ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 2, стр. 195–204

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЯ ПРИ КВАНТОВОМ НЕРАЗРУШАЮЩЕМ ИЗМЕРЕНИИ ЧИСЛА ФОТОНОВ

А. А. Букач[*], *С. Я. Килин*

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 8 апреля 2005 г.

Изучена временная эволюция оптического поля в процессе квантового неразрушающего измерения числа фотонов, основанного на керровском взаимодействии исследуемого и вспомогательного полей. Показано, что состояние поля приближается к фоковскому лишь асимптотически при стремлении времени к бесконечности, при этом большую часть времени измерения поле находится в суперпозиции только двух фоковских состояний (фоковский кубит). Получена оценка времени, необходимого для проведения измерения числа фотонов с заданной точностью, а также времени существования фоковского кубита.

PACS: 42.50.-p, 42.50.Dv, 03.65.Ta, 03.65.-w

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике значительная роль по праву отводится процедуре измерения. За время существования квантовых представлений о мире возникало множество вопросов, связанных с природой измерения и двойственностью квантовомеханического описания реальности.

При решении задач квантовой механики измерение обычно трактуется в фон-неймановском смысле как одномоментный акт, приводящий к скачкообразной редукции состояния исследуемого объекта. Однако в реальности для осуществления измерения исследуемый объект должен взаимодействовать с измерительной аппаратурой в течение некоторого ненулевого времени [1], и переход исследуемого объекта в состояние, соответствующее результату измерения, не является мгновенным скачком. В связи с этим возникает вопрос о пути этого перехода, об эволюции состояния объекта в процессе его измерения. Исследование этого вопроса представляет как самостоятельный фундаментальный интерес, так и практическую значимость, позволяя судить о времени, необходимом для проведения измерения, и его точности, т. е. о том, насколько окончательное состояние исследуемого объекта будет соответствовать результату измерения. В данной работе этот вопрос рассматривается в применении к измерению числа фотонов в оптическом поле.

В отличие от идеального квантового измерения, немедленное повторение которого должно приводить к одному и тому же результату, в реальном случае из-за конечности времени реального измерения сама наблюдаемая в процессе измерения может возмущаться вследствие взаимодействия с аппаратом. Чтобы избежать этого эффекта, можно использовать идею квантового неразрушающего измерения [2–4], т. е. подобрать гамильтониан взаимодействия объекта с измерительной аппаратурой $\mathcal{H}_I$ так, чтобы обратное влияние измерения на измеряемую наблюдаемую $\mathcal{A}$ отсутствовало, для чего необходимо выполнение соотношения:

$$[\mathcal{H}_I, \mathcal{A}] = 0. \tag{1}$$

Неразрушающее измерение числа фотонов оптического поля может быть реализовано посредством его взаимодействия в нелинейной среде со вспомогательным полем в известном начальном состоянии и последующего изменения свойств вспомогательного поля [5]. Для того чтобы выполнялось соотношение (1), гамильтониан взаимодействия должен разлагаться в ряд по степеням оператора числа фотонов $a^\dagger a$. Самым простым случаем нелинейности, удовлетворяющей этому условию, является оптический эффект Керра, при котором гамильтониан $\mathcal{H}_I$ линеен по числу фотонов в исследуемом и вспомога-

[*] E-mail: a.bukach@dragon.bas-net.by

тельном полях. Схема неразрушающего измерения с использованием оптического эффекта Керра была впервые исследована Имото, Хаусом и Ямамото [6], однако там измерение фазового сдвига вспомогательного поля рассматривалось как идеальное одномоментное измерение. Применение к исследуемой схеме теории непрерывных квантовых измерений [7], использованное в настоящей работе, позволяет «развернуть» структуру измерения во времени.

2. ЭВОЛЮЦИЯ ПОЛЯ В ПРОЦЕССЕ ИЗМЕРЕНИЯ

2.1. Неразрушающее измерение числа фотонов

Подробная схема описанного метода измерения, представленная на рис. 1, состоит в следующем. Возбуждаемое когерентной накачкой вспомогательное поле делится на полупрозрачном зеркале на два пучка, один из которых взаимодействует с исследуемым полем в керровской среде, а второй используется в качестве опорного при измерении сдвига фаз первого пучка в гомодинной схеме.

Если обозначить операторы уничтожения фотонов в исследуемой и вспомогательной моде поля соответственно a и c, то гамильтониан взаимодействия

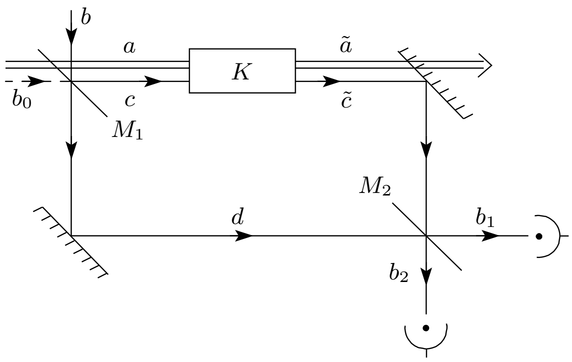

Рис. 1. Схема неразрушающего измерения числа фотонов. Вспомогательная мода b, смешиваясь на полупрозрачном зеркале M_1 с вакуумной модой b_0, разделяется на пучки c и d, первый из которых взаимодействует с исследуемым полем a в керровской среде K. Изменение фазы вспомогательного поля после взаимодействия, связанное с числом фотонов в поле a, определяется в схеме гомодинного детектирования: моды $\tilde{c}$ и d смешиваются на втором полупрозрачном зеркале M_2 и возникающие в результате поля b_1 и b_2 направляются на детекторы

мод в керровской среде может быть записан следующим образом [6]:

$$\mathcal{H}_I = \hbar\kappa a^\dagger a c^\dagger c, \tag{2}$$

где κ характеризует нелинейность среды. Как уже отмечалось, он коммутирует с оператором числа фотонов $n_a = a^\dagger a$ в исследуемом поле, поэтому такое измерение действительно является неразрушающим. При прохождении исследуемого и вспомогательного полей сквозь керровскую среду их операторы подчиняются уравнениям эволюции

$$\dot{a} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_I, a], \quad \dot{c} = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}_I, c], \tag{3}$$

поэтому после взаимодействия в среде в течение времени Δt они примут вид

$$\tilde{a} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_I\Delta t\right) a \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_I\Delta t\right) = a\exp\left(i\chi c^\dagger c\right), \tag{4}$$

$$\tilde{c} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_I\Delta t\right) c \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_I\Delta t\right) = c\exp\left(i\chi a^\dagger a\right), \tag{5}$$

где использовано обозначение $\chi = \kappa\Delta t$. Таким образом, вспомогательное поле действительно получит фазовый сдвиг, пропорциональный числу фотонов в исследуемом поле.

Для того чтобы описать преобразование вспомогательного поля на полупрозрачных зеркалах, введем в рассмотрение вакуумную моду вспомогательного поля b_0, локализованную с другой стороны зеркала M_1, нежели входной пучок b. Тогда операторы уничтожения фотонов в модах вспомогательного поля после его преобразования на первом зеркале будут иметь вид [7]

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}(b + b_0), \quad d = \frac{1}{\sqrt{2}}(b - b_0). \tag{6}$$

Аналогичным образом связаны операторы поля по разные стороны полупрозрачного зеркала M_2 в гомодинной схеме:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{c} + d), \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{c} - d). \tag{7}$$

2.2. Эволюция матрицы плотности

Уравнение эволюции матрицы плотности ρ полей, взаимодействующих с детекторами, в форме Линдблада можно записать следующим образом [8]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\gamma}{2}\sum_{l=1}^{2}([b_l\rho, b_l^\dagger] + [b_l, \rho b_l^\dagger]), \tag{8}$$

где γ — некоторая константа, зависящая от свойств детекторов и определяющая эффективность их взаимодействия с полем. Гамильтониан поля

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_p \sum_{l=1}^{2} b_l^\dagger b_l + \mathcal{V}(t) \tag{9}$$

включает в себя свободные гамильтонианы исследуемого и вспомогательного полей с частотами соответственно ω_a и ω_p и гамильтониан возбуждения вспомогательного поля на частоте ω_0:

$$\mathcal{V}(t) = \hbar(v^* \exp(i\omega_0 t)b + v\exp(-i\omega_0 t)b^\dagger), \tag{10}$$

где v характеризует интенсивность накачки, а связь оператора b с операторами b_1 и b_2 определяется соотношениями (4)–(7). Взаимодействие полей в керровской среде учитывается посредством преобразования операторов (4) и (5).

Переход в другое представление, определяемый оператором

$$U = \exp\left(i\left(\omega_a a^\dagger a + \omega_0 \sum_{l=1}^{2} b_l^\dagger b_l\right)t\right),$$

позволяет избавиться от явной зависимости от времени в правой части уравнения (8), что дает возможность найти общее решение этого уравнения:

$$\rho(t) = S_t \exp\left(\int_0^t J(\tau)d\tau\right)\rho(0). \tag{11}$$

Здесь S_t и $J(t)$ — супероператоры, определяемые действием на произвольный оператор x:

$$S_t x = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_{eff}t\right)x\exp\left(\frac{i}{\hbar}H_{eff}^\dagger t\right), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} J(t) = \sum_{l=1}^{2} J_l(t), \quad J_l(t) = S_t^{-1}J_l S_t, \\ J_l x = \gamma b_l x b_l^\dagger, \end{gathered} \tag{13}$$

а оператор H_{eff} имеет вид

$$H_{eff} = \hbar\sum_{l=1}^{2}(\nu b_l^\dagger b_l + v^*\alpha^{(l)}b_l + v\alpha^{(l)\dagger}b_l^\dagger), \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\nu = \Omega - i\frac{\gamma}{2}, \quad \Omega = \omega - \omega_0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} &= \frac{1}{2}(\exp(-i\chi a^\dagger a) + 1), \\ \alpha^{(2)} &= \frac{1}{2}(\exp(-i\chi a^\dagger a) - 1). \end{aligned} \tag{16}$$

Физический смысл введенных супероператоров станет ясен ниже.

Вспомогательное поле возбуждается внешним источником, поэтому его начальное состояние без ограничения общности может быть выбрано вакуумным, т. е.

$$\rho(0) = |0\rangle_{1\,1}\langle 0| \otimes |0\rangle_{2\,2}\langle 0| \otimes \otimes \sum_{m,n=0}^{\infty}\rho_{mn}(0)\,|m\rangle_{a\,a}\langle n|, \tag{17}$$

где векторы $|0\rangle_l$ ($l = 1, 2$) относятся к состоянию моды b_l, а матрица плотности исследуемого поля записана в базисе фоковских состояний $|m\rangle_a$.

Подставляя начальное условие (17) в уравнение (8), получаем окончательное выражение для матрицы плотности (11):

$$\rho(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\rho_{mn}(0)\exp(K_{m-n}(t))\,|m,t\rangle\,\langle n,t|, \tag{18}$$

где вектор

$$|m,t\rangle = |\beta_t\alpha_m^{(1)}\rangle_1|\beta_t\alpha_m^{(2)}\rangle_2\,|m\rangle_a \tag{19}$$

соответствует фоковскому состоянию исследуемого поля с m фотонами и когерентным состояниям мод вспомогательного поля с амплитудами, определяемыми соотношениями

$$\beta_t = \frac{v}{\nu}(\exp(-i\nu t) - 1), \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m^{(1)} &= \frac{1}{2}(\exp(-i\chi m) + 1), \\ \alpha_m^{(2)} &= \frac{1}{2}(\exp(-i\chi m) - 1). \end{aligned} \tag{21}$$

Функция $K_{m-n}(t)$ в уравнении (18) задается выражением

$$K_l(t) = \frac{1}{2}\left|\frac{v}{\nu}\right|^2(1 - \exp(i\chi l))\,f(t), \tag{22}$$

где

$$f(t) = -\gamma t + \exp(-\gamma t) - 1 + \frac{2\gamma}{|\nu|}\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin(\Omega t + \phi) - \sin\phi\right), \tag{23}$$

а фаза ϕ определяется соотношением $\operatorname{tg}\phi = -\gamma/2\Omega$.

Для получения матрицы плотности, описывающей состояние только исследуемого поля, усредним выражение (18) по состоянию вспомогательного поля:

$$\rho^a(t) = \mathrm{Tr}_p\,\rho(t) = \\ = \sum_{m,n=0}^{\infty} \rho_{mn}(0)\exp(\tilde{K}_{m-n}(t))\,|m\rangle_{a\,a}\langle n|\,, \quad (24)$$

где

$$\tilde{K}_m(t) = \frac{1}{2}\left|\frac{v}{\nu}\right|^2 (1-\exp(i\chi m))\,\tilde{f}(t), \quad (25)$$

$$\tilde{f}(t) = -\gamma t + \\ + 2\left(\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\sin(\Omega t+\tilde{\phi}) - \sin\tilde{\phi}\right); \quad (26)$$

фаза $\tilde{\phi}$ определяется соотношением

$$\mathrm{tg}\,\tilde{\phi} = -\frac{\gamma\Omega}{2\Omega^2-\gamma^2/2}.$$

Непосредственно матрицы плотности (18) и (24) позволяют сказать об эволюции исследуемого поля лишь то, что, во-первых, распределение по числу фотонов при измерении сохраняется:

$$\mathcal{P}_n(t) = \rho^a_{nn}(t) = \rho^a_{nn}(0) = \mathcal{P}^0_n, \quad (27)$$

как и следует ожидать для квантового неразрушающего измерения, и, во-вторых, недиагональные элементы матрицы плотности затухают с характерным временем $\gamma|v/\nu|^2$, так что состояние поля стремится к смеси фоковских состояний с весами, определяемыми начальным распределением исследуемого поля.

Напомним, однако, что рассматриваемые матрицы плотности соответствуют случаю ансамблевого измерения, т. е. отмеченные свойства эволюции справедливы только при усреднении по многим актам измерения. Нас же в первую очередь интересует эволюция исследуемого поля в единичной реализации измерения.

2.3. Стохастические траектории

Для того чтобы описать состояние поля в одной реализации измерения, можно воспользоваться следующим методом. Представим матрицу плотности поля (11) в виде линейной комбинации матриц, соответствующих различным случайным последовательностям отсчетов на детекторах:

$$\rho(t) = S_t\rho(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t d\tau_k \int_0^{\tau_k} d\tau_{k-1}\ldots\int_0^{\tau_2} d\tau_1\,\times \\ \times \sum_{l_1,\ldots,l_k=1}^{2} \rho^{(k)}_{l_1\ldots l_k}(t|\tau_k,\ldots,\tau_1), \quad (28)$$

где

$$\rho^{(k)}_{l_1\ldots l_k}(t|\tau_k,\ldots,\tau_1) = \\ = S_{t-\tau_k}J_{l_k}S_{\tau_k-\tau_{k-1}}\ldots J_{l_1}S_{\tau_1}\rho(0). \quad (29)$$

Матрицы $\rho^{(k)}_{l_1\ldots l_k}(t|\tau_k,\ldots,\tau_1)$ можно интерпретировать как условные матрицы плотности, описывающие состояние поля в момент времени t после регистрации k отсчетов в моменты $\tau_1,\ldots,\tau_k$ на детекторах с номерами соответственно $l_1,\ldots,l_k$ [7]. При этом действие на матрицу плотности оператора J_l в выражении (29) соответствует уничтожению фотона в моде b_l, т. е. наблюдению фотоотсчета на l-м детекторе, а эволюция состояния поля между отсчетами осуществляется посредством действия оператора S_t. При начальном условии (17) матрица плотности (29) перепишется в виде

$$\rho^{(k)}_{l_1\ldots l_k}(t|\tau_1,\ldots,\tau_k) = f(t)\,|\beta_{\tau_1}|^2\ldots|\beta_{\tau_k}|^2\,\times \\ \times \sum_{m,n=0}^{\infty} (\alpha^{(1)}_m\alpha^{(1)*}_n)^{k_1}(\alpha^{(2)}_m\alpha^{(2)*}_n)^{k_2}\,\times \\ \times\,\rho_{mn}(0)\,|m,t\rangle\,\langle n,t|\,, \quad (30)$$

где k_l — число отсчетов на l-м детекторе ($k_1+k_2=k$) и использованы обозначения (19)–(21).

Условная матрица плотности (30) не нормирована, и ее след может быть интерпретирован как плотность вероятности наблюдения соответствующей случайной последовательности фотоотсчетов, что позволяет найти условную плотность вероятности появления k-го отсчета в момент τ_k (на каком-либо из детекторов):

$$c(\tau_k|\tau_{k-1}) \equiv c_{l_1\ldots l_{k-1}}(\tau_k|\tau_{k-1},\ldots,\tau_1) = \\ = \frac{f(\tau_k)}{f(\tau_{k-1})}\,|\beta_{\tau_k}|^2\,, \quad (31)$$

и условную вероятность того, что этот отсчет произойдет именно на l_k-м детекторе:

$$p^{(l_k)}_{k_1k_2} \equiv p^{(l_k)}_{l_1\ldots l_{k-1}}(\tau_k|\tau_{k-1},\ldots,\tau_1) = \frac{N_{k'_1k'_2}}{N_{k_1k_2}}, \quad (32)$$

где $k'_l = k_l + \delta_{l_kl}$ — число отсчетов, произошедших на l-м детекторе после наблюдения k-го отсчета.

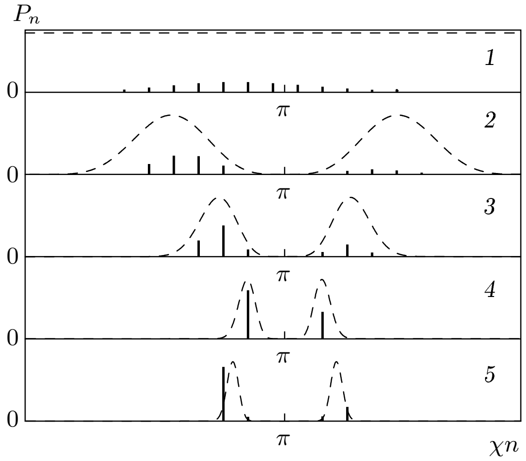

Рис. 2. Пример изменения распределения по числу фотонов $\mathcal{P}_n(k_1, k_2)$ с ростом числа отсчетов k_1, k_2: *1* — $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, *2* — $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, *3* — $k_1 = 3$, $k_2 = 17$, *4* — $k_1 = 5$, $k_2 = 95$, *5* — $k_1 = 19$, $k_2 = 181$. Функция $g_{k_1 k_2}(n)$ с точностью до нормировки показана штриховой линией

2.4. Распределение по числу фотонов

Таким образом, с помощью условных матриц плотности (30) и характеристик случайных траекторий (31) и (32) можно описать эволюцию поля в процессе одного акта измерения. Для того чтобы проанализировать эту эволюцию и ответить на поставленные в начале работы вопросы о времени и точности измерения, рассмотрим распределение поля по числу фотонов. Если нормировать условную матрицу плотности, то это распределение будет определяться ее диагональными элементами:

$$\mathcal{P}_n(k_1, k_2) = \frac{1}{N_{k_1 k_2}} g_{k_1 k_2}(n) \mathcal{P}_n^0, \tag{33}$$

где использованы обозначения

$$\begin{gathered} N_{k_1 k_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) g_{k_1 k_2}(n), \\ g_{k_1 k_2}(n) = \cos^{2k_1} \frac{n\chi}{2} \sin^{2k_2} \frac{n\chi}{2}. \end{gathered} \tag{34}$$

Как видно из этих соотношений, распределение по числу фотонов в отдельной реализации с точностью до нормировки представляет собой начальное распределение, промодулированное функцией $g_{k_1 k_2}(n)$. При этом оно не зависит явно ни от времени, ни от порядка наблюдения отсчетов, а только от их полного числа на каждом из детекторов. Функция $g_{k_1 k_2}(n)$, определяющая изменение распределения, имеет вид последовательности пиков (рис. 2) с максимумами в точках, определяемых уравнением

$$\cos(\chi n_{max}) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \tag{35}$$

ширина которых на заданном уровне ϵ

$$\Delta n = \frac{1}{\chi} \arccos \sqrt[k]{\epsilon} \tag{36}$$

уменьшается с ростом числа отсчетов k. Наложение этой кривой на начальное распределение приводит к сильному подавлению областей распределения вне пиков и выделению в нем тех вероятностей $\mathcal{P}_n$, для которых n лежит вблизи максимума пика. При этом, так как пики сужаются с каждым отсчетом, число фоковских состояний с существенной вероятностью $\mathcal{P}_n$ постепенно уменьшается. Таким образом, в промежуточные моменты измерения в состояние исследуемого поля вносят преобладающий вклад группы фоковских состояний с числами фотонов, близкими максимумам пиков. К чистому фоковскому состоянию поле стремится лишь асимптотически, при стремлении ширины пика к нулю, т. е. времени — к бесконечности. Вероятность каждого окончательного результата при этом, как следует из формулы (18), задается соответствующим диагональным элементом исходной матрицы плотности:

$$\mathcal{P}_n = \rho_{nn}(t \to \infty) = \rho_{nn}(0). \tag{37}$$

В любой конечный момент времени состояние поля, строго говоря, отличается от фоковского, а значение числа фотонов, получаемое из разностного тока в гомодинной схеме в работе [6], определяет лишь положение максимумов пиков[1]. Поэтому в реальном измерении числа фотонов может идти речь о конечном фоковском состоянии только с некоторой точностью.

2.5. Точность измерения

Состояние поля сможет считаться фоковским с заданной точностью ϵ, если в области пиков будет находится лишь одно фоковское состояние с ненулевой начальной вероятностью $\mathcal{P}_n^0$, для чего ширина пика должна быть достаточно малой, и макси-

[1] Действительно, число зарегистрированных за некоторое время t отсчетов пропорционально среднему за некоторое время фототоку в детекторе $\langle I \rangle = kt$, поэтому заменяя в выражении (35) числа отсчетов на соответствующие токи, получим формулу, аналогичную выражению для числа фотонов в работе [6].

мум его должен находиться вблизи соответствующего числа фотонов n. Оценим время, в течение которого необходимо проводить измерение тока, чтобы состояние можно было считать фоковским с точностью ϵ. Для того чтобы вычислить число фоковских состояний с ненулевыми начальными вероятностями, которые находятся в данный момент в области пиков, воспользуемся следующим приемом. Разобьем ось чисел фотонов на равные участки точками $n = \pi r/\chi$ и наложим участки друг на друга таким образом, чтобы совместить все пики: $n \to n \bmod(\pi/\chi)$, если n лежит на нечетном по счету участке, и $n \to \pi\chi - n \bmod(\pi/\chi)$, если на четном. Здесь r — неотрицательные целые числа, а mod означает операцию деления по модулю. При таком наложении точки, соответствующие различным фоковским состояниям, будут распределены с некоторой частотой по отрезку $n \in [0, \chi/\pi)$. Если обозначить δn минимальное расстояние между такими точками, то условие того, что в распределение вносит вклад лишь одно фоковское состояние, запишется в виде

$$\Delta n \le \delta n. \tag{38}$$

Отсюда, используя выражение (36), получим, что

$$k \ge \frac{\ln \epsilon}{\ln \cos(\chi \delta n)}. \tag{39}$$

Выражение, стоящее в правой части, имеет смысл минимального числа отсчетов, после которого состояние поля с заданной степенью точности ϵ можно считать фоковским. Если умножить это число на среднее время между отсчетами

$$\bar\tau \approx \frac{1}{\gamma'}, \quad \gamma' = \gamma \left|\frac{v}{\nu}\right|^2, \tag{40}$$

то получим среднее время измерения, необходимое для получения фоковского состояния:

$$\tau = \frac{\ln \epsilon}{\ln \cos(\chi \delta n)} \bar\tau. \tag{41}$$

Если исходное распределение по числу фотонов достаточно узкое, так что на его ширину приходится лишь один пик функции $g_{k_1 k_2}(n)$, то расстояние между фоковскими состояниями δn равно 1; в случае более широкого распределения (два пика на его ширину) можно показать, что

$$\delta n \approx \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2\pi^2}{\chi}.$$

Чтобы дать представление о необходимом времени измерения, скажем, что при довольно реалистичном значении нелинейности $\chi \sim 10^{-3}$ для получения фоковского состояния с точностью $\epsilon \approx 1\,\%$ необходимо зарегистрировать на детекторах порядка 10^7 фотоотсчетов.

2.6. Фоковский кубит

На большое время перехода состояния в фоковское можно взглянуть и с другой стороны. Согласно (36), скорость уменьшения Δn уменьшается с ростом числа отсчетов, поэтому большую часть времени до перехода состояния к фоковскому исследуемое поле должно существовать в состоянии, состоящем из двух фоковских состояний (так называемый фоковский кубит). Время жизни такой пары фоковских состояний $\Delta\tau$ может быть найдено аналогично (41), с тем лишь отличием, что условие существенного вклада в распределение двух фоковских состояний будет иметь вид

$$\delta n < \Delta n < 3\delta n. \tag{42}$$

При малых значениях нелинейности χ такая оценка времени существования фоковского кубита имеет вид

$$\Delta\tau = \frac{512 \ln(1/\epsilon)}{225 \chi^2 \delta n^2} \bar\tau. \tag{43}$$

Большое время жизни пары $\Delta\tau \gg \bar\tau$ позволяет рассматривать используемую схему квантового неразрушающего измерения в качестве способа генерации фоковских кубитов. Стоит обратить отдельное внимание на случай, когда положение максимумов пиков соответствует точно различным состояниям $|m\rangle_a$ и $|n\rangle_a$. Для этого должно выполняться одно из соотношений:

$$\chi(m \pm n) = 2\pi r, \tag{44}$$

где r — целое число. При таком условии диагональные элементы, соответствующие этим состояниям, одинаково изменяются при наблюдении отсчетов, поэтому пара $|m\rangle_a$ и $|n\rangle_a$ может существовать бесконечно долго, никогда не редуцируясь к фоковскому состоянию.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Полученные в предыдущей главе характеристики случайных траекторий позволяют провести численное моделирование процесса фотодетектирования, дающее наглядное представление об эволюции поля в процессе измерений. Несколько примеров такого моделирования приведены в этом разделе.

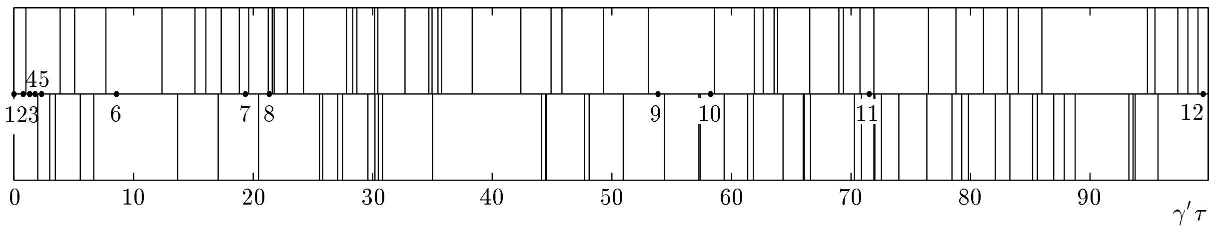

Рис. 3. Случайная последовательность отсчетов на детекторах в одной реализации измерения

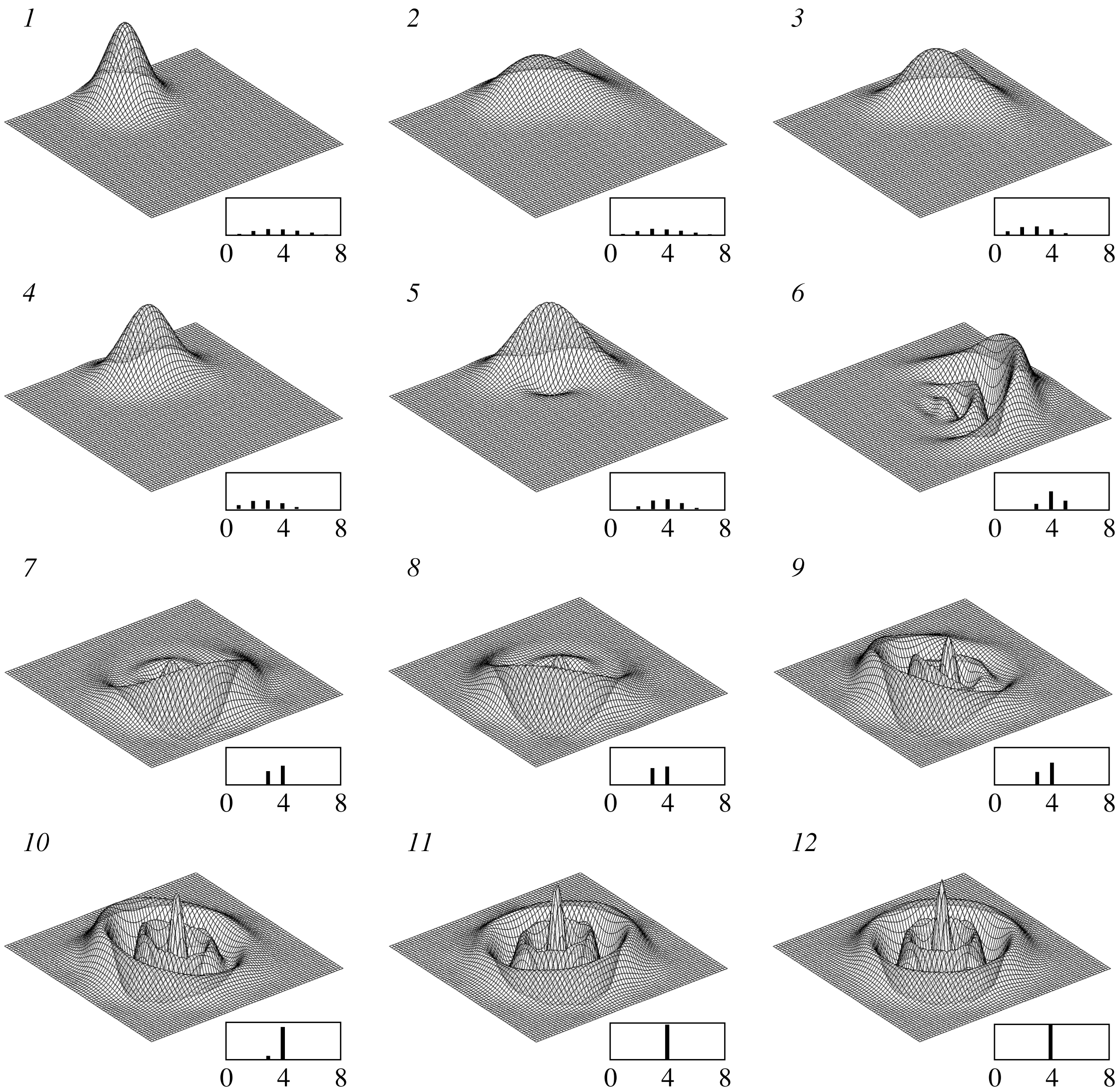

Рис. 4. Функция Вигнера и распределение по числу фотонов (вставки) исследуемого поля в последовательные моменты одной из случайных траекторий (см. рис. 6). Начальное когерентное состояние исследуемого поля эволюционирует к состоянию, состоящему из пары фоковских состояний, перепутанных с вспомогательным полем. По истечении времени, гораздо большего среднего времени между отсчетами на детекторе, $1/\gamma'$, это состояние редуцируется к чистому фоковскому

3.1. Когерентное начальное состояние

В качестве первого примера рассмотрим случай, в котором исследуемое поле изначально находится в когерентном состоянии с амплитудой α:

$$|\psi(0)\rangle_a = |\alpha\rangle_a. \tag{45}$$

Для того чтобы наглядно представить изменение состояния поля a при детектировании, рассмотрим эволюцию его функции Вигнера

$$W(z) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\lambda\langle\exp(\lambda(a^\dagger - z^*) - \lambda^*(a-z))\rangle. \tag{46}$$

Используя выражение (30) для условной матрицы плотности, можно переписать формулу (46) в виде

$$W(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} W_{nm}(z)\rho_{mn}\times \times\exp\left\{-\frac{1}{2}|\beta_t|^2\left(1-\exp\{i(m-n)\chi\}\right)\right\}. \tag{47}$$

Здесь

$$\rho_{mn} = = \frac{1}{N_{k_1k_2}}(\alpha_m^{(1)}\alpha_n^{(1)*})^{k_1}(\alpha_m^{(2)}\alpha_n^{(2)*})^{k_2}\rho_{mn}(0) \tag{48}$$

есть матричные элементы нормированной матрицы плотности, а $W_{nm}(z)$ — матричные элементы оператора

$$\hat{W}(z) = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\lambda\exp\{\lambda(a^\dagger - z^*) - \lambda^*(a-z)\}, \tag{49}$$

которые, используя обобщенные полиномы Лагерра $\mathcal{L}_n^{(k)}$, можно представить в виде [9]

$$W_{nm}(z) = \frac{2}{\pi}(-1)^n\left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2}\times \times(2z^*)^{m-n}\exp(-2|z|^2)\mathcal{L}_n^{(m-n)}(4|z|^2). \tag{50}$$

Результат моделирования (рис. 3, 4) показывает, что в процессе измерения распределение поля по числу фотонов сужается и его состояние постепенно приближается к одному из фоковских состояний (рис. 4 (*12*)) с соответствующей функцией Вигнера

$$W_n(z) = W_{nn}(z) = = \frac{2}{\pi}(-1)^n\exp(-2|z|^2)\mathcal{L}_n^{(0)}(4|z|^2), \tag{51}$$

которая аксиально симметрична на комплексной плоскости и у которой суммарное число максимумов и минимумов равно числу фотонов в конечном

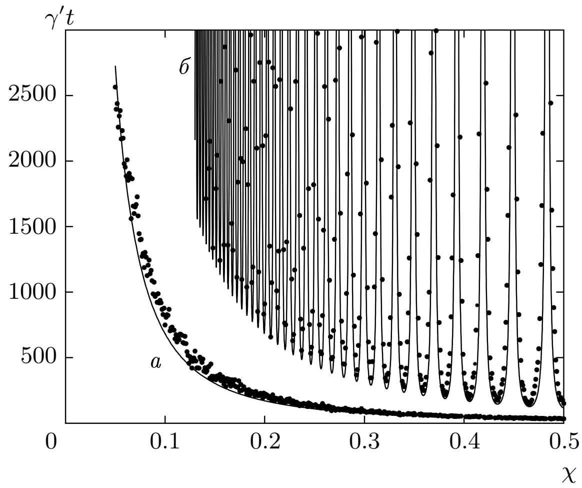

Рис. 5. Среднее время жизни пары фоковских состояний в зависимости от нелинейности керровской среды (численное моделирование): a — случай узкого распределения (на ширину распределения приходится один пик $g_{k_1k_2}$), $б$ — случай широкого распределения (два пика $g_{k_1k_2}$). Оценки времени (43) показаны сплошными линиями

состоянии. Среднее время перехода когерентного состояния в фоковское, полученное при численном моделировании, хорошо описывается формулой (41). Асимптоты в случае широкого распределения соответствуют случаю, описываемому формулой (44).

При этом действительно бо́льшую часть времени эволюции исследуемое поле находится в состоянии фоковского кубита (рис. 4 (*7–9*)), и среднее время жизни такого состояния согласуется с оценкой (43) (рис. 5).

3.2. Случайные траектории фоковского кубита

Из-за большого времени жизни пары фоковских состояний представляет интерес отдельное исследование эволюции такой пары. Выберем поэтому начальное состояние исследуемого поля в виде суперпозиции двух фоковских состояний:

$$|\psi(0)\rangle_a = \cos\frac{\theta_0}{2}\,|m_1\rangle_a + \exp(i\phi_0)\sin\frac{\theta_0}{2}\,|m_2\rangle_a. \tag{52}$$

Как следует из выражения (30), если к моменту времени t на первом и втором детекторах произошло соответственно k_1 и k_2 отсчетов, вектор состояния

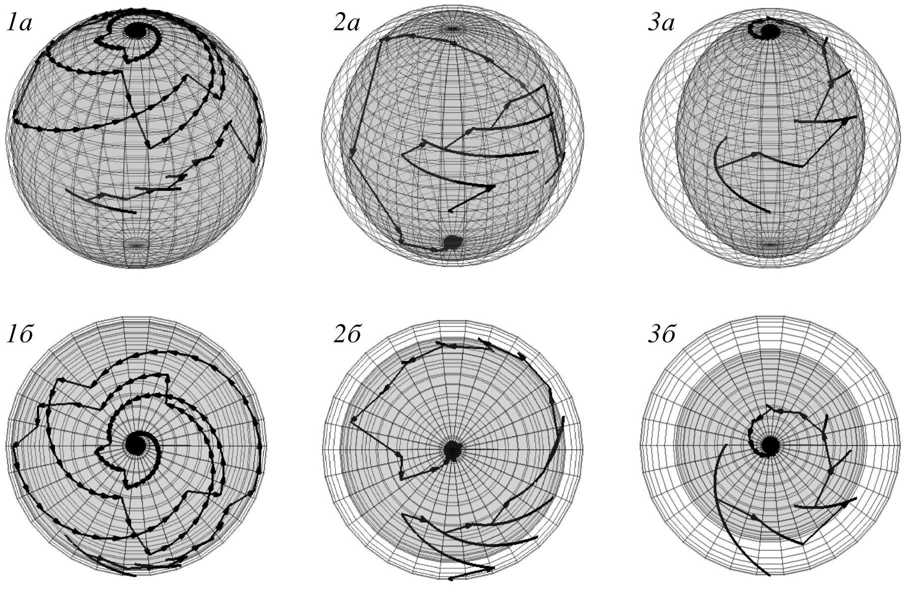

Рис. 6. Примеры случайных траекторий пары фоковских состояний на сфере Блоха при различных значениях δ (a — вид сбоку, $б$ — вид сверху): $\delta = 0.2$ (*1*), 0.4 (*2*), 0.6 (*3*). Изображающая точка начинает движение на экваторе сферы и с течением времени приближается к одному из полюсов, которые соответствуют фоковским состояниям поля. Скачки изображающей точки в направлении верхнего и нижнего полюсов (стрелки) обусловлены наблюдением отсчетов соответственно на первом и втором детекторах; между отсчетами точка совершает затухающие колебания в горизонтальной плоскости

поля имеет вид

$$|\psi_{k_1k_2}(t)\rangle = \cos\frac{\theta_{k_1k_2}}{2}\,|m_1,t\rangle + \exp(i\phi_{k_1k_2})\sin\frac{\theta_{k_1k_2}}{2}\,|m_2,t\rangle, \qquad (53)$$

где

$$\phi_{k_1k_2} = \phi_0 + \frac{(m_2-m_1)(k_1+k_2)\chi}{2}, \qquad (54)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{k_1k_2}}{2} = \left(\frac{\cos\dfrac{m_2\chi}{2}}{\cos\dfrac{m_1\chi}{2}}\right)^{k_1}\left(\frac{\sin\dfrac{m_2\chi}{2}}{\sin\dfrac{m_1\chi}{2}}\right)^{k_2}\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}. \qquad (55)$$

Состояние исследуемого поля в этот момент будет описываться матрицей плотности $\rho^a = \mathrm{Tr}_p\,\rho$, которую в базисе $\{|m_1\rangle_a, |m_2\rangle_a\}$ можно записать в виде [10]

$$\rho^a = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\cdot\sigma), \qquad (56)$$

где $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — матрицы Паули, $\mathbf{P}$ — трехмерный вектор длины $|\mathbf{P}| \le 1$. Параметризованное таким образом состояние можно представить точкой на шаре единичного радиуса, положение которой определяется вектором $\mathbf{P}$ (сфера Блоха). Точки на поверхности этого шара соответствуют чистым состояниям поля, причем векторам $|m_1\rangle_a$ и $|m_2\rangle_a$ отвечают соответственно верхний и нижний полюсы сферы. Компоненты вектора $\mathbf{P}$ для состояния, определяемого выражением (53), имеют вид

$$\begin{aligned} P_1 &= \sin\theta_{k_1k_2}\cos\left(\phi_{k_1k_2} - \frac{1}{2}|\beta_t|^2\sin\delta\right) \times \exp\left(-|\beta_t|\sin^2\frac{\delta}{2}\right), \\ P_2 &= \sin\theta_{k_1k_2}\sin\left(\phi_{k_1k_2} - \frac{1}{2}|\beta_t|^2\sin\delta\right) \times \exp\left(-|\beta_t|\sin^2\frac{\delta}{2}\right), \\ P_3 &= \cos\theta_{k_1k_2}, \end{aligned} \qquad (57)$$

где $\delta = (m_1 - m_2)\chi/2$, а β_t определяется выражением (20). Как следует из соотношений (57), эволюция изображающей точки в сфере Блоха между отсчетами на детекторах представляет собой затухающее колебание с характерным временем затухания $1/\gamma$, равновесное положение которого находится на эллипсоиде вращения

$$\frac{P_1^2 + P_2^2}{r^2} + P_3^2 = 1 \qquad (58)$$

с длиной малой полуоси

$$r = \exp\left(-\left|\frac{v}{\nu}\right|^2 \sin^2\frac{\delta}{2}\right). \qquad (59)$$

Поэтому при времени $t \gg 1/\gamma$ точка с большой степенью точности находится на эллипсоиде (58), и перемещение ее происходит только в моменты наблюдения отсчетов.

Учитывая, что вероятность наблюдения отсчета на первом детекторе в соответствии с (32) равна

$$P_1 = \cos^2\frac{m_1\chi}{2}\cos^2\frac{\theta_{k_1k_2}}{2} + \\ + \cos^2\frac{m_2\chi}{2}\sin^2\frac{\theta_{k_1k_2}}{2}, \qquad (60)$$

а плотность вероятности того, что он произойдет в момент времени t, задается выражением (31), можно генерировать случайные последовательности отсчетов. Используя это, мы провели численное моделирование случайных траекторий поля, несколько примеров которых представлено на рис. 6.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено исследование временной эволюции электромагнитного поля в процессе измерения числа фотонов в нем. При рассмотрении использовалась схема квантового неразрушающего измерения, основанная на измерении фазового сдвига вспомогательного поля после его взаимодействия с исследуемым в керровской среде.

Было показано, что в течение длительного времени измерения в состояние поля вносят сравнимый вклад несколько фоковских состояний с определенными числами фотонов, пока вес одного из них не станет преобладающим. При этом остальные компоненты распределения по числу фотонов не затухают до нуля, и состояние поля приближается к чисто фоковскому лишь асимптотически при стремлении времени к бесконечности. Особенностью эволюции поля при измерении является тот факт, что наибольшую часть времени до перехода к фоковскому состоянию поле существует в состоянии фоковского кубита, т. е. суперпозиции двух фоковских состояний, что позволяет рассматривать используемую схему квантового неразрушающего измерения как метод генерации таких состояний.

В работе получено также аналитическое выражение для среднего времени измерения, необходимого для перехода начального состояния в фоковское с заданной степенью точности, а также время существования состояния фоковского кубита в процессе измерения.

Используемый в работе метод измерения числа фотонов был неоднократно реализован экспериментально [11–13]. Однако для проверки результатов настоящей работы необходимо разрешить отдельные отсчеты, что требует использования детекторов одиночных фотонов. В настоящее время существует ряд таких детекторов [14], которые позволяют провести описанные в работе измерения.

Авторы с благодарностью отмечают частичную поддержку данных исследований Белорусским РФФИ и фондом INTAS, а также выражают признательность Д. Б. Хорошко за плодотворные дискуссии в ходе написания работы и Ж.-Ф. Роху (J.-F. Roch) за указание на работу [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Бом, *Квантовая теория*, Наука, Москва (1965).
2. В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов, УФН **114**, 41 (1974).
3. В. Б. Брагинский, Ю. И. Воронцов, Ф. Я. Халили, ЖЭТФ **73**, 1340 (1977).
4. W. G. Unruh, Phys. Rev. D **19**, 2888 (1979).
5. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999).
6. N. Imoto, H. A. Haus, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. A **32**, 2287 (1985).
7. С. Я. Килин, *Квантовые поля и их детектирование*, Наука и техника, Минск (1990).
8. H. D. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
9. V. Bužek and P. L. Knight, in *Progress in Optics*, ed. by E. Wolf, North-Holland, Amsterdam (1995), Vol. 34, p. 1.
10. J. Preskill, Quantum Information and Computation, California Institute of Technology (1998), http://theory.caltech.edu/~preskill/ph229.
11. H. A. Bachor, M. D. Levenson, D. F. Walls, S. H. Perlmutter, and R. M. Shelby, Phys. Rev. A **38**, 180 (1988).
12. S. R. Friberg, S. Machida, and Y. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **69**, 3165 (1992).
13. J. F. Roch, K. Vigneron, P. Grelu et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 634 (1997).
14. H. Dautet, P. Deschamps, B. Dion et al., Appl. Opt. **32**, 3894 (1993).