимодействующими системами. Было показано, что для всех типов связи возникновение обобщенной синхронизации обусловлено подавлением собственных пространственно-временных хаотических колебаний с помощью внесения в распределенную активную среду дополнительной диссипации. Так, во-первых, введение дополнительного диссипативного слагаемого в комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау приводит к уменьшению мощности собственных колебаний в активной среде. Во-вторых, смещение пространственно-временного состояния системы в области фазового пространства с сильной диссипацией за счет увеличения амплитуды внешнего воздействия с ростом параметра связи также приводит к подавлению собственной динамики ведомой системы. Для количественного анализа данных процессов рассматривалось модифицированное уравнение Гинзбурга–Ландау с дополнительной диссипацией.

При исследовании пространственно-неоднородной системы, когда связь вводилась в ограниченной области пространства, был обнаружен новый тип хаотической синхронизации неоднородных распределенных хаотических систем — частичная обобщенная синхронизация. Следует отметить, что в случае введения связи в ограниченной области пространства определяющее воздействие на синхронную динамику системы оказывают краевые эффекты вблизи границ области, в которой вводится связь.

Авторы выражают благодарность Д. И. Трубецкову за интерес к данной работе и полезные критические замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-16273 и 06-02-16451), Федеральной целевой научно-технической программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» (гранты №№ 2006-РИ-19.0/001/053, 2006-РИ-19.0/001/054) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-4167.2006.2). Авторы благодарят также за финансовую поддержку фонд «Династия» и Международный центр фундаментальной физики в Москве.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov et al., *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).
2. А. Пиковский, М. Розенблум, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*, Техносфера, Москва (2003).
3. В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, Институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск (2003).
4. I. Z. Kiss, J. L. Hudson, J. Escalona, and P. Parmananda, *Phys. Rev. E* **70**, 026210 (2004).
5. P. Parmananda, *Phys. Rev. E* **56**, 1595 (1997).
6. А. Е. Храмов, А. А. Короновский, V. I. Ponomarenko, and M. D. Prokhorov, *Phys. Rev. E* **73**, 026208 (2006).
7. C. Schäfer, M. G. Rosenblum, H.-H. Abel, and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **60**, 857 (1999).
8. N. F. Rulkov, *Chaos* **6**, 262 (1996).
9. А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, Физматлит, Москва (2002).
10. L. Kocarev and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5028 (1995).
11. R. C. Elson, A. I. Silverston, R. Huerta et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5692 (1998).
12. V. B. Kazantsev, V. I. Nekorkin, S. Binczak, and J. M. Bilbaut, *Phys. Rev. E* **68**, 017201 (2003).
13. M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev et al., *Phys. Rev. E* **68**, 041913 (2003).
14. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Fluctuation and Noise Lett.* **4**, L53 (2004).
15. В. С. Анищенко, Т. Е. Вадивасова, *Радиотехн. и электрон.* **47**, 133 (2002).
16. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
17. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10**, 2291 (2000).
18. N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel, *Phys. Rev. E* **51**, 980 (1995).
19. K. Pyragas, *Phys. Rev. E* **54**, R4508 (1996).
20. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).

21. S. Boccaletti and D. L. Valladares, *Phys. Rev. E* **62**, 7497 (2000).
22. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, *Europhys. Lett.* **70**, 169 (2005).
23. A. Martian and J. R. Banavar, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1451 (1994).
24. R. Toral, C. R. Mirasso, E. Hernández-García, and O. Piro, *Chaos* **11**, 665 (2001).
25. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and O. I. Moskalenko, *Phys. Lett. A* **354**, 423 (2006).
26. L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 821 (1990).
27. L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. A* **44**, 2374 (1991).
28. K. Murali and M. Lakshmanan, *Phys. Rev. E* **49**, 4882 (1994).
29. K. Murali and M. Lakshmanan, *Phys. Rev. E* **48**, R1624 (1994).
30. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and O. I. Moskalenko, *Phys. Rev. E* **71**, 056204 (2005).
31. А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Ю. И. Левин, *ЖЭТФ* **127**, 886 (2005).
32. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, *Physica D* **206**, 252 (2005).
33. S. Boccaletti, L. M. Pecora, and A. Delgado, *Phys. Rev. E* **63**, 066219 (2001).
34. R. Brown and L. Kocarev, *Chaos* **10**, 344 (2000).
35. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, *Chaos* **14**, 603 (2004).
36. F. Bauer and H. Shamel, *Physica D* **54**, 235 (1992).
37. В. С. Афраймович, В. И. Некоркин, Г. В. Осипов, В. Д. Шалфеев, *Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации*, ИПФ АН СССР, Горький (1989).
38. М. И. Рабинович, М. М. Суцник, *УФН* **160**, 3 (1990).
39. *Chemical Waves and Patterns*, ed. by R. Kapral and K. Showalter, Kluwer, Dordrecht (1995).
40. D. Walgraef, *Spatio-temporal Pattern Formation*, Springer-Verlag, New York (1996).
41. М. И. Трибельский, *УФН* **167**, 168 (1997).
42. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, Москва (2001).
43. S. Boccaletti, J. Bragard, and F. T. Arecchi, *Phys. Rev. E* **59**, 6574 (1999).
44. M. Chavez, D.-U. Hwang, A. Amann et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 218701 (2005).
45. D.-U. Hwang, M. Chavez, A. Amann, and S. Boccaletti, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 138701 (2005).
46. I. S. Aranson and L. Kramer, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 99 (2002).
47. S. Boccaletti, J. Bragard, F. T. Arecchi, and H. Mancini, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 536 (1999).
48. J. Bragard, S. Boccaletti, C. Mendoza et al., *Phys. Rev. E* **70**, 036219 (2004).
49. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and P. V. Popov, *Phys. Rev. E* **72**, 037201 (2005).
50. C. T. Zhou, *Chaos* **16**, 013124 (2006).
51. Z. Tasev, L. Kocarev, L. Junge, and U. Parlitz, *Int. J. Bifurcation and Chaos* **10**, 869 (2000).
52. I. Z. Kiss, J. L. Hudson, J. Escalona, and P. Parmananda, *Phys. Rev. E* **70**, 026210 (2004).
53. Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Изв. вузов, радиофизика* **XLVII**, 343 (2004).
54. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, and I. S. Rempén, *Chaos* **15**, 013705 (2005).
55. L. Kocarev, Z. Tasev, T. Stojanovski, and U. Parlitz, *Chaos* **7**, 635 (1997).
56. L. Kocarev, Z. Tasev, and U. Parlitz, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 51 (1997).
57. А. Л. Фрадков, *УФН* **175**, 113 (2005).
58. J. K. White and J. V. Moloney, *Phys. Rev. A* **59**, 2422 (1999).
59. L. Junge and U. Parlitz, *Phys. Rev. E* **61**, 3736 (2000).
60. А. А. Короновский, П. В. Попов, А. Е. Храмов, *ЖТФ* **75**, 1 (2005).
61. Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков*, т. 1, 2, Физматлит, Москва (2003, 2004).
62. H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik, *Phys. Rev. E* **53**, 4528 (1996).
63. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, *Phys. Rev. E* **71**, 067201 (2005).
64. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and O. I. Moskalenko, *Europhys. Lett.* **72**, 901 (2005).

65. K. Pyragas, *Phys. Rev. E* **56**, 5183 (1997).
66. G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, *Meccanica* **15**, 9 (1980).
67. А. А. Короновский, И. С. Ремпен, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Изв. РАН, сер. физ.* **66**, 1754 (2002).
68. A. Wolf, J. Swift, H. L. Swinney, and J. Vastano, *Physica D* **16**, 285 (1985).
69. J. P. Eckmann and S. O. Kamphorst, *Phys. Rev. A* **34**, 4971 (1986).
70. С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, *Изв. вузов, радиофизика* **XLVII**, 383 (2004).
71. А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *ЖТФ* **76**, 1 (2006).
72. J. García-Ojalvo and J. M. Sancho, *Noise in Spatially Extended Systems*, Springer-Verlag, New York (1999).
73. П. Роч, *Вычислительная гидродинамика*, Мир, Москва (1980).