

ДИНАМИКА ЗАРЯЖЕННЫХ СГУСТКОВ В САМОСОГЛАСОВАННОМ ПОЛЕ

А. С. Чухачев*

*Государственный научный центр «Всероссийский электротехнический институт»
111250, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 мая 2006 г.

Рассмотрена проблема самосогласованного описания плотных сгустков заряженных частиц, характеризующихся нестационарными полями. Рассмотрены классическая и квантовая задачи. Результаты могут быть применены при изучении кластеров в лазерных полях, а также для изучения ускорения многозарядных ионов и экстремальных состояний вещества.

PACS: 52.35.-g, 03.65.-w, 41.20.-q

Изучение динамики плотных заряженных сгустков частиц, взаимодействующих с самосогласованными полями, представляется актуальным в связи с появлением таких новых задач, как поведение кластеров в лазерных полях [1], ускорение многозарядных тяжелых ионов [2], экстремальных состояний вещества (например, пылевой плазмы [3]).

Обычно изучение динамики сгустков оказывается достаточно прозрачным при наличии интегралов движения частиц. Для стационарных задач существует интеграл энергии, играющий важную роль при исследовании стационарных систем.

В случае нестационарных задач возможно использование обобщений интеграла энергии для явно зависящих от времени систем — одним из таких обобщений является широко известный инвариант Куранта–Снайдера. При помощи этого инварианта изучался квантовомеханический осциллятор с переменной частотой (см. [4]). Кроме того, следует отметить ряд классических задач, относящихся прежде всего к ускорительной технике (см. [5, 6]).

Широкое распространение для решения физических задач получило использование переменных масштабов. Так, введение зависящего от координат масштаба времени позволяет свести задачу Кеплера к задаче об осцилляторе [7, 8].

При решении нестационарного уравнения Шредингера часто используются нестационарные координаты,

в которых масштаб зависит от времени. Отметим работы [9–14]. В работах [9, 10] точное решение получено с помощью разделения переменных и записаны выражения для пропагатора нестационарного уравнения. В работе [11] изучалось решение в форме интеграла по траекториям. В работах [12, 13] исследовались точные решения нестационарного уравнения Шредингера в условиях, когда разделение переменных невозможно, однако использование переменного масштаба позволяет упростить вид уравнения. В работе [14] рассматривались собственные решения уравнения Шредингера в нестационарных координатах и нестационарный классический ансамбль частиц в статистической механике.

В настоящей работе для описания динамики сферических симметричных сгустков, взаимодействующих с собственным полем, будет использоваться обобщение интеграла энергии в нестационарных координатах.

1. Выражение

$$I = \frac{m}{2} \xi^2(t) \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\xi^2(t)) \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + V \left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)} \right) + \frac{m r^2}{4} \frac{d^2}{dt^2} (\xi^2(t)) \quad (1)$$

является интегралом движения, если энергия

$$H = \frac{m \mathbf{r}^2}{2} + \frac{1}{\xi^2(t)} V \left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)} \right), \quad (2)$$

*E-mail: churchev@mail.ru

а $\xi(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d^3}{dt^3}\xi^2(t) \equiv 0.$$

Здесь m — масса частицы, $\xi(t)$ — функция времени, $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор и скорость частицы. Из последнего условия следует, что

$$\xi(t) = \sqrt{at^2 + 2bt + c},$$

где a, b, c — константы. Если $\xi(t) \equiv \sqrt{c}$, то выражение (1) совпадает с выражением для энергии. Формулу (1) можно также переписать следующим образом:

$$I = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{r}}\xi - \dot{\xi}\mathbf{r})^2 + V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}\right) + \frac{m\lambda r^2}{2\xi}, \quad (3)$$

где $\lambda = ac - b^2$.

Отметим также, что соотношение (1) можно преобразовать к виду

$$I = \frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{d\tau}\right)^2 + V(\boldsymbol{\rho}) + \frac{m\lambda}{2}\rho^2, \quad (4)$$

где

$$\tau = \int \frac{dt'}{\xi^2(t')}, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\xi}.$$

В переменных $\boldsymbol{\rho}, \tau$ функция I не зависит от времени τ явно и является энергией. Характерно, что к потенциальной энергии при этом добавляется член $(m\lambda/2)\rho^2$.

Выражение (2) для энергии использовалось в большом количестве работ, изучавших квантовомеханические системы (см. [9–11]). В работе [10] приведен также ряд обобщений выражения (3) для интеграла движения. Одному из таких обобщений соответствует следующее выражение для энергии:

$$H = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{1}{\xi^2}V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}\right) + \frac{\omega_0^2}{2}\mathbf{r}^2.$$

Уравнение движения при этом имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{\xi^3}\nabla V + \omega_0^2\mathbf{r} = 0.$$

Интеграл движения (3) в этом случае также справедлив, если $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\xi}(t) + \omega_0^2\xi = \frac{\lambda}{\xi^3}.$$

При $V \equiv 0$ рассматриваемый инвариант является инвариантом Куранта–Снайдера.

Впервые, по-видимому, инвариант типа (3) описан в работах [15].

2. Пусть имеется сферически-симметричный бесстолкновительный сгусток заряженных частиц, взаимодействующих с собственным электрическим полем. При заряде частицы, равном $-e$, потенциале Φ поля запишем

$$V = -e\Phi\xi^2 > 0.$$

При этом

$$\Delta_r\Phi = 4\pi en = -\frac{e}{\xi^4(t)}\Delta_\rho V(\boldsymbol{\rho}),$$

где $\Delta_r\Phi$ вычисляется по компонентам \mathbf{r} , а $\Delta_\rho V$ — по компонентам $\boldsymbol{\rho}$. При интегрировании в фазовом пространстве функции распределения f , зависящей от инварианта

$$I = \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 + V + \frac{m\lambda r^2}{2\xi^2} \quad (\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}}\xi - \mathbf{r}\dot{\xi}),$$

для плотности n можно получить:

$$n = \int d\dot{\mathbf{r}} f(I) = \frac{1}{[\xi(t)]^3} \int d\mathbf{u} f(I).$$

Вследствие различия показателей степени функции $\xi(t)$: -3 в выражении для плотности и -4 в выражении для ΔV , следует считать, что f удовлетворяет уравнению

$$\frac{df}{dt} = -\nu(t)f, \quad (5)$$

где $\nu(t) = \dot{\xi}/\xi$. Тогда

$$f = \chi_0 \exp\left(-\int \nu(t') dt'\right) F(I) = \frac{\chi_0}{\xi(t)} F(I). \quad (6)$$

Здесь χ_0 — нормировочная константа, $F(I)$ — функция интеграла движения I . Положим

$$F(I) = \frac{1}{\sqrt{I_0 - I}} \sigma(I_0 - I), \quad (7)$$

где $\sigma(x) = 1, x \geq 0, \sigma(x) = 0, x < 0$. Тогда плотность частиц

$$\begin{aligned} n &= \chi_0 \exp\left(-\int \nu(t') dt'\right) \int \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{\sqrt{I_0 - I}} \sigma(I_0 - I) = \\ &= \left(\frac{2}{m}\right)^{3/2} \frac{\chi_0}{\xi^4} \left(V_0^2 - \frac{2V}{m} - \lambda\rho^2\right) \times \\ &\quad \times \sigma\left(V_0^2 - \frac{2V}{m} - \lambda\rho^2\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение для $V = -\xi^2 e\Phi$ вида

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho V = -4\pi e^2 n \xi^4 \quad (9)$$

можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho V = -\frac{4\pi e^2 n_0}{V_0^2} \times \left(V_0^2 - \frac{2V}{m} - \lambda \rho^2 \right) \sigma \left(V_0^2 - \frac{2V}{m} - \lambda \rho^2 \right), \quad (10)$$

где

$$V_0^2 = \frac{2I}{m}, \quad n_0 = 2\pi \left(\frac{2}{m} \right)^{2/3} \chi_0.$$

Обозначим

$$\alpha = 4\pi e^2 n_0, \quad \beta = \frac{8\pi e^2 n_0}{mV_0^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi e^2 n_0 \lambda}{V_0^2}.$$

Тогда

$$V = \frac{\alpha}{\beta} - 6\frac{\gamma}{\beta^2} - \frac{\gamma}{\beta} \rho^2 + \frac{A}{\rho} \operatorname{sh}(\sqrt{\beta} \rho) \quad \text{при } \rho < \rho_*,$$

$$V = \frac{B}{\rho} \quad \text{при } \rho > \rho_*.$$

Величина ρ_* определяется равенством

$$1 - \frac{2V(\rho_*)}{mV_0^2} - \frac{\lambda \rho_*^2}{V_0^2} = 0.$$

Сшивка решений при $\rho > \rho_*$ и $\rho < \rho_*$ приводит к следующему соотношению:

$$\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\beta} \rho_*)}{\operatorname{sh}(\sqrt{\beta} \rho_*)} = \frac{\rho_* \sqrt{\beta}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\beta} \rho_*} - \frac{\alpha \beta}{6\gamma \sqrt{\beta} \rho_*}. \quad (11)$$

При этом

$$A = \frac{6\gamma}{\beta^2 \sqrt{\beta}} \frac{(\sqrt{\beta} \rho_*)}{\operatorname{sh}(\sqrt{\beta} \rho_*)}, \quad B = \rho_* \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \rho_*^2 \right).$$

Если $\sqrt{\beta} \rho_* < 1$, то

$$\sqrt{\beta} \rho_* = \sqrt{\frac{\alpha \beta}{3\gamma}}.$$

При $\sqrt{\beta} \rho_* \gg 1$

$$\sqrt{\beta} \rho_* = 1 + \sqrt{\frac{\alpha \beta}{6\gamma}}.$$

Если $\alpha \beta / 3\gamma \ll 1$, то

$$\rho_* \approx \sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}, \quad A = \frac{6\gamma}{\beta^2 \sqrt{\beta}}, \quad B = 2 \left(\frac{\alpha}{3\beta} \right)^{3/2} > 0.$$

При $\rho < \rho_*$ имеем

$$V = \frac{mV_0^2}{2} \left(1 - \frac{3\lambda m}{4\pi e^2 n_0} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2} + \frac{3\lambda m}{4\pi e^2 n_0} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\rho_*/\rho_0}{\operatorname{sh}(\rho_*/\rho_0)} \right),$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{mV_0^2}{8\pi e^2 n_0}}, \quad \rho_1 = \frac{V_0}{\sqrt{\lambda}}.$$

При $\rho > \rho_*$ величина $V = B/\rho$. Уравнение непрерывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\dot{\xi}}{\xi} n. \quad (12)$$

Правая часть этого уравнения описывает поглощение частиц.

При переходе к переменным \mathbf{r}, t видим, что радиус сгустка растет со временем при $\lambda > 0$, причем из-за поглощения полное число частиц убывает: $N = N_0/\xi(t)$.

3. Несомненный методический интерес представляет рассмотрение динамики четырехмерного сферического сгустка.

Линейное уравнение для потенциала может быть получено, если положить

$$f = \chi_0 \delta(I - I_0). \quad (13)$$

В этом случае выражение для плотности имеет вид

$$n = \chi_0 \left(\frac{2}{m} \right)^3 \frac{\chi_0}{\xi^4} \pi^2 \left(I_0 - V - \frac{\lambda m \rho^2}{2} \right) \times \sigma \left(I_0 - V - \frac{\lambda m \rho^2}{2} \right). \quad (14)$$

При этом из-за наличия множителя ξ^4 в знаменателе правой части (14) нет необходимости считать, что существует поглощение частиц. Уравнение для функции распределения имеет вид

$$\frac{df}{dt} = 0.$$

Будем также считать, что

$$I_0 = \frac{mV_0^2}{2}, \quad V = -e\xi^2 \Phi.$$

Уравнение для V имеет вид

$$\frac{1}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} \rho^3 \frac{dV}{d\rho} = (-\alpha + \beta V + \gamma \rho^2) \sigma(-\alpha + \beta V + \gamma \rho^2), \quad (15)$$

где

$$\alpha = 4\pi e^2 n_0, \quad \beta = \frac{8\pi e^2 n_0}{mV_0^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi e^2 n_0 \lambda}{V_0^2}.$$

Внутри сгустка

$$V = \frac{A}{\rho} I_1(\sqrt{\beta} \rho) + \frac{mV_0^2}{2} - 4 \frac{mV_0^2}{2} \frac{m\lambda}{4\pi e^2 n_0} - \frac{m\lambda}{2} \rho^2,$$

а вне его

$$V = \frac{B}{\rho^2}.$$

Из условий шивки при $\rho = \rho_*$ следуют соотношения:

$$\frac{I_0(\sqrt{\beta} \rho_*)}{I_1(\sqrt{\beta} \rho_*)} = \frac{1}{\sqrt{\beta} \rho_*} + \frac{\sqrt{\beta} \rho_*}{2} - \frac{\alpha \beta}{4\gamma\sqrt{\beta} \rho_*}, \quad (16)$$

$$A = \frac{8\gamma\sqrt{\beta} \rho_*}{\beta^2\sqrt{\beta} I_1(\sqrt{\beta} \rho_*)}, \quad B = \frac{\rho_*^2}{\beta}(\alpha - \gamma\rho_*^2). \quad (17)$$

Также имеют смысл решения при $\lambda > 0$ для расширяющегося сгустка, однако, в отличие от трехмерного случая, в четырехмерной модели сохраняется полное число N частиц. Уравнение непрерывности имеет вид

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial n}{\partial t} \equiv 0.$$

4. Рассмотрим квантовую задачу о заряженной частице.

Запишем уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + \frac{1}{\xi^2} V\left(\frac{\mathbf{r}}{\xi}\right) \Psi. \quad (18)$$

Рассмотрим сначала четырехмерный случай. Введем новые переменные:

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\xi(t)}, \quad \tau = \int \frac{dt'}{\xi^2(t')}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi^2}.$$

Равенство (18) тогда приводится к виду

$$i\hbar \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \dot{\xi} \boldsymbol{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\boldsymbol{\rho}) \Psi. \quad (19)$$

В формуле (19) точка означает производную $d/d\tau$, оператор Δ — в переменных $\boldsymbol{\rho}$. Положим

$$\Psi = \exp\left(\frac{im}{\hbar} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \frac{\rho^2}{2}\right) \frac{1}{\xi^2} \Psi_1(\boldsymbol{\rho}, \tau).$$

Получим уравнение для Ψ_1 :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + (V + \lambda \rho^2) \Psi_1, \quad (20)$$

где $\lambda = ac - b^2$.

Плотность заряда, определяемая функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$, имеет вид

$$q(\mathbf{r}, t) = -e|\Psi|^2 = -e|\Psi_1|^2 \frac{1}{\xi^4},$$

а уравнение для потенциала $V = -e\xi^2 \Phi(r, t)$ —

$$\frac{1}{\xi^4} \frac{1}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} \rho^3 \frac{dV}{d\rho} = -\frac{4\pi e^2}{\xi^4} |\Psi_1|^2.$$

Поскольку в переменных $\boldsymbol{\rho}, \tau$ задача является стационарной, можно положить

$$\Psi_1(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \exp\left(\frac{i\chi^2 \tau}{2\hbar}\right) \varphi(\boldsymbol{\rho}). \quad (21)$$

Здесь $-\chi^2/2 = E$ — энергия связанного состояния.

Таким образом, имеем нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\begin{cases} -\frac{\chi}{2} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} \rho^3 \frac{d\varphi}{d\rho} + (V + \lambda \rho^2) \varphi, \\ \frac{1}{\rho^3} \frac{d}{d\rho} \rho^3 \frac{dV}{d\rho} = -4\pi e^2 |\varphi|^2. \end{cases} \quad (22)$$

Далее, если в трехмерной задаче положить, как и выше,

$$\Psi = \frac{1}{\xi^2} \exp\left(\frac{im}{\hbar} \frac{\dot{\xi}}{\xi} \frac{\rho^2}{2}\right) \Psi_1,$$

то для Ψ_1 получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi_1 + \left(V + \frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{\xi}}{\xi} + \lambda \rho^2 \right) \Psi_1.$$

Этому уравнению соответствуют растущие по τ решения. Добавив в потенциал исходного уравнения (18) слагаемое

$$-\frac{i\hbar}{2} \frac{1}{\xi} \frac{d\xi}{dt},$$

получим уравнение, которое описывает затухающие во времени состояния, причем оказывается возможным самосогласованное описание взаимодействия с собственным полем.

При этих условиях плотность заряда имеет вид

$$q(r, t) = -e|\Psi|^2 = -e|\Psi_1|^2 \frac{1}{\xi^4}. \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что

$$\frac{1}{\xi^4} \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho V = -\frac{4\pi e^2}{\xi^4} |\Psi_1|^2.$$

Уравнение для Ψ_1 имеет решение следующего вида:

$$\Psi_1 = \exp\left(\frac{i\chi^2 \tau}{2\hbar}\right) \varphi(\rho).$$

В результате приходим к нелинейной системе типа (22):

$$\begin{cases} -\frac{\chi}{2} \varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho \varphi + (V + \lambda \rho^2) \varphi, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \rho V = -4\pi e^2 |\varphi|^2. \end{cases} \quad (24)$$

Система (24) отличается от (22) только видом радиальной части лапласиана, однако в трехмерной задаче оказывается необходимым наличие затухания Ψ -функции определенного вида.

Заметим, наконец, что в одномерной задаче при наличии затухания с

$$\nu(t) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\xi}}{\xi}$$

также можно получить нелинейную систему типа (22), (24), причем оператор Лапласа оказывается просто второй производной:

$$\begin{cases} -\frac{\chi}{2}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + (V + \lambda\eta^2)\varphi, \\ \frac{d^2}{d\eta^2}V = -4\pi e^2 |\varphi|^2. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь $\eta = \chi/\xi(t)$, функции φ и V зависят только от η .

Представляется вероятным, что рассмотренные модельные задачи могут быть полезными при тестировании сложных численных программ, предназначенных для описания реальных экспериментов. Особенно интересными предложенные модели могут оказаться при исследовании нестационарных процессов, связанных с ионизацией и нейтрализацией атомных частиц, когда число заряженных частиц не является постоянным. Кроме того, использование обобщения инварианта Куранта–Снайдера, приведенное в работе [10], открывает новые возможности при исследовании плотных сгустков, характеризующихся нелинейными колебаниями частиц с переменной частотой.

Автор благодарен Э. А. Манькину за ряд полезных дискуссий и помощь в работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-02-08030).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Смирнов, УФН **173**, 609 (2003).
2. Я. Браун, Р. Келлер, А. Холмс и др., *Физика и технология источников ионов*, под ред. Я. Брауна, Мир, Москва (1998).
3. В. Е. Фортгов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, В. И. Молотков, О. Ф. Петров, УФН **167**, 1215 (1997); А. М. Игнатов, *Физика плазмы* **30**, 256 (2004).
4. К. Husimi, *Progr. Theor. Phys.* **9**, 381 (1953).
5. И. М. Капчинский, *Теория линейных резонансных ускорителей: Динамика частиц*, Энергоиздат, Москва (1982).
6. А. С. Чихачев, *Кинетическая теория квазистационарных состояний сильноточных пучков заряженных частиц*, Физматлит, Москва (2001).
7. Е. Штифель, Г. Шейфеле, *Линейная и регулярная небесная механика*, Наука, Москва (1975).
8. Е. А. Соловьев, ЯФ **35**, 242 (1982).
9. V. V. Dodonov, V. I. Man'ko, and D. E. Nikonov, *Phys. Lett. A* **162**, 359 (1992).
10. C. J. Eftimiou and D. Spector, *Phys. Rev. A* **49**, 2301 (1994).
11. C. Grosche, *SISSA Rep.* № SISSA/2/93/FM.
12. Е. А. Соловьев, ТМФ **28**, 240 (1976).
13. А. S. Chikhachev, *J. Rus. Laser Res.* **26**, 33 (2005).
14. M. V. Berry and G. Klein, *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 1805 (1984).
15. J. Mestschersky, *Aston. Nachr.* **132**, 129 (1893); **159**, 229 (1902).