

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СВЕТА И АТОМОВ В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Ю. А. Аветисян^a, Е. Д. Трифонов^{b*}

^a *Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук
410028, Саратов, Россия*

^b *Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена
191186, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2006 г.

Развита полуклассическая теория сверхизлучательного рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате разреженного газа без приближения среднего поля. Рассчитаны динамика и спектр поля сверхизлучения, а также кинетика формирования когерентных атомных состояний с различными импульсами поступательного движения. Продемонстрировано качественное согласие с экспериментами, в которых наблюдались атомы, рассеянные в «обратном» направлении по отношению к направлению возбуждающего лазерного пучка.

PACS: 03.75.Nt, 42.50.Gy

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные технологии достижения сверхнизких температур ($\sim 10^{-7}$ К), использующие методы лазерного и испарительного охлаждений, позволили получить бозе-эйнштейновский конденсат (БЭК) разреженных атомарных газов. Появившиеся десятилетие тому назад первые сообщения об экспериментальной реализации таких систем стимулировали интенсивное изучение эффектов когерентного взаимодействия света с веществом, находящимся в состоянии БЭК (см., например, Нобелевские лекции [1, 2] и обзоры [3, 4]). В частности, в экспериментах [5, 6], где регистрировалось взаимное рассеяние света и атомов, было продемонстрировано, что БЭК фактически являются новым классом сред, в которых отчетливо проявляется спонтанное кооперативное излучение, или сверхизлучение Дике [7]. Это связано с тем, что в разреженном газе, охлажденном до сверхнизких температур, существенно подавлены релаксационные процессы, вызывающие дефазировку атомных состояний. В результате этого сохраняется фазовая память атомной системы, что является

необходимым условием реализации режима сверхизлучения (см., например, [8–10]).

В работе [5] наблюдалось рассеяние света на БЭК паров натрия. Помимо рассеяния света здесь также регистрировалось рассеяние атомов, обусловленное импульсами отдачи, которые они приобретали в результате взаимодействия с возбуждающими и рассеянными фотонами. Приготовленный в магнитной ловушке БЭК имел сигарообразную форму и облучался ортогонально его оси лазерным пучком, квазирезонансным одному из оптических переходов в атоме. При поляризации лазерного пучка, ортогональной оси конденсата, и при достаточной интенсивности возбуждения рассеянное излучение оказывалось узконаправленным. Оно имело вид двух световых пучков, излучавшихся в противоположных направлениях вдоль конденсата, и было значительно интенсивнее обычного рэлеевского рассеяния. Авторами экспериментов [5] такой режим рассеяния был назван кооперативным или сверхизлучательным рэлеевским рассеянием (из-за возможности интерпретации этого эффекта на основании теории сверхизлучения Дике [7]). Атомы, участвующие в рассеянии, получали импульс лазерного фотона, направленный вдоль лазерного луча, а при

*E-mail: thphys@herzen.spb.ru

испускании рассеянных фотонов — такие же по величине импульсы, но ориентированные в противоположных направлениях вдоль образца. Таким образом, результирующие импульсы атомов оказывались направленными под углами $\pm 45^\circ$ по отношению к лазерному лучу. Некоторые атомы успевали принять участие в последующих актах рассеяния и, соответственно, получали дополнительные импульсы. Это приводило к усложнению картины движущихся атомных «облаков», которые распространялись под разными острыми углами относительно лазерного луча [5]. Предложенные в работах [11–25] теоретические модели позволили описать основные закономерности, наблюдавшиеся в эксперименте [5].

Эксперименты [6], в которых использовался БЭК паров рубидия, осуществлялись по описанной выше схеме. Для продолжительного во времени возбуждающего лазерного импульса со сравнительно большой отстройкой от частоты оптического перехода атомов они привели к прежним результатам [5]. Однако картина распределения движущихся атомных «облаков» стала качественно иной, когда величина расстройки и длительность возбуждающего импульса были существенно сокращены (соответственно приблизительно на порядок и на два порядка). В этом случае помимо атомов с импульсами отдачи, направленными под углами $\pm 45^\circ$ относительно волнового вектора облучающего света \mathbf{k}_i , отчетливо наблюдались атомы, рассеянные в «обратном» направлении: с импульсами отдачи, ориентированными под углами $\pm 135^\circ$ относительно \mathbf{k}_i . Такая картина распределения импульсов отдачи атомов авторами экспериментов [6] была названа X-образной и интерпретирована как результат самостимулированной дифракции Капицы–Дирака. Появление рассеянных в «обратном» направлении атомов объяснялось их первоначальным возбуждением рассеянными фотонами и последующим индуцированным излучением, обусловленным полем накачки. Причем, из-за сдвига частоты рассеянных фотонов относительно частоты накачки (на величину, соответствующую кинетической энергии отдачи атомов) это индуцированное излучение оказывается нерезонансным и, таким образом, может быть эффективным только для достаточно короткого возбуждающего импульса (когда неопределенность его частоты превышает указанный частотный сдвиг).

Вскоре после публикации [6] в работе [26] было предложено общее квантово-электродинамическое описание эффекта. Более простой полуклассический подход рассматривался в работах [27–31]. В работах [27–29] использовалось приближение среднего

поля (одномодовое приближение). В работах [23, 30] был предложен алгоритм учета пространственной зависимости атомно-полевых характеристик, основанный на многомодовом подходе. Результаты соответствующего моделирования были кратко представлены в работе [31].

В настоящей работе приведено более полное рассмотрение: не используя приближение среднего поля, из уравнений многомодового подхода [31] выводятся уравнения, записанные непосредственно в координатном представлении. Решение этих уравнений позволяет, существенно уточнив прежние результаты [28, 29], найти пространственную зависимость поля и плотности атомных «облаков». На основании предложенной модели проанализированы динамика и спектр поля сверхизлучения, кинетика формирования «вперед» и «назад» рассеянных атомов и дана теоретическая интерпретация нарушения симметрии упомянутой выше X-образной конфигурации рассеяния атомов.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача самосогласованного взаимодействия ансамбля атомов с электромагнитным полем может быть сформулирована в рамках полуклассического подхода как совместное решение вытекающего из уравнений Максвелла волнового уравнения для вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} и нестационарного уравнения Шредингера для многоатомной волновой функции Ψ , определяющей вектор поляризованности \mathbf{P} как квантово-механическое среднее. Будем использовать интегральную форму волнового уравнения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_V d\mathbf{r}' \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1)$$

в которой явно учтены необходимые граничные условия, в частности — условия излучения (см., например, [32]). Здесь

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

— запаздывающее время, V — объем атомной системы.

Как и ранее [16–25, 28–31], для атомов БЭК мы используем модель идеального газа, пренебрегая прямыми межатомными взаимодействиями и учитывая лишь взаимодействие атомов с поперечным электромагнитным полем. Это оправдывается оценкой величины химического потенциала при темпе-

ратурах ниже критической. Для условий экспериментов [5, 6] химический потенциал оказывается на один–два порядка меньше кинетической энергии атомов, получаемой ими в процессе рассеяния. На этом основании мы предполагаем возможным факторизацию

$$\Psi = \prod_{j=1}^N \psi_j, \quad (2)$$

где N — полное число атомов БЭК, ψ_j — одночастичные волновые функции. Необходимая для системы бозе-частиц симметрия обеспечивается допущением тождественности одночастичных волновых функций для всех атомов ($\psi \equiv \psi_j, j = 1, \dots, N$). В этом случае можно ограничиться анализом уравнения Шредингера для одного атома. Ввиду квазирезонансности возбуждающего лазерного поля с одним из электронных переходов атома, его можно рассматривать как двухуровневую систему. Для двухуровневого атома, взаимодействующего с электромагнитным полем в электродипольном приближении, имеем:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \begin{bmatrix} h\omega_{21} - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} & -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} \\ -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} & -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} \end{bmatrix} \psi, \quad (3)$$

где ω_{21} — частота перехода, \mathbf{d} — матричный элемент дипольного момента перехода, M — масса атома.

Оператор поляризованности представим как

$$\hat{P}(\mathbf{r}') = N \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d} \\ \mathbf{d} & 0 \end{bmatrix} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (4)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор центра инерции атома. В дальнейшем направление дипольного момента перехода атома, а следовательно, и поляризации рассеянного поля внутри конденсата будем считать совпадающим с поляризацией падающего лазерного поля и опустим соответствующие векторные обозначения.

Помимо электронных состояний (основного, обозначаемого индексом «1», и возбужденного — индексом «2») атом характеризуется состоянием поступательного движения, которое описывается собственными функциями оператора импульса

$$|\mathbf{p}/\hbar\rangle = V^{-1/2} \exp(i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar).$$

Базисные атомные состояния (с определенным значением импульса) обозначим как

$$\begin{aligned} |1; \mathbf{k}_1\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} |\mathbf{k}_1\rangle, \\ |2; \mathbf{k}_2\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(-i\omega t) |\mathbf{k}_2\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

где ω — частота лазерного поля. Пусть линейно поляризованный вдоль оси z лазерный луч распространяется по оси x , а ось y направлена вдоль конденсата. Тогда импульс атома задается его x -, y -компонентами. Если бы размеры БЭК были не ограничены, то в общем случае в результате многократных актов рассеяния каждая из этих компонент была бы кратна модулю волнового вектора возбуждающего поля $k = \omega/c$. Как и в работах [23, 30, 31], мы учитываем конечность размеров БЭК, а также пространственную неоднородность амплитуд рассеянного поля и волновых функций атомов, разлагая их в ряды Фурье по пространственным гармоникам с волновыми числами $k_n = 2\pi n/L$, где L — аксиальный размер конденсата, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. С учетом сказанного импульсы атомов в базисных состояниях (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= (k_x, k_y + k_n), \\ k_x &= km_x, \quad k_y = km_y, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m_x, m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целочисленные индексы. Далее, где это не может привести к недоразумениям, будем упрощать обозначения для импульсов и соответствующих волновых функций, например, вместо $|\mathbf{k}\rangle = |k_x, k_y + k_n\rangle$ записывая $|\mathbf{k}\rangle = |k_x, k_y, n\rangle$.

Заметим, что для БЭК конечных размеров базис (5) не является строго ортогональным. Однако для рассматриваемого протяженного БЭК ($kL, kD \gg 1$, где D — поперечный размер конденсата) величина соответствующей погрешности имеет порядок $1/kL, 1/kD$ и ею мы пренебрегаем.

Решение уравнения Шредингера можно записать в виде

$$\psi = \sum_{\mathbf{k}_1} C_{\mathbf{k}_1}^{(1)} |1; \mathbf{k}_1\rangle + \sum_{\mathbf{k}_2} C_{\mathbf{k}_2}^{(2)} |2; \mathbf{k}_2\rangle, \quad (7)$$

где $C_{\mathbf{k}_1}^{(1)}, C_{\mathbf{k}_2}^{(2)}$ — зависящие от времени коэффициенты разложения.

Выбором базиса атомных состояний формально определяется структура возникающей в системе поляризованности и соответствующего поля. Действительно, с учетом соотношений (4), (7) получим

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}', t) &= N_0 d \exp(-i\omega t) \times \\ &\times \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} C_{\mathbf{k}_2}^{(2)} \overline{C_{\mathbf{k}_1}^{(1)}} \exp[i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}'] + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $N_0 = N/V$ — средняя концентрация атомов, а черта над величиной означает комплексное сопряжение. Таким образом, задание базиса определяет поляризованность в виде совокупности плоских волн (8), а соответствующее поле может быть найдено подстановкой этого представления (8) в уравнение (1). Далее, комплексная амплитуда парциальной компоненты поляризованности, связанной с переходом между возбужденным состоянием атома с импульсом \mathbf{k}_2 и основным состоянием атома с импульсом \mathbf{k}_1 , равна $C_{\mathbf{k}_2}^{(2)} \overline{C}_{\mathbf{k}_1}^{(1)}$. Волновой вектор соответствующей волны поляризованности равен $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$. В частности, имеются парциальные компоненты поляризованности, обусловленные переходами между состояниями

$$|2; k_x, k_y, n\rangle \leftrightarrow |1; k_x - k, k_y, n'\rangle.$$

Причем для каждого из этих переходов $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = (k, k_{n-n'})$. Из формулы (8) следует, что эти парциальные компоненты формируют поляризованность

$$\begin{aligned} P^{+x}(\mathbf{r}', t) &= N_0 d \exp(-i\omega t + ikx') \times \\ &\times \sum_{n'} \exp(ik_{n'} y') R_{n'}^{+x}(t) + \text{с.с.}, \\ R_{n'}^{+x}(t) &\equiv \sum_{k_x, k_y, n} C_{k_x, k_y, n}^{(2)} \overline{C}_{k_x - k, k_y, n - n'}^{(1)}, \end{aligned} \quad (9)$$

которая, таким образом, представляет собой пучок, распространяющийся в направлении накачки и имеющий расходимость с характерным масштабом λ/L , где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны излучения.

Отметим наличие парциальных компонент поляризованности, связанных с переходами

$$|2; k_x, k_y, n\rangle \leftrightarrow |1; k_x + k, k_y, n'\rangle,$$

причем для каждого из этих переходов $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1 = (-k, k_{n-n'})$. Аналогичным путем вместо уравнения (9) получим

$$\begin{aligned} P^{-x}(\mathbf{r}', t) &= N_0 d \exp(-i\omega t - ikx') \times \\ &\times \sum_{n'} \exp(ik_{n'} y') R_{n'}^{-x}(t) + \text{с.с.}, \\ R_{n'}^{-x}(t) &\equiv \sum_{k_x, k_y, n} C_{k_x, k_y, n}^{(2)} \overline{C}_{k_x + k, k_y, n - n'}^{(1)}, \end{aligned} \quad (10)$$

т. е. поляризованность в виде пучка с той же расходимостью, но распространяющегося в направлении, противоположном накачке.

Подобным образом для мод поляризованности, распространяющихся в противоположных направле-

ниях вдоль конденсата (непосредственно определяющих поле сверхизлучательного рассеяния), имеем

$$\begin{aligned} P^{\pm y}(\mathbf{r}', t) &= N_0 d \exp(-i\omega t \pm iky') \times \\ &\times \sum_{n'} \exp(ik_{n'} y') R_{n'}^{\pm y}(t) + \text{с.с.}, \\ R_{n'}^{\pm y}(t) &\equiv \sum_{k_x, k_y, n} C_{k_x, k_y, n}^{(2)} \overline{C}_{k_x, k_y \mp k, n - n'}^{(1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем к нахождению поля, возбуждаемого поляризованностью среды, для чего в общем случае можно использовать уравнение (1).

Отметим, что последовательный учет неоднородности атомно-полевых характеристик даже вдоль одной пространственной оси (вдоль конденсата) требует, строго говоря, выхода за рамки одномерной модели. Действительно, в рассматриваемых нами приближениях поляризованность среды и поле, индуцированное этой поляризованностью, имеют близкие направления распространения. Следовательно, индуцированное поляризованностью P^{+x} поле E^{+x} , а с ним и полное первичное возбуждающее поле $E^{+x} + E^i$ (где E^i — заданное поле лазерного луча) также будет явно зависеть от двух координат (x, y , см. формулу (9)). Таким образом, если не использовать приближение заданного первичного возбуждающего поля, то необходимо рассмотрение тех или иных модификаций по крайней мере двумерной модели процесса [30, 33–35].

Наш предварительный анализ (выполненный в приближении среднего поля [29]) показал, что отождествление первичного возбуждающего поля с заданным лазерным полем качественно не изменяет основных закономерностей получающейся динамики, а приводит лишь к количественным поправкам. На этом основании в настоящей работе для простоты мы пренебрегаем явным влиянием поляризованностей $P^{\pm x}(\mathbf{r}', t)$ на динамику процесса (используем приближение заданного первичного возбуждающего поля), но обсуждаем проявление полей, индуцируемых этими поляризованностями, в общей картине сверхизлучательного рассеяния.

Непосредственно связанные со сверхизлучательным рассеянием поляризованности $P^{\pm y}(\mathbf{r}, t)$ не зависят явно от поперечных координат (см. формулу (11)), что позволяет в первом приближении пренебречь зависимостью от этих координат соответствующего поля. Другими словами, в пределах БЭК для поля сверхизлучательного рассеяния мы принимаем одномерное приближение, частично оправданное конфигурацией использованного в экспериментах [5, 6] БЭК с числом Френеля $F = \pi D^2/4\lambda L \approx 1$ (см.,

например [9, 34, 35]). В этом случае на основании так называемого метода спуска Адамара [36] трехмерное уравнение (1) преобразуется к одномерному виду:

$$E^y(\mathbf{r}, t) = -\frac{2\pi}{c} \int_0^L dy' \frac{\partial}{\partial t} P^y(y', t'), \quad (12)$$

где

$$t' = t - \frac{|y - y'|}{c}, \quad P^y \equiv P^{+y} + P^{-y}.$$

Отметим, что с целью упрощения обозначений всюду далее мы не будем писать верхний индекс « y » у поляризованности и поля, распространяющихся вдоль конденсата (оси y). Из формул (11), (12) следует, что

$$E(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) \times [\exp(iky)E^+(y, t) + \exp(-iky)E^-(y, t)] + \text{c.c.}, \quad (13)$$

$$E^+(y, t) = i2\pi k d N_0 \int_0^y dy' R^+(y', t'),$$

$$E^-(y, t) = i2\pi k d N_0 \int_y^L dy' R^-(y', t'), \quad (14)$$

$$R^\pm(y, t) = \sum_m \exp(ik_m y) R_m^\pm(t),$$

т. е. поле сверхизлучательного рассеяния имеет вид двух встречных волн, распространяющихся в противоположных направлениях вдоль конденсата. При выводе соотношения (13) комплексные амплитуды E^\pm , R^\pm мы полагали медленно изменяющимися во времени и пространстве, т. е. удовлетворяющими условиям $|\partial E^\pm / \partial t| \ll \omega |E^\pm|$, $|\partial E^\pm / \partial y| \ll k |E^\pm|$ и аналогично для R^\pm .

Согласно (14), комплексные амплитуды E^\pm удовлетворяют, во-первых, граничным условиям $E^+(y = 0, t) = 0$, $E^-(y = L, t) = 0$ и, во-вторых, дифференциальным уравнениям

$$\pm \frac{\partial E^\pm}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^\pm}{\partial t} = i2\pi k d N_0 R^\pm. \quad (15)$$

Далее нам потребуется выражение для интенсивности обычного некогерентного рэлеевского рассеяния, являющегося иницирующим фактором для сверхизлучательного рассеяния (см., например, [16–18]). Суммарная интенсивность такого рассеяния N атомов в телесный угол $d\Omega$ для точек наблюдения, расположенных в дальней зоне вблизи плоскости xy (т. е. для направлений наблюдения,

приближенно ортогональных направлению дипольного момента, индуцированного в атоме внешним полем E^i), выражается согласно работам [16–18] как

$$dI_R = \frac{N k^4 d^4 I^i}{\hbar^2 \Delta^2} d\Omega. \quad (16)$$

Здесь $\Delta \equiv \omega - \omega_{21}$ — отстройка частоты лазерного поля от частоты атомного перехода, I^i — интенсивность накачки.

Хотя, как говорилось выше, мы пренебрегаем влиянием на динамику процесса поляризованностей $P^{\pm x}$, целесообразно сравнить интенсивность соответствующего когерентного рассеяния с обычным рэлеевским фоном, определяемым уравнением (16). Согласно уравнению (1), интенсивность обратного рассеяния (обусловленного индуцированной в БЭК поляризованностью P^{-x} , см. формулу (10)) в дальней зоне есть

$$dI = \frac{N^2 c k^4 d^2}{2\pi} |B(\mathbf{r}_0, t)|^2 d\Omega,$$

$$B(\mathbf{r}_0, t) \equiv \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r}' \sum_m R_m^{-x}(t') \times \exp[i(\mathbf{k}_m - k\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}']. \quad (17)$$

Здесь R_m^{-x} — моды поляризованности, имеющие согласно (10) волновые векторы $\mathbf{k}_m = k(-1, m\lambda/L, 0)$, а направление наблюдения \mathbf{r}_0 по-прежнему близко к плоскости xy ($|r_{0z}| \ll 1$). Для БЭК в форме прямого кругового цилиндра диаметра D и высоты L

$$B(\mathbf{r}_0, t) \approx \frac{2J_1(u)}{u} \sum_m \frac{\sin q_m}{q_m} \times \exp(iq_m) R_m^{-x} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (18)$$

Здесь J_1 — функция Бесселя первого порядка,

$$u \equiv \frac{kD}{2} \sqrt{(-1-r_{0x})^2 + r_{0z}^2}, \quad q_m \equiv \frac{k(m\lambda - r_{0y}L)}{2}$$

и для простоты в выражениях для медленно меняющихся амплитуд R_m^{-x} мы пренебрегли различием времени запаздывания для различных точек БЭК (провели замену

$$t' \approx t - \frac{r - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}'}{c} \rightarrow t - \frac{r}{c},$$

где r — расстояние между точкой наблюдения и фиксированной точкой внутри БЭК).

Таким образом, для рассматриваемого протяженного БЭК в отличие от изотропного некогерентного рэлеевского рассеяния (16) когерентное обратное

рассеяние оказывается остро направленным: в дальней зоне излучение концентрируется в малом телесном угле порядка λ^2/DL в направлении, противоположном направлению возбуждающего лазерного луча.

Очевидно, что подобной узкой направленностью будет характеризоваться и распределение интенсивности света, рассеянного «вперед» (в направлении возбуждающего луча), так как и в этом случае формулы (17), (18) останутся применимыми, если в них провести соответствующую замену для мод:

$$R_m^{-x} \rightarrow R_m^{+x},$$

и их волновых векторов:

$$\mathbf{k}_m = k \left(-1, \frac{m\lambda}{L}, 0 \right) \rightarrow \mathbf{k}_m = k \left(+1, \frac{m\lambda}{L}, 0 \right).$$

Отметим сверхизлучательный характер рассмотренного когерентного рассеяния, интенсивность которого согласно формулам (13), (14), (17) явно зависит от квадрата числа атомов БЭК.

Уравнения для коэффициентов $C_{\mathbf{k}_1}^{(1)}$, $C_{\mathbf{k}_2}^{(2)}$ в разложении (7) по выбранному базису (5) могут быть получены вычислением соответствующих матричных элементов в уравнении Шредингера (3). Действуя таким образом (см. [23, 30, 31]), приходим к следующим уравнениям Максвелла–Шредингера:

$$\alpha \dot{E}_n^\pm + 2 \sum_{n'} E_{n'}^\pm \pm i2\pi n E_n^\pm = 2R_n^\pm, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{k_x, k_y, n}^{(1)} &= -i\varepsilon_{\mathbf{k}} C_{k_x, k_y, n}^{(1)} + C_{k_x+k, k_y, n}^{(2)} \bar{E}^i + \\ &+ \sum_{n'} \left(C_{k_x, k_y+k, n+n'}^{(2)} \bar{E}_{n'}^+ + C_{k_x, k_y-k, n+n'}^{(2)} \bar{E}_{n'}^- \right), \\ \dot{C}_{k_x, k_y, n}^{(2)} &= (i\Delta - \gamma) C_{k_x, k_y, n}^{(2)} - C_{k_x-k, k_y, n}^{(1)} E^i - \\ &- \sum_{n'} \left(C_{k_x, k_y-k, n-n'}^{(1)} E_{n'}^+ + C_{k_x, k_y+k, n-n'}^{(1)} E_{n'}^- \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь мы перешли к безразмерному времени (провели замену $t/\tau_R \rightarrow t$) и безразмерным комплексным амплитудам для поля (замена $-id\tau_R \hbar^{-1} E^i \rightarrow E^i$ и $-id\tau_R \hbar^{-1} E_{k_x, k_y, n}^\pm \rightarrow E_{k_x, k_y, n}^\pm$, где $\tau_R \equiv \hbar/\pi k L N_0 d^2$ — характерный временной масштаб сверхизлучения). Далее, $\alpha \equiv L/c\tau_R$ — параметр запаздывания, Δ — безразмерная расстройка (замена $(\omega - \omega_{21})\tau_R \rightarrow \Delta$), $\gamma = \Gamma\tau_R$ — феноменологически введенный релаксационный коэффициент, Γ — радиационная постоянная оптического перехода,

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} \approx \hbar(k_x^2 + k_y^2)\tau_R/2M$$

— безразмерный частотный сдвиг, обусловленный кинетической энергией отдачи атома.

Для инициирования сверхизлучательного рассеяния в работе [27], основанной на приближении среднего поля, задавалась ненулевая начальная населенность для двух атомных состояний, что в наших обозначениях можно записать как

$$\begin{aligned} C_{0,0,0}^{(1)}(t=0) &= \sqrt{1 - \frac{1}{N}}, \\ C_{k,k,0}^{(1)}(t=0) &= \frac{1}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Это фактически означает задание малой затравочной поляризованности, эффективно описывающей начальные квантовые флуктуации поля в рамках полуклассического подхода в традиционной теории сверхизлучения (см., например, [37]). В нашем подходе в качестве затравки использовалось обычное рэлеевское рассеяние, см. [16–18]. Близость двух этих способов инициирования процесса сверхизлучения БЭК была продемонстрирована в работе [25]. В соответствии с условиями экспериментов [5, 6] в качестве единственного ненулевого начального условия мы приняли $C_{0,0,0}^{(1)}(t=0) = 1$, а инициирование процесса задавалось добавкой к модам поля E_0^\pm флуктуационных полей

$$E_{fl}^\pm = s \exp(i\varepsilon t) \sum_n C_{k,0,n}^{(2)} \bar{C}_{0,0,n}^{(1)},$$

эффективно описывающих обычное рэлеевское рассеяние в телесный угол образца $(D/L)^2$. Здесь $s \equiv (N_0 \lambda^2 L)^{-1/2} D/L$ — параметр, $\varepsilon \equiv \hbar k^2 \tau_R / M$ — безразмерный частотный сдвиг, обусловленный кинетической энергией отдачи атома в элементарном акте рассеяния лазерного фотона вдоль конденсата. Уравнения (19), (20) аналогичны соответствующим уравнениям из работы [30], если там ограничиться одномерной моделью и приближением заданного первичного возбуждающего поля.

При описании сверхизлучения систем с малым значением параметра запаздывания α волновое уравнение можно упростить. Так, в работе [38] было показано, что при $\alpha < 0.3$ (что с запасом выполняется в условиях экспериментов [5, 6]) в уравнении (19) можно отбросить слагаемое с производной от поля по времени. Это эквивалентно пренебрежению изменением медленно меняющихся амплитуд поляризованности и поля за время распространения света через атомную систему, т.е. пренебрежению соответствующим запаздыванием в этих амплитудах. Тогда уравнение (19) трансформируется к виду

$$E_0^\pm = R_0^\pm \pm \frac{i}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{R_n^\pm}{n}, \quad (21)$$

$$E_{n \neq 0}^\pm = \pm \frac{i}{\pi n} (R_0^\pm - R_n^\pm),$$

что по форме совпадает с соответствующими уравнениями работы [31].

Как отмечалось в работах [22, 30], при сравнительно больших значениях расстройки правомерно аналогичное упрощение в уравнениях (20) для волновых функций возбужденных состояний. Это позволяет исключить возбужденные состояния из уравнений (20), что эквивалентно переходу к так называемой модели «одетого» атома.

Отметим следующее обстоятельство. Уравнения Максвелла–Шредингера (19)–(21) соответствуют модовому представлению атомно-полевых характеристик. Хотя такое представление успешно применялось в теории сверхизлучения протяженных систем (см., например, [39–43]), в большинстве теоретических работ, учитывавших пространственную неоднородность поля и среды, использовались уравнения в координатном представлении (см., например, [8–10]). Теорема о свертке позволяет трансформировать уравнения Максвелла–Шредингера (19), (20) из модового в координатное представление, в результате чего имеем:

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right) E^\pm(y) = 2R^\pm(y), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{k_x, k_y}^{(1)} &= -i\varepsilon_{\mathbf{k}} C_{k_x, k_y}^{(1)} + C_{k_x+k, k_y}^{(2)} \bar{E}^i + \\ &+ C_{k_x, k_y+k}^{(2)} \bar{E}^+ + C_{k_x, k_y-k}^{(2)} \bar{E}^-, \\ \dot{C}_{k_x, k_y}^{(2)} &= (i\Delta - \gamma) C_{k_x, k_y}^{(2)} - C_{k_x-k, k_y}^{(1)} E^i - \\ &- C_{k_x, k_y-k}^{(1)} E^+ - C_{k_x, k_y+k}^{(1)} E^-. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$R^\pm(y) = \sum_{k_x, k_y} C_{k_x, k_y}^{(2)}(y) \bar{C}_{k_x, k_y \mp k}^{(1)}(y)$$

и мы перешли к безразмерной координате y (заменяли $y/L \rightarrow y$), от которой теперь зависят все динамические переменные. Единственное ненулевое начальное условие приобретает вид $C_{0,0}^{(1)}(y, t=0) = 1$, граничные условия для полей — $E^+(y=0, t) = 0$, $E^-(y=1, t) = 0$, а флуктуационные добавки к полям записываются как

$$E_{ft}^\pm = s \exp(i\varepsilon t) \int_0^1 dy C_{k,0}^{(2)}(y) \bar{C}_{0,0}^{(1)}(y).$$

Заметим, что уравнения (23) имеют фактически тот же вид, что и полученные ранее в приближении среднего поля в работах [28, 29]. Однако, в отличие от этих рассмотрений, теперь амплитуды волновых функций и, разумеется, поля оказываются функциями, плавно зависящими от координаты y .

Как и уравнения (19)–(21), система уравнений Максвелла–Шредингера (22), (23) применима в условиях слабой фазовой релаксации атомной системы. В более общем случае их несложно модифицировать, перейдя от уравнения Шредингера к уравнению Блоха для матрицы плотности [16, 18].

Из уравнений (22), (23) следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{|E^+|^2}{2} - \frac{|E^-|^2}{2} \right) + 2\gamma \sum_{k_x, k_y} |C_{k_x, k_y}^{(2)}|^2 + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha \left(\frac{|E^+|^2}{2} + \frac{|E^-|^2}{2} \right) + \sum_{k_x, k_y} |C_{k_x, k_y}^{(2)}|^2 \right] = \\ = - \left(\bar{E}^i \sum_{k_x, k_y} C_{k_x, k_y}^{(2)} \bar{C}_{k_x-k, k_y}^{(1)} + \text{с.с.} \right), \quad (24) \end{aligned}$$

выражающее энергетический баланс в процессе сверхизлучения БЭК под действием заданного возбуждающего поля.

Формулы (17), (18) позволяют рассчитать диаграмму направленности обратно рассеянного поля в общем случае. Однако в координатном представлении вместо формулы (18) проще использовать эквивалентное уравнение:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}_0, t) \approx \frac{2J_1(u)}{u} \times \\ \times \int_0^1 dy \exp(-ikLr_{0y}y) R^{-x} \left(y, t - \frac{r}{c} \right), \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$R^{-x}(y) \equiv \sum_{k_x, k_y} C_{k_x, k_y}^{(2)}(y) \bar{C}_{k_x+k, k_y}^{(1)}(y).$$

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

При численном решении полученных уравнений Максвелла–Шредингера мы ограничились учетом не более чем однократных актов рассеяния. Для соответствующего набора атомных состояний из базиса (5) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,n} &= |1; (0, k_n)\rangle, \\
 \psi_{2,n} &= |2; (k, k_n)\rangle, \\
 \psi_{\pm 3,n} &= |1; (k, \pm k + k_n)\rangle, \\
 \psi_{\pm 4,n} &= |2; (0, \pm k + k_n)\rangle, \\
 \psi_{\pm 5,n} &= |1; (-k, \pm k + k_n)\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Схема переходов между этими состояниями показана на рис. 1. Первые результаты решения уравнений модового подхода (20), (21) в рассматриваемом приближении представлены в работе [31]. В настоящей работе приводится решение соответствующих уравнений в координатном представлении (22), (23). В принятом базисе состояний (26) они принимают вид

$$\begin{aligned}
 \left(\alpha \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial y} \right) E^\pm(y) &= 2R^\pm(y), \\
 \dot{C}_1 &= C_2 \bar{E}^i + C_{+4} \bar{E}^+ + C_{-4} \bar{E}^-, \\
 \dot{C}_2 &= (i\Delta - \gamma)C_2 - C_1 E^i - C_{+3} E^- - C_{-3} E^+, \\
 \dot{C}_{\pm 3} &= -i\varepsilon C_{\pm 3} + C_2 \bar{E}^\mp, \\
 \dot{C}_{\pm 4} &= (i\Delta - \gamma)C_{\pm 4} - C_{\pm 5} E^i - C_1 E^\pm, \\
 \dot{C}_{\pm 5} &= -i\varepsilon C_{\pm 5} + C_{\pm 4} \bar{E}^i
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

с оговоренными выше начальными и граничными условиями. Здесь

$$R^\pm(y) = C_{\pm 4}(y) \bar{C}_1(y) + C_2(y) \bar{C}_{\mp 3}(y)$$

и в материальных уравнениях подразумевается замена $E^\pm \rightarrow E^\pm + E_{fi}^\pm$, где

$$E_{fi}^\pm = s \exp(i\varepsilon t) \int_0^1 dy C_2(y) \bar{C}_1(y).$$

В экспериментах [6] находившийся в магнитной ловушке БЭК содержал около двух миллионов атомов рубидия и имел продольный L и поперечный D размеры $L \times D \approx 200 \times 15$ мкм. Накачка осуществлялась линейно поляризованным ортогонально оси конденсата лазерным лучом с интенсивностью около 63 мВт/см². Дипольный момент оптического перехода $d \approx 2 \cdot 10^{-29}$ К · м, соответствующая длина волны $\lambda \approx 780$ нм, радиационная постоянная оптического перехода $\Gamma \approx 0.37 \cdot 10^8$ с⁻¹ и частотный сдвиг $\varepsilon \approx 4.7 \cdot 10^4$ с⁻¹. Длительность короткого импульса составляла 6 мкс, расстройка — 420 МГц, а продолжительного — 800 мкс, расстройка — 4400 МГц. Для таких условий эксперимента временной масштаб $\tau_R \approx 10^{-10}$ с и значения других параметров (в наших единицах) были приблизительно равны $E^i \approx 8 \cdot 10^{-3}$, $\gamma \approx 5 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-6}$,

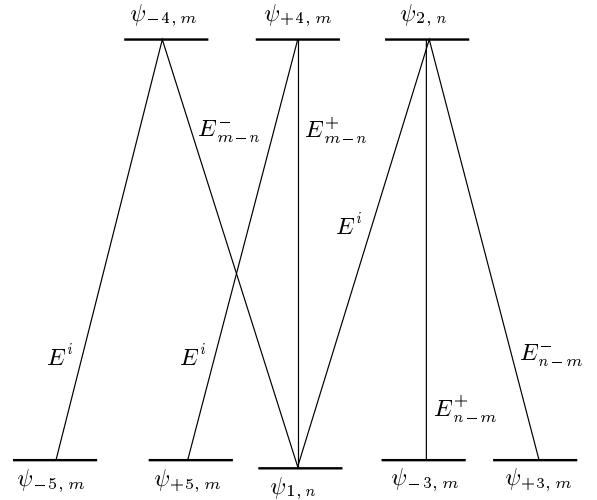


Рис. 1. Схема сверхизлучательных переходов между когерентными атомными состояниями бозе-эйнштейновского конденсата, определенными уравнениями (26)

$s \approx 10^{-3}$, $\alpha \approx 7 \cdot 10^{-2}$. Для короткого облучающего импульса длительность $T_s \approx 6 \cdot 10^4$, расстройка $\Delta \approx -0.32$, а для продолжительного — $T_L \sim 8 \cdot 10^6$, $\Delta \approx -3.4$.

На рис. 2 представлены динамика населенностей атомных состояний

$$|S_\nu(t)|^2 \equiv \int_0^1 dy |C_\nu(y, t)|^2, \quad \nu = \pm 3, \pm 5, \tag{28}$$

распределения вдоль образца модуля поля $|E^+(y)|$ и плотности атомов с различными импульсами поступательного движения $|C_\nu(y)|^2$, а также их модовые структуры

$$\begin{aligned}
 C_{\nu,n} &\equiv \int_0^1 dy C_\nu(y) \exp(-i2\pi ny), \\
 E_n^\pm &\equiv \int_0^1 dy E^\pm(y) \exp(-i2\pi ny)
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

в момент отключения возбуждающего импульса. Результаты получены на основании численного решения уравнений (27) в предположении ступенчатой формы импульса накачки. Из рис. 2 видно, что в согласии с экспериментами [6] для короткого импульса населенности $|S_{+5}|^2$ «назад» и $|S_{-3}|^2$ «вперед» рассеянных атомов оказываются одного порядка (рис. 2а), тогда как для продолжительного импульса рассеяние «назад» существенно подавлено

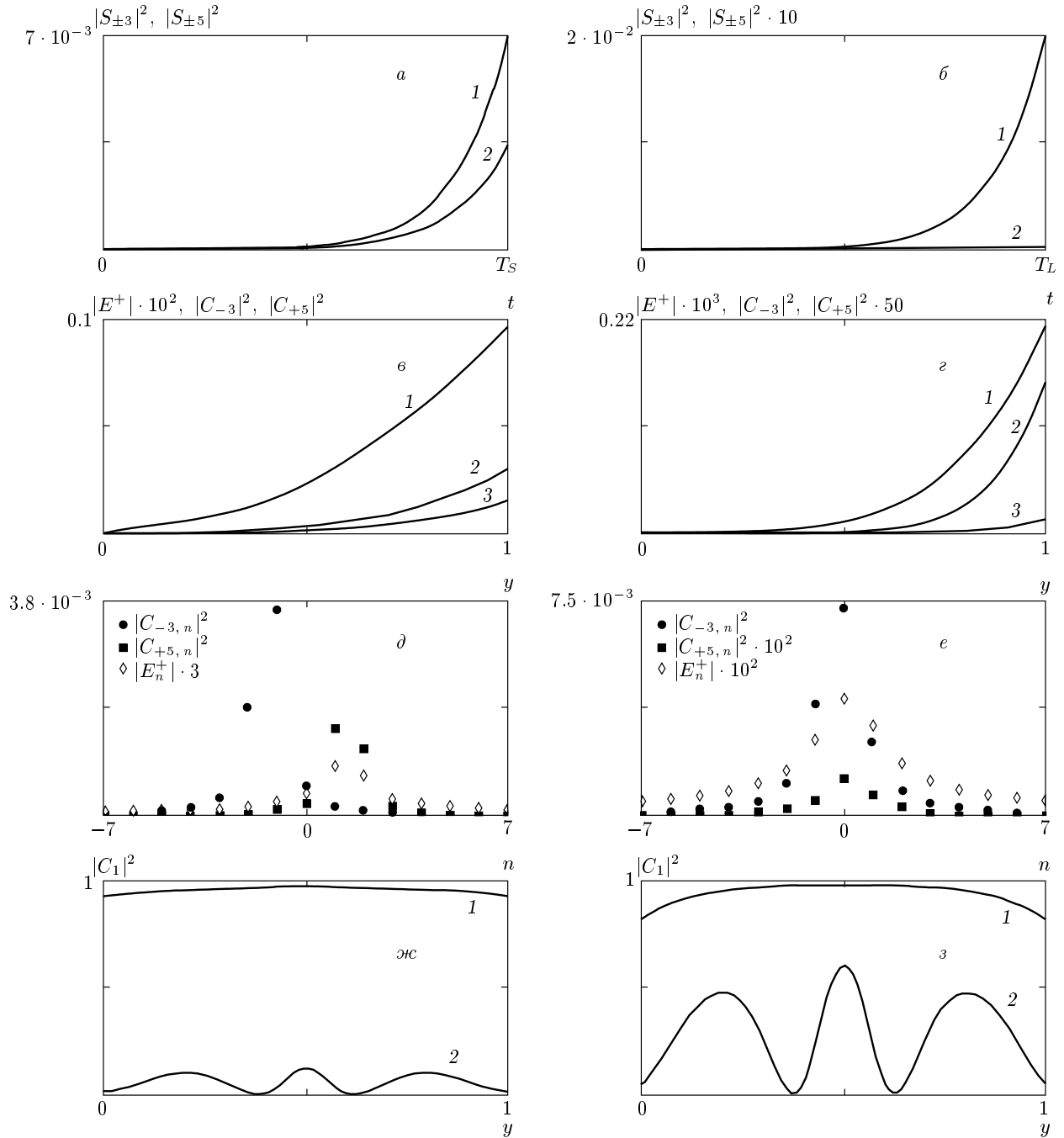


Рис. 2. Результаты численного решения уравнений (27) для ступенчатой формы импульса накачки с различной длительностью и расстройкой при следующих значениях безразмерных параметров: $E^i = 4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10^{-3}$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$, $s = 10^{-3}$, $\alpha = 0$. Для короткого импульса (левая колонка) $T_S = 6 \cdot 10^4$, $\Delta = -0.3$, для продолжительного (правая колонка) $T_L = 6 \cdot 10^6$, $\Delta = -3$; *a, б* — динамика населенностей $|S_{\pm 3}(t)|^2$ (1) прямо и $|S_{\pm 5}(t)|^2$ (2) обратно рассеянных атомов; *в, з* — распределения по образцу поля $|E^+(y)|$ (1), населенностей $|C_{-3}(y)|^2$ (2) прямо и $|C_{+5}(y)|^2$ (3) обратно рассеянных атомов в конце импульсов; *д, е* — модовые структуры поля $|E_n^+|^2$, населенностей $|C_{-3,n}|^2$ прямо и $|C_{+5,n}|^2$ обратно рассеянных атомов в конце импульсов; *жс, з* — кривые 1 — распределения по образцу населенностей основного атомного состояния $|C_1(y)|^2$ в конце импульсов, кривые 2 — то же самое для импульсов накачки длительностью $T = 2.5T_S$ (*жс*), $2.5T_L$ (*з*)

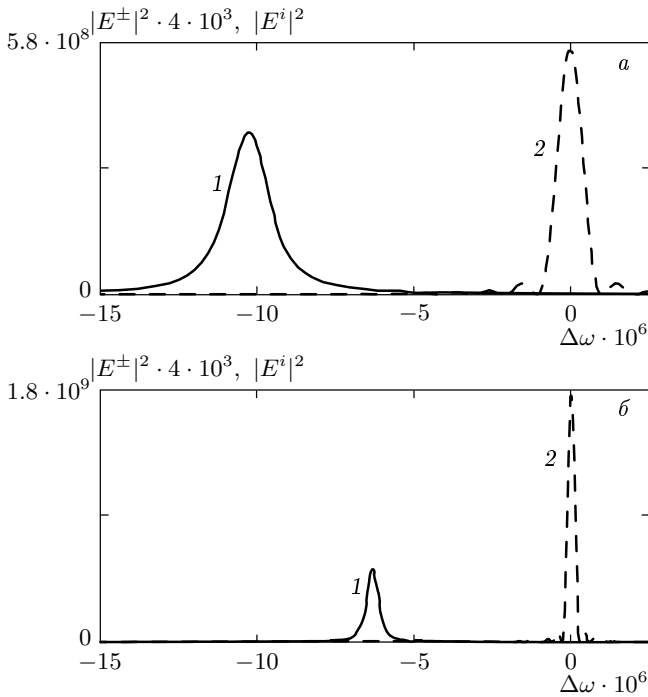


Рис. 3. Безразмерные спектры полей сверхизлучательного рассеяния (кривые 1) и возбуждающего лазерного импульса (кривые 2). Расчет для возбуждающего импульса с параметрами: *a* — $E^i = 4 \cdot 10^{-3}$, $T = T_L$; *b* — $E^i = 2 \cdot 10^{-3}$, $T = 3.5T_L$ и другие параметры — см. подпись к рис. 2

(рис. 2б). Далее, в согласии с прежними результатами [23, 31] наблюдается выраженная неоднородность вдоль образца поля и плотности рассеянных атомов (рис. 2в,з), связанная с немонахроматичностью их модовой структуры (рис. 2д,е). Видно, что плотности $|C_{+5}(y)|^2$ и $|C_{-3}(y)|^2$ растут в направлении распространения соответствующей компоненты рассеянного вдоль конденсата поля E^+ . Но так как при рассеянии назад атом получает импульс в направлении распространения поля (акт поглощения), а при рассеянии вперед — в противоположном направлении (акт излучения), центры масс атомных «облаков», рассеянных назад, окажутся на большем удалении друг от друга, чем центры масс атомных «облаков», рассеянных вперед. Это и приводит к наблюдавшейся асимметрии X-конфигурации рассеяния атомов. Рисунки 2ж,з свидетельствуют о выраженной на поздней стадии процесса неоднородности истощения БЭК, что также согласуется с экспериментальным результатом [6].

В работе [22], основанной на приближении среднего поля, отмечалось проявление энергии отдачи

в спектре сверхизлучательного рассеяния. Именно, спектр рассеянного поля оказывался сдвинутым в «красную» сторону на эту величину относительно спектра импульса накачки. Очевидно, что такой сдвиг может быть замечен, если его величина окажется больше спектральной ширины импульса $\sim 2\pi T^{-1}$, где T — длительность импульса. Это условие выполняется для рассчитанного нами продолжительного импульса длительностью T_L (в этом случае ожидаемый сдвиг приблизительно в пять раз больше спектральной ширины импульса). Приведенные на рис. 3а безразмерные спектры, рассчитанные для соответствующего импульса по формулам

$$E^\pm(\Delta\omega) \equiv \int_0^\infty dt E^\pm(y_\pm, t) \exp(i\Delta\omega t),$$

$$E^i(\Delta\omega) \equiv \int_0^\infty dt E^i(t) \exp(i\Delta\omega t),$$
(30)

где $y_+ \equiv 1$, $y_- \equiv 0$, качественно согласуются с этим результатом работы [22]. Вместе с тем имеется заметное количественное расхождение. Например, согласно рис. 3а, величина сдвига по модулю более чем вдвое превышает энергию отдачи ϵ . Этому можно дать объяснение, приведенное в работе [22] и состоящее в учете дополнительного смещения спектра вследствие динамического эффекта Штарка (так называемый «световой сдвиг»). При достаточной отстройке от резонанса световой сдвиг квадратично зависит от амплитуды поля накачки и, таким образом, оказывается значительным при большой интенсивности накачки. И наоборот, уменьшение последней должно приводить к сокращению светового сдвига. Наши расчеты с варьированным значением интенсивности накачки подтвердили предложенную интерпретацию. На рис. 3б приведены результаты расчета спектра для вдвое меньшего значения амплитуды поля $|E^i| = 2 \cdot 10^{-3}$ и получен сдвиг $\Delta\omega \approx -1.2\epsilon$.

На рис. 4 демонстрируется сравнение обычного некогерентного рэлеевского фона

$$F_R \equiv K \frac{dI_R}{d\Omega} = \left| \frac{E^i}{\Delta} \right|^2$$

и диаграммы направленности когерентного рассеяния «назад»

$$F(\varphi) \equiv K \frac{dI(\varphi)}{d\Omega} = N|B(\varphi)|^2.$$

Здесь dI — определяемые уравнениями (16), (17), (25) потоки соответствующих излучений в телесный

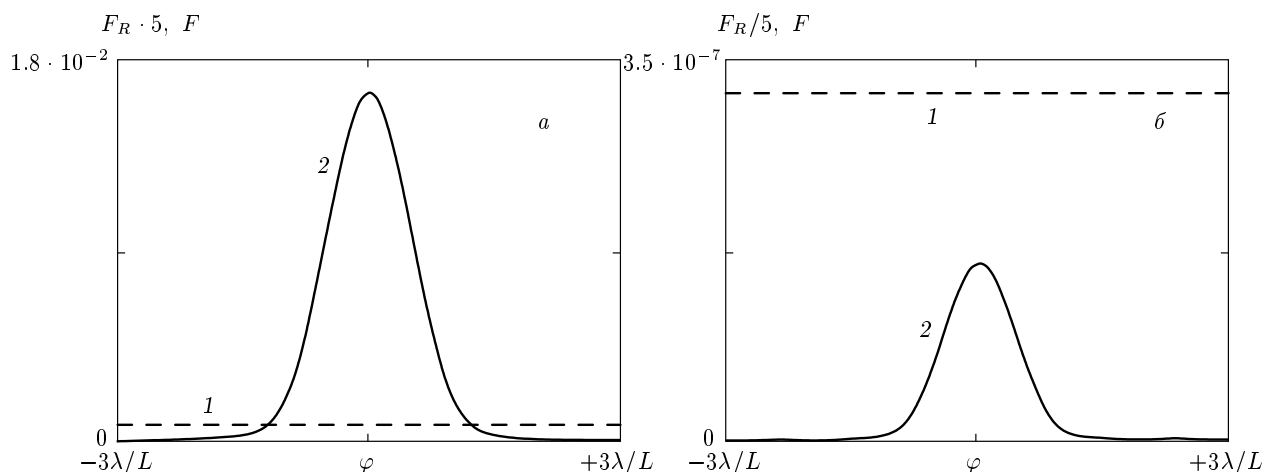


Рис. 4. Безразмерный рэлеевский фон F_R (кривые 1) и безразмерная диаграмма направленности когерентного обратного рассеяния $F(\varphi)$ (кривые 2) в дальней зоне дифракции в конце короткого (а) и продолжительного (б) импульсов с теми же параметрами, что и в подписи к рис. 2

угол $d\Omega$, $K \equiv 2\pi/Ncd^2k^4$ — коэффициент, приводящий к безразмерному виду, $\mathbf{r}_0 = (-\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \approx \approx (-1, \varphi, 0)$ — направление наблюдения в плоскости xy , φ — малый угол, отсчитываемый от отрицательного направления оси x . Из рис. 4 видно, что когерентное рассеяние «назад» является резко анизотропным: оно сосредоточено в направлении, противоположном направлению возбуждающего лазерного луча, и может существенно превышать по интенсивности обычное изотропное (в плоскости xy) рэлеевское рассеяние (рис. 4а). Когерентное рассеяние света «назад» связано с заселенностью атомных состояний « ± 4 » и поэтому его проявление в нашей модели происходит при тех же условиях, при которых имеет место заметное «обратное» рассеяние атомов (ср. интенсивность обратного рассеяния света на рис. 4а,б с эффективностью формирования «обратно» рассеянных атомов на рис. 2а,б). Существенного увеличения интенсивности обратно рассеянного света по сравнению с рэлеевским фоном можно ожидать при увеличении числа атомов БЭК ввиду сверхизлучательного характера когерентного обратного рассеяния: интенсивность сверхизлучательного рассеяния пропорциональна квадрату числа атомов, тогда как интенсивность рэлеевского рассеяния пропорциональна первой степени этой величины.

Очевидно также, что анизотропия рассеяния может наблюдаться и в направлениях, близких к направлению накачки. Действительно, и в этом случае излучение, когерентно рассеянное «вперед», будет концентрироваться в дальней зоне в телесном угле порядка λ^2/DL .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье развита полуклассическая теория сверхизлучательного рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате разреженного газа без использования приближения среднего поля. Насколько нам известно, в предшествующих публикациях теоретическая интерпретация результатов по рассеянию света на БЭК проводилась в приближении среднего поля, когда для простоты внутри ловушки пренебрегали пространственной неоднородностью поля и когерентных атомных облаков, возникающих в результате рассеяния лазерного импульса. В нашей работе [30] была предложена идея учета такой зависимости с помощью фурье-разложений амплитуд волн де Бройля и амплитуд соответствующих мод электромагнитного поля. Отметим, что длины волн де Бройля рассеянных атомов имеют порядок длины волны возбуждающего лазерного поля. В данной статье этот подход модифицирован и реализован с помощью решения системы уравнений Максвелла–Шредингера в координатном представлении. Несмотря на достаточную простоту предлагаемого решения, выполнить всю программу оказалось достаточно сложно из-за большого объема вычислений. Поэтому мы ограничились пока одномерной моделью конденсата и учетом только однократных актов рассеяния света отдельным атомом. При этом мы воспользовались также приближением заданного поля накачки. Отметим, что сформулированный в данной статье алгоритм решения уравнений Максвелла–Шредингера позволяет освободить

ся от этих ограничений и провести более детальное сравнение с экспериментом. Мы предполагаем заняться этим в ближайшее время. Вместе с тем, даже при использовании этой ограниченной модели нам удалось описать ряд принципиальных особенностей рассматриваемого эффекта, таких как асимметрия X-образной конфигурации атомных облаков, смещение частоты рассеянного света, обусловленное отдачей и световым сдвигом, и наконец, возможность появления кооперативного когерентного отражения (пока отсутствуют сообщения об экспериментальном обнаружении последнего эффекта).

Нам представляется, что продемонстрированная в этой статье эффективность развитого метода делает его привлекательным для решения трехмерной задачи сверхизлучательного рассеяния света на бозе-эйнштейновском конденсате с учетом реальной формы ловушки и дифракционных эффектов. В этом случае можно будет надеяться не только на качественное, но и на количественное согласие теоретических результатов с экспериментальными.

Авторы благодарят В. Кеттерле, В. И. Юкалова, А. С. Трошина и В. В. Попова за интерес к работе и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 05-02-17513, 06-02-16571, 06-02-81007).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Ketterle, Rev. Mod. Phys. **74**, 1131 (2002).
2. E. Cornell and C. E. Wieman, Rev. Mod. Phys. **74**, 875 (2002).
3. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
4. Ph. W. Courteille, C. S. Bagnato, and V. I. Yukalov, Laser Phys. **11**, 659 (2001).
5. S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn et al., Science **285**, 594 (1999).
6. D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd et al., Science **300**, 475 (2003).
7. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
8. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двууровневые атомы*, Мир, Москва (1978).
9. А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский, *Кооперативные явления в оптике*, Наука, Москва (1988).
10. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, IOP Publ., Bristol & Philadelphia (1996).
11. M. G. Moore and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **83**, 5202 (1999).
12. O. E. Mustecaplioglu and L. You, Phys. Rev. A **62**, 063615 (2000).
13. N. Piovella, R. Bonifacio, B. W. J. McNeil, and G. R. M. Robb, Opt. Comm. **187**, 165 (2001).
14. N. Piovella, M. Gatelli, and R. Bonifacio, Opt. Comm. **194**, 167 (2001).
15. N. Piovella, M. Gatelli, L. Martinucci, R. Bonifacio, B. W. J. McNeil, and G. R. M. Robb, Laser Phys. **12**, 188 (2002).
16. Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **120**, 1117 (2001).
17. E. D. Trifonov, Laser Phys. **12**, 211 (2002).
18. Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **92**, 631 (2002).
19. C. Benedec and M. G. Benedict, J. Opt. B **6**, 3 (2004).
20. Е. Д. Трифонов, ТМФ **139**, 449 (2004).
21. Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров, ЖЭТФ **126**, 54 (2004).
22. Е. Д. Трифонов, Н. И. Шамров, Опт. и спектр. **96**, 294 (2004).
23. Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, Laser Phys. Lett. **1**, 373 (2004).
24. Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, Proc. SPIE **5402**, 122 (2004).
25. Yu. A. Avetisyan, Proc. SPIE **5773**, 87 (2005).
26. H. Pu, W. Zhang and P. Meystre, Phys. Rev. Lett. **91**, 150407 (2003).
27. G. R. M. Robb, N. Piovella, and R. Bonifacio, E-print archives, cond-mat/0410077.
28. E. D. Trifonov, Laser Phys. Lett. **2**, 153 (2005).
29. Ю. А. Аветисян, Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **100**, 317 (2006).
30. Е. Д. Трифонов, Опт. и спектр. **98**, 545 (2005).
31. Yu. A. Avetisyan and E. D. Trifonov, Laser Phys. Lett. **2**, 512 (2005).
32. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1970).

- 33.** Ю. А. Аветисян, в сб. *Кооперативное излучение и статистика фотонов*, Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, Ленинград (1986), с. 44.
- 34.** Ю. А. Аветисян, А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, ЖЭТФ **95**, 1541 (1989).
- 35.** Ю. А. Аветисян, А. И. Зайцев, В. А. Малышев, Е. Д. Трифонов, *Опт. и спектр.* **70**, 1345 (1991).
- 36.** Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. II, ОГИЗ, Москва – Ленинград (1945).
- 37.** F. Haake, H. King, G. Schroder, J. Haus, and R. Glauber, *Phys. Rev. A* **20**, 2047 (1979).
- 38.** Ю. А. Аветисян, в сб. *Кооперативное излучение и статистика фотонов*, Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, Ленинград (1986), с. 62.
- 39.** R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake, *Phys. Rev. A* **4**, 302 (1971).
- 40.** R. Bonifacio, P. Schwendimann, and F. Haake, *Phys. Rev. A* **4**, 854 (1971).
- 41.** R. Bonifacio and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **11**, 1507 (1975).
- 42.** R. Bonifacio and L. A. Lugiato, *Phys. Rev. A* **12**, 587 (1975).
- 43.** R. Bonifacio, J. D. Farina, and L. M. Narducci, *Opt. Comm.* **31**, 377 (1979).