

О ВЛИЯНИИ ЛОКАЛЬНЫХ ВРАЩЕНИЙ НА ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

С. Н. Артеха *

*Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 апреля 2006 г.

Локальные вращательные движения плазмы меняют средние электродинамические характеристики плазмы даже при нулевой средней скорости вращения. Эффективный тензор диэлектрической проницаемости отличается от аналогичной величины без учета локальных вращений. Меняется дисперсионная кривая для продольных колебаний. Для поперечной части диэлектрической проницаемости пороговое значение частоты при малых k получается примерно в 2.2 раза больше аналогичной величины без учета вращений. Локальные вращения влияют также на коэффициенты электропроводности и электронной теплопроводности. Флуктуации направлений локальных вращений приводят к ослаблению интенсивности когерентного поля.

PACS: 52.25.Mq, 52.25.Dg

1. ВВЕДЕНИЕ

Вращающаяся плазма уже длительное время остается объектом интенсивного исследования [1]. В астрофизике это связано с тем, что значительное число космических объектов представляет собой вращающиеся плазменные образования. В лабораторных исследованиях также обнаружено, что плазма часто самопроизвольно переходит в устойчивое вращательное состояние (такой L-H-переход наблюдается в устройствах самой различной конфигурации [2, 3]). При этом плазма часто оказывается неоднородной и проявляет нелинейные свойства. Так, в работе [4] методом доплеровского сдвига ионных линий исследовано тороидальное и полоидальное вращения и радиальное электрическое поле, при этом оказалось, что тороидальная скорость направлена в противоположные стороны в центре и на краю плазмы. Неоклассическая теория переноса в неоднородной вращающейся тороидальной плазме развита в работе [5]. Вследствие сильных неоднородностей коэффициенты неоклассического переноса становятся нелинейной функцией градиентов. В работе [6] продемонстрировано, что скорость тороидального вращения на одной магнитной поверхности различна на

внешнем и внутреннем обходе тора, а скорость полоидального вращения в случае больших градиентов плотности ионов может менять знак при полоидальном обходе на одной магнитной поверхности.

Прежде всего нас интересует тот факт, что вращение плазмы и образование различных локальных структур приводит к изменению кинетических и электродинамических свойств плазмы. Способ локально-вращательного описания свойств плазмы предложен в работе [7]. Возникновение отдельных структур вблизи минимума магнитной поверхности и влияние вращения плазмы проанализировано для слабого магнитного поля в работе [8]. В [9] изучены слабо- и сильнонелинейные эффекты, определяющие эволюцию регулярных ансамблей электронных вихрей в замагниченной плазме, и выявлена чувствительность поведения плазмы к внутренней киральности. В работе [10] в приближении отдельных частиц рассмотрена задача об определении тензора эффективной проводимости магнитоактивной турбулентной плазмы и показано, что наличие ненулевой средней магнитной спиральности приводит к появлению дополнительных гиротропных членов в выражении для тензора проводимости. В результате меняется дисперсия распространяющихся волн, появляются дополнительные моды и дополнительное вращение плоскости поляризации. При этом свой-

*E-mail: arteha@mx.iki.rssi.ru

ства плазмы оказываются схожими со свойствами, наблюдаемыми в киральных и бианизотропных средах. В работе [11] исследовалось влияние электромагнитных сил на процесс генерации спиральности в плазмopodobных системах в атмосфере. Обнаружена зависимость генерационных свойств турбулентности от знака избытка заряда и наличия в системе неоднородностей.

Таким образом, учет локальных структур, движений и характеристик плазмы может способствовать более адекватному количественному описанию ее эффективных свойств в макромасштабах.

Основная цель данной работы состоит в следующем. На основе исследования продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей вращающейся плазмы, а также ряда других характеристик обратить внимание исследователей на то, что локальные вращения приводят к изменению эффективных электродинамических свойств плазмы и учет данного факта необходим для их количественного описания.

2. МЕТОД ЛОКАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ ПЛАЗМЫ

Вообще говоря, описание поведения системы в рамках бесстолкновительного уравнения Больцмана чаще всего предполагает прямолинейные движения молекул в равновесном случае. Однако даже в случае бесстолкновительной плазмы такое предположение явно не отвечает действительности. Равновесное движение частиц представляет собой движение по бессилковым траекториям. Вследствие дальнедействующего характера взаимодействия кулоновских сил траектория движения заряженных частиц в плазме является криволинейной (т. е. каждый локальный участок движения представляет собой дугу окружности). Следовательно, прохождение любой волны через плазму локально (в каждой точке) должно описываться как прохождение через вращающуюся плазму. Векторная величина угловой скорости меняется от точки к точке (а также с течением времени). В результате эффективные значения электродинамических характеристик плазмы получатся усреднением локальных характеристик, найденных для вращающейся плазмы, по угловым скоростям локальных вращений с использованием некоторого распределения. В случае отсутствия средних полей в плазме (локальные микрополя отнюдь не равны нулю!) все направления угловой скорости локального вращения равновероятны, а по модулю распреде-

лены вокруг некоторой средней частоты вращения. В первом приближении эту частоту можно считать постоянной по величине (ее величина будет обсуждена ниже) и проводить усреднение только по направлению угловой скорости вращения. Оказывается, что несмотря на отсутствие среднего вращения, учет случайно распределенных микровращений приводит к величинам, отличающимся от величин, полученных в случае отсутствия микровращений. Если же средние поля в плазме отличны от нуля, то усреднение локальных микровращений должно давать среднее крупномасштабное движение плазмы в данной точке пространства (которое может меняться во времени и от точки к точке).

Легко проверить, что бесстолкновительное кинетическое уравнение Больцмана (в покоящейся цилиндрической системе координат),

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{v_\varphi^2}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\rho} - \left(\frac{v_\varphi v_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\varphi} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0,$$

в отсутствие внешних сил (бессилковое поле $U = \text{const}$) определяет следующую равновесную функцию распределения при наличии равномерного вращения:

$$f_0 = C_0 \exp \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT} + \frac{m\Omega\rho v_\varphi}{kT} \right), \quad (1)$$

где C_0 — нормировочная постоянная, m — масса частиц. По сути это есть распределение Максвелла–Больцмана, включающее потенциал центробежных сил ($U = -m\Omega^2\rho^2/2$), со средней скоростью в максвелловской части, равной средней скорости вращения ($\bar{v}_\varphi = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]_\varphi = \Omega\rho$).

Исследование прохождения волны через плазму удобно проводить в фиксированной декартовой системе координат. Случайную ориентацию рассматриваемого локального плазменного цилиндрика можно задать, используя его ось вращения \mathbf{L} . Тогда поворот этой оси от оси z к оси x на угол θ и последующий поворот вокруг оси z на угол φ приводят к проекциям оси \mathbf{L} на оси декартовой системы:

$$L_z = \cos \theta, \quad L_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad L_y = \sin \theta \sin \varphi. \quad (2)$$

Средняя линейная скорость частиц (связанная с вращением) определится как

$$\bar{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \Omega[\mathbf{L} \times \mathbf{r}].$$

Используя соотношения (2), получаем компоненты средней скорости:

$$\bar{v}_x = \Omega(z \sin \theta \sin \varphi - y \cos \theta), \quad (3)$$

$$\bar{v}_y = \Omega(x \cos \theta - z \sin \theta \cos \varphi), \quad (4)$$

$$\bar{v}_z = \Omega(y \sin \theta \cos \varphi - x \sin \theta \sin \varphi). \quad (5)$$

В поле пробной волны на электроны действует сила

$$\mathbf{F} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v} \times [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]] \right).$$

Ищем возмущенную функцию распределения в следующем виде:

$$\delta f = c e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \times \exp \left(-\frac{m \mathbf{v}^2}{2kT} + \frac{m}{kT} [v_x \bar{v}_x + v_y \bar{v}_y + v_z \bar{v}_z] \right) f_1. \quad (6)$$

Тогда для электронной компоненты кинетическое уравнение Больцмана приводит к уравнению

$$i f_1 (k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z - \omega) + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_1}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{e}{kT\omega} \left\{ (\bar{v}_x - v_x) [E_x (\omega - k_x v_x - k_y v_y - k_z v_z) + k_x (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z)] + (\bar{v}_y - v_y) [E_y (\omega - k_x v_x - k_y v_y - k_z v_z) + k_y (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z)] + (\bar{v}_z - v_z) [E_z (\omega - k_x v_x - k_y v_y - k_z v_z) + k_z (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z)] \right\} = 0. \quad (7)$$

Относительно пространственных координат x, y, z данное общее уравнение имеет следующую структуру:

$$i A f_1 + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_1}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + C + N x + D y + R z = 0, \quad (8)$$

где константы A, C, N, D, R будут далее конкретно расшифровываться для двух частных случаев. Решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных удастся найти как сумму частного решения неоднородного уравнения

$$\delta f_{1(p)} = Q + P x + T_1 y + S z \quad (9)$$

и общего решения $\delta f_{1(o)}$ однородного уравнения. Подставив (9) в уравнение (8), найдем, что констан-

ты в решении выражаются через постоянные, введенные в (8), следующим образом:

$$P = -\frac{N}{iA}, \quad T_1 = -\frac{D}{iA}, \quad S = -\frac{R}{iA}, \quad (10)$$

$$Q = -\frac{N v_x + D v_y + R v_z}{A^2} - \frac{C}{iA}.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется в виде

$$\delta f_{1(o)} = C_1 \exp \left(-iA \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}} \right), \quad (11)$$

где C_1 — произвольная постоянная, \mathbf{q} — произвольный вектор.

Перейдем теперь к нахождению эффективного значения диэлектрической проницаемости в частных случаях.

2.1. Продольная диэлектрическая проницаемость

Для начала рассчитаем продольную диэлектрическую проницаемость вращающегося плазменного цилиндрика. Выбираем ось x в качестве направления распространения продольной волны: $E_x \equiv E \neq 0, E_y = E_z = 0, k_x \neq 0, k_y = k_z = 0$. С учетом данных условий и выражения (7) коэффициенты уравнения (8) в данном случае имеют следующий вид:

$$N = 0, \quad A = k_x v_x - \omega, \quad C = \frac{e E v_x}{kT}, \quad (12)$$

$$R = -\frac{e E \Omega \sin \theta \sin \varphi}{kT}, \quad D = \frac{e E \Omega \cos \theta}{kT}.$$

В отсутствие поля волны ($E = 0$) возмущенная функция распределения должна обращаться в нуль, а при отсутствии вращения ($\Omega = 0$) переходить в известные выражения, поэтому (как покажут дальнейшие расчеты) в выражении (11) удобна подстановка $C_1 = -e E \Omega C_3 / kT$, где новая постоянная C_3 подлежит определению. Как обычно, итоговое поле можно представить в виде суммы полей падающей волны и расходящихся волн; последние в силу конфигурации задачи будут обладать цилиндрической симметрией. В цилиндрической системе координат те же самые операции элементарно приводят к следующему выражению для общего решения соответствующего однородного уравнения (11):

$$\delta f_{1(o)} = -\frac{e E \Omega}{kT} C_3 \exp \left(-iA \frac{\rho}{v_\rho} \right), \quad (13)$$

которое сохранит свой вид (с соответствующей заменой переменных) и в декартовой системе координат.

Как известно, стандартная процедура [12] для нахождения продольной диэлектрической проницаемости ε_l заключается в следующем: для электронной плазмы

$$n_e = -e \int \delta f d^3 p, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} = -n_e,$$

n_e — электронная плотность, \mathbf{p} — импульс частиц; для поляризации \mathbf{P} в случае продольных волн имеем $4\pi\mathbf{P} = (\varepsilon_l - 1)\mathbf{E}$. Отсюда формально можно записать

$$\varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi e i}{k} \int \frac{\delta f}{E} d^3 p.$$

Подстановка в данную формулу величин из (9), (10), (12), (13) приводит к следующему выражению для продольной диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l = 1 - \frac{4\pi i e^2 N_0}{k_x k T} \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d^3 v \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right) \times \\ \times \exp \frac{m(v_x \bar{v}_x + v_y \bar{v}_y + v_z \bar{v}_z)}{kT} \left\{ \frac{\Omega v_z \sin \theta \sin \varphi - \Omega v_y \cos \theta}{(k_x v_x - \omega)^2} - \right. \\ \left. - C_3 \Omega \exp \left(-i(k_x v_x - \omega) \frac{\rho}{v_\rho} \right) - \frac{i(\bar{v}_x - v_x)}{k_x v_x - \omega} \right\}. \end{aligned}$$

Для того чтобы в данном выражении сокращался неинтегрируемый полюс второго порядка (при $(k_x v_x - \omega)^2 \rightarrow 0$ в знаменателе), необходимо положить константу C_3 равной

$$C_3 = \frac{v_y \cos \theta - v_z \sin \theta \sin \varphi}{(k_x v_x - \omega)^2}.$$

Если ограничиться в экспоненте при C_3 только старшим членом разложения, то выражение для продольной диэлектрической проницаемости можно довести до вида, сопоставимого с общеизвестным выражением из работы [12]. После элементарного интегрирования по v_y и v_z расчеты приводят к следующему выражению:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{\exp \frac{m(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2)}{2kT}}{(k_x D_0)^2} \left[1 + F \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{2} k_x v_T} \right) \right], \quad (14)$$

где введено $v_T = \sqrt{kT/m}$ (как и в [12]), смещенная частота $\omega_1 = \omega - k_x \bar{v}_x$, дебаевский радиус $D_0 = \sqrt{kT/4\pi N_0 e^2}$; здесь так же, как и в [12], введена функция

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-z^2)}{z-x} dz + i\sqrt{\pi} x \exp(-x^2). \quad (15)$$

Данный интеграл берется в смысле главного значения, а мнимая часть, как известно, описывает затухание Ландау (в математическом плане это, во-первых, предполагает верным вклад от найденного возмущения δf не только в качестве малой поправки, но и при наличии полюса, когда $\delta f \gg f$, и, во-вторых, означает, что формальный предельный переход отвечает бесконечно медленному увеличению амплитуды поля по экспоненциальному закону от нуля до заданного наблюдаемого значения за время от $t = -\infty$ до данного t). Мы видим, что отличие полученного выражения (14) для продольной составляющей диэлектрической проницаемости (в случае вращающегося цилиндрика) от прежнего выражения из работы [12] состоит в следующем: 1) присутствует экспоненциальный множитель (фактически выражающий больцмановское распределение), 2) вместо частоты волны ω стоит смещенная частота ω_1 , 3) величина N_0 выражает не среднюю плотность частиц плазмы, а плотность на оси цилиндрика. Для сопоставления нового выражения диэлектрической проницаемости с известным выражением надо эту последнюю плотность выразить через среднюю плотность (фактически провести перенормировку второго слагаемого в (14)) и всем новым введенным величинам определить их значения.

В дальнейшем мы предполагаем усреднение характеристик по всевозможным ориентациям цилиндров (по углам), поэтому считаем равновероятными все средние величины $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = l$, здесь l выражает расстояние от центра цилиндрика до точки прохождения пробной волны (точки наблюдения). Далее полагаем локальное вращение при движении заряда по бессиловой траектории образующимся самим тепловым движением частиц. Приравнивая линейные скорости $\Omega \rho = v_m$, получаем $2\Omega^2 l^2 = 2kT/m$. Это позволяет сделать новые поправки определенными величинами, оставив в них только угловые зависимости. Так, вместо больцмановского экспоненциального коэффициента в выражении (14) остается коэффициент

$$A_1 = \exp[1 - \sin \theta (\sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \cos \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi)], \quad (16)$$

а второй коэффициент (возникающий в выражении для ω_1 , см. функцию F в (14)) равен

$$B_1 = \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta. \quad (17)$$

Для определения перенормирующего коэффициента заметим следующее. Поскольку во вращающейся

ся системе бoльцмановское распределение, как известно, имеет вид

$$dN = \frac{N_0 \frac{m\Omega^2}{kT} \exp \frac{m\Omega^2 r^2}{2kT} r dr}{\exp \frac{m\Omega^2 l^2}{2kT} - 1},$$

на оси

$$\frac{dN}{dS} = \frac{\frac{N_0}{2\pi} \frac{m\Omega^2}{kT}}{\exp \frac{m\Omega^2 l^2}{2kT} - 1},$$

где $S = 2\pi r dr$. В случае отсутствия вращения мы можем (для произвольно выбранного цилиндрика тех же размеров) записать

$$\frac{dN}{dS} = \frac{\bar{N}}{S} = \frac{\bar{N}}{\pi l^2}.$$

Теперь легко выразить концентрацию N_0 на оси через среднюю плотность частиц плазмы \bar{N} и найти перенормирующий коэффициент kn (для замены $N_0 = kn\bar{N}$):

$$kn = \frac{N_0}{\bar{N}} = \frac{\frac{m\Omega^2 l^2}{2kT}}{\exp \frac{m\Omega^2 l^2}{2kT} - 1}.$$

Подставляя сюда выражение для Ωl , получим:

$$kn = \frac{0.5}{\exp 0.5 - 1} \approx 0.770747. \quad (18)$$

Таким образом, итоговое выражение для эффективной продольной диэлектрической проницаемости (14) с учетом (16), (17), (18) определяется усреднением по углам следующего выражения:

$$\varepsilon_l = 1 + \frac{A_1 kn}{(k_x \bar{D})^2} \left[1 + F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k_x v_T} - \frac{B_1}{\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (19)$$

Величина ε_l из (19) может быть как больше, так и меньше прежнего значения. Следуя [12], можно провести разложение функции F для предельных случаев, а далее усреднить выражение для ε_l по углам и получить предельные значения эффективной продольной проницаемости при больших и малых частотах в аналитическом виде. При больших частотах, $\omega \gg \sqrt{2} k_x v_T$, имеем

$$\bar{\varepsilon}_l = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left[2.264 + 12.598 \frac{k_x^2 v_T^2}{\omega^2} \right] + 2.264i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_e^2}{(k_x v_T)^3} \omega \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k_x^2 v_T^2} \right),$$

где $\Omega_e = \sqrt{4\pi \bar{N} e^2 / m}$ — плазменная частота. Таким образом, эффективное значение продольной диэлектрической проницаемости меньше прежней величины (см. [12]), но с ростом частоты различие нивелируется.

При малых частотах, $\omega \ll \sqrt{2} k_x v_T$, имеем

$$\bar{\varepsilon}_l = 1 + \left(\frac{\Omega_e}{k_x v_T} \right)^2 \left[0.33 - 2.264 \frac{\omega^2}{k_x^2 v_T^2} + 2.264i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k_x v_T} \right],$$

т. е. эффективное значение продольной диэлектрической проницаемости отличается от прежнего значения на 67% для малых k_x (для больших k_x различие исчезает).

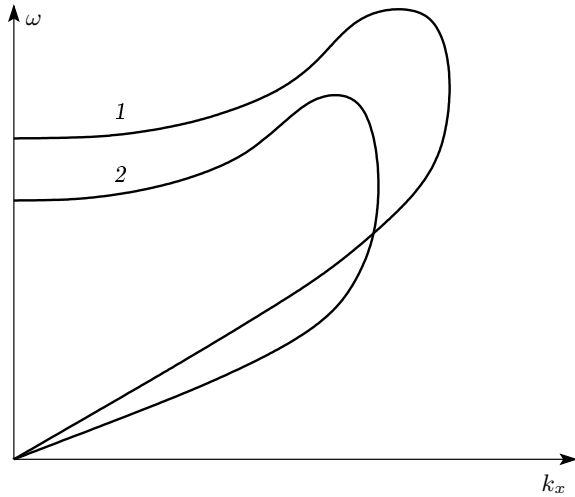
Взаимосвязь характеристик продольных волн, способных распространяться в плазме, не произвольная, а дается дисперсионной кривой. С учетом эффективного значения диэлектрической проницаемости (19) закон дисперсии для продольных волн определяется из уравнения

$$\langle \varepsilon_l(\omega, k_x) \rangle = 0. \quad (20)$$

Задав некоторые характерные значения параметров плазмы, можно численно построить графики эффективной продольной диэлектрической проницаемости и, проанализировав их качественно, построить спектр колебаний. Эффективное значение продольной диэлектрической проницаемости непрерывно зависит от своих переменных (ω и k_x) и в общем случае (при фиксированном k_x) имеет два пересечения с осью абсцисс (осью ω). Алгоритм получения спектра колебаний элементарен: фиксируем k_x и ищем методом деления отрезка пополам такую частоту ω , чтобы равенство (20) выполнялось с некоторой фиксированной точностью (попадание в заданную окрестность нуля). Эту процедуру выполняем для некоторого последовательного набора k_x , соединяя последовательные точки гладкой кривой (график получается двузначным).

В работе [13] ленгмюровские волны и электронные звуковые волны считаются асимптотическими решениями одной и той же продольной плазменной моды и приведена единая дисперсионная кривая. График вещественной части кривой не выходит за пределы некоторого максимального волнового числа k_{max} (а коэффициент затухания отличается от полученного Ландау и скорректированного Джексоном [14]).

Типичное формальное поведение вещественной части дисперсионной кривой (1), полученной при



Дисперсионная кривая продольных колебаний с учетом локальных вращений (1) в сопоставлении с аналогичной кривой без учета локальных вращений (2)

использовании эффективной продольной диэлектрической проницаемости, показано на рисунке в сопоставлении с аналогичной величиной (2), рассчитанной по формуле (31.2) из [12].

2.2. Поперечная диэлектрическая проницаемость

Теперь рассчитаем поперечную диэлектрическую проницаемость вращающегося плазменного цилиндрика. Выбираем ось x в качестве направления распространения поперечной волны, а ось z — направления электрического поля в волне. Тогда $E_z \equiv E \neq 0, E_x = E_y = 0, k_x \neq 0, k_y = k_z = 0$. С учетом этих определений и выражения (7) коэффициенты из (8) будут в данном случае следующими (коэффициент A останется прежним из (12)):

$$\begin{aligned} C &= \frac{eE v_z}{kT}, \quad N = \frac{eE\Omega}{kT\omega}(\omega - k_x v_x) \sin \theta \sin \varphi, \\ R &= -\frac{eE\Omega}{kT\omega} k_x v_z \sin \theta \sin \varphi, \\ D &= -\frac{eE\Omega}{kT\omega} [(\omega - k_x v_x) \sin \theta \cos \varphi - k_x v_z \cos \theta]. \end{aligned} \tag{21}$$

Для вычисления поперечной диэлектрической проницаемости при данной постановке задачи можно воспользоваться, как и в работе [12], формулой

$$\mathbf{P} = -\frac{ie}{\omega} \int \mathbf{v} \delta f d^3 p.$$

Формальное выражение для поперечной диэлектрической проницаемости имеет вид

$$\epsilon_t = 1 - \frac{4\pi ie}{\omega} \int v_z \frac{\delta f}{E} d^3 p,$$

в него надо подставить (9), (10), (13), (21).

Как и в случае с продольной проницаемостью, для того чтобы в выражении для поперечной диэлектрической проницаемости сокращался неинтегрируемый полюс второго порядка из функции (9) (при $(k_x v_x - \omega)^2 \rightarrow 0$ в знаменателе), необходимо положить константу C_3 равной

$$C_3 = \frac{k_x v_z}{\omega} \frac{v_z \sin \theta \sin \varphi - v_y \cos \theta}{(k_x v_x - \omega)^2}.$$

Опять разлагая экспоненту до старшего члена и интегрируя затем по компонентам скорости v_y, v_z , имеем окончательное выражение для поперечной диэлектрической проницаемости вращающегося цилиндрика (здесь уже подставлены тепловые скорости при вращении):

$$\epsilon_t = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left[G_1 - D_1 F \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} k_x v_T} - \frac{B_1}{\sqrt{2}} \right) \right]. \tag{22}$$

Здесь дополнительно введены новые коэффициенты:

$$G_1 = A_1 kn(\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi)^2, \quad D_1 = A_1 kn + G_1.$$

Усредняя (22) по углам, можно получить эффективное значение поперечной диэлектрической проницаемости. Для поперечных электромагнитных волн закон дисперсии имеет вид

$$\omega^2 = \frac{c^2 k_x^2}{\langle \epsilon_t \rangle}. \tag{23}$$

При больших частотах электромагнитных волн в плазме отсутствуют частицы, движущиеся в фазе с волной [12] (так как фазовая скорость превышает скорость света), и эффективное значение поперечной диэлектрической проницаемости определится как

$$\bar{\epsilon}_t = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} \left[\bar{G}_1 + \bar{D}_1 + \bar{D}_1 \frac{k_x^2 v_T^2}{\omega^2} \right].$$

Приближенный закон дисперсии записывается в данном случае в следующем виде:

$$\omega^2 = c^2 k_x^2 + \Omega_e^2 [\bar{G}_1 + \bar{D}_1],$$

т. е. по виду соответствует известному закону дисперсии из работы [12].

Больше всего нас интересует пороговая частота, определяемая из условия $\bar{\varepsilon}_t = 0$. При малых k_x имеем $F(x) \approx -1$ и из старшего члена разложения ε_t получаем

$$\omega_{min} = \Omega_e \sqrt{\bar{G}_1 + \bar{D}_1} = 2.21619\Omega_e.$$

При низкочастотных колебаниях для длинных волн, как и раньше в работе [12], не приходится говорить о распространении волн, так как имеется сильное затухание, хотя в данном случае $\bar{\varepsilon}_t$ уже не является чисто мнимой величиной.

Таким образом, вычисление продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей демонстрирует, что учет локальных вращений необходим для более адекватного описания свойств плазмы. К сожалению, количественное сопоставление новых результатов с экспериментами затруднено, поскольку в современном представлении задача обращена и выражение для ленгмюровской частоты по сути положено в основу определения самой электронной плотности плазмы при микроволновой (СВЧ) диагностике плазмы (например, с помощью отсечки или фазового сдвига), т. е. речь будет идти о корректировке величины электронной плотности.

Здесь необходимо также сказать следующее. Рассмотренный выше подход носит лишь качественный, демонстрационный характер (результаты оказываются приемлемыми при относительно малых поправках к величине диэлектрической проницаемости). Строгий же подход к рассмотренным задачам возможен лишь в рамках электродинамики случайно-неоднородных сред. Однако в этом случае усреднять нужно не величину диэлектрической проницаемости, а некоторую измеряемую величину (поскольку фактически не мы усредняем с помощью математических операций, а «усредняет» сам прибор в процессе измерения, и «усредняет» он именно ту величину, которую измеряет). К таким наблюдаемым (измеряемым) величинам относятся, например, электромагнитное поле и диссипируемая в среде мощность.

В п. 2.4 в рамках модели флуктуаций диэлектрической проницаемости мы определим когерентную составляющую поля. А пока рассмотрим еще некоторые качественные примеры влияния локальных вращений на свойства плазмы.

2.3. Дополнительные примеры

Рассмотрим задачу определения электропроводности слабоионизованной плазмы с помощью модели Крука [15]. В этом случае в кинетическом урав-

нении Больцмана справа появляется столкновительный член в виде $-\nu_{ne}\delta f$, где ν_{ne} — частота столкновений электронов с нейтралами ($\delta f = f_0 f_1$). Плотность тока проводимости определяется выражением

$$j_x = -eN_0 \int v_x f dv_x dv_y dv_z.$$

В функции распределения $f = f_0(1 + f_1)$ для величины f_1 можно воспользоваться результатами п. 2.1 (с заменой $iA \rightarrow \nu_{ne}$ в подстановке (12)):

$$f_1 = -\frac{C}{\nu_{ne}} - \frac{Rz}{\nu_{ne}} - \frac{Dy}{\nu_{ne}} + \frac{Rv_z + Dv_y}{\nu_{ne}^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho\nu_{ne}}{v_\rho}\right) \right].$$

При большой частоте столкновений ($\nu_{ne} \gg \Omega$) в последнем выражении важны только первые три слагаемых. Элементарно проинтегрировав выражение для плотности тока по скоростям и найдя отношение j_x/E_x , получим величину проводимости. Новое выражение отличается от известного [15] лишь наличием больцмановского множителя A_1 из (16) и величиной N_0 вместо \bar{N} . Для нахождения эффективной проводимости можно воспользоваться аддитивностью сопротивления при последовательном соединении. Вначале усредняем по углам величину, обратную проводимости, а затем берем величину, обратную полученному выражению, и перенормируем плотность ($N_0 = kn\bar{N}$). В результате имеем различие в 1.91 раза по сравнению с прежним результатом [15]:

$$\sigma = \frac{1.91\bar{N}e^2}{m_e\nu_{ne}}.$$

Разумеется, полученный результат носит только демонстрационный характер, так как мы использовали квазиодномерный подход (хотя результат понятен даже с точки зрения бытового принципа, что «ток ищет более легкие пути»).

Качественно роль микровращений можно также продемонстрировать по тенденции изменения величины диссипации энергии для продольного поля [12]:

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon_l^* |\mathbf{E}|^2,$$

где ε_l^* — мнимая часть диэлектрической проницаемости. Изменения при учете микровращений (т. е. для отдельного цилиндрика) записаны в выражениях (14), (15). При условии слабости затухания (когда мало относительное изменение поля) можно усреднить величину ε_l^* по направлениям вращения. Численные расчеты показывают, что учет наличия ло-

кальных вращений приводит при малых ω к меньшей величине диссипации энергии по сравнению с обычным случаем, а с ростом ω — к большей диссипации энергии (при совпадении в пределах $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$).

Интересно вычислить коэффициент теплопроводности κ , поскольку при наличии микровращений плазма напоминает пеноподобную среду. В данном случае усреднение теплопроводности по направлениям ориентации вращающихся цилиндров вполне адекватно постановке задачи, так как теплопроводность можно определить по потоку тепла между двумя близкими слоями с разной температурой (постоянный градиент температуры). Вначале определяем коэффициент теплопроводности вращающегося плазменного цилиндрика. Напомним (см. [12]), что для этого можно воспользоваться следующими выражениями, полученными из условий равновесия:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{e} \nabla \mu = \frac{1}{\sigma} (\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}}) + \alpha \nabla T,$$

$$\mathbf{q} - \left(\varphi - \frac{\mu}{e} \right) (\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}}) = \alpha T (\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}}) - \kappa \nabla T.$$

Здесь μ — химический потенциал, φ — потенциал электрического поля \mathbf{E} , σ — электрическая проводимость, α — термоэлектрический коэффициент, j — плотность тока.

Как обычно [12], исходим из кинетического уравнения (но считаем, что частота столкновений $\nu = \text{const}$, как в [15]):

$$-e \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = -\nu \delta f.$$

Подставляя в него равновесное распределение в виде

$$f_0 = \exp \frac{\mu - \varepsilon}{kT}$$

(здесь ε обозначает энергию), получаем общее выражение, такое же как в работе [12]:

$$\delta f = -\frac{f_0}{kT\nu} (e \mathbf{E} + \nabla \mu) \cdot \mathbf{v} + f_0 \frac{\mu - \varepsilon}{kT^2 \nu} \mathbf{v} \cdot \nabla T. \quad (24)$$

Вначале вычисляем термоэлектрический коэффициент, используя равенство $\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}} = -\alpha \sigma \nabla T$ при условии $\mathbf{E} + \nabla \mu / e = 0$. Для вращающегося плазменного цилиндрика расчет приводит к следующему выражению:

$$\alpha = \frac{k}{e} \left(\frac{\mu_0}{kT} (1 + 2\bar{v}_z^2) + (\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) \times \right. \\ \left. \times (1 + 2\bar{v}'_z{}^2) - 3\bar{v}'_z{}^2 - \frac{5}{2} \right), \quad (25)$$

где химический потенциал электронов

$$\mu_0 = kT \ln \left[\frac{N}{2V} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{mkT} \right)^{3/2} \right],$$

а средняя скорость (со штрихами) приведена к безразмерному виду с помощью величины $\sqrt{2kT/m}$. Учитывая, что $\mathbf{E} + \nabla \mu / e = \alpha \nabla T$ при $\mathbf{j} - \bar{\mathbf{j}} = 0$, и подставляя это выражение вместе с (25) в (24), получаем возмущенную функцию распределения для расчета коэффициента теплопроводности:

$$\delta f = \frac{f_0}{T\nu} \left(\frac{5}{2} - \frac{m(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})^2}{2kT} + 3\bar{v}'_z{}^2 - 2\frac{\mu_0}{kT} \bar{v}'_z{}^2 - \right. \\ \left. - 2\bar{v}'_z{}^2 (\bar{v}'_x{}^2 + \bar{v}'_y{}^2 + \bar{v}'_z{}^2) \right) \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

Используя определение $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ и вычисляя с этой функцией поток энергии $\mathbf{q} = \int \mathbf{v} \varepsilon \delta f d^3 p$, получаем коэффициент теплопроводности вращающегося плазменного цилиндрика:

$$\kappa = \frac{N_0 k^2 T \exp(\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2)}{m\nu} \left(\frac{5}{2} + 12\bar{v}_x^2 \bar{v}_z^4 + \right. \\ + 12\bar{v}_y^2 \bar{v}_z^4 - \frac{15}{2} \bar{v}_z^2 - 21\bar{v}_z^4 + 10\bar{v}_z^6 + 4\bar{v}_z^8 + 2\bar{v}_x^4 \bar{v}_z^2 + \\ + 2\bar{v}_y^4 \bar{v}_z^2 + 4\bar{v}_x^2 \bar{v}_y^2 \bar{v}_z^2 + 8\bar{v}_x^2 \bar{v}_y^2 \bar{v}_z^4 + 4\bar{v}_x^4 \bar{v}_z^4 + \\ + 4\bar{v}_y^4 \bar{v}_z^4 + 8\bar{v}_x^2 \bar{v}_z^6 + 8\bar{v}_y^2 \bar{v}_z^6 + \\ \left. + \frac{4\mu_0}{kT} \bar{v}_z^2 \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \bar{v}_x^2 + \frac{1}{2} \bar{v}_y^2 + \bar{v}_x^2 \bar{v}_z^2 + \bar{v}_y^2 \bar{v}_z^2 + 4\bar{v}_z^2 + \bar{v}_z^4 \right] \right).$$

Выбор средней скорости вращения и усреднение по углам приводит к следующему выражению для эффективной величины коэффициента теплопроводности:

$$\kappa = \frac{\bar{N} k^2 T}{m\nu} \left(1.7 + 12.728 \frac{\mu_0}{kT} \right). \quad (26)$$

Значение в круглой скобке данного выражения отличается от прежнего коэффициента $5/2$ (см. [15]).

2.4. Затухание когерентной составляющей поля

Наличие локальных вращений приводит к тому, что по отношению к распространяющейся волне плазму необходимо рассматривать как случайно-неоднородную среду и искать статистические закономерности поведения волны. Поскольку в общем случае диэлектрическая проницаемость существенно меняется при изменении направления ориентации вращающегося цилиндрика по отношению к направлению падающей волны, необходимо рассматривать случай сильных флуктуаций [16].

Для поля волны из уравнений Максвелла легко получить следующее точное уравнение [16]:

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D} = 0, \quad (27)$$

где $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$. Вторым членом, тождественно равным $\text{grad} [(\nabla \varepsilon / \varepsilon) \mathbf{E}]$, можно пренебречь в случае, если радиус корреляций случайной среды много больше длины волны, $l \gg \lambda$, (пренебрежение деполяризации). В этом же случае легко следующим образом получить параболическое уравнение.

Поле \mathbf{E} волны выбираем направленным по оси z , а направление распространения — по оси x . Для удобства расчетов будем считать волну падающей нормально, а случайную среду — плоско-слоистой: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon(\omega, \theta(x), \varphi(x)) \delta_{ij}$, где углы ориентации цилиндров $\theta(x)$, $\varphi(x)$ — случайные функции. Выделяем среднее значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r}) = \langle \varepsilon \rangle (1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}))$, тогда волновое число, отвечающее этому среднему значению, определяется из $k^2 = \omega^2 \langle \varepsilon \rangle / c^2$.

Считая, что при распространении волны вдоль оси x ее фаза изменяется как ikx , представляем поле в виде

$$E_z(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) \exp(ikx),$$

где амплитуда $U(\mathbf{r})$ — медленно меняющаяся функция координаты x . Подставляя все эти определения в формулу (27), получаем параболическое уравнение для величины $U(\mathbf{r})$:

$$2ik \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} + \nabla_t^2 U(\mathbf{r}) + k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = 0. \quad (28)$$

Здесь оператор Лапласа действует по поперечным координатам.

Для простоты расчетов сделаем предположение о полной независимости флуктуаций направления вращения цилиндров вдоль направления распространения волны (дельта-коррелированности $\langle \varepsilon_1(x, \rho) \varepsilon_1(x', \rho') \rangle = \delta(kx - kx') A(\rho - \rho')$) и о гауссовом распределении случайных флуктуаций. Чтобы найти уравнение для среднего поля, надо раскрыть коррелятор по формуле Фурутцу–Новикова [16]:

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \int dV' \langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) \varepsilon_1(\mathbf{r}') \rangle \left\langle \frac{\delta U(\mathbf{r})}{\delta \varepsilon_1(\mathbf{r}')} \right\rangle. \quad (29)$$

В результате раскрытия коррелятора имеем

$$\langle \varepsilon_1(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \rangle = \frac{i}{4} A_0 \langle U(\mathbf{r}) \rangle,$$

где величина A_0 дается усреднением

$$A_0 = \left\langle \left(\frac{\varepsilon(\omega, \theta, \varphi)}{\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle} - 1 \right)^2 \right\rangle_{\theta, \varphi}. \quad (30)$$

Вводя обозначение $\alpha_0 = kA_0/8$, получаем уравнение для среднего поля [16],

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_t^2 + 2ik\alpha_0 \right] \langle U(\mathbf{r}) \rangle = 0,$$

со следующим решением:

$$\langle U(\mathbf{r}) \rangle = U_0(\mathbf{r}) \exp(-\alpha_0 x),$$

где $U_0(\mathbf{r})$ — поле в пространстве, свободном от флуктуаций.

Таким образом, интенсивность когерентной составляющей поля определяется следующим выражением:

$$I(\mathbf{r}) = |U_0(\mathbf{r})|^2 \exp(-2\alpha_0 x), \quad (31)$$

а параметр $2\alpha_0$ по величине равен полному сечению рассеяния единичного объема среды (рассеяние возникает за счет случайных локальных вращений элементов плазмы).

Для получения количественной зависимости α_0 можно воспользоваться определением (30), куда в качестве диэлектрической проницаемости надо подставить ее выражение из (22). Поскольку в нашем случае для электромагнитных волн $\omega/k = c/\sqrt{\varepsilon_t} > c \gg v_T$, т.е. $\omega \gg kv_T$, можно воспользоваться приближенным выражением из п. 2.2, которое запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_t = 1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} kn A_1 G_0.$$

Здесь введено обозначение

$$G_0 = 1 + 2 \sin^2 \theta - 4 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi.$$

В итоге величина α_0 определится из следующего выражения:

$$\alpha_0 = \frac{\Omega_e^4 kn^2}{8c\omega^3} \frac{\langle A_1^2 G_0^2 \rangle - \langle A_1 G_0 \rangle^2}{\left(1 - \frac{\Omega_e^2}{\omega^2} kn \langle A_1 G_0 \rangle \right)^{3/2}}.$$

Количественная зависимость после усреднений имеет вид

$$\alpha_0 = \frac{\Omega_e^4}{c\omega^3} \frac{1.97}{(1 - 4.91 \Omega_e^2 / \omega^2)^{3/2}}. \quad (32)$$

Отношение

$$\frac{\alpha_0}{k} = \frac{A_0}{8} = \frac{\Omega_e^4}{\omega^4} \frac{1.97}{(1 - 4.91 \Omega_e^2 / \omega^2)^2}$$

показывает, что вблизи пороговой частоты рассеяние когерентного поля является существенным эффектом, но с ростом частоты «относительное» рассеяние когерентного поля уменьшается.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отличие от прямолинейного движения частиц в нейтральном газе, движение заряженных частиц в плазме происходит по криволинейным траекториям, т. е. по участкам окружностей. Движение это осуществляется в бессиловом поле. В данной работе рассмотрено поведение плазмы с учетом локальных микровращений и показано, что наличие локально вращающихся структур меняет эффективные электродинамические свойства плазмы и влияет на характеристики распространяющихся волн, несмотря на то что средняя скорость вращения плазмы равна нулю. Так, например, эффективное значение продольной части диэлектрической проницаемости при больших частотах оказывается меньше, чем та же величина, но рассчитанная без учета локально-вращательных структур (различие уменьшается с ростом частоты). Рассчитанный спектр колебаний оказывается несколько смещенным в сторону больших частот. Для поперечной составляющей диэлектрической проницаемости эффективное значение также меняется. При больших волновых числах различие между спектрами исчезает, а при малых k пороговое значение частоты примерно в 2.2 раза больше аналогичной величины, полученной без учета вращений.

Учет локальных вращений приводит к увеличению расчетной величины эффективной электропроводности и уменьшению эффективного коэффициента электронной теплопроводности плазмы. Изменение локальных вращений по направлению приводит к тому, что плазму надо рассматривать как случайную флуктуирующую среду. Было найдено выражение для интенсивности когерентной составляющей поля и показано, что наибольшее рассеяние когерентного поля наблюдается вблизи пороговой частоты, а с ростом частоты коэффициент ослабления когерентной интенсивности уменьшается как $1/\omega^3$.

Таким образом, на ряде примеров было показано, что учет локальных вращений может способствовать более адекватному количественному описанию свойств плазмы (если стремиться к строго алгоритмическому количественному описанию и сопоставлению с экспериментами, а не просто к совпадению по порядку величины).

В случае наличия средних полей свойства плазмы существенно меняются, также локальные микровращения уже нельзя считать равномерно распределенными по углам. Данный случай требует

отдельного рассмотрения. Хотя формально всегда средняя линейная скорость на участке окружности имеет порядок тепловой, случаи сильно неидеальной плазмы, наличия потоков частиц или тепла на границах также требуют отдельного рассмотрения.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-02-17315).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Lehnert, Nucl. Fusion **11**, 485 (1971).
2. D. Ward, Plasma Phys. Control. Fusion **38**, 1201 (1996).
3. J. Connor and H. R. Wilson, Plasma Phys. Control. Fusion **42**, R1 (2000).
4. L. Carraro, M. E. Puiatti, F. Sattin, P. Scarin, and M. Valisa, Plasma Phys. Control. Fusion **40**, 1021 (1998).
5. T. Fulop and P. Helander, Phys. Plasmas **6**, 3066 (1999).
6. А. Н. Романников, Физика плазмы **29**, 691 (2003).
7. S. N. Arteha, Phys. Plasmas **3**, 2849 (1996).
8. J. Li, Y. Kishimoto, and T. Tuda, Plasma Phys. Control. Fusion **42**, 443 (2000).
9. В. Ю. Забурдаев, В. В. Смирнов, К. В. Чукбар, Физика плазмы **30**, 241 (2004).
10. О. Г. Чхегиани, ЖЭТФ **126**, 369 (2004).
11. С. Н. Артеха, Н. С. Ерохин, Электромагн. явления **5**, 3 (2005).
12. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
13. R. Schlickeiser and H. Mause, Phys. Plasmas **2**, 4025 (1995).
14. J. D. Jackson, J. Nucl. Energy, Part C, Plasma. Phys. № 1, 171 (1960).
15. Н. Кролл, А. Трайвелпис, *Основы физики плазмы*, Мир, Москва (1975).
16. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах*, т. 2, Мир, Москва (1981).