

АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В БАЛЛИСТИЧЕСКОМ МИКРОСУЖЕНИИ

*И. А. Кокурин, В. А. Маргулис**

*Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева
430000, Саранск, Россия*

Поступила в редакцию 30 мая 2006 г.

Теоретически исследовано поведение акустоэлектрического тока через трехмерное квантовое микросужение, помещенное в продольное однородное магнитное поле, при баллистическом транспортном режиме. Детально изучены периоды осцилляций акустоэлектрического тока как функции химического потенциала и индукции магнитного поля. Учтено влияние температуры. Показано, что поведение акустоэлектрического тока как функции химического потенциала может носить экспериментально наблюдавшийся ступенчатый характер. Установлены пределы существования ступенчатой структуры.

PACS: 72.50.+b, 73.23.Ad

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы взаимодействие поверхностных акустических волн (ПАВ) с электронами в мезоскопических системах привлекает к себе большое внимание. Наряду с изучением затухания ПАВ и изменения скорости ее распространения [1–5], одним из наиболее перспективных направлений в этой области является исследование акустоэлектрического (АЭ) эффекта в полупроводниковых гетероструктурах. Это связано в первую очередь с развитием экспериментальной техники, позволившей работать с высокими звуковыми частотами и измерять сверхмалые токи порядка долей наноампера.

Экспериментальное исследование АЭ-эффекта в квантовых каналах в гетероструктурах GaAs/AlGaAs было проведено в работах [6–8], в первой из которых показано, что АЭ-ток имеет осцилляционную зависимость от напряжения на затворе, при этом положение осцилляционных максимумов соответствует порогам ступеней квантования контактанса. В более поздних работах [7, 8] подтвержден результат [6], а для больших значений интенсивности звука показано, что АЭ-ток может иметь ступенчатую зависимость от напряжения на затворе, аналогичную квантованию контактанса. Были проведены исследования ступенчатой

структуры АЭ-тока в аналогичных структурах, помещенных в слабое однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости двумерного электронного газа [9, 10]. При этом было установлено, что зависимость АЭ-тока от магнитного поля является осцилляционной. Ступенчатое поведение АЭ-тока в зависимости от напряжения на затворе наблюдалось при исследовании на встречных пучках ПАВ [11]. Исследовалось и поведение АЭ-тока одновременно с присутствием обычного туннельного тока, создаваемого разностью потенциалов [12].

Существует ряд теоретических работ по исследованию АЭ-эффекта в проводящих каналах, которые по методике расчета можно разбить на две группы. В первой [6, 13–18] для учета влияния звуковой волны на движение электронов использовалось кинетическое уравнение Больцмана. Возникновение АЭ-тока в этом случае связывалось непосредственно с передачей импульса звуковой волны электронам. Звуковая волна рассматривалась как классическая сила [6, 13, 17] либо как поток монохроматических ультразвуковых фононов [14–16, 18].

В случае, когда звуковая волна представлена как поток фононов, было показано, что АЭ-ток в однородном баллистическом канале исчезает при частотах звука ниже некоторой пороговой [14], что не согласуется с экспериментом [6]. При использовании упомянутой выше методики проведен расчет АЭ-тока с учетом примесного рассеяния [15], а в ра-

*E-mail: theorphysics@mrsu.ru

боте [16] учитывалось рассеяние в области контакта проводящего канала с электронными резервуарами. Показано, что учет любого из упомянутых выше процессов снимает указанное ограничение на частоту звука. Это ограничение также может быть снято, если существует возможность индуцированных звуком электронных переходов между распространяющимися и отраженными состояниями.

При использовании указанного подхода в большинстве работ изучались гигантские квантовые осцилляции АЭ-тока. Установлено, что применение этого подхода может также объяснить существование ступенчатой структуры АЭ-тока. Критерием существования ступенчатого АЭ-тока в этом случае является квазидвумерность электронного газа в канале [18].

Во второй группе теоретических работ был использован квантовый подход [19–21], и задача фактически состояла в нахождении коэффициентов прохождения электрона через систему с учетом действия звуковой волны. Отметим, что применение квантового подхода приводит к необходимости пользоваться при расчетах численными методами, а оценки возможны лишь в некоторых предельных случаях.

Заметим, что результаты работ [19–21] находятся в серьезном противоречии с результатами, полученными при использовании кинетического уравнения. Квантовое описание представляет собой более общее рассмотрение и приводит к результатам, качественно отличным от тех, которые были получены при использовании классического подхода. В частности, показано, что рассеяние электронов внутри системы играет ключевую роль при возникновении АЭ-эффекта [20]. Отметим, что лишь квантовый подход [20] в состоянии объяснить резонансную зависимость АЭ-тока от частоты ПАВ [8]. К сожалению, результаты экспериментов пока не позволяют сделать определенного заключения о механизме происхождения АЭ-тока в мезоскопических проводниках.

Отметим также работы [22, 23], в которых с помощью уравнения Больцмана был рассчитан АЭ-ток в полупроводниковой сверхрешетке. Флуктуации АЭ-тока в баллистическом канале в случае, когда ток имеет ступенчатую структуру, были изучены в работе [24]. Влияние магнитного поля на ступени и осцилляции АЭ-тока в двумерных каналах рассмотрено в работе [25]. Электрон-электронное взаимодействие при исследовании АЭ-эффекта учитывалось в работе [26]. Рассматривалось влияние ПАВ на проводимость квантовых каналов [27], в частности, изу-

чены гигантские осцилляции акустокондуктанса.

Целью настоящей работы является исследование постоянного электрического тока, наведенного звуковой волной в трехмерном микросужении, в случае баллистического транспортного режима. Мы рассматриваем микросужение, соединяющее два объемных электронных резервуара с одинаковыми значениями температур. Электрохимические потенциалы электронов в резервуарах также полагаем равными. Тем самым исключаются из рассмотрения все транспортные эффекты за исключением акустоэлектрического.

Для моделирования потенциала конфайнмента микросужения используется следующий квадратичный потенциал [28–30]:

$$V(x, y, z) = V_0 + \frac{m^*}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 - \omega_z^2 z^2), \quad (1)$$

где V_0 — потенциал в седловой точке сужения, m^* — эффективная масса электрона, ω_j — характеристические частоты параболического потенциала ($j = x, y$), определяющие полуоси эллиптического сечения сужения $l_j = \sqrt{\hbar/4m^*\omega_j}$. Частота $\omega_z = \hbar/2m^*l_z^2$ определяет эффективную длину сужения l_z .

2. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ГАМИЛЬТониАНА

Рассматривается микросужение, помещенное в однородное магнитное поле $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, направление которого совпадает с осью микросужения. Гамильтониан одноэлектронных бесспиновых состояний с потенциалом (1) имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{2m^*} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V_0 + \frac{m^*}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 - \omega_z^2 z^2), \quad (2)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля \mathbf{B} . Калибровку векторного потенциала удобно выбрать в симметричном виде: $\mathbf{A} = (-yB/2, xB/2, 0)$.

В фазовом пространстве (p_x, p_y, p_z, x, y, z) гамильтониан (2) с точностью до константы V_0 может быть представлен в виде квадратичной формы, задаваемой симметричной матрицей 6×6 . Из линейной алгебры хорошо известно, что квадратичная форма может быть приведена к диагональному виду. Это означает, что в некоторых фазовых коор-

динатах $(P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3)$ гамильтониан будет иметь квадратичный вид:

$$H_0(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{2m^*}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2) + V_0 + \frac{m^*}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2 - \omega_3^2 Q_3^2), \quad (3)$$

где ω_i — гибридные частоты.

Учитывая, что продольное магнитное поле не влияет на движение электрона вдоль оси микросужения и соответствующие переменные в уравнении Шредингера с гамильтонианом (2) легко разделяются, получим, что при переходе к квадратичному гамильтониану (3) фазовые координаты, соответствующие движению вдоль оси сужения, сохраняются, $P_3 = p_z$, $Q_3 = z$, а также $\omega_3 = \omega_z$.

Посредством линейного канонического преобразования фазового пространства [31–33], используя только элементарные методы линейной алгебры, можно найти матрицу $\Lambda = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, 4$, связывающую старые (p_x, p_y, x, y) и новые (P_1, P_2, Q_1, Q_2) фазовые координаты:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Явный вид элементов матрицы Λ приведен в Приложении А.

Гибридные частоты $\omega_{1,2}$ определяются выражением [34]

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\omega_c^2 + (\omega_x + \omega_y)^2} \pm \sqrt{\omega_c^2 + (\omega_x - \omega_y)^2} \right). \quad (5)$$

Здесь $\omega_c = |e|B/m^*c$ — циклотронная частота.

Спектр гамильтониана (3) имеет вид [30]

$$E_{mn\lambda} = V_0 + \hbar\omega_1 \left(m + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_3\lambda, \quad (6)$$

где $m, n = 0, 1, 2, \dots$; λ — параметр непрерывного спектра, принимающий действительные значения.

Соответствующие уровням энергии (6) волновые функции имеют вид

$$\Psi_{mn\lambda}^\pm = \Phi_m(Q_1)\Phi_n(Q_2) \frac{t(\lambda)}{\sqrt{2\pi\hbar\omega_z l_z}} \mathbf{E}(-\lambda, \pm Q_3/l_z), \quad (7)$$

где $\Phi_j(x)$ — собственные функции гармонического осциллятора, $t(\lambda) = (1 + \exp(-2\pi\lambda))^{-1/2}$ — амплиту-

да прохождения электрона через потенциал микросужения, $\mathbf{E}(a, x)$ — модифицированная функция параболического цилиндра (комплексная функция Вебера) [35].

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ВИДЕ РЯДА ФУРЬЕ

Для расчета АЭ-тока в трехмерном микросужении используется формализм нестационарных состояний рассеяния, развитый в работе [36] для двумерного электронного газа в квантовых точечных контактах и использованный для исследования АЭ-тока в работах [20, 21]. В этом случае звуковая волна с частотой $\omega_{\mathbf{q}}$ и волновым вектором \mathbf{q} описывается зависящим от времени и координат потенциалом

$$\delta U(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_{\mathbf{q}} t). \quad (8)$$

Направление распространения звуковой волны считаем совпадающим с осью микросужения, $\mathbf{q} = (0, 0, q)$. Слабая экранировка потенциала звуковой волны электронами внутри микросужения [6, 13] не учитывается.

Используя упомянутый выше подход, можно представить АЭ-ток через микросужение при температуре $T = 0$ в следующем виде:

$$J = e\omega_{\mathbf{q}} |A|^2 \sum_{\alpha\beta'\beta''} \sum_{mn} \sum_{m'n'} S_{\beta\beta'}(\lambda_{mn}) S_{\beta\beta''}^*(\lambda_{mn}) \times \\ \times \left[M_{\beta'mn, \alpha m'n'}^q \left(M_{\beta''mn, \alpha m'n'}^q \right)^* - M_{\beta'mn, \alpha m'n'}^{-q} \left(M_{\beta''mn, \alpha m'n'}^{-q} \right)^* \right], \quad (9)$$

где $\alpha, \beta, \beta' = 1, 2$ нумеруют электронные резервуары, а $S_{\alpha\beta}(\lambda_{mn})$ — элементы матрицы рассеяния одномерной задачи, описывающей движение вдоль оси сужения [21]:

$$\begin{aligned} S_{11}(\lambda_{mn}) &= S_{22}(\lambda_{mn}) = -r(\lambda_{mn}), \\ S_{12}(\lambda_{mn}) &= S_{21}(\lambda_{mn}) = -it(\lambda_{mn}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $r(\lambda) = e^{-\pi\lambda} t(\lambda)$ — амплитуда отражения электрона потенциалом микросужения,

$$\lambda_{mn} = \frac{\mu^* - E_{mn}}{\hbar\omega_z}, \quad \mu^* = \mu - V_0,$$

μ — химический потенциал электронного газа в резервуарах, E_{mn} — дискретная составляющая электронного спектра (6).

Матричные элементы $M_{\beta'mn,\alpha m'n'}^q$ оператора $\exp(iqz)$ удобно вычислять в новых координатах:

$$M_{\beta'm'n',\alpha mn}^q(E) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3Q \left(\Psi_{m'n'}^\beta(\mathbf{Q}) \right)^* \times \exp(iqQ_3) \Psi_{mn}^\alpha(\mathbf{Q}), \quad (11)$$

где введено обозначение $\Psi_{mn}^{1,2} = \Psi_{mn\lambda}^\pm$. При подстановке выражения (11) в (9) необходимо провести замену $E \rightarrow \mu$.

Подставим формулы (10) и (11) в (9) и учтем ортогональность волновых функций, соответствующих движению электрона в плоскости Q_1OQ_2 . После этого АЭ-ток при нулевой температуре ($T = 0$) можно представить в виде суммы парциальных вкладов от каждой электронной моды:

$$\frac{J(\mu, T = 0)}{J_0} = \sum_{mn} j(\lambda_{mn}, ql_z), \quad (12)$$

где

$$J_0 = \frac{2e\omega_{\mathbf{q}}|A|^2}{(\pi\hbar\omega_z)^2}.$$

Парциальные токи определяются выражением [21]

$$j(\lambda, p) = t^3(\lambda)G(\lambda, p)H(\lambda, p). \quad (13)$$

Здесь $G(\lambda, p)$ и $H(\lambda, p)$ являются несобственными интегралами, содержащими функции параболического цилиндра, и в общем случае могут быть вычислены только численными методами (явный вид этих интегралов приведен в работе [21]).

Типичные значения частот ультразвука, используемых в эксперименте по наблюдению АЭ-эффекта, составляют порядка 1–3 ГГц [6–8], что для полупроводниковых гетероструктур GaAs/AlGaAs соответствует длинам волн около 1 мкм. В наших обозначениях это соответствует длинноволновому пределу $ql_z \ll 1$. В этом случае интегралы $G(\lambda, p)$ и $H(\lambda, p)$ могут быть взяты явно [20], и для АЭ-тока получим

$$\frac{J(\mu, 0)}{J_0} = 2\pi \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\zeta(\mu^* - E_{mn})]}{(1 + \exp[-2\zeta(\mu^* - E_{mn})])^{3/2}}, \quad (14)$$

где введено обозначение $\zeta = \pi/\hbar\omega_z$.

Чтобы провести анализ поведения АЭ-тока, удобно представить правую часть (14) в виде ряда Фурье. Как показано в Приложении В, имеет место формула

$$\frac{e^{x/2}}{(1 + e^x)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp e^{-px} \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1-p+k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1/2+p+k)!} \right], \quad (15)$$

где $0 < \gamma < 1$,

$$(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a) = a(a+1)\dots(a+k-1),$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Преобразуем (14), используя формулу (15) и соотношение

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \exp(-2\zeta p E_{mn}) = \left(4 \operatorname{sh} \frac{\pi p \omega_1}{\omega_z} \operatorname{sh} \frac{\pi p \omega_2}{\omega_z} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Тогда для АЭ-тока получим

$$\frac{J(\mu, 0)}{J_0} = \frac{1}{4i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{d\xi \exp(2\pi\xi\mu^*/\hbar\omega_z)}{\operatorname{sh}(\pi\xi\omega_1/\omega_z) \operatorname{sh}(\pi\xi\omega_2/\omega_z)} \times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1-\xi+k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1/2+\xi+k)!} \right]. \quad (17)$$

Для вычисления интеграла (17) замкнем контур в левой полуплоскости, как показано на рис. 1. При наличии магнитного поля гибридные частоты $\omega_{1,2}$ несоизмеримы ($m\omega_1 \neq n\omega_2$ для любых целых m и n) с вероятностью, равной единице, поэтому полюсы на мнимой оси простые. Вычислим и просуммируем вычеты в полюсах внутри контура. После этого точное выражение для АЭ-тока в пределе нулевой температуры можно представить в виде суммы монотонных и осциллирующих относительно химического потенциала слагаемых:

$$J(\mu, 0) = J_1^{mon} + J_2^{mon} + J^{sin} + J^{cos}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{J_{1,2}^{mon}}{J_0} &= \frac{\mu^* \omega_z}{\hbar\omega_1\omega_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(3/4 \pm 1/4 + k)!} + \\ &+ \frac{\omega_z^2}{2\pi\omega_1\omega_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^{k+1/2\mp 1/2}}{(3/4 \pm 1/4 + k)^2 k!} + \\ &+ \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k \exp[-2\pi(k+1/2)\mu^*/\hbar\omega_z]}{\operatorname{sh}[\pi(k+1/2)\omega_1/\omega_z] \operatorname{sh}[\pi(k+1/2)\omega_2/\omega_z]}, \end{aligned} \quad (19)$$

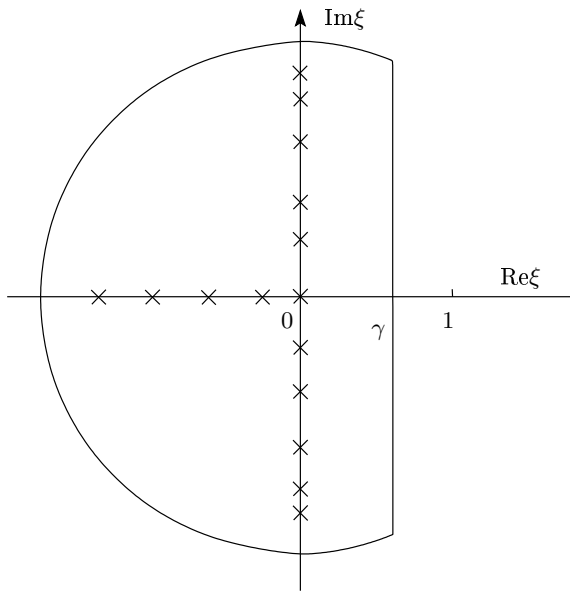


Рис. 1. Контур интегрирования для интеграла (17). Подынтегральная функция имеет простые полюсы внутри контура, находящиеся на мнимой оси в точках $\xi = i n \omega_z / \omega_j$, $j = 1, 2$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; на действительной оси $\xi = -1/2 - k$, $k = 0, 1, 2, \dots$; полюс второго порядка в точке $\xi = 0$

а осциллирующие слагаемые представлены в виде рядов Фурье:

$$\frac{J^{sin}}{J_0} = \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_z}{\omega_i} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{ni}^+ + C_{ni}^-) \sin \frac{2\pi n \mu^*}{\hbar \omega_i}, \quad (20)$$

$$\frac{J^{cos}}{J_0} = \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_z^2}{\omega_i^2} \sum_{n=1}^{\infty} (D_{ni}^+ + D_{ni}^-) \cos \frac{2\pi n \mu^*}{\hbar \omega_i}. \quad (21)$$

Коэффициенты Фурье в формулах (20), (21) имеют вид

$$C_{ni}^{\pm} = \frac{1}{\sin(\pi n \omega_j / \omega_i)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (3/4 \pm 1/4 + k) (-1)^{k+n}}{[(3/4 \pm 1/4 + k)^2 + (n \omega_z / \omega_i)^2] k!}, \quad (22)$$

$$D_{ni}^{\pm} = \frac{n}{\sin(\pi n \omega_j / \omega_i)} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^{k+n+1/2 \mp 1/2}}{[(3/4 \pm 1/4 + k)^2 + (n \omega_z / \omega_i)^2] k!}, \quad (23)$$

где $i, j = 1, 2$; $i \neq j$.

Вопрос о сходимости рядов вида (20), (21) обсуждался в работе [37].

Для учета влияния температуры воспользуемся стандартным подходом:

$$J(\mu, T) = \int_0^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) J(\varepsilon, T = 0), \quad (24)$$

где $f(\varepsilon)$ — функция распределения Ферми.

После применения формулы (24) при выполнении условия $\mu \gg T$ получим, что коэффициенты Фурье в осциллирующих слагаемых будут отличаться от (22), (23) множителем

$$\frac{2\pi^2 n T}{\hbar \omega_i} \frac{1}{\text{sh}(2\pi^2 n T / \hbar \omega_i)}, \quad (25)$$

который обеспечивает лучшую сходимость рядов по n в (20) и (21).

Монотонная часть АЭ-тока после применения формулы (24) остается неизменной за исключением последнего слагаемого, каждый член которого будет отличаться от членов последнего слагаемого в (19) множителем

$$1 + \frac{2\pi^4 T^2 (k + 1/2)^2}{3\hbar^2 \omega_z^2}. \quad (26)$$

Упростим выражения (19)–(23) с входящими в них множителями (25), (26) для случая достаточно больших эффективных длин сужений ($\omega_z \ll \omega_{x,y}$), что соответствует реализуемой на практике геометрии. Для этого воспользуемся следующим очевидным соотношением:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1+k)k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1/2+k)k!} = 2.$$

Учитывая, что второе и третье слагаемые в (19) много меньше первого, и пренебрегая малым вкладом в осциллирующую часть от J^{cos} (21), АЭ-ток можно представить в виде

$$J(\mu, T) = J^{mon} + J_1^{osc} + J_2^{osc}. \quad (27)$$

Здесь

$$\frac{J^{mon}}{J_0} = \frac{2\mu^* \omega_z}{\hbar \omega_1 \omega_2}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{J_1^{osc}}{J_0} &= \\ &= \frac{4\pi^2 \omega_z T}{\hbar \omega_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(2\pi n \mu^* / \hbar \omega_1)}{\text{sh}(2\pi^2 n T / \hbar \omega_1) \sin(\pi n \omega_2 / \omega_1)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выражение для J_2^{osc} получается из (29) при помощи замены $\omega_1 \leftrightarrow \omega_2$.

4. ОСЦИЛЛЯЦИИ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Зависимость $J(\mu)$ в общем случае имеет осцилляционный вид. Исходя из вида выражений для $J_{1,2}^{osc}$ (29), можно сделать выводы о периодичности АЭ-тока как функции химического потенциала. Из формулы (29) следует, что зависимость $J(\mu)$ будет представлять собой суперпозицию двух периодических по химическому потенциалу слагаемых (соответствующие периоды: $\Delta_i \mu = \hbar \omega_i$, $i = 1, 2$). Зависимость АЭ-тока от химического потенциала электронного газа показана на рис. 2а. Здесь и далее при численных расчетах используется характерное для гетероструктур на основе GaAs значение эффективной массы $m^* = 0.067 m_0$, где m_0 — масса свободного электрона. Как видно из формулы (29) и рис. 2а, влияние температуры сводится к сглаживанию осцилляционной картины: уменьшению амплитуды и

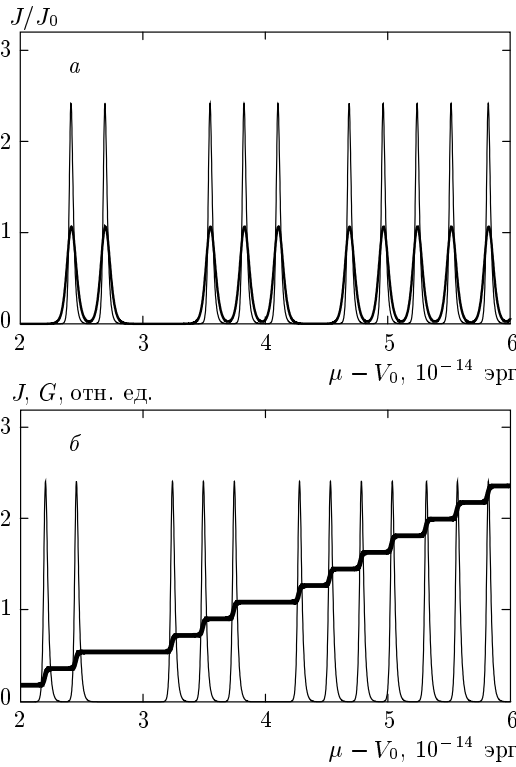


Рис. 2. а) АЭ-ток через микросужение как функция химического потенциала; $\omega_x = \omega_y = 1.2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $B = 1 \text{ Тл}$, $T = 0$ (тонкая линия), 1.5 К (жирная). б) Соответствие максимумов АЭ-тока J (тонкая линия) порогам квантования кондуктанса $G = (2e^2/h) \sum_{mn} |t(\lambda_{mn})|^2$ [38] (жирная линия); $\omega_x = 1.2 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $B = 0.5 \text{ Тл}$, $T = 0$

уширению осцилляционных пиков. При постоянной температуре амплитуда осцилляций слабо меняется с изменением химического потенциала, однако высота отдельных пиков может быть значительно больше остальных. Это может происходить при случайном вырождении уровней дискретного спектра (точнее, если два близлежащих уровня будут находиться в интервале энергий шириной порядка $\hbar \omega_z / 2\pi$).

Уменьшение эффективной длины сужения (увеличение ω_z) также приводит к сглаживанию осцилляционной картины за счет возрастающей роли туннелирования через потенциал микросужения.

Отметим, что положение осцилляционных максимумов на зависимости АЭ-тока от химического потенциала соответствует положению порогов квантования кондуктанса G на зависимости $G(\mu)$ (рис. 2б).

Из выражения для J_0 следует, что амплитуда осцилляций возрастает пропорционально частоте и интенсивности звука.

Перейдем к анализу полевых зависимостей АЭ-тока. Зависимость АЭ-тока от величины индукции магнитного поля также будет носить осцилляционный характер. Периодичность осцилляций будет определяться соотношением между параметрами размерного и магнитного квантования (ω_x , ω_y и ω_c).

Рассмотрим частные случаи сильного размерного и сильного магнитного квантования. В первом случае для симметричного сужения ($\omega_x = \omega_y = \omega_0$), сохраняя линейные по ω_c / ω_0 члены разложения в выражении (5), получим для гибридных частот:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_c}{2}. \quad (30)$$

Тогда, учитывая соотношения (27)–(30), после несложных преобразований можно получить оценку для АЭ-тока в пределе сильного размерного квантования:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{2\omega_z}{\hbar\omega_0^2} \left[\mu^* + 4\pi^2 T \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(2\pi n \mu^* / \hbar\omega_0) \sin(\pi n \mu^* \omega_c / \hbar\omega_0^2)}{\text{sh}(2\pi^2 n T / \hbar\omega_0) \sin(\pi n \omega_c / \omega_0)} \right]. \quad (31)$$

Из формулы (31) следует, что в этом случае АЭ-ток будет периодической функцией индукции магнитного поля (осцилляции типа Ааронова–Бома). Для периода осцилляций из формулы (31) получим

$$\Delta B = \frac{2m^* c \hbar \omega_0^2}{e(\mu - V_0)}. \quad (32)$$

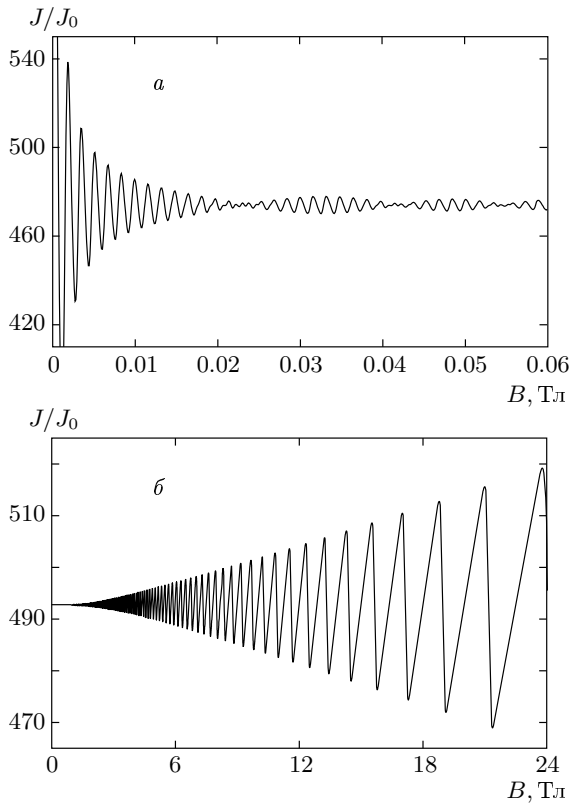


Рис. 3. АЭ-ток как функция индукции магнитного поля: *а)* осцилляции типа Ааронова–Бома в слабом магнитном поле, $\omega_x = \omega_y = 1.2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\mu - V_0 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ эрг}$, $T = 0$; *б)* осцилляции Шубникова–де Гааза, $\omega_x = 1.2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = 0.8 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $\mu - V_0 = 5 \cdot 10^{-13} \text{ эрг}$, $T = 5 \text{ К}$

Отметим, что зависимость коэффициентов Фурье в (31) от магнитного поля не разрушает структуры осцилляций, а только модулирует их амплитуду (рис. 3а).

В случае асимметричного сужения при выполнении условия $\omega_c^2 \ll (\omega_x - \omega_y)^2$ (для определенности положим $\omega_x > \omega_y$) гибридные частоты с точностью до квадратичных членов имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_x \left[1 + \frac{\omega_c^2}{2(\omega_x^2 - \omega_y^2)} \right], \\ \omega_2 &= \omega_y \left[1 - \frac{\omega_c^2}{2(\omega_x^2 - \omega_y^2)} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Из формулы (29) с учетом (33) получим, что для асимметричного сужения в слабых полях АЭ-ток будет представлять суперпозицию двух периодических

по квадрату индукции магнитного поля слагаемых с периодами

$$\Delta_{1,2}(B^2) = \frac{2m^*c^2\hbar\omega_{x,y}(\omega_x^2 - \omega_y^2)}{e^2(\mu - V_0)}. \quad (34)$$

Если частоты потенциала конфайнмента являются величинами одного порядка и выполнение указанных выше условий остается в силе, то зависимость $J(B^2)$ носит характер биений. С увеличением асимметрии сужения (с ростом разности $\omega_x - \omega_y$) картина станет строго периодичной по B^2 , так как амплитуда осцилляций с меньшим периодом будет резко убывать.

В случае сильного магнитного квантования ($\omega_c \gg \omega_{x,y}$) с точностью до линейных по $\omega_{x,y}/\omega_c$ членов разложения гибридные частоты имеют вид

$$\omega_1 = \omega_c, \quad \omega_2 = \frac{\omega_x\omega_y}{\omega_c}. \quad (35)$$

Из формул (35) и (29) следует, что АЭ-ток будет испытывать осцилляции Шубникова–де Гааза (рис. 3б). Период этих осцилляций определяется выражением

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{e\hbar}{m^*c(\mu - V_0)}. \quad (36)$$

Возможно также существование тонкой структуры осцилляций Шубникова–де Гааза в виде осцилляций типа Ааронова–Бома, период которых определяется выражением

$$\Delta B = \frac{m^*c\hbar\omega_x\omega_y}{e(\mu - V_0)}. \quad (37)$$

Отметим, что в случае симметричного микросужения период осцилляций типа Ааронова–Бома в сильных полях (37) вдвое меньше, чем соответствующий период в слабых полях (32).

Осцилляции типа Ааронова–Бома в сильных магнитных полях быстро затухают с ростом температуры. Амплитуды осцилляций Шубникова–де Гааза и Ааронова–Бома соотносятся как $\omega_c^2/\omega_x\omega_y$. С ростом магнитного поля амплитуда осцилляций типа Ааронова–Бома уменьшается, и в области достаточно сильных полей они полностью исчезают.

На рис. 3б нерегулярная структура осцилляций в области промежуточных магнитных полей около 3 Тл ($\omega_c \sim \omega_{x,y}$) связана с зависимостью от магнитного поля коэффициентов Фурье в выражении (20) или (29).

Таким образом, структура осцилляций АЭ-тока в зависимости от магнитного поля определяется как соотношением между параметрами размерного и магнитного квантования, так и температурой.

5. СТУПЕНЧАТАЯ СТРУКТУРА АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В сильно асимметричных сужениях ($\omega_x \gg \omega_y$) поведение АЭ-тока как функции химического потенциала может носить ступенчатый характер, аналогичный квантованию кондактанса. Та же ситуация может наблюдаться и в случае сильного магнитного поля, обеспечивающего эффективную асимметрию сужения ($\omega_1 \gg \omega_2$). При выполнении этих условий первое осциллирующее слагаемое J_1^{osc} (29) в зависимости от химического потенциала дает осцилляционную картину, модулируемую пилообразной огибающей, а зависимость J_2^{osc} будет иметь строго синусоидальный вид. Таким образом, полная картина зависимости (27) будет представлять собой ступени АЭ-тока с тонкой структурой в виде периодических осцилляций (рис. 4). Амплитуда осцилляций может изменяться от ступени к ступени. Это связано с тем, что осцилляции определяются наложением J_1^{osc} и J_2^{osc} , хотя при этом сохраняется периодичность J_2^{osc} .

Поскольку осцилляции тонкой структуры размываются температурой ($T \sim \hbar\omega_2$), меньшей, чем требуется для размывания ступеней ($T \sim \hbar\omega_1$), существует интервал температур, в котором поведение АЭ-тока в зависимости от химического потенциала будет носить четко выраженный ступенчатый характер (без осцилляций тонкой структуры). В этом случае гиперболический синус в знаменателе (29) обеспечивает быструю сходимость ряда, и для первых нескольких членов ряда $\sin(\pi n \omega_2 / \omega_1) \approx \pi n \omega_2 / \omega_1$. Используя формулы (28) и (29), а также учитывая сделанные оценки, получим для ступенчатой

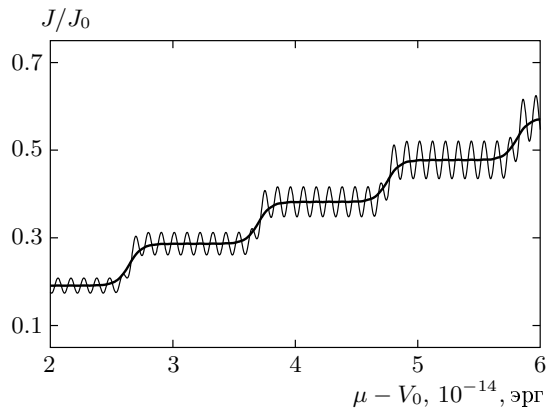


Рис. 4. Ступенчатая структура АЭ-тока в зависимости от химического потенциала; $\omega_x = 4.4 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = 2.3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $T = 2 \text{ К}$ (тонкая линия), 4 К (жирная линия)

зависимости $J(\mu)$:

$$\frac{J^{step}}{J_0} = \frac{2\omega_z}{\hbar\omega_1\omega_2} \times \left[\mu^* + 2\pi T \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(2\pi n \mu^* / \hbar\omega_1)}{\text{sh}(2\pi^2 n T / \hbar\omega_1)} \right], \quad (38)$$

где первое слагаемое дает монотонную, а ряд — пилообразную зависимости от химического потенциала. Ширина плато ступенчатой структуры в этом случае равна $\Delta\mu = \hbar\omega_1$. Следовательно, с ростом индукции магнитного поля длина плато возрастает. Высота ступеней в единицах J_0 определяется только эффективной геометрией сужения, $\Delta J / J_0 = 2\omega_z / \omega_2$.

Используя выражение для J_0 , получим для высоты ступеней АЭ-тока:

$$\Delta J = \frac{4e\omega_q |A|^2}{\pi^2 \hbar^2 \omega_2 \omega_z}. \quad (39)$$

Из выражения (39) следует, что высота ступеней возрастает пропорционально интенсивности и частоте звука.

Как упоминалось выше, в зависимости от параметров потенциального и магнитного конфайнмента ω_x , ω_y , ω_z и температуры на ступенчатой зависимости $J(\mu)$ могут проявляться осцилляции малой амплитуды с периодом $\Delta\mu = \hbar\omega_2$, быстро затухающие с ростом температуры (рис. 4). Дальнейшее повышение температуры приводит к сглаживанию ступеней и увеличению наклона плато на ступенчатой зависимости $J(\mu)$. В конечном итоге, при температурах $T \gtrsim \hbar\omega_1$ ступенчатая картина может быть полностью размыва, и зависимость $J(\mu)$ станет линейной, соответствующей поведению $J^{mon}(\mu)$ (28).

В то же время при сверхнизких температурах ($T \lesssim \hbar\omega_1$) с уменьшением температуры происходит быстрый, почти экспоненциальный рост амплитуды осцилляций и при некотором значении температуры амплитуда осцилляций станет больше, чем высота ступеней АЭ-тока. Дальнейшее понижение температуры приведет к полному разрушению ступенчатой структуры.

Таким образом, ступенчатая зависимость АЭ-тока от химического потенциала возможна лишь в определенном интервале температур, границы которого определяются параметрами потенциала конфайнмента и индукцией магнитного поля.

Рост индукции магнитного поля приводит к улучшению ступенчатой структуры АЭ-тока. Это связано с тем, что с ростом \mathbf{B} гибридная частота ω_2 уменьшается, а ω_1 увеличивается (5), что в свою

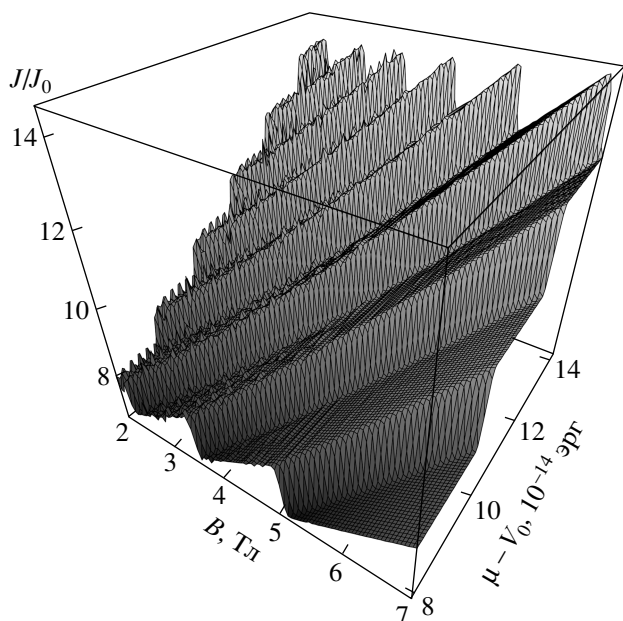


Рис. 5. Влияние магнитного поля на ступенчатую структуру АЭ-тока; $\omega_x = 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\omega_y = 10^{12} \text{ с}^{-1}$, $\omega_z = 5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, $T = 2 \text{ К}$

очередь приводит к уменьшению амплитуды осцилляций тонкой структуры на плато АЭ-тока, а также к увеличению высоты ступеней (рис. 5).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследован АЭ-ток через трехмерное асимметричное квантовое микросужение, помещенное в однородное магнитное поле, параллельное оси системы. В соответствующем экспериментальном значении длин звуковых волн пределе ($ql_z \ll 1$) получено аналитическое выражение для АЭ-тока как функции химического потенциала электронного газа. Установлено, что поведение АЭ-тока в зависимости от химического потенциала может носить как осцилляционный, так и ступенчатый характер.

Детально рассмотрены оба случая. В первом случае установлены периоды осцилляций АЭ-тока как функции химического потенциала и индукции магнитного поля. Показано, что периодичность определяется соотношением между параметрами размерного и магнитного квантования.

Положение осцилляционных максимумов на зависимости АЭ-тока от химического потенциала соответствует включению в проводимость новых электронных мод, в связи с чем максимумы осцилляций

совпадают с порогами ступеней квантования кондуктанта на соответствующей зависимости (рис. 2б).

Существование ступенчатой структуры АЭ-тока возможно как в достаточно сильных магнитных полях, так и в сильно асимметричных сужениях ($\omega_x \gg \omega_y$). Последнее условие соответствует квазидвумерности электронного газа в структуре. Сильное магнитное поле, сжимая электронные волновые функции, обеспечивает эффективную квазидвумерность.

Использованный метод приводит к тому, что рассеяние электронов внутри проводящей структуры играет особую роль при возникновении АЭ-эффекта [20]. Учитывая это, можно утверждать, что в случае баллистического прохождения электронов через микроструктуру ключевую роль играет именно геометрия сужения. Это означает, что использованный подход [20, 21] неприменим для баллистических каналов и проволок постоянного сечения. В пользу этого утверждения также говорит невозможность перехода от АЭ-тока микросужения (27), (38) к АЭ-току параболической квантовой проволоки посредством предельного перехода $\omega_z \rightarrow 0$. Однако полученные результаты, описывающие периодичность в поведении АЭ-тока в достаточно длинных сужениях, геометрия которых близка к геометрии проволоки, хорошо согласуются с результатами работы [18], заключающимися в периодичности поведения АЭ-тока в квантовых проволоках, при этом для расчета использовалось кинетическое уравнение Больцмана.

Из полученных в работе результатов следует, что наблюдение четкой ступенчатой структуры АЭ-тока возможно лишь в небольшом интервале температур, границы которого определяются гибридными частотами $\omega_{1,2}$, а температура оказывает существенное влияние как на осцилляции, так и на ступенчатую структуру АЭ-тока.

Как показано в работе, выполнение необходимого для наблюдения ступеней АЭ-тока условия асимметрии сужения не является достаточным: так, при сверхнизких температурах ступенчатая структура разрушается за счет быстрого (почти экспоненциального) роста амплитуды осцилляций с уменьшением температуры, а слишком высокие температуры приводят к сглаживанию ступенчатой зависимости. Для высоких температур ($T \gtrsim \hbar\omega_1$) зависимость $J(\mu)$ является линейной и не зависящей от температуры.

Установлено, что магнитное поле оказывает сильное влияние на поведение АЭ-тока. В частности, увеличение индукции магнитного поля способно подав-

лять осцилляции тонкой структуры на ступенчатой зависимости $J(\mu)$ (рис. 5). Кроме того, с увеличением индукции магнитного поля происходит увеличение температурного интервала, в котором АЭ-ток имеет строго ступенчатую зависимость от химического потенциала.

Отметим, что полученные аналитические результаты соответствуют интервалу длин волн звука, в котором подход, основанный на решении кинетического уравнения, неприменим.

Полученные в работе результаты, в частности, наличие осцилляционной и ступенчатой зависимостей АЭ-тока от химического потенциала, обнаруживают хорошее качественное согласие с соответствующими зависимостями АЭ-тока от напряжения на затворе, полученными экспериментально в квантовых каналах в гетероструктурах GaAs/AlGaAs [6–8].

Авторы выражают благодарность Д. В. Булаеву и М. А. Пятаеву за оказанную помощь. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-16145).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Отличные от нуля элементы матрицы Λ имеют вид

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -\frac{\omega_c}{2\omega_1} \frac{\omega_x^2 + \omega_1^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{12} &= -\frac{\omega_c}{2\omega_2} \frac{\omega_x^2 + \omega_2^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{23} &= \frac{m^* \omega_1}{2} \frac{2\omega_x^2 - 2\omega_1^2 - \omega_c^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{24} &= \frac{m^* \omega_2}{2} \frac{2\omega_x^2 - 2\omega_2^2 - \omega_c^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{33} &= -\frac{\omega_1 \omega_c}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{34} &= -\frac{\omega_2 \omega_c}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{41} &= \frac{1}{m^* \omega_1} \frac{\omega_x^2 - \omega_1^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_1^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}, \\
 a_{42} &= \frac{1}{m^* \omega_2} \frac{\omega_x^2 - \omega_2^2}{\sqrt{(\omega_x^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_x^2 \omega_c^2}}.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Как показано в работе [29], имеет место следующее преобразование:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-pt} F(p) dp, \tag{B.1}$$

где

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{pt} dt. \tag{B.2}$$

Формула (B.1) с входящей в нее величиной (B.2) является аналогом формулы Меллина. Необходимым условием сходимости интеграла (B.1) является условие $\gamma > a$, $\gamma = \text{Re } p$, a — показатель степени роста функции $F(p)$.

Рассмотрим указанное преобразование функции

$$f(x) = \frac{e^{x/2}}{(1 + e^x)^{3/2}}. \tag{B.3}$$

Интеграл $F(p)$ в этом случае имеет вид

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px} e^{x/2} dx}{(1 + e^x)^{3/2}}. \tag{B.4}$$

Для вычисления интеграла (B.4) воспользуемся заменой переменной $t = e^x$. Тогда получим [39]

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \frac{{}_2F_1(3/2, 1-p, 2-p, -1)}{1-p} + \\
 &+ \frac{{}_2F_1(3/2, 1/2+p, 3/2+p, -1)}{1/2+p}, \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

где ${}_2F_1(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция. Интеграл (B.4) сходится к (B.5) при выполнении условия $-1/2 < \text{Re } p < 1$. Используя представление функции ${}_2F_1(a, b, c, z)$ в виде ряда, получим

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1-p+k)k!} + \\
 &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1/2+p+k)k!}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Из (B.1) найдем

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{x/2}}{(1 + e^x)^{3/2}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} dp e^{-px} \times \\
 &\times \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1-p+k)k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3/2)_k (-1)^k}{(1/2+p+k)k!} \right]. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

Интеграл (B.7) сходится при $0 < \gamma < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Wixforth, J. P. Kotthaus, and G. Weimann, Phys. Rev. Lett. **56**, 2104 (1986).
2. A. Wixforth, J. Scriba, M. Wassermeier et al., Phys. Rev. B **40**, 7874 (1989).
3. R. L. Willett, M. A. Paalanen, R. R. Ruel et al., Phys. Rev. Lett. **65**, 112 (1990).
4. R. L. Willett, R. R. Ruel, K. W. West et al., Phys. Rev. Lett. **71**, 3846 (1993).
5. A. Knäbchen, Y. B. Levinson, and O. Entin-Wohlman, Phys. Rev. B **54**, 10696 (1996).
6. J. M. Shilton, D. R. Mace, V. I. Talyanskii et al., J. Phys.: Condens. Matter **8**, L337 (1996).
7. J. M. Shilton, V. I. Talyanskii, M. Pepper et al., J. Phys.: Condens. Matter **8**, L531 (1996).
8. V. I. Talyanskii, J. M. Shilton, M. Pepper et al., Phys. Rev. B **56**, 15180 (1997).
9. J. Cunningham, V. I. Talyanskii, J. M. Shilton et al., Physica B **280**, 493 (2000).
10. J. Cunningham, V. I. Talyanskii, J. M. Shilton et al., Phys. Rev. B **62**, 1564 (2000).
11. J. Cunningham, V. I. Talyanskii, J. M. Shilton et al., Phys. Rev. B **60**, 4850 (1999).
12. K. Gloos, P. Utko, J. Bindslev Hansen and P. E. Lindelof, Phys. Rev. B **70**, 235345 (2004).
13. H. Totland and Yu. M. Galperin, Phys. Rev. B **54**, 8814 (1996).
14. V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and G. J. Iafrate, Phys. Rev. Lett. **77**, 3881 (1996).
15. Ø. L. Bø, H. Totland, and Yu. Galperin, J. Phys.: Condens. Matter **9**, 8381 (1997).
16. V. L. Gurevich, V. I. Kozub, and V. B. Pevzner, Phys. Rev. B **58**, 13088 (1998).
17. O. Entin-Wohlman, Y. Levinson, and Yu. M. Galperin, Phys. Rev. B **62**, 7283 (2000).
18. В. А. Маргулис, М. П. Трушин, А. В. Шорохов, ЖЭТФ **121**, 1352 (2002).
19. F. A. Maas and Y. Galperin, Phys. Rev. B **56**, 4028 (1997).
20. Y. Levinson, O. Entin-Wohlman, and P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **85**, 634 (2000).
21. O. Entin-Wohlman, Y. Levinson, and P. Wölfle, Phys. Rev. B **64**, 195308 (2001).
22. S. Y. Mensah, F. K. A. Allotey, and S. K. Adjepong, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 6783 (1994).
23. S. Y. Mensah, F. K. A. Allotey, and N. G. Mensah, J. Phys.: Condens. Matter **12**, 5225 (2000).
24. Y. M. Galperin, O. Entin-Wohlman, and Y. Levinson, Phys. Rev. B **63**, 153309 (2001).
25. N. A. Zimbovskaya and G. Gumbs, J. Phys.: Condens. Matter **13**, L409 (2001).
26. G. Gumbs, G. R. Aizin, and M. Pepper, Phys. Rev. B **60**, R13954 (1999).
27. H. Totland, Ø. L. Bø, and Y. M. Galperin, Physica B **249–251**, 147 (1998).
28. A. G. Scherbakov, E. N. Bogachek, and Uzi Landman, Phys. Rev. B **53**, 4054 (1996).
29. Н. Г. Галкин, В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, ЖЭТФ **117**, 593 (2000).
30. Н. Г. Галкин, В. А. Гейлер, В. А. Маргулис, ЖЭТФ **118**, 223 (2000).
31. V. A. Geyler, V. A. Margulis, and A. V. Shorokhov, Phys. Rev. B **63**, 245316 (2001).
32. V. A. Geyler and A. V. Shorokhov, Phys. Lett. A **335**, 1 (2005).
33. N. G. Galkin, V. A. Margulis, and A. V. Shorokhov, Phys. Rev. B **69**, 113312 (2004).
34. B. Schuh, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, 803 (1985).
35. *Handbook of Mathematical Functions*, ed. by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Nat. Bureau of Standards, Washington, USA (1964).
36. Y. Levinson and P. Wölfle, Phys. Rev. Lett. **83**, 1399 (1999).
37. V. A. Geyler and V. A. Margulis, Phys. Rev. B **55**, 2543 (1997).
38. R. Landauer, Philos. Mag. **21**, 863 (1970).
39. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).