ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 2, стр. 357–380

МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА В СРЕДЕ С КРУПНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Е. Е. Городничев[*], *А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин*

Московский государственный инженерно-физический институт
115409, Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 августа 2006 г.

Показано, что многократное рассеяние поляризованного света в неупорядоченной среде с крупномасштабными неоднородностями можно представить как независимое распространение трех основных мод — интенсивности, линейно и циркулярно поляризованных мод. Слабое взаимодействие между основными модами может быть учтено по теории возмущений и приводит к возникновению «обертонов» — дополнительных поляризационных мод. Из векторного уравнения переноса получены транспортные уравнения для основных и дополнительных мод. Для практически важных случаев пространственной диффузии и малоуглового многократного рассеяния найдены их аналитические решения. Полученные соотношения хорошо согласуются с экспериментальными данными и результатами численных расчетов и позволяют объяснить наблюдаемые на опыте различия в деполяризации линейно и циркулярно поляризованного света.

PACS: 42.25.Fx, 42.25.Ja

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние пятнадцать лет большое внимание уделяется исследованию распространения поляризованного света в случайно-неоднородных средах с крупными (больше длины волны) рассеивателями (см., например, [1–23]). Интерес к этой проблеме обусловлен различными приложениями [5–7, 14–19, 23]. Одной из наиболее ярких обнаруженных закономерностей является относительно медленная деполяризация поляризованного по кругу света (циркулярная поляризация может сохраняться даже после изотропизации потока излучения по направлениям [2–4, 7, 24]).

При распространении света в случайно-неоднородной среде можно выделить два фундаментальных механизма деполяризации [24]. «Геометрический» механизм обусловлен эффектом Рытова [25] — плоскость поляризации линейно поляризованного света поворачивается вместе со световым лучом, который остается поляризованным вдоль всей траектории распространения. При многократном рассеянии плоскости поляризации различных лучей становятся хаотически ориентированными. В результате по мере изотропизации пучка по направлениям наступает и деполяризация света. «Динамический» механизм обусловлен различием амплитуд однократно рассеянных волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния. Деполяризация происходит из-за случайного разброса амплитуд кросс-поляризованных волн, возникающего в результате многих актов рассеяния.

Существование двух различных механизмов деполяризации является причиной различий в затухании линейно и циркулярно поляризованных волн [24]. При рассеянии линейно поляризованного света действуют оба механизма деполяризации. В зависимости от оптических характеристик рассеивающих неоднородностей, их формы и распределения по размерам «геометрический» механизм может быть доминирующим или играть роль того же порядка, что и «динамический» механизм. Деполяризация циркулярно поляризованного света происходит только за счет «динамического» механизма (поляризованный по кругу свет представляет собой суперпозицию кросс-поляризованных волн равной амплитуды, сдвинутых по фазе на $\pi/2$; рытовский поворот не меняет фазовых и амплитудных соотноше-

[*]E-mail: gorodn@theor.mephi.ru

ний между ними) [24]. В средах с крупномасштабными слабопреломляющими неоднородностями, когда однократное рассеяние происходит преимущественно на малые углы, «динамическая» деполяризация становится заметной только на расстояниях, превышающих в несколько раз длину изотропизации (т.е. транспортную длину l_{tr} упругого рассеяния). Именно это обстоятельство объясняет обнаруженный в эксперименте и численных расчетах [2–4, 7] эффект относительно медленного затухания циркулярной поляризации.

До последнего времени большинство теоретических исследований деполяризации света в многократно рассеивающих средах основывалось на численном решении векторного уравнения переноса излучения [1, 4, 11–13, 19]. Аналитические результаты были получены только для рэлеевского рассеяния на малых частицах [1, 26, 27], а также при прохождении через очень толстые слои, когда состояние поляризации рассеянного света не зависит от поляризации падающего пучка (см., например, [1, 28]).

В настоящей работе развит метод расцепления векторного уравнения переноса, основанный на использовании резкой анизотропии однократного рассеяния на крупномасштабных неоднородностях ($1 - \langle\cos\gamma\rangle \ll 1$, где $\langle\cos\gamma\rangle$ — средний косинус угла однократного рассеяния). В условиях преимущественного рассеяния вперед матрица однократного рассеяния в циркулярном представлении [29] (см. также [1, 28, 30]) оказывается почти диагональной — недиагональные элементы много меньше диагональных. В первом приближении недиагональными элементами можно пренебречь и векторное уравнение переноса распадается на три независимых транспортных уравнения для основных поляризационных мод — интенсивности, циркулярно и линейно поляризованных мод. Учет в следующих приближениях недиагональных элементов приводит к возбуждению дополнительных поляризационных мод (обертонов). С помощью предложенного метода вычислены параметры Стокса света в многократно рассеивающей среде с крупномасштабными неоднородностями для двух предельных режимов распространения излучения — диффузии и малоуглового многократного рассеяния.

Полученные результаты удовлетворительно согласуются с результатами численного моделирования [4, 13] и экспериментальными данными [4, 7, 17] и могут представлять интерес для применения в оптических исследованиях неоднородных сред.

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть на среду по нормали к поверхности падает широкий поляризованный пучок света с длиной волны λ. Среда предполагается статистически изотропным неупорядоченным ансамблем крупномасштабных (размер a больше длины волны λ) рассеивателей с относительным показателем преломления n.

Поляризационное состояние рассеянного света описывается четырьмя параметрами Стокса I, Q, U, V, которые принято объединять в вектор-параметр Стокса [1, 27, 30]

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_\parallel E_\parallel^* + E_\perp E_\perp^* \rangle \\ \langle E_\parallel E_\parallel^* - E_\perp E_\perp^* \rangle \\ \langle E_\parallel E_\perp^* + E_\parallel^* E_\perp \rangle \\ i\langle E_\parallel E_\perp^* - E_\parallel^* E_\perp \rangle \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Угловые скобки в (1) обозначают усреднение по различным реализациям расположения рассеивателей.

Параметры Стокса и компоненты напряженности электрического поля $E_\parallel, E_\perp$ определены в системе ортов $\{\mathbf{e}_\parallel = \partial\mathbf{n}/\partial\theta,\ \mathbf{e}_\perp = \mathbf{e}_\parallel \times \mathbf{n},\ \mathbf{n}\}$, где вектор $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$ указывает направление распространения электромагнитной волны. Вектор $\mathbf{e}_\parallel$ лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0$ ($\mathbf{n}_0$ — вектор внутренней нормали к поверхности), вектор $\mathbf{e}_\perp$ перпендикулярен этой плоскости (рис. 1).

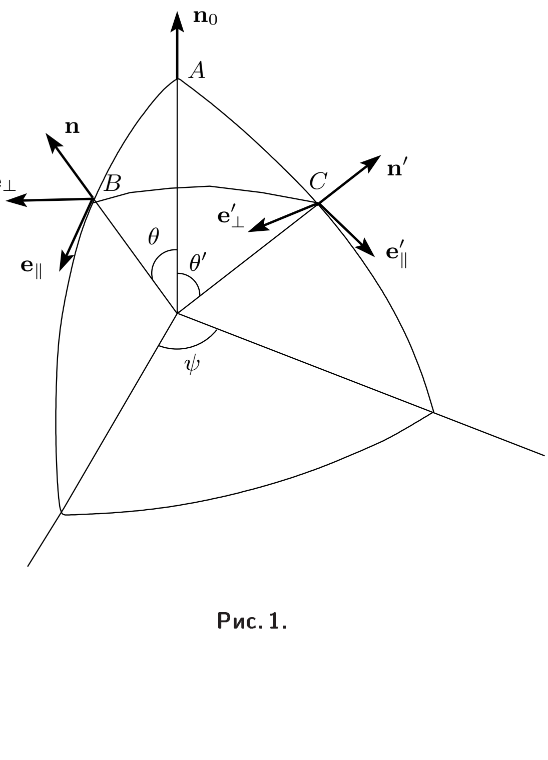

Рис. 1.

Параметры Стокса подчиняются векторному уравнению переноса [1, 27, 31],

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z}+\sigma_{tot}\right\}\hat{S}(z,\mathbf{n})=\sigma\int d\mathbf{n}'\hat{P}(\mathbf{n},\mathbf{n}')\hat{S}(z,\mathbf{n}'), \quad (2)$$

где $\sigma_{tot}=\sigma+\sigma_a$ — полный коэффициент затухания, σ, σ_a — коэффициенты рассеяния и поглощения.

Входящая в формулу (2) матрица $\hat{P}(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ связана с матрицей рассеяния $\hat{P}(\cos\gamma)$ ($\cos\gamma=\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$) в плоскости рассеяния (т. е. в плоскости, образованной векторами $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$) соотношением

$$\hat{P}(\mathbf{n},\mathbf{n}')=\hat{L}(\pi-\beta)\hat{P}(\cos\gamma)\hat{L}(-\beta'). \quad (3)$$

Матрица

$$\hat{L}(-\beta')=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 2\beta'&-\sin 2\beta'&0\\0&\sin 2\beta'&\cos 2\beta'&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad (4)$$

описывает преобразование параметров Стокса падающего излучения при переходе из системы ортов ($\mathbf{e}'_\parallel$, $\mathbf{e}'_\perp$, $\mathbf{n}'$) в плоскость рассеяния (рис. 1). Аналогично (4) определяется матрица $\hat{L}(\pi-\beta)$, отвечающая обратному преобразованию из плоскости рассеяния в систему отсчета ($\mathbf{e}_\parallel$, $\mathbf{e}_\perp$, $\mathbf{n}$), связанную с направлением распространения рассеянного излучения. Входящие в (3) углы определяются формулами

$$\cos 2\beta=1-\frac{2(1-\mu'^2)(1-\cos^2\psi)}{1-(\mathbf{n}\mathbf{n}')^2},$$

$$\sin 2\beta=\frac{2\sqrt{1-\mu'^2}(\mu'\sqrt{1-\mu^2}-\mu\sqrt{1-\mu'^2}\cos\psi)\sin\psi}{1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')^2},$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\mu\mu'+\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\cos\psi, \quad \mu=\cos\theta,$$

$$\mu'=\cos\theta', \quad \psi=\varphi-\varphi'.$$

Функции $\cos 2\beta'$ и $\sin 2\beta'$ отличаются от $\cos 2\beta$, $\sin 2\beta$ заменой μ на μ'.

В оптически изотропной среде со сферическими рассеивателями входящая в формулу (3) матрица $\hat{P}(\cos\gamma)$ имеет следующий вид (см., например, [1, 27, 30]):

$$\hat{P}(\cos\gamma)=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&0\\b_1&a_1&0&0\\0&0&a_2&b_2\\0&0&-b_2&a_2\end{pmatrix}. \quad (5)$$

Величина $a_1(\cos\gamma)$ в (5) имеет смысл индикатрисы — нормированного дифференциального сечения рассеяния — и удовлетворяет равенству

$$2\pi\int_0^\pi \sin\gamma d\gamma a_1(\cos\gamma)=1. \quad (6)$$

Для частиц с заданными оптическими параметрами и радиусом входящие в (5) матричные элементы a_i, b_i выражаются через амплитуды рассеяния $A_\parallel$ и $A_\perp$ волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния [30]:

$$a_1(\cos\gamma)=\frac{1}{2\sigma_0}(|A_\parallel(\cos\gamma)|^2+|A_\perp(\cos\gamma)|^2), \quad (7)$$

$$a_2(\cos\gamma)=\frac{1}{\sigma_0}\mathrm{Re}A_\parallel(\cos\gamma)A_\perp^*(\cos\gamma), \quad (8)$$

$$b_1(\cos\gamma)=\frac{1}{2\sigma_0}(|A_\parallel(\cos\gamma)|^2-|A_\perp(\cos\gamma)|^2), \quad (9)$$

$$b_2(\cos\gamma)=\frac{1}{\sigma_0}\,\mathrm{Im}\,A_\parallel^*(\cos\gamma)A_\perp(\cos\gamma). \quad (10)$$

Здесь σ_0 — сечение рассеяния на отдельной частице; коэффициент и сечение рассеяния связаны соотношением $\sigma=n_0\sigma_0$, n_0 — число рассеивателей в единице объема. Если размеры и оптические параметры рассеивателей различаются, соотношения (7)–(10) необходимо усреднить с соответствующей функцией распределения (например, по размеру рассеивателей и т. п.).

В борновском приближении ($ka(n-1)\ll 1$, где $k=2\pi/\lambda$) амплитуды рассеяния $A_\parallel$ и $A_\perp$ связаны между собой соотношением [30]

$$A_\parallel(\cos\gamma)=A_\perp(\cos\gamma)\cos\gamma, \quad (11)$$

и выражения (7)–(10) дополнительно упрощаются. В этой ситуации, в частности, $b_2=0$, а матрица (5) есть произведение формфактора $|A_\perp|^2/\sigma_0$ на рэлеевскую матрицу рассеяния [27, 30].

Во многих практических ситуациях недиагональным элементом b_2, который отвечает за взаимодействие между линейной и циркулярной поляризациями, можно пренебречь [1, 32]. В этом предположении уравнение для четвертого параметра Стокса V оказывается не связанным с уравнениями для остальных параметров Стокса, и поэтому распространение циркулярно и линейно поляризованных пучков в рассеивающей среде можно рассматривать независимо.

Отдельное уравнение для V (здесь и далее предполагаем $b_2 = 0$) имеет вид

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} V(z,\mu) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' a_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')V(z,\mu'). \quad (12)$$

В уравнении для V присутствует дополнительное «поглощение», которое определяется разностью [24],

$$\sigma_{dep} = \sigma(1 - 2\pi \int_0^\pi \sin\gamma d\gamma a_2(\cos\gamma)). \quad (13)$$

Дополнительное затухание V, обусловленное σ_{dep}, описывает деполяризацию циркулярно поляризованного пучка при многократном рассеянии [24].

Интенсивность I и четвертый параметр Стокса V являются соответственно скаляром и псевдоскаляром [30, 33]. При поворотах в пространстве эти величины не меняются. Напротив, второй Q и третий U параметры Стокса при поворотах преобразуются друг через друга (за «перепутывание» Q и U отвечает центральный блок в матрице $\hat{L}(\alpha)$):

$$Q' = Q\cos 2\alpha + U\sin 2\alpha,$$

$$U' = -Q\sin 2\alpha + U\cos 2\alpha.$$

Это обстоятельство оказывается существенным при рассеянии, поскольку матрица (3) включает в себя два преобразования поворота. Они переводят систему ортов $(\mathbf{e}'_\parallel,\ \mathbf{e}'_\perp,\ \mathbf{n}')$, в которой определен вектор Стокса $\hat{S}(\mathbf{r},\mathbf{n}')$, в систему $(\mathbf{e}_\parallel,\ \mathbf{e}_\perp,\ \mathbf{n})$, в которой определен вектор $\hat{S}(\mathbf{r},\mathbf{n})$. В связи с этим, даже если считать матрицу рассеяния $\hat{P}$ (5) диагональной и пренебречь различием между диагональными элементами a_1 и a_2, уравнения для параметров Стокса Q и U все равно будут связаны между собой.

Чтобы исключить перемешивание Q и U при поворотах в пространстве, следуя работе [29] (см. также [1, 28]), введем вместо параметров Стокса Q и U новые величины

$$I_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q \mp iU). \quad (14)$$

В отличие от параметров Стокса Q и U, каждая из определенных равенством (14) величин будет при вращениях преобразовываться сама через себя:

$$I'_{\pm 2} = \exp(\pm 2i\alpha)I_{\pm 2}.$$

Для описания состояния линейной поляризации излучения будем использовать вектор

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iU) \\ I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iU) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 \\ I_0 \\ I_{-2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Преобразование от представления параметров Стокса (1) к представлению (15) (оно соответствует «циркулярному» представлению [1, 29, 30]),

$$\hat{M}\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iU) \\ I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iU) \end{pmatrix}$$

осуществляется с помощью унитарной матрицы $\hat{M}$,

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Транспортное уравнение для вектора $\hat{I}$ имеет вид

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} \hat{I}(z,\mathbf{n}) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}\ \hat{d}(\mathbf{n},\mathbf{n}')\hat{I}(z,\mathbf{n}'), \quad (17)$$

где матрица $\hat{d}(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ связана с матрицей $\hat{P}(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ (3) соотношением

$$\hat{d} = \hat{M}\hat{P}\hat{M}^{-1}. \quad (18)$$

В представлении (15) аналогом формулы (3), устанавливающей связь с матрицей в плоскости рассеяния, будет следующее соотношение:

$$\hat{d}(\mathbf{n},\mathbf{n}') = \hat{\mathcal{L}}(\pi - \beta)\hat{d}(\cos\gamma)\hat{\mathcal{L}}(-\beta'), \quad (19)$$

где $\hat{d}(\cos\gamma)$ есть матрица $\hat{d}(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ в плоскости рассеяния:

$$\hat{d}(\cos\gamma) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 + a_2}{2} & \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{a_1 - a_2}{2} \\ \frac{b_1}{\sqrt{2}} & a_1 & \frac{b_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{a_1 - a_2}{2} & \frac{b_1}{\sqrt{2}} & \frac{a_1 + a_2}{2} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

а матрица

$$\hat{\mathcal{L}}(-\beta') = \begin{pmatrix} \exp(-2i\beta') & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(2i\beta') \end{pmatrix} \quad (21)$$

описывает преобразование параметров $\hat{I}$ падающего излучения при переходе из плоскости $(\mathbf{n}', \mathbf{n}_0)$ в плоскость рассеяния $(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$.Соответственно матрица $\hat{\mathcal{L}}(\pi - \beta)$ описывает преобразование параметров $\hat{I}$ рассеянного излучения при переходе из плоскости рассеяния в плоскость $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$.

Перемножив матрицы в соотношении (19), выражение для $\hat{d}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ можно записать в явном виде:

$$\hat{d}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{pmatrix} \dfrac{a_1 + a_2}{2} \exp(2i\chi_+) & \dfrac{b_1}{\sqrt{2}} \exp(-2i\beta) & \dfrac{a_1 - a_2}{2} \exp(2i\chi_-) \\ \dfrac{b_1}{\sqrt{2}} \exp(-2i\beta') & a_1 & \dfrac{b_1}{\sqrt{2}} \exp(2i\beta') \\ \dfrac{a_1 - a_2}{2} \exp(-2i\chi_-) & \dfrac{b_1}{\sqrt{2}} \exp(2i\beta) & \dfrac{a_1 + a_2}{2} \exp(-2i\chi_+) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Углы $\chi_\pm$ в матрице (22) равны

$$\chi_\pm = \pi - (\beta \pm \beta').$$

Из выражения (22) нетрудно понять, в чем состоит преимущество перехода к «циркулярному» представлению (15) в случае рассеяния на крупных частицах.

Однократное рассеяние на крупномасштабных неоднородностях происходит преимущественно вперед. В этой области углов различие между амплитудами $A_\parallel(\cos\gamma)$ и $A_\perp(\cos\gamma)$ оказывается малым [30] и поэтому, согласно формулам (7)–(9), недиагональные элементы матриц (20) или (22) (в представлении (15) матрицы $\hat{d}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ и $\hat{d}(\cos\gamma)$ отличаются только фазовыми множителями) оказываются много меньше диагональных. Порядок величины недиагональных элементов при рассеянии под малыми углами проще всего оценить для «борновских» рассеивателей (см. (11)). Согласно (11), (20) или (22),

$$b_1(\cos\gamma) \approx (1 - \cos\gamma) a_1(\cos\gamma) \approx \frac{1}{2}\gamma^2 a_1(\cos\gamma), \quad (23)$$

$$\frac{1}{2}(a_1(\cos\gamma) - a_2(\cos\gamma)) \approx \frac{1}{8}\gamma^4 a_1(\cos\gamma). \quad (24)$$

В первом приближении недиагональными элементами (22) можно пренебречь. Тогда векторное уравнение (17) сразу распадается на независимые уравнения для каждой из компонент вектора $\hat{I}$ (15). Связь между уравнениями для отдельных величин I_0 и $I_{\pm 2}$ возникает только в следующем приближении при учете недиагональных элементов матрицы (22).

Для иллюстрации указанных выше свойств матрицы рассеяния на рис. 2 приведены результаты численных расчетов угловой зависимости ее элементов. Расчеты выполнены для сред, которые часто используются в экспериментах и численном моделировании — водной суспензии частиц латекса (относительный показатель преломления $n = 1.20$) и модели облачной среды Cloud 1 [34]. Для частиц латекса заданного радиуса a расчеты проводились на основе формул Ми для $A_\parallel$ и $A_\perp$ [1, 30]. Для модели Cloud 1, в которой частицы распределены по размеру, исходные численные данные взяты из таблиц [34].

3. «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ» И «ДИНАМИЧЕСКИЙ» МЕХАНИЗМЫ ДЕПОЛЯРИЗАЦИИ

Переход от обычных параметров Стокса к представлению (15) и, соответственно, векторному уравнению переноса в виде (17) с матрицей рассеяния (22) позволяет наглядно показать, что деполяризация волн в среде обусловлена двумя разными причинами [35–37] — искривлением траекторий световых лучей и увеличением разброса амплитуд кросс-поляризованных волн при многократном рассеянии.

С искривлением траектории лучей связан «геометрический» механизм деполяризации [38, 39]. Геометрический механизм обусловлен «рытовским» поворотом плоскости поляризации при распространении света вдоль искривленной неплоской траектории [25]. Плоскость поляризации поворачивается согласованно с искривлением луча — свет остается линейно поляризованным вдоль всей траектории распространения. Наблюдаемая при многократном рассеянии деполяризация есть результат сложения поляризации лучей, распространявшихся вдоль различных случайных траекторий. Поэтому деполяризация наступает одновременно с изотропизацией потока по направлениям [24].

«Динамический» (по терминологии [38, 40] «дифракционный») механизм возникает из-за различия между амплитудами рассеяния $A_\parallel$ и $A_\perp$ волн, поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости рассеяния [40].

Впервые на существование двух разных механизмов деполяризации указал Кравцов [38] при исследовании рассеяния волн в турбулентной атмосфере. В случае, рассмотренном в работе [38], искривление траекторий лучей оказывается незначительным и преобладает «динамическая» деполяризация. Для диффузии света в средах с дискретными неоднородностями характерным является сильное искривление траекторий лучей. Поэтому доминирующую роль играет геометрический механизм деполяризации.

В чистом виде «геометрическую» деполяризацию можно получить, положив $A_\parallel = A_\perp$ [35]. При однократном рассеянии на малые углы равенство $A_\parallel = A_\perp$ можно рассматривать как первое приближение [30]. В приближении $A_\parallel = A_\perp$ однократное рассеяние описывается диагональной матрицей

$$\hat{d} \approx \hat{d}^{geom} = a_1 \hat{\mathcal{L}}(\pi - \beta - \beta') = = a_1 \begin{pmatrix} \exp(2i\chi_+) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-2i\chi_+) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Уравнение (17) с матрицей рассеяния (22) распадается на независимые уравнения для величин $I = I_{scal}$ и $I_{\pm 2}$.

Интенсивность $I = I_{scal}$ подчиняется обычному скалярному уравнению переноса

$$\left\{\mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} I_{scal}(z, \mu) = = \sigma \int d\mathbf{n}' a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') I_{scal}(z, \mu'). \quad (26)$$

Уравнения для $I_{\pm 2}$ могут быть сведены к одному уравнению. Если в угловой зависимости $I_{\pm 2}$ выделить фазовые множители, отвечающие за преобразование $I_{\pm 2}$ при поворотах в пространстве,

$$I_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} W \exp(\pm 2i\varphi), \quad (27)$$

то для величины W, которая в случае нормального падения не зависит от азимутального угла, $W = W(z, \mu)$, получим уравнение [35]

$$\left\{\mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} W(z, \mu) = = \sigma \int d\mathbf{n}' a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') \exp(2i(\chi_+ - \psi)) W(z, \mu'). \quad (28)$$

Уравнения (26), (28) описывают распространение и деполяризацию линейно поляризованного света в «геометрическом» приближении.

При многократном рассеянии, когда направление распространения падающего света $\mathbf{n}_0$ и направления распространения рассеянных волн $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ не лежат в одной плоскости (рис. 1), величина $(\chi_+ - \psi)$ в уравнении (28) оказывается отличной от нуля. Разность углов

$$\chi_+ - \psi = \pi - \beta - \beta' - (\varphi - \varphi') \quad (29)$$

представляет собой разность углов при вершине соответствующих сферического и плоского треугольников (так называемый сферический избыток [41]). Благодаря фазовому множителю в уравнении для W (28) появляется эффективное дополнительное «поглощение»

$$\sigma \int d\mathbf{n}' a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')(1 - \exp(2i(\chi_+ - \psi))). \quad (30)$$

Дополнительное «поглощение» (30) обеспечивает более быстрое затухание величины W по сравнению с интенсивностью I и описывает деполяризацию линейно поляризованного света за счет геометрического — рытовского — механизма.

Поскольку однократное рассеяние на крупных неоднородностях происходит преимущественно на малые углы, коэффициент эффективного «поглощения» (30) оказывается малым по сравнению с коэффициентом упругого рассеяния σ, и поэтому деполяризация света происходит медленно, в результате многих актов рассеяния.

При однократном рассеянии на малые углы [36]

$$\sigma \int d\mathbf{n}' a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\,(1 - \exp(2i(\chi_+ - \psi))) \approx \approx 2\sigma_{tr} \frac{1-\mu}{1+\mu}, \quad (31)$$

где $\sigma_{tr} = \sigma(1 - \langle\cos\gamma\rangle)$ — транспортный коэффициент упругого рассеяния. Согласно (31), деполяризация линейно поляризованного света происходит на расстояниях порядка транспортной длины упругого рассеяния $l_{tr} = (\sigma_{tr})^{-1}$ [4, 24].

Следует отметить, что в приближении $A_\parallel = A_\perp$ деполяризация циркулярно поляризованного света не происходит. В этом приближении уравне-

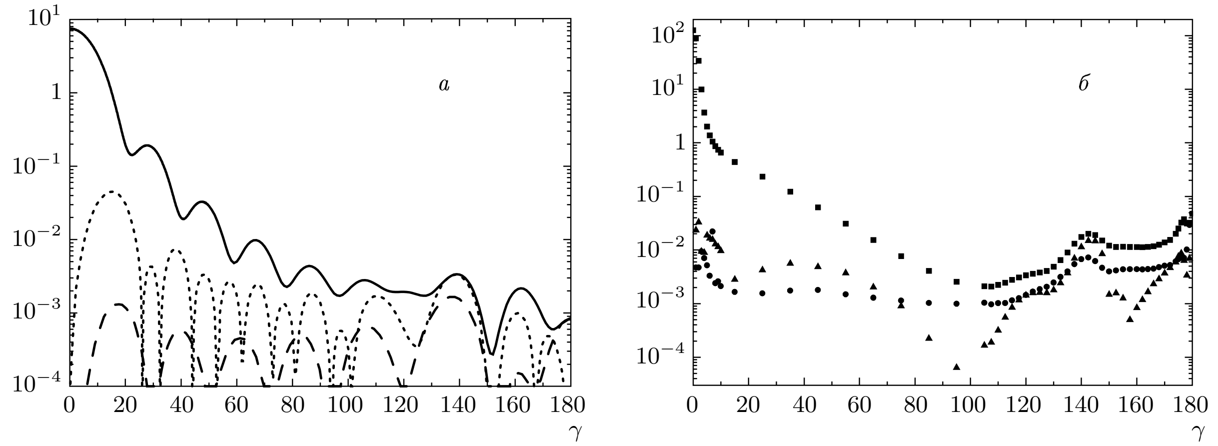

Рис. 2. Угловая зависимость элементов матрицы рассеяния (20): *а* — водная суспензия частиц латекса ($ka = 10$), сплошная кривая — индикатриса a_1, штриховая — $(a_1 - a_2)/2$, пунктирная — $|b_1|$; *б* — модель Cloud 1, ■ — индикатриса a_1, ● — $(a_1 - a_2)/2$, ▲ — $|b_1|$

ние (12) совпадает со скалярным уравнением переноса (26) для интенсивности. Дополнительное «поглощение» (13) обращается в нуль. С физической точки зрения это связано с тем, что «рытовский» поворот плоскости поляризации не влияет на состояние циркулярно поляризованного света. Поляризованную по кругу волну можно представить как суперпозицию двух сдвинутых по фазе на $\pi/2$ линейных кросс-поляризованных волн равной амплитуды. При распространении вдоль искривленной траектории плоскости поляризации обеих волн поворачиваются, но при этом фазовый сдвиг между ними и амплитуда не меняются. Деполяризация циркулярно поляризованного света не происходит.

Если в матрице рассеяния (22) пренебречь разницей между значениями углов β, β' сферического треугольника и значениями соответствующих углов в треугольнике на плоскости (т. е. положить $\chi_+ - \psi = 0$, см. также рис. 1), то получим векторное уравнение переноса, в котором за деполяризацию света отвечает только динамический механизм.

Именно благодаря динамическому механизму разрушается циркулярная поляризация. В уравнении (12) для четвертого параметра Стокса V за счет разницы между $A_\parallel$ и $A_\perp$ (и, соответственно, между a_1 и a_2 (см. (7), (8))) возникает дополнительное «поглощение» (13), которое описывает деполяризацию поляризованного по кругу света.

Для крупных частиц коэффициент динамической деполяризации (13) оказывается существенно меньше транспортного коэффициента рассеяния (отношение σ_{dep}/σ_{tr}, рассчитанное по теории Ми [1, 30],

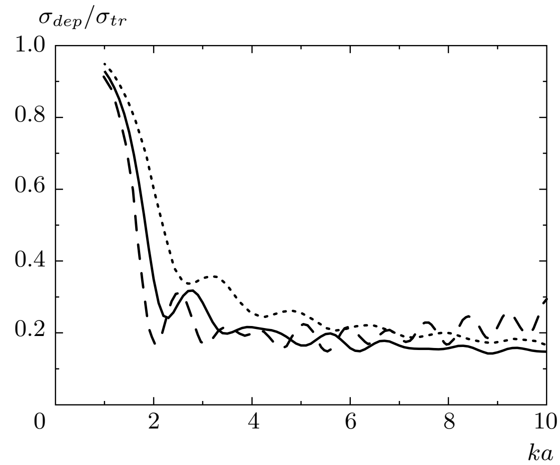

Рис. 3. Зависимость отношения σ_{dep}/σ_{tr} от радиуса рассеивателей. Сплошная кривая — водная суспензия частиц латекса, $n = 1.20$, штриховая — капли воды в воздухе, $n = 1.33$, пунктирная — частицы кварца в воде, $n = 1.03$

представлено на рис. 3). Поэтому в неупорядоченных средах с крупномасштабными неоднородностями геометрический механизм является доминирующим механизмом деполяризации линейно поляризованного света. В таких средах циркулярно поляризованный свет деполяризуется существенно медленнее линейно поляризованного [2, 4, 7, 13, 17, 24]. Затухание круговой поляризации происходит уже после того, как распределение излучения по углам становится близким к изотропному.

4. ОСНОВНЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ МОДЫ

Рассмотрим теперь метод последовательных приближений для расцепления векторного уравнения переноса (17). В его основе лежит утверждение о том, что однократное рассеяние на крупных неоднородностях происходит преимущественно вперед, где недиагональные элементы матрицы рассеяния (22) оказываются много меньше диагональных (см. рис. 2).

В первом приближении пренебрегаем недиагональными элементами матрицы рассеяния (22). Тогда получаем независимые уравнения для $I = I_{scal}$ и $I_{\pm 2}$. Уравнение для I_{scal} совпадает со скалярным уравнением переноса (26). Величины $I_{\pm 2}$ согласно (27) можно выразить через величину W, которая подчиняется уравнению [37]

$$\left\{\mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} W(z,\mu) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' \frac{a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') + a_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')}{2} \times \\ \times \exp(2i(\chi_+ - \psi)) W(z,\mu'). \quad (32)$$

Поскольку при преимущественном рассеянии на малые углы элементы матрицы рассеяния a_1 и a_2 мало отличаются друг от друга, входящую в (32) индикатрису удобно представить в виде

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \exp(2i(\chi_+ - \psi)) = \\ = a_1 + a_1[\exp(2i(\chi_+ - \psi)) - 1] - \\ - \frac{a_1 - a_2}{2} - \frac{a_1 - a_2}{2}[\exp(2i(\chi_+ - \psi)) - 1]. \quad (33)$$

Каждое из слагаемых в равенстве (33) имеет свой физический смысл. Если пренебречь различием между диагональными элементами матрицы рассеяния и отклонением изображенного на рис. 1 сферического треугольника от плоского (т. е. положить $a_1 = a_2$ и $\chi_+ = \psi$), то в равенстве (33) останется только первое слагаемое. В этом приближении уравнение для W не будет отличаться от скалярного уравнения переноса. Деполяризация в этом приближении вообще отсутствует.

За процесс деполяризации отвечают второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (33). Второе слагаемое обусловлено отличием изображенного на рис. 1 сферического треугольника от плоского и описывает геометрическую деполяризацию. Третье слагаемое в правой части равенства (33) возникает из-за различия диагональных элементов матрицы рассеяния и отвечает за динамическую деполяризацию (дополнительное «поглощение» в уравнении (32), обусловленное этим слагаемым, оказывается в два раза меньше, чем (13)). Четвертый член в (33) описывает взаимное влияние геометрического и динамического механизмов деполяризации. В условиях рассеяния на крупномасштабных неоднородностях второе, третье и четвертое слагаемые в правой части (33) малы по сравнению с первым, и поэтому деполяризация света происходит медленно, в результате многих актов рассеяния.

Таким образом, в первом приближении состояние линейной поляризации света при многократном рассеянии в среде с крупными неоднородностями определяется значением W. Величину W имеет смысл назвать основной модой линейной поляризации (по аналогии со скалярной модой I_{scal} и циркулярно поляризованной модой V).

Независимое распространение в среде основных поляризационных мод следует рассматривать как первое приближение в векторном уравнении переноса (17) для среды с крупными частицами. В следующем приближении необходимо учитывать межмодовое взаимодействие, которое определяется недиагональными элементами матрицы рассеяния и имеет «динамическую» (т. е. обусловленную различием между амплитудами $A_\parallel$ и $A_\perp$) природу.

В наиболее компактном виде результаты вычислений можно представить, если ввести соответствующую представлению (15) поляризационную матрицу Грина $\hat{G}$,

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_{22} & G_{20} & G_{2-2} \\ G_{02} & G_{00} & G_{0-2} \\ G_{-22} & G_{-20} & G_{-2-2} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

которая позволяет выразить поляризационные параметры рассеянного излучения $\hat{I}$ через параметры падающего пучка $\hat{I}^{(0)}$,

$$\hat{I} = \hat{G}\hat{I}^{(0)}.$$

Матрица $\hat{G}$ подчиняется уравнению (17) и обладает той же симметрией, что и матрица рассеяния $\hat{d}$ (22). Если хотя бы один индекс у матричного элемента G_{mn} равен ± 2, то комплексное сопряжение G_{mn} эквивалентно изменению знака у данного индекса:

$$G_{0\pm 2} = G^*_{0\mp 2}, \quad G_{\pm 20} = G^*_{\mp 20}, \\ G_{\pm 2\pm 2} = G^*_{\mp 2\mp 2}. \quad (35)$$

В первом приближении матрица $\hat{G}$ диагональна,

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} W\exp(2i\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & I_{scal} & 0 \\ 0 & 0 & W^*\exp(-2i\varphi) \end{pmatrix}, \quad (36)$$

и описывает независимое распространение в среде основных поляризационных мод — I_{scal} и W.

В следующем приближении взаимодействие между скалярной и линейной модами, которое возникает благодаря недиагональным элементам матрицы рассеяния $\hat{d}$ (22), приводит к возбуждению дополнительных мод — «обертонов» — недиагональных элементов $G_{0\pm2}$, $G_{\pm20}$, $G_{\mp2\pm2}$.

Уравнение для элементов G_{km} можно представить в виде

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} G_{km}(z,\mathbf{n}) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' d_{kk}(\mathbf{n},\mathbf{n}') G_{km}(z,\mathbf{n}') + Q_{km}(z,\mathbf{n}), \quad (37)$$

где источники Q_{km} определяются выражением

$$Q_{km}(z,\mathbf{n}) = \sigma \sum_{l\neq k} \int d\mathbf{n}' d_{kl}(\mathbf{n},\mathbf{n}') G_{lm}(z,\mathbf{n}'). \quad (38)$$

Основной вклад в сумму (38) дают члены, содержащие основные поляризационные моды, т. е. диагональные элементы G_{mm}. Поэтому в первом приближении

$$Q_{km}(z,\mathbf{n}) = \sigma \int d\mathbf{n}' d_{km}(\mathbf{n},\mathbf{n}') G_{mm}(z,\mathbf{n}'). \quad (39)$$

Азимутальную зависимость недиагональных элементов G_{km} $(k \neq m)$ в случае нормального падения широкого пучка можно представить в виде

$$\begin{aligned} G_{02}(z,\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} Q_W(z,\mu)\exp(2i\varphi), \\ G_{20}(z,\mathbf{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{un}(z,\mu), \end{aligned} \quad (40)$$

$$G_{2-2}(z,\mathbf{n}) = w(z,\mu)\exp(-2i\varphi). \quad (41)$$

Тогда из формул (37), (39) следуют уравнения для функций Q_W, Q_{un} и w:

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} Q_W(z,\mu) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\exp(-2i\psi) Q_W(z,\mu') + \\ + \sigma \int d\mathbf{n}' b_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\exp(-2i(\beta'+\psi)) W(z,\mu'), \quad (42)$$

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} Q_{un}(z,\mu) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' \frac{a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') + a_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')}{2} \times \\ \times \exp(2i\chi_+) Q_{un}(z,\mu') + \\ + \sigma \int d\mathbf{n}' b_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')\exp(-2i\beta) I_{scal}(z,\mu'), \quad (43)$$

$$\left\{\mu\frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tot}\right\} w(z,\mu) = \\ = \sigma \int d\mathbf{n}' \frac{a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') + a_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')}{2} \times \\ \times \exp(2i(\chi_+ + \psi)) w(z,\mu') + \\ + \sigma \int d\mathbf{n}' \frac{a_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') - a_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}')}{2} \times \\ \times \exp(2i(\chi_- + \psi)) W(z,\mu'). \quad (44)$$

Величина $Q_{un}(z,\mu)$ совпадает со вторым параметром Стокса рассеянного излучения для первоначально неполяризованного пучка [42]. Если падающее излучение неполяризовано, то основные поляризационные моды не «возбуждаются» $(W = V = 0)$ и поляризация рассеянного света определяется только вкладом «обертона» G_{20}.

Как будет показано ниже, в средах с крупномасштабными неоднородностями вклад «обертонов» Q_W и w в значения параметров Стокса многократно рассеянного света всегда оказывается малым. Вклад обертона Q_{un} становится существенным на больших глубинах, когда в результате многих актов рассеяния излучение «забывает» свою начальную поляризацию.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Решение уравнений для основных мод (12), (26), (32) и «обертонов» (42)–(44) удобно искать в виде разложений в ряд по обобщенным сферическим функциям. В скалярной теории переноса такой подход известен как P_l-приближение [43]. Для векторного уравнения переноса разложение по обобщенным сферическим гармоникам было впервые предложено в работе [29] и использовалось в ряде работ для численного интегрирования, а также в аналитических вычислениях параметров Стокса при прохождении неполяризованного света через толстые слои (см., например, [1, 28, 44]). Недавно этот подход был применен для расчета пространственных моментов углового распределения излучения в импульсе [9].

В случае нормального падения на поверхность среды широкого пучка света функции I_{scal} и V следует искать в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\mu)$:

$$\begin{gathered}I_{scal}(z,\mu)=\sum_{l=0}\frac{2l+1}{4\pi}I_{scal}(z,l)P_l(\mu),\\ V(z,\mu)=\sum_{l=0}\frac{2l+1}{4\pi}V(z,l)P_l(\mu).\end{gathered}\tag{45}$$

Входящие в выражения (45) коэффициенты $I_{scal}(z,l)$ и $V(z,l)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{l}{(2l+1)}\frac{\partial I_{scal}(z,l-1)}{\partial z}+\frac{l+1}{2l+1}\frac{\partial I_{scal}(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +[\sigma+\sigma_a-\sigma a_1(l)]I_{scal}(z,l)=0, \tag{46}$$

$$\frac{l}{(2l+1)}\frac{\partial V(z,l-1)}{\partial z}+\frac{(l+1)}{(2l+1)}\frac{\partial V(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +[\sigma+\sigma_a-\sigma a_2(l)]V(z,l)=0, \tag{47}$$

где

$$a_{1,2}(l)=2\pi\int_{-1}^{1}d\mu\, a_{1,2}(\mu)P_l(\mu). \tag{48}$$

С учетом угловой зависимости интегрального члена в уравнении (32) значение $W(z,\mu)$ удобно искать в виде разложения по обобщенным сферическим функциям P_{22}^l [29] (см. Приложение А):

$$W(z,\mu)=\sum_{l=2}\frac{2l+1}{4\pi}W(z,l)P_{22}^l(\mu). \tag{49}$$

Тогда, подставляя (49) в (32), получим

$$\frac{l^2-4}{l(2l+1)}\frac{\partial W(z,l-1)}{\partial z}+\frac{4}{l(l+1)}\frac{\partial W(z,l)}{\partial z}+ \\ +\frac{(l+1)^2-4}{(l+1)(2l+1)}\frac{\partial W(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +[\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(l)]W(z,l)=0, \tag{50}$$

где коэффициенты $a_+(l)$ определяются равенством

$$a_+(l)=2\pi\int_{-1}^{1}d\mu\frac{a_1(\mu)+a_2(\mu)}{2}P_{22}^l(\mu). \tag{51}$$

Обобщенные сферические функции P_{mn}^l определены и подробно описаны в работе [45] (см. также Приложение А).

Обертоны $Q_W(z,\mu)$, $Q_{un}(z,\mu)$, $w(z,\mu)$ следует искать в виде разложений

$$\begin{gathered}Q_W(z,\mu)=\sum_{l=2}\frac{2l+1}{4\pi}Q_W(z,l)P_{20}^l(\mu),\\ Q_{un}(z,\mu)=\sum_{l=2}\frac{2l+1}{4\pi}Q_{un}(z,l)P_{20}^l(\mu),\\ w(z,\mu)=\sum_{l=2}\frac{2l+1}{4\pi}w(z,l)P_{2-2}^l(\mu).\end{gathered}\tag{52}$$

Вид разложений (52) диктуется угловой зависимостью интегральных членов в уравнениях (42)–(44). Подстановка разложений (45), (49) и (52) в (42)–(44) приводит к уравнениям для коэффициентов $Q_W(z,l)$, $Q_{un}(z,l)$, $w(z,l)$:

$$\frac{\sqrt{(l+2)(l-2)}}{2l+1}\frac{\partial Q_W(z,l-1)}{\partial z}+ \\ +\frac{\sqrt{(l+3)(l-1)}}{2l+1}\frac{\partial Q_W(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +(\sigma-\sigma a_1(l)+\sigma_a)Q_W(z,l)=b_1(l)W(z,l), \tag{53}$$

$$\frac{\sqrt{(l+2)(l-2)}}{2l+1}\frac{\partial Q_{un}(z,l-1)}{\partial z}+ \\ +\frac{\sqrt{(l+3)(l-1)}}{2l+1}\frac{\partial Q_{un}(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +(\sigma-\sigma a_+(l)+\sigma_a)Q_{un}(z,l)=b_1(l)I_{scal}(z,l), \tag{54}$$

$$\frac{(l+2)(l-2)}{l(2l+1)}\frac{\partial w(z,l-1)}{\partial z}-\frac{4}{l(l+1)}\frac{\partial w(z,l)}{\partial z}+ \\ +\frac{(l+3)(l-1)}{(l+1)(2l+1)}\frac{\partial w(z,l+1)}{\partial z}+ \\ +(\sigma-\sigma a_+(l)+\sigma_a)w(z,l)=a_-(l)W(z,l). \tag{55}$$

Здесь

$$\begin{gathered}b_1(l)=2\pi\int_{-1}^{1}d\mu\, b_1(\mu)P_{20}^l(\mu),\\ a_-(l)=2\pi\int_{-1}^{1}d\mu\frac{a_2(\mu)-a_3(\mu)}{2}P_{2-2}^l(\mu).\end{gathered}\tag{56}$$

Воспользуемся уравнениями (46), (47), (50), (53)–(55) для вычисления значений основных мод и «обертонов» в асимптотическом при больших z режиме распространения излучения. В асимптотическом режиме наиболее ярко проявляются различия в деполяризации линейно и циркулярно поляризованного света, и поэтому этот случай важен для многих приложений (см., например, [4, 7, 14, 17]).

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В асимптотическом режиме [27, 43] решение отдельных уравнений, входящих в векторное уравнение переноса, факторизуется — угловая зависимость решений перестает меняться с глубиной и отделяется от множителя, который описывает затухание с ростом z. Применительно к скалярному уравнению переноса определение углового распределения излучения и коэффициента затухания в асимптотическом режиме детально изучено в работах [27, 43].

Подставляя $I_{scal}(z,l)$, $V(z,l)$ и $W(z,l)$ в экспоненциальном виде (например, $I_{scal}(z,l) = I_{scal}(l)\exp(-\epsilon_I z)$) в уравнения (46), (47), (50), приходим к задаче на собственные функции и собственные значения. Наименьшее собственное значение (ϵ_I, ϵ_V и ϵ_W) дает коэффициент затухания, а отвечающий ему набор коэффициентов ($I_{scal}(l)$, $V(l)$ или $W(l)$) определяет собственную функцию ($\Phi_I(\mu)$, $\Phi_V(\mu)$ или $\Phi_W(\mu)$) — угловую зависимость соответствующей моды в асимптотическом режиме, —

$$I_{scal}^{(as)}(z,\mu) = \exp(-\epsilon_I z)\sum_{l=0}\frac{2l+1}{4\pi}I_{scal}(l)P_l(\mu) = \\ = C_I\Phi_I(\mu)\exp(-\epsilon_I z), \quad (57)$$

$$V^{(as)}(z,\mu) = \exp(-\epsilon_V z)\sum_{l=0}\frac{2l+1}{4\pi}V(l)P_l(\mu) = \\ = C_V\Phi_V(\mu)\exp(-\epsilon_V z), \quad (58)$$

$$W^{(as)}(z,\mu) = \exp(-\epsilon_W z)\sum_{l=2}\frac{2l+1}{4\pi}W(l)P_{22}^l(\mu) = \\ = C_W\Phi_W(\mu)\exp(-\epsilon_W z). \quad (59)$$

Здесь $C_I = I_{scal}(l=0)$, $C_V = V(l=0)$, $C_W = W(l=2)$, а собственные функции удовлетворяют условию нормировки:

$$2\pi\int_{-1}^{1} d\mu\Phi_{I,V}(\mu) = 1, \quad (60)$$

$$2\pi\int_{-1}^{1} d\mu P_{22}^{l=2}(\mu)\Phi_W(\mu) = 1. \quad (61)$$

Для интенсивности собственные значения определяются как корни уравнения

$$\det\Big([\sigma(1-a_1(l))+\sigma_a]\delta_{l,m} - \\ - \frac{\epsilon_I}{2l+1}(l\delta_{l-1,m}+(l+1)\delta_{l+1,m})\Big) = 0. \quad (62)$$

Для циркулярно поляризованной моды уравнение для собственных значений ϵ_V получается из (62) заменой $a_1(l)$ на $a_2(l)$. Собственные значения линейно поляризованной моды находятся из уравнения

$$\det\Big([\sigma(1-a_+(l))+\sigma_a]\delta_{l,m} - \\ -\epsilon_W\Big(\frac{l^2-4}{l(2l+1)}\delta_{l-1,m} + \\ + \frac{4}{l(l+1)}\delta_{l,m} + \frac{(l+1)^2-4}{(l+1)(2l+1)}\delta_{l+1,m}\Big)\Big) = 0. \quad (63)$$

Для заданных оптических характеристик среды решение уравнений (62), (63) и последующее вычисление соответствующих угловых распределений может быть выполнено численно (суммирование по сферическим гармоникам в (45), (49) проводится до некоторого l_{max}, определители в (62), (63) вычисляются от матриц $l_{max}\times l_{max}$).

Результаты расчетов коэффициентов затухания основных поляризационных мод V и W в асимптотическом режиме приведены в табл. 1. Расчеты проводились для водных суспензий частиц латекса и кварца, капель воды в воздухе и модели Cloud 1 [34]. Предполагалось, что поглощение отсутствует. Для сред, состоящих из частиц заданного радиуса, величины $a_1(l)$, $a_2(l)$ и $a_+(l)$, входящие в уравнения (62), (63), вычислялись по формулам Ми [30]. Для модели Cloud 1, в которой частицы распределены по размерам, использовались численные данные для элементов матрицы рассеяния [34]. Результаты расчетов приведены для двух случаев — в разложениях по сферическим гармоникам удерживались, соответственно, два и десять членов. Незначительное различие результатов говорит о хорошей сходимости ряда по l для непоглощающей среды.

Для сравнения в табл. 1 наряду с ϵ_W приведены значения коэффициента затухания линейно поляризованной моды в геометрическом приближении ϵ_W^{geom}. В геометрическом приближении в формуле (51) следует заменить величину $(a_1(\mu)+a_2(\mu))/2$ на $a_1(\mu)$. Вычисленное в этом случае значение ϵ_W^{geom} будет определяться только рытовским механизмом деполяризации. Различие между ϵ_W и ϵ_W^{geom} обусловлено динамическим механизмом деполяризации и может рассматриваться как мера относительной роли этого механизма. Согласно результатам расчетов,

Таблица 1. Коэффициенты затухания основных поляризационных мод ($x = ka$)

	ϵ_V/σ_{tr}		ϵ_W/σ_{tr}		$\epsilon_W^{geom}/\sigma_{tr}$		ϵ_V/ϵ_W	
l_{max}	1	9	3	9	3	9	1(3)	9
Кварцевые частицы, $x = 5$	0.867	0.831	1.365	1.363	1.280	1.279	0.635	0.610
$x = 10$	0.711	0.693	1.329	1.328	1.330	1.329	0.535	0.522
Частицы латекса, $x = 5$	0.691	0.671	1.262	1.260	1.236	1.234	0.548	0.533
$x = 10$	0.660	0.642	1.214	1.212	1.186	1.184	0.544	0.530
Капли воды, $x = 5$	0.799	0.763	1.173	1.170	1.133	1.131	0.681	0.652
$x = 10$	0.922	0.853	1.080	1.075	1.023	1.019	0.854	0.793
Cloud 1	0.960	0.833	1.092	1.088	1.041	1.037	0.879	0.766

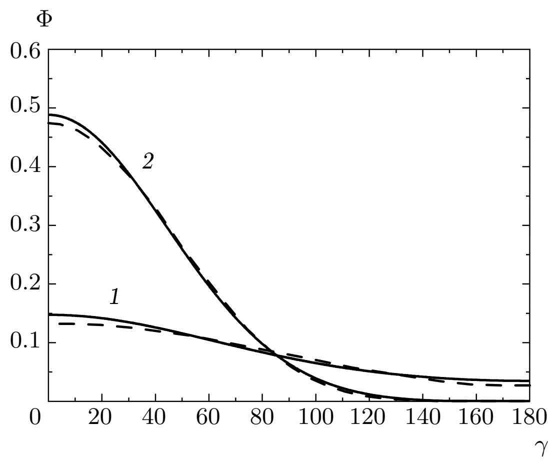

Рис. 4. Угловые зависимости циркулярно (*1*) и линейно (*2*) поляризованных мод в асимптотическом режиме, $l_{max} = 9$ (сплошная кривая), 1 (штриховая). Водная суспензия частиц латекса, $ka = 10$

значения ϵ_W и ϵ_W^{geom} для всех рассмотренных случаев различаются не более чем на 5 %. Это свидетельствует о доминирующей роли геометрического механизма деполяризации для линейно поляризованного света.

Примеры угловой зависимости $\Phi_V(\mu)$ и $\Phi_W(\mu)$ основных поляризационных мод в асимптотическом режиме показаны на рис. 4. Расчеты выполнены для водной суспензии частиц латекса. Как и в табл. 1, результаты приведены для двух случаев, когда в разложениях по сферическим гармоникам удерживалось, соответственно, два и десять членов.

При нормальном падении на поверхность среды пучка света единичной плотности потока коэффициент C_I в (57) для слабопоглощающей среды ($\sigma_a \ll \sigma_{tr}$) можно определить как [43]

$$C_I = 5.03\left(1 - 1.23\sqrt{\frac{\sigma_a}{\sigma_{tr}}} + \ldots\right). \tag{64}$$

С ростом поглощения формула (64) теряет применимость и вместо нее следует использовать соотношение для коэффициента C_I поглощающей среды (см. Приложение B):

$$C_I = \frac{\Phi_I(\mu = 1)}{2\pi \int\limits_0^1 \mu d\mu\, \Phi_I^2(\mu)}, \tag{65}$$

где $\Phi_I(\mu)$ — угловое распределение излучения в асимптотическом режиме. В случае поглощающей среды формула (65) хорошо согласуется с результатами численных расчетов. При $\sigma_a > 0.1\sigma_{tr}$ расчет C_I по формуле (65) и данные численного расчета C_I [27] различаются менее чем на 10 %; различие уменьшается с ростом σ_a/σ_{tr}.

Тот факт, что даже в отсутствие истинного поглощения моды V и W характеризуются заметным эффективным «поглощением» (соответственно, порядка σ_{dep} и σ_{tr} (см. (13) и (31))), позволяет воспользоваться формулой (65) и для вычисления множителей $C_{V,W}$. Для вычисления коэффициентов $C_{V,W}$ нужно подставить в выражение (65) соответственно функции $\Phi_{V,W}(\mu)$.

Результаты расчетов C_V, C_W и двух первых коэффициентов разложения мод V и W по сферическим функциям для $l_{max} = 9$ приведены в табл. 2.

Наряду с численными расчетами, в двух предельных случаях — слабого ($\sigma_a \ll \sigma_{tr}$) и сильного

Таблица 2. Параметры основных поляризационных мод в асимптотическом режиме

	C_V	C_W	$\frac{V(l=1)}{V(l=0)}$	$\frac{V(l=2)}{V(l=0)}$	$\frac{W(l=3)}{W(l=2)}$	$\frac{W(l=4)}{W(l=2)}$
Кварцевые частицы, $x = 5$	3.00	1.58	0.31	0.043	0.125	0.012
$x = 10$	3.17	1.57	0.24	0.026	0.115	0.009
Частицы латекса, $x = 5$	3.18	1.58	0.25	0.030	0.130	0.013
$x = 10$	3.23	1.59	0.23	0.029	0.109	0.016
Капли воды, $x = 5$	3.08	1.61	0.29	0.048	0.154	0.021
$x = 10$	3.02	1.69	0.34	0.083	0.192	0.036
Cloud 1	2.90	1.71	0.38	0.091	0.266	0.052

($\sigma_a \gg \sigma_{tr}$) поглощения — для нахождения состояния поляризации рассеянного света можно воспользоваться аналитическими вычислениями.

6.1. Слабое поглощение. Пространственная диффузия

При слабом ($\sigma_a \ll \sigma_{tr}$) поглощении происходит диффузия излучения через среду [31, 43]. Угловое распределение интенсивности излучения $I_{scal}(z,\mu)$ на глубинах, превышающих транспортную длину упругого рассеяния l_{tr}, оказывается в этом случае близким к изотропному, и в разложении $I_{scal}(z,\mu)$ по полиномам Лежандра можно ограничиться двумя первыми членами. В этом приближении из первых двух уравнений (46) (с $l = 0$ и $l = 1$) следует уравнение пространственной диффузии излучения. Что касается циркулярно поляризованной моды $V(z,\mu)$, то к ней аналогичный подход применим, если выполнено условие слабого «эффективного» поглощения, $\sigma_a + \sigma_{dep} \ll \sigma_{tr}$. В приближении пространственной диффузии выражения для $I_{scal}(z,\mu)$ и $V(z,\mu)$ в асимптотическом режиме имеют вид

$$I_{scal}^{(as)}(z,\mu) = \frac{C_I}{4\pi}(1+\alpha_I\mu)\exp(-\epsilon_I z), \quad (66)$$

$$V^{(as)}(z,\mu) = \frac{C_V}{4\pi}(1+\alpha_V\mu)\exp(-\epsilon_V z). \quad (67)$$

Собственные значения $\epsilon_{I,V}$ и входящие в разложения (66), (67) коэффициенты $\alpha_{I,V}$ в этом приближении равны

$$\epsilon_I \approx \sqrt{3(\sigma_{tr}+\sigma_a)\sigma_a}, \quad \alpha_I \approx \sqrt{\frac{3\sigma_a}{\sigma_{tr}+\sigma_a}}, \quad (68)$$

$$\epsilon_V \approx \sqrt{3(\sigma_{tr}^{(2)}+\sigma_{dep}+\sigma_a)(\sigma_a+\sigma_{dep})}, \quad \alpha_V \approx \sqrt{\frac{3(\sigma_a+\sigma_{dep})}{\sigma_{tr}^{(2)}+\sigma_{dep}+\sigma_a}}, \quad (69)$$

где

$$\sigma_{tr}^{(2)} = \sigma(a_2(0)-a_2(1)), \quad \sigma_{dep} = \sigma(1-a_2(0)). \quad (70)$$

В разложении (49) линейно поляризованной моды $W(z,\mu)$ в ряд по сферическим гармоникам в случае слабого поглощения также можно ограничиться (см. табл. 2) несколькими первыми членами (явные выражения для $P_{22}^l(\mu)$ приведены в Приложении А). Однако уравнения (50) для коэффициентов $W(z,l)$ отличаются по своей структуре от уравнений (46), (47). Достаточно удержать всего одно слагаемое в разложении (49), чтобы получить удовлетворительное описание затухания $W(z,\mu)$ в асимптотическом режиме. В этом приближении

$$W^{(as)}(z,\mu) = \frac{5C_W}{16\pi}(1+\mu)^2\exp\left(-\epsilon_W^{(0)}z\right), \quad (71)$$

где

$$\epsilon_W^{(0)} = \frac{3}{2}[\sigma(1-a_+(2))+\sigma_a] \quad (72)$$

и, в соответствии с (65), $C_W = 64/43$. Погрешность расчета ϵ_W по формуле (72) не превышает 10 %. Более точные результаты дает учет двух членов в разложении (50). В этом приближении

$$W^{(as)}(z,\mu) = \frac{5C_W}{16\pi}(1+\mu)^2 \times \times(1+\alpha_W(3\mu-2))\exp(-\epsilon_W z), \quad (73)$$

$$\begin{gathered}\epsilon_W = \frac{7}{6}\left\{3(\sigma+\sigma_a) - 2\sigma a_+(3) - \sigma a_+(2) - \right.\\ - \left[(3(\sigma+\sigma_a) - 2\sigma a_+(3) - \sigma a_+(2))^2 - \frac{36}{7} \times \right.\\ \left.\left. \times\ (\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(3))(\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2))\right]^{1/2}\right\}, \\ \alpha_W = \frac{21}{5}\left(\frac{\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)}{\epsilon_W} - \frac{2}{3}\right),\end{gathered} \tag{74}$$

где коэффициенты $a_+(2)$, $a_+(3)$ вычисляются по формуле (51). Формула (74) определяет ϵ_W с практически исчерпывающей точностью (см. табл. 1).

Малыми параметрами, которые позволяют построить метод последовательных приближений в уравнениях (46), (47), являются, соответственно, величины

$$\frac{\sigma_a}{3\sigma_{tr}}, \quad \frac{\sigma_a+\sigma_{dep}}{3\sigma_{tr}^{(2)}}.$$

Для уравнения (50) малым параметром является величина $(\epsilon_W - \epsilon_W^{(0)})/\epsilon_W$, где $\epsilon_W^{(0)}$ определяется по формуле (72). Как следует из наших расчетов, для непоглощающих сред с крупными неоднородностями эта величина оказывается намного меньше, чем малый параметр в уравнении для моды V.

Численные значения интегральных параметров матрицы рассеяния, которые входят в формулы (68)–(74), приведены в табл. 3.

В приближении основных мод степень поляризации циркулярно и линейно поляризованных пучков определяется соотношениями

$$P_{circ} = \frac{\sqrt{Q^2+V^2}}{I} \approx \frac{V}{I_{scal}}, \tag{75}$$

$$P_{lin} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2}}{I} \approx \frac{W}{I_{scal}}. \tag{76}$$

В асимптотическом режиме распространения света через слабопоглощающую среду

$$\begin{gathered}P_{circ} \approx \frac{V}{I_{scal}} \approx \\ \approx \frac{C_V}{C_I}\left(1+\mu(\alpha_V-\alpha_I)+\ldots\right)\exp\left(-z\left(\epsilon_V-\epsilon_I\right)\right),\end{gathered} \tag{77}$$

$$\begin{gathered}P_{lin} \approx \frac{5C_W}{4C_I}(1+\mu)^2\left((1-2\alpha_W)+\right.\\ \left. +\ \mu(3\alpha_W-\alpha_I)+\ldots\right)\times \\ \times\exp\left(-z\left(\epsilon_W-\epsilon_I\right)\right).\end{gathered} \tag{78}$$

Источниками в уравнениях (53)–(55) для дополнительных мод Q_W, Q_{un} и w являются основные моды I_{scal} и W. В асимптотическом режиме основной вклад в разложение дополнительных мод по сферическим функциям дают первые слагаемые соответствующих рядов ($l = 2$, см. (52)), которые с помощью соотношений (53)–(55) легко выражаются через соответствующие коэффициенты разложений I_{scal} и W. В результате для Q_W, Q_{un} и w получаем

$$\begin{gathered}Q_W(z,\mu) \approx \frac{5C_W}{4\pi}\frac{\sigma b_1(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_1(2)} \times \\ \times P_{20}^2(\mu)\exp\left(-\epsilon_W z\right),\end{gathered} \tag{79}$$

$$\begin{gathered}Q_{un}(z,\mu) \approx \frac{5C_I}{2\pi}\frac{\sigma_a}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_1(2)} \times \\ \times \frac{\sigma b_1(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)} P_{20}^2(\mu)\exp\left(-\epsilon_I z\right),\end{gathered} \tag{80}$$

$$\begin{gathered}w(z,\mu) \approx \frac{5C_W}{4\pi}\frac{\sigma a_-(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)+\dfrac{2}{3}\epsilon_W} \times \\ \times P_{2-2}^2(\mu)\exp\left(-\epsilon_W z\right).\end{gathered} \tag{81}$$

Выражения для входящих в формулы (79)–(81) сферических функций приведены в Приложении А. Содержащие $b_1(2)$ и $a_-(2)$ безразмерные множители в (79)–(81),

$$\frac{\sigma b_1(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_1(2)}, \quad \frac{\sigma b_1(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)},$$
$$\frac{\sigma a_-(2)}{\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)+2\epsilon_W/3},$$

для сред с крупномасштабными неоднородностями оказываются малыми. Их зависимость от размера рассеивателей показана на рис. 5. Для модели Cloud 1, в которой частицы распределены по размеру, эти множители равны соответственно 0.05, −0.02, 0.08. Это согласуется с нашим исходным предположением о малом вкладе недиагональных элементов матрицы рассеяния (22) в решение векторного уравнения переноса.

С учетом «обертонов» параметры Стокса I, Q и U приобретают вид

$$\begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{scal} + Q_W\cos 2\varphi \\ (W+w)\cos 2\varphi + Q_{un} \\ (-W+w)\sin 2\varphi \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Вклады «обертонов» в интенсивность I и третий параметр Стокса U всегда малы. Вклад Q_{un} во второй

Таблица 3. Интегральные параметры диагональных элементов матрицы рассеяния

	$\dfrac{\sigma_{tr}}{\sigma}$	$\dfrac{\sigma(1-a_+(2))}{\sigma_{tr}}$	$\dfrac{\sigma(1-a_+(3))}{\sigma_{tr}}$	$\dfrac{\sigma_{dep}}{\sigma_{tr}}$	$\dfrac{\sigma_{tr}^{(2)}}{\sigma_{tr}}$
Кварцевые частицы, $x = 5$	$9.2 \cdot 10^{-2}$	0.94	3.0	0.26	0.72
$x = 10$	$2.9 \cdot 10^{-2}$	0.96	3.3	0.17	0.83
Частицы латекса, $x = 5$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	0.89	2.9	0.16	0.80
$x = 10$	$7.0 \cdot 10^{-2}$	0.86	2.5	0.15	0.84
Капли воды, $x = 5$	$1.5 \cdot 10^{-1}$	0.84	2.3	0.22	0.74
$x = 10$	$2.9 \cdot 10^{-1}$	0.79	1.8	0.29	0.67
Cloud 1 [34]	$1.5 \cdot 10^{-1}$	0.79	1.9	0.34	0.58

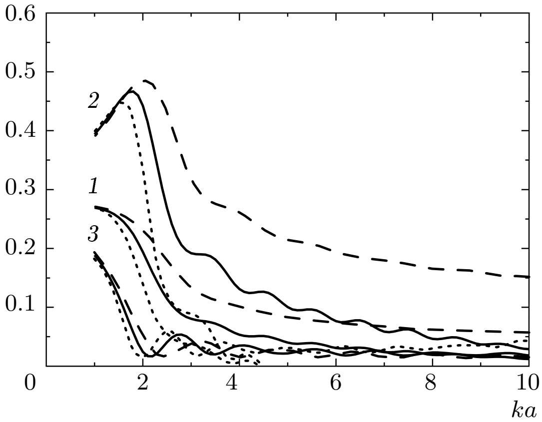

Рис. 5. Зависимости отношений $\sigma b_1(2)/(\sigma-\sigma a_1(2))$ (кривые *1*), $\sigma b_1(2)/(\sigma - \sigma a_+(2))$ (кривые *2*), $\sigma a_-(2)/(\sigma+\sigma_a-\sigma a_+(2)+2\epsilon_W/3)$ (кривые *3*) от радиуса рассеивающих частиц. Сплошные кривые — водная суспензия частиц латекса, штриховые — водная суспензия частиц кварца, пунктирные — частицы воды в воздухе

параметр Стокса Q становится заметным на больших глубинах, когда мода W затухает и падающий пучок забывает свою исходную поляризацию. Степень поляризации многократно рассеянного света, отвечающая результату (82), определяется выражением

$$P_{lin} \approx \frac{1}{I_{scal}} \times \times \left\{W^2+2Ww\cos 4\varphi+2WQ_{un}\cos 2\varphi+Q_{un}^2\right\}^{1/2} \times \times \left(1-\frac{Q_W}{I_{scal}}\cos 2\varphi\right). \quad (83)$$

Согласно (83), пока $W \gg Q_{un}$, вклад «обертонов» определяет зависящие от азимута поправки к полученной выше формуле (76),

$$P_{lin} \approx \frac{W}{I_{scal}} \times \times \left(1+\frac{w}{W}\cos 4\varphi+\frac{Q_{un}}{W}\cos 2\varphi-\frac{Q_W}{I_{scal}}\cos 2\varphi\right). \quad (84)$$

С ростом z падающий свет полностью деполяризуется ($Q_{un} \gg W$) и значение степени поляризации P_{lin} стремится к пределу, отвечающему неполяризованному падающему пучку, $P_{lin} \to P_{un} = Q_{un}/I_{scal}$.

6.2. Сильное поглощение. Малоугловое многократное рассеяние

В случае сильного поглощения ($\sigma_a > \sigma_{tr}$) волны, рассеянные на относительно большие углы, дают малый вклад в интенсивность прошедшего излучения. В результате угловое распределение интенсивности многократно рассеянного излучения остается резко анизотропным — вытянутым в направлении вперед — на любых глубинах [46–48]. Примерами сильно поглощающих сред могут служить биологические ткани и морская вода (для нее отношение σ_{tr}/σ_a не превышает 0.30–0.35).

Вытянутость углового распределения интенсивности излучения в направлении вперед позволяет воспользоваться приближением малых углов θ. При малых θ в значения сумм (45), (49) основной вклад дают члены с большими l. Поэтому сферические функции в разложениях (45) и (49) можно заменить их асимптотическим выражением при малых θ и больших l,

$$P_l(\cos\theta) \approx P_{22}^l(\cos\theta) \approx J_0(l\theta),$$

и заменить в формулах (45), (49) суммирование по l интегрированием. В дополнение к этому выделим в выражениях для I_{scal}, V, W множитель $\exp(-\sigma_a z)$, определяющий основное затухание в поглощающей среде, и, считая l большим числом, разложим все входящие в уравнения (46), (47), (50) величины в ряд по $1/l$. В результате вместо общих формул (45)–(50) получим их малоугловое представление:

$$I_{scal}(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_0(l\theta)\tilde{I}_{scal}(z,l), \quad (85)$$

$$V(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_0(l\theta)\tilde{V}(z,l), \quad (86)$$

$$W(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_0(l\theta)\tilde{W}(z,l), \quad (87)$$

где величины $\tilde{I}_{scal}(z,l)$, $\tilde{V}(z,l)$, $\tilde{W}(z,l)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\Delta_l\right)\tilde{I}_{scal}(z,l) = 0, \quad (88)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\Delta_l + \Xi^{dyn}(l)\right)\tilde{V}(z,l) = 0, \quad (89)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\Delta_l + \hat{\Xi}^{geom}(l) + \frac{1}{2}\Xi^{dyn}(l)\right) \times \times \tilde{W}(z,l) = 0. \quad (90)$$

В приведенных выше уравнениях функция $a_1(l)$ есть малоугловое представление интеграла (48),

$$a_1(l) = 2\pi\int\limits_0^\infty \gamma d\gamma J_0(l\gamma)a_1(\gamma), \quad (91)$$

$$\Delta_l = \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial l}l\frac{\partial}{\partial l},$$

$$\begin{aligned}\Xi^{dyn}(l) &= \sigma(a_2(l) - a_1(l)),\\ \hat{\Xi}^{geom}(l) &= \frac{\sigma}{2l}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial a_1(l)}{\partial l}\frac{\partial}{\partial l}\right).\end{aligned} \quad (92)$$

Дополнительные члены в уравнениях (89) и (90) (по сравнению с уравнением (88)) описывают деполяризацию света за счет геометрического и динамического механизмов. За геометрическую деполяризацию в уравнении (90) отвечает член, пропорциональный $\hat{\Xi}^{geom}(l)$. Этот член соответствует малоугловому представлению слагаемого $a_1(\exp(2i(\chi_+ - \psi)) - 1)$, входящего в сумму (33). Динамическая деполяризация обусловлена разностью $a_1(l) - a_2(l)$. В борновском приближении с учетом соотношений (7), (11) получаем

$$\Xi^{dyn}(l) \approx -\frac{\sigma}{8}\Delta_l^2 a_1(l). \quad (93)$$

В уравнении (90) мы пренебрегли слагаемым, отвечающим за совместное действие геометрического и динамического механизмов, как слагаемым более высокого порядка малости по $1/l$.

Малоугловое представление соотношений для «обертонов» выглядит следующим образом. Суммы (52) с учетом асимптотических формул для сферических гармоник при малых θ и больших l,

$$P^l_{20}(\cos\theta) \approx J_2(l\theta), \quad P^l_{2-2}(\cos\theta) \approx J_4(l\theta)$$

заменяются интегралами

$$Q_W(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_2(l\theta)\tilde{Q}_W(z,l), \quad (94)$$

$$Q_{un}(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_2(l\theta)\tilde{Q}_{un}(z,l), \quad (95)$$

$$w(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\int\limits_0^\infty \frac{l\,dl}{2\pi} J_4(l\theta)\tilde{w}(z,l), \quad (96)$$

где величины $\tilde{Q}_W(z,l)$, $\tilde{Q}_{un}(z,l)$, $\tilde{w}(z,l)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\left(\Delta_l - \frac{4}{l^2}\right)\right]\tilde{Q}_W(z,l) = = \Xi(l)\tilde{W}(z,l), \quad (97)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\left(\Delta_l - \frac{4}{l^2}\right)\right]\tilde{Q}_{un}(z,l) = = \Xi(l)\tilde{I}_{scal}(z,l), \quad (98)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \sigma(1-a_1(l)) - \frac{\sigma_a}{2}\left(\Delta_l - \frac{16}{l^2}\right)\right]\tilde{w}(z,l) = = \Xi_w(l)\tilde{W}(z,l). \quad (99)$$

Входящие в уравнения (97)–(99) функции $\Xi(l)$ и $\Xi_w(l)$ выражаются через малоугловые представления интегралов (56) для $b_1(l)$ и $a_-(l)$ и в борновском приближении равны

$$\Xi(l) = -\frac{\sigma l^2}{2}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial l}\right)^2 a_1(l), \quad (100)$$

$$\Xi_w(l) = \frac{\sigma l^4}{16}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial l}\right)^4 a_1(l). \qquad (101)$$

При нормальном падении плоской волны на поверхность среды граничное условие для уравнения (88) имеет вид

$$\tilde{I}_{scal}(z=0,l) = 1. \qquad (102)$$

Аналогичному граничному условию должны удовлетворять решения уравнений (89) и (90) в случаях, соответственно, циркулярной и линейной поляризации падающего излучения. Что касается решений уравнений для «обертонов», то при $z = 0$ они подчиняются нулевым граничным условиям.

Уравнения (88), (89) и (90) по своему виду совпадают с нестационарным уравнением Шредингера с двумерным аксиально-симметричным потенциалом. Для аналитического решения этих уравнений необходимо конкретизировать зависимость от l функции $a_1(l)$, через которую выражается соответствующий «потенциал» в (88), (89) и (90).

При многократном рассеянии предполагаются выполненными неравенства

$$\sigma z \gg 1, \quad \theta \gg \gamma_0, \qquad (103)$$

где γ_0 — характерный угол однократного рассеяния (γ_0 можно оценить, например, как $\gamma_0 \sim \sim \sqrt{1-\langle\cos\gamma\rangle}$). Применительно к разложению решения уравнения переноса в интеграл Бесселя второе неравенство означает

$$l \ll \frac{1}{\gamma_0}. \qquad (104)$$

В связи с этим нас будут интересовать решения уравнений (88)–(90) и (97)–(99) в области значений l, ограниченных неравенством (104).

Поведение функции $a_1(l)$ в области, определяемой (104), зависит от того, насколько быстро убывает дифференциальное сечение рассеяния с ростом угла рассеяния γ [42].

Если функция $a_1(\gamma)$ очень быстро убывает с ростом γ (например, по гауссову закону [42]), то для величины $a_1(l)$ справедливо разложение по четным степеням l:

$$a_1(l) = 1 - \frac{\langle\gamma^2\rangle l^2}{4} + \frac{\langle\gamma^4\rangle l^4}{64} - \ldots, \qquad (105)$$

где

$$\langle\gamma^{2n}\rangle = 2\pi\int_0^\infty \gamma\, d\gamma\, \gamma^{2n} a_1(\gamma). \qquad (106)$$

В рамках этой модели уравнения (88)–(90) и (97)–(99) приобретают достаточно простой вид. Уравнения (88)–(90) в первом приближении становятся эквивалентными уравнению Шредингера с осцилляторным потенциалом.

Если в уравнении (88) выполнить обратное преобразование Бесселя, получим уравнение переноса с интегралом упругих столкновений в приближении Фоккера–Планка (или в диффузионном приближении по угловой переменной) [46, 47]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\sigma_a}{2}\theta^2\right)\tilde{I}_{scal}(z,\theta) = = D\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{I}_{scal}(z,\theta), \qquad (107)$$

где

$$\tilde{I}_{scal}(z,\theta) = \exp(\sigma_a z) I_{scal}(z,\theta),$$

$$D = \frac{1}{4}\sigma\langle\gamma^2\rangle = \sigma\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \gamma^3 d\gamma a_1(\gamma) \qquad (108)$$

— коэффициент диффузии фотонов по угловой переменной. В рамках модели (105) между коэффициентом диффузии и транспортным коэффициентом рассеяния существует простая связь:

$$D = \frac{1}{2}\sigma_{tr}. \qquad (109)$$

Решение уравнения (107) имеет вид [46, 47]

$$\tilde{I}_{scal}(z,\theta) = \frac{1}{\pi A_0^{(I)}(z) A_1^{(I)}(z)} \times \times \exp\left(-\frac{\theta^2}{A_1^{(I)}(z)}\right), \qquad (110)$$

где

$$A_0^{(I)}(z) = \operatorname{ch}\left(z\sqrt{\sigma_{tr}\sigma_a}\right), \quad A_1^{(I)}(z) = 2\sqrt{\frac{2D}{\sigma_a}}\operatorname{th}\left(z\sqrt{\sigma_{tr}\sigma_a}\right). \qquad (111)$$

Из (111) следует, что средний квадрат угла многократного рассеяния на глубине z равен

$$\langle\theta^2\rangle_z = A_1^{(I)}(z). \qquad (112)$$

Характерный масштаб изменения интенсивности с глубиной есть

$$l_d = \left(\sqrt{\sigma_{tr}\sigma_a}\right)^{-1}. \qquad (113)$$

На глубинах $z > l_d$ распределение интенсивности излучения по углам перестает зависеть от z и стремится к своему асимптотическому виду:

$$\tilde{I}_{scal}^{(as)}(z,\theta) = \frac{2}{\pi\langle\theta^2\rangle_\infty} \exp\left(-\frac{z}{l_d} - \frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle_\infty}\right), \qquad (114)$$

где

$$\langle\theta^2\rangle_\infty = 2\sqrt{\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_a}} \qquad (115)$$

— средний квадрат угла многократного рассеяния в асимптотическом режиме [42, 46, 47]. При сильном поглощении ($\sigma_a \gg \sigma_{tr}$) эта величина оказывается малой, $\langle\theta^2\rangle_\infty \ll 1$, что оправдывает предположение о резкой анизотропии распределения интенсивности излучения по углам при любых z.

Если разложение (105) подставить в определения (92), (93), то в ведущем приближении получим

$$\begin{gathered} \Xi^{dyn}(l) = \sigma_{dep} = \frac{1}{8}\sigma\langle\gamma^4\rangle, \\ \hat{\Xi}^{geom}(l) = -\frac{\sigma_{tr}}{2}\Delta_l. \end{gathered} \qquad (116)$$

В результате уравнения для циркулярно и линейно поляризованных мод будут отличаться от уравнения для интенсивности только «эффективным» поглощением. Решения этих уравнений можно выразить через выражение (110) для I_{scal}:

$$\begin{gathered} V(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\tilde{V}(z,\theta) = \\ = \exp\left(-\left(\sigma_a + \sigma_{dep}\right)z\right)\tilde{I}_{scal}(z,\theta,\sigma_a), \end{gathered} \qquad (117)$$

$$\begin{gathered} W(z,\theta) = \exp(-\sigma_a z)\tilde{W}(z,\theta) = \\ = \exp\left(-\left(\sigma_a + \frac{\sigma_{dep}}{2}\right)z\right)\tilde{I}_{scal}(z,\theta,\sigma_a + \sigma_{tr}). \end{gathered} \qquad (118)$$

Дополнительные к σ_a члены в (117), (118) отвечают за деполяризацию света. Слагаемые, пропорциональные σ_{dep}, обусловлены деполяризацией по динамическому механизму, добавка к коэффициенту поглощения в (118), равная σ_{tr}, описывает деполяризацию по геометрическому механизму.

Формулы (110) и (117), (118) позволяют вычислить степень поляризации циркулярно и линейно поляризованного света в рамках модели (105).

При сильном поглощении деполяризация света проявляется на больших глубинах, намного превышающих «асимптотическую» длину l_d (113). Поэтому при вычислении степени поляризации можно сразу воспользоваться асимптотиками решений (110) и (117), (118) при больших z.

Деполяризация света, поляризованного по кругу, описывается законом (см. (75))

$$\begin{gathered} P_{circ} = \sqrt{\frac{V^2}{I^2} + P_{un}^2} \approx \frac{V}{I_{scal}} \approx \\ \approx \exp\left(-\frac{1}{8}\sigma\langle\gamma^4\rangle z\right). \end{gathered} \qquad (119)$$

Формула (119) справедлива, пока излучение полностью не деполяризовалось (т. е. пока $V/I_{scal} \gg P_{un}$).

Длина деполяризации, согласно (119), равна

$$l_{circ} = \left(\frac{1}{8}\sigma\langle\gamma^4\rangle\right)^{-1} \qquad (120)$$

и намного превосходит l_d,

$$\frac{l_{circ}}{l_d} \approx 8\frac{\langle\gamma^2\rangle}{\langle\gamma^4\rangle\langle\theta^2\rangle_\infty^2} \gg 1. \qquad (121)$$

Степень поляризации линейно поляризованного излучения при $z > l_d$ описывается выражением

$$\begin{gathered} P_{lin} = \frac{\sqrt{Q^2+U^2}}{I} \approx \frac{W}{I_{scal}} \approx \\ \approx \exp\left(-\left(\frac{1}{16}\sigma\langle\gamma^4\rangle + \frac{1}{4}\sigma_{tr}\langle\theta^2\rangle_\infty\right)z\right), \end{gathered} \qquad (122)$$

из которого следует, что длина деполяризации есть

$$l_{lin} = \left(\frac{1}{4}\sigma_{tr}\langle\theta^2\rangle_\infty + \frac{1}{16}\sigma\langle\gamma^4\rangle\right)^{-1}. \qquad (123)$$

Согласно (122), (123) основной вклад в затухание P_{lin} дает геометрический механизм деполяризации ($\langle\gamma^4\rangle \ll \langle\gamma^2\rangle\langle\theta^2\rangle_\infty$). Длина l_{lin} намного превышает l_d, но меньше, чем l_{circ}.

Отметим, что динамический механизм деполяризации линейно поляризованного света может быть преобладающим только на малых глубинах, когда деполяризация еще незначительна ($1 - P_{lin} \ll 1$). При $z < l_d$ из (107), (118) следует, что

$$\begin{gathered} P_{lin} = 1 - \frac{1}{16}\sigma z\langle\gamma^4\rangle - \frac{1}{6}(\sigma_{tr}z)^2 - \\ - \frac{1}{6}\sigma_{tr}z\theta^2 + \ldots, \end{gathered} \qquad (124)$$

и динамический вклад оказывается главным при $z < l_{tr}\langle\gamma^4\rangle/\langle\gamma^2\rangle$. Этот предельный случай впервые обсуждался в работе [38].

В рамках модели (105)

$$\Xi(l) = -\frac{\sigma l^2}{16}\langle\gamma^4\rangle, \quad \Xi_w(l) = -\frac{\sigma l^4}{3\cdot 2^{11}}\langle\gamma^8\rangle \qquad (125)$$

и для «обертонов» получаются следующие выражения:

$$Q_W(z,\theta) \approx -\frac{\sigma\langle\gamma^4\rangle\theta^2}{4\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^3} \times \\ \times f_1\left(z\sqrt{\sigma_a\sigma_{tr}}\right) W(z,\theta), \quad (126)$$

$$Q_{un}(z,\theta) \approx -\frac{\sigma\langle\gamma^4\rangle\theta^2}{4\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^3} \times \\ \times f_1\left(z\sqrt{\sigma_a\sigma_{tr}}\right) I_{scal}(z,\theta), \quad (127)$$

$$w(z,\theta) \approx \frac{1}{3\cdot 2^{11}} \frac{\sigma\theta^4\langle\gamma^8\rangle}{\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^5} \times \\ \times f_2\left(z\sqrt{\sigma_a\sigma_{tr}}\right) W(z,\theta), \quad (128)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi}\left(\xi + \frac{1}{2}\operatorname{sh}2\xi\right), \\ f_2(\xi) &= \frac{1}{\operatorname{sh}^4\xi}\left(12\xi + 8\operatorname{sh}2\xi + \operatorname{sh}4\xi\right). \end{aligned} \quad (129)$$

В асимптотическом режиме $f_1(\xi \to \infty) = 1$, $f_2(\xi \to \infty) = 8$.

Согласно (128), «обертон» w оказывается намного меньше Q_W и Q_{un}. Он имеет дополнительную малость

$$\frac{\theta^2\langle\gamma^8\rangle}{\langle\gamma^4\rangle\langle\theta^2\rangle_\infty^2}$$

и при вычислении степени поляризации рассеянного излучения (см. (83)) им можно пренебречь. Учет «обертонов» Q_W и Q_{un} приводит к слабой азимутальной зависимости степени поляризации P_{lin} линейно поляризованного света. С ростом z ($z > l_{lin}$) излучение деполяризуется, вклад Q_{un} становится больше W, и P_{lin} стремится к значению степени поляризации первоначально неполяризованного излучения P_{un} в асимптотическом режиме [42]:

$$P_{un}^{(as)}(\theta) = -\frac{\sigma\langle\gamma^4\rangle}{4\sigma_{tr}}\frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle_\infty}. \quad (130)$$

Как показано в работе [42], модель (105) дает качественную картину малоуглового многократного рассеяния, но не может претендовать на правильное количественное описание распространения света в реальных рассеивающих средах. Рассмотрим более реалистическую ситуацию.

Индикатрису рассеяния большими сферическими неоднородностями заданного радиуса можно аппроксимировать формулой вида [11, 48, 49]

$$a_1(\cos\gamma) = \frac{(1-g^2)^2}{4\pi(1+g^2-2g\cos\gamma)^2}, \quad (131)$$

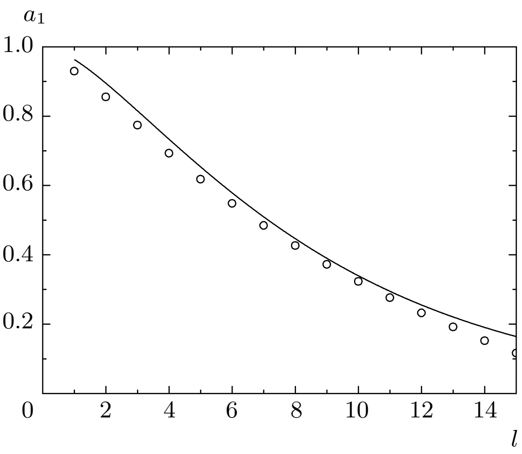

Рис. 6. Коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния частиц латекса в воде ($ka = 10$) по полиномам Лежандра. Сплошная кривая — результаты расчета по формуле (133), $\gamma_0 = 0.18$; кружки — результаты расчета по формулам Ми

которая в области малых ($\gamma \ll 1$) углов выглядит следующим образом:

$$a_1(\gamma) = \frac{\gamma_0^2}{\pi(\gamma_0^2+\gamma^2)^2}, \quad (132)$$

где $\gamma_0 = 1-g$ — характерный угол однократного рассеяния, $\gamma_0 \ll 1$. Для слабых борновских рассеивателей ($ka(n-1) \ll 1$) величина $\gamma_0 \sim (ka)^{-1}$, в другом предельном случае $\gamma_0 = 2(n-1)$ [30]. Соответствующая (132) функция $a_1(l)$ определяется выражением

$$a_1(l) = l\gamma_0 K_1(l\gamma_0), \quad (133)$$

где $K_1(x)$ — функция Макдональда первого порядка. Сопоставление результатов численного расчета $a_1(l)$ по формулам Ми со значениями, даваемыми формулой (133), показано на рис. 6.

В области относительно малых l ($l \ll 1/\gamma_0$) для $a_1(l)$ справедливо разложение

$$a_1(l) = 1 - \frac{1}{4}\gamma_0^2 l^2\left(\ln\frac{1}{\gamma_0^2 l^2} - 2C + 1\right), \quad (134)$$

где $C = 0.577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Поскольку формула (134) отличается от (105) слабо зависящим от l логарифмическим множителем, результаты (110), (117), (118) можно рассматривать как справедливые с логарифмической точностью, а для более точного вычисления значения интенсивности I_{scal} и поляризационных мод V и W в асимптотическом случае можно воспользоваться теорией возмущений [48, 50]. Выражение (134) перепишем в виде

$$a_1(l) = 1 - \frac{1}{4}l^2\langle\gamma^2\rangle + \\ + \frac{1}{4}l^2\gamma_0^2\left(\ln(4l^2) + 2C - 1\right), \quad (135)$$

где $\langle\gamma^2\rangle = \gamma_0^2\ln(4/\gamma_0^2)$ и, учитывая неравенство $\ln(1/\gamma_0) \gg \ln l$, будем рассматривать слагаемое

$$\frac{1}{4}l^2\gamma_0^2(\ln(4l^2) + 2C - 1)$$

как возмущение. Тогда для интенсивности в области малых углов θ ($\theta < \sqrt{\langle\theta^2\rangle_\infty}$) получаем

$$\tilde{I}_{scal}(z,\theta) \approx \frac{2}{\pi\langle\theta^2\rangle_\infty} \times \\ \times \exp\left(-\frac{z}{l_d}\right)\left(1 - \frac{\theta^2}{\langle\theta^2\rangle_\infty} + \ldots\right), \quad (136)$$

где

$$l_d = \left(\frac{\sigma_a}{2}\langle\theta^2\rangle_\infty\right)^{-1}, \quad (137)$$

$$\langle\theta^2\rangle_\infty = 2\sqrt{\frac{\sigma_{tr}}{\sigma_a}L_\infty}, \quad L_\infty = \frac{\ln\dfrac{2\sqrt{\sigma_{tr}/\sigma_a}}{\gamma_0^2}}{\ln(4/\gamma_0^2)}. \quad (138)$$

При относительно больших углах θ ($\theta > \sqrt{\langle\theta^2\rangle_\infty}$) интенсивность многократно рассеянного излучения убывает по степенному закону [42]:

$$\tilde{I}_{scal}(z,\theta) \approx \frac{4\sigma\gamma_0^2\exp(-z/l_d)}{\pi\sigma_a\theta^6}. \quad (139)$$

Степенная зависимость (139) от θ возникает из-за логарифмической особенности в разложении $a_1(l)$ при малых l, которая отвечает закону $1/\theta^4$ убывания сечения однократного рассеяния (см. (132)). Как показано в работах [42, 51], поведение функции $\tilde{I}_{scal}(z,\theta)$ при относительно больших углах всегда напрямую связано с угловой зависимостью сечения однократного рассеяния: разность показателей степеней убывания $\tilde{I}_{scal}(z,\theta)$ и $a_1(\gamma)$ равна двум.

Значения $\tilde{V}(z,\theta)$ и $\tilde{W}(z,\theta)$ также могут быть вычислены по теории возмущений. По сравнению с вычислениями, проделанными выше для $\tilde{I}_{scal}(z,\theta)$, в этом случае следует учесть как дополнительное возмущение члены, пропорциональные $\Xi^{dyn}(l)$ и $\hat{\Xi}^{geom}(l)$, в уравнениях (89), (90).

Угловые зависимости $V(z,\theta)$ и $W(z,\theta)$ мало отличаются в рассматриваемой области углов ($\theta \ll 1$) от зависимости $I_{scal}(z,\theta)$ (см. (119) и (122)) — относительная величина отличия порядка θ^4. Основное различие между поляризационными модами $V(z,\theta)$ и $W(z,\theta)$ и интенсивностью $I_{scal}(z,\theta)$ обусловлено различной скоростью их затухания с ростом глубины z. Поэтому выражения для поляризационных мод могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} V(z,\theta) &= \exp(-\delta\epsilon_V)I_{scal}(z,\theta), \\ W(z,\theta) &= \exp(-\delta\epsilon_W)I_{scal}(z,\theta), \end{aligned} \quad (140)$$

где $\delta\epsilon_V$ и $\delta\epsilon_W$ в первом приближении теории возмущений по малому параметру $\sigma_{dep}/\sigma_a \ll 1$ равны

$$\delta\epsilon_V = l_{circ}^{-1} = \frac{1}{2}\sigma_{dep}\langle\theta^2\rangle_\infty, \quad (141)$$

$$\delta\epsilon_W = l_{lin}^{-1} = \frac{1}{4}\sigma_{dep}\langle\theta^2\rangle_\infty + \frac{1}{4}\sigma_{tr}\langle\theta^2\rangle_\infty L_\infty. \quad (142)$$

Динамический и геометрический механизмы деполяризации дают аддитивные вклады в величину $\delta\epsilon_W$, вклад геометрического механизма оказывается в $\sigma_{tr}L_\infty/\sigma_{dep}$ раз больше. С ростом поглощения значение $\langle\theta^2\rangle_\infty$ уменьшается и, согласно (141), (142), сами величины $\delta\epsilon_V$ и $\delta\epsilon_W$ и различия между ними также становятся меньше. Эта закономерность проиллюстрирована на рис. 7, где приведены результаты расчета зависимости $\delta\epsilon_V$, $\delta\epsilon_W$ от поглощения в среде. Для вычисления $\delta\epsilon_V$, $\delta\epsilon_W$ использовались результаты теории возмущений (141), (142), а также численное решение уравнений (62) и (63) при $l_{max} = 9$.

В рассматриваемом случае значения функций $\Xi(l)$ и $\Xi_w(l)$ в уравнениях (97)–(99) существенно отличаются от значений (125):

$$\Xi(l) = -\frac{\sigma\gamma_0^2}{2}, \quad \Xi_w(l) = \frac{\sigma\gamma_0^2}{2l^2}, \quad (143)$$

поэтому выражения для обертонов Q_W, Q_{un} и w также будут сильно отличаться от (126)–(128). Выражения для обертонов Q_W, Q_{un} и w наиболее просто выглядят при малых углах, близких к направлению вперед ($\theta < \sqrt{\langle\theta^2\rangle_\infty}$),

$$Q_W(z,\theta) \approx -\frac{\sigma\gamma_0^2\theta^2}{\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^2}\frac{\ln 2}{2}W(z,\theta), \quad (144)$$

$$Q_{un}(z,\theta) \approx -\frac{\sigma\gamma_0^2\theta^2}{\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^2}\frac{\ln 2}{2}I_{scal}(z,\theta), \quad (145)$$

$$w(z,\theta) \approx \frac{\sigma\gamma_0^2\theta^4}{144\sigma_a\langle\theta^2\rangle_\infty^2}W(z,\theta). \quad (146)$$

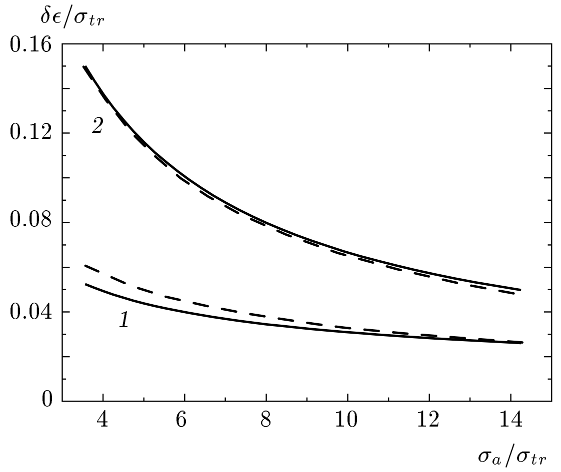

Рис. 7. Зависимости коэффициента затухания степени поляризации линейно (кривые *1*) и циркулярно (кривые *2*) поляризованного света от коэффициента поглощения в среде. Сплошные кривые — численное решение уравнений (58) и (59), $l_{max} = 9$; штриховые — расчет по теории возмущений (141), (142). Водная суспензия частиц латекса, $ka = 10$

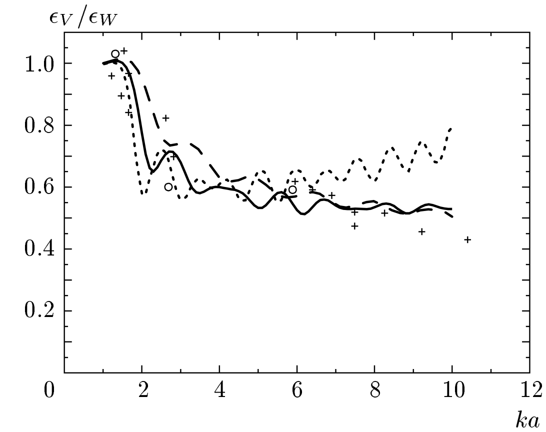

Рис. 8. Зависимости отношения коэффициентов затухания поляризационных мод ϵ_V/ϵ_W от радиуса рассеивателей. Сплошная кривая — водная суспензия частиц латекса; штриховая — частицы кварца в воде; пунктирная — капли воды в воздухе; символами показаны данные [4] эксперимента (∘) и статистического моделирования (+)

По сравнению с (126)–(128) значения обертонов становятся больше: они содержат меньшую степень малой величины отношения угла однократного рассеяния к характерному углу многократного рассеяния в асимптотическом режиме. Как следует из формул (144)–(146), обертон w по сравнению с Q_W и Q_{un} имеет дополнительную малость θ^2 и в рассматриваемом случае многократного рассеяния на малые углы им можно пренебречь.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано выше, особенности поляризационных явлений при многократном рассеянии света в неупорядоченных средах с крупными неоднородностями обусловлены доминирующей ролью «геометрического» механизма деполяризации. «Динамический» механизм оказывается подавленным из-за того, что рассеяние на отдельной неоднородности происходит преимущественно вперед, где амплитуды рассеяния $A_\parallel$ и $A_\perp$ мало отличаются друг от друга. Именно на этом обстоятельстве основан развитый выше метод расцепления векторного уравнения переноса. С ростом размера рассеивателей приближение основных мод становится более точным, поскольку, как следует из наших расчетов (рис. 5), вклад дополнительных мод — «обертонов» — уменьшается.

В средах с крупномасштабными неоднородностями динамический механизм подавляется (рис. 3) и различия в деполяризации линенйно и циркулярно поляризованного света проявляются наиболее заметно. Этот эффект проиллюстрирован на рис. 8, на котором показана зависимость отношения коэффициентов затухания поляризационных мод V и W от радиуса рассеивателей. Для сравнения на рис. 8 приведены результаты эксперимента и численного моделирования [4].

Полученные выше результаты также хорошо согласуются с данными экспериментов [7, 17] и численных расчетов [13] абсолютных значений степени поляризации в асимптотическом режиме (рис. 9, 10). В работах [7, 13, 17] определялось значение степени поляризации линейно и циркулярно поляризованных пучков для направления вперед ($\mu = 1$) при прохождении через слой заданной толщины L. В качестве рассеивающей среды использовалась водная суспензия частиц латекса. Наши расчеты выполнены в приближении основных мод по формулам (75), (76). Для определения V и W использовались соотношения (67) и (73). Поскольку в работах [7, 13, 17] поглощение в среде практически отсутствовало, для интенсивности I_{scal} асимптотический режим не наступал (в отличие от V и W), и для расчета I_{scal} мы использовали результат диффузионного приближения для непоглощающей среды [31]:

$$I_{scal} = \frac{l_{tr} + z}{\pi(L + 2z_0)},$$

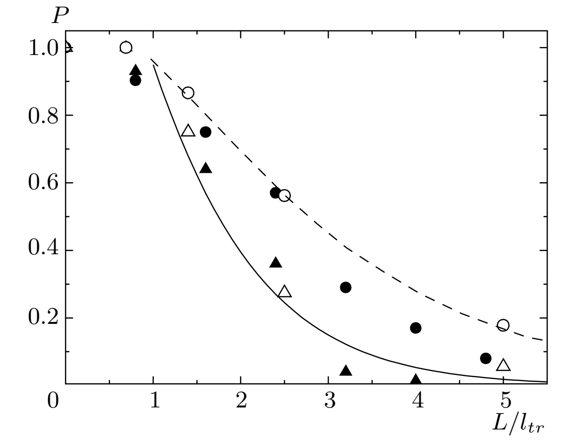

Рис. 9. Зависимости степени поляризации от толщины рассеивающего слоя. Водная суспензия частиц латекса (диаметр частиц 1.08 мкм, длина волны излучения в вакууме $\lambda = 632.8$ нм). Сплошная (P_{lin}) и штриховая (P_{circ}) кривые — результаты настоящей работы, символами показаны данные экспериментов [7] ($\triangle$ — P_{lin}, $\circ$ – P_{circ}) и [17] ($\blacktriangle$ — P_{lin}, $\bullet$ — P_{circ})

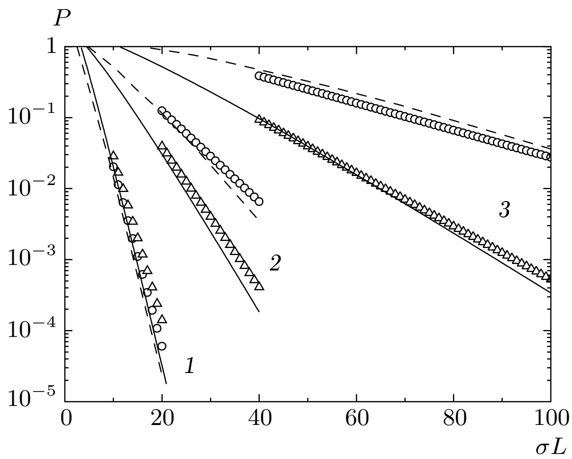

Рис. 10. Зависимости степени поляризации от толщины рассеивающего слоя. Водная суспензия частиц латекса (диаметр частиц 0.22 (*1*), 0.48 (*2*), 1.05 (*3*) мкм, длина волны излучения в вакууме $\lambda = 705$ нм). Сплошные (P_{lin}) и штриховые (P_{circ}) кривые — результаты настоящей работы, символы $\triangle$ (P_{lin}) и $\circ$ (P_{circ}) — данные численного интегрирования векторного уравнения переноса методом дискретных ординат [13]

где $z_0 = 0.71 l_{tr}$ — экстраполированная длина [27, 31]. Как следует из рис. 9, 10, при $ka \gg 1$ наблюдается заметное различие в скорости деполяризации линейно и циркулярно поялризованного света. При $ka \sim 1$ нельзя говорить о преобладающей роли одного из механизмов и скорости деполяризации практически совпадают (см. также рис. 8).

Отметим, что для поглощающих сред различия в деполяризации линейно и циркулярно поляризованного света могут быть еще более заметными. Согласно (141), (142), в поглощающей среде отношение длин деполяризации $l_{circ}/l_{lin} \sim \sigma_{tr} L_\infty/\sigma_{dep}$ превышает соответствующее отношение в отсутствие поглощения, $l_{circ}/l_{lin} \sim \sqrt{\sigma_{tr}/\sigma_{dep}}$. Физически это связано с тем, что в поглощающей среде угловое распределение интенсивности излучения становится более вытянутым в направлении вперед и, соответственно, дополнительно подавляется вклад динамического механизма деполяризации.

Полученные в настоящей работе результаты подтверждают представления о двух разных механизмах деполяризации линейно и циркулярно поляризованного света, предложенных в работе [24] для объяснения наблюдаемых на опыте закономерностей.

Мы благодарны А. Боровому, А. Кохановскому, В. Маринюку и В. С. Ремизовичу за интерес к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования РФ (грант № Е02-3.2-203), программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (грант РНП.2.1.1.1972), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-320.2006.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Обобщенные сферические функции $P^l_{mn}(z)$ выражаются через полиномы Якоби $P_s^{(\alpha,\beta)}(z)$ [45] следующим образом:

$$P^l_{mn}(\cos\gamma) = \frac{(-i)^\alpha}{2^{(\alpha+\beta)/2}} \sqrt{\frac{\left(l-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)!\left(l+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)!}{\left(l+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)!\left(l-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)!}} \times$$
$$\times (1-\cos\gamma)^{\alpha/2}(1+\cos\gamma)^{\beta/2} P_s^{(\alpha,\beta)}(\cos\gamma), \quad (147)$$

где

$$P_s^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta} \times \times \frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}\right]. \quad (148)$$

Входящие в выражения (147) параметры s, α и β равны

$$s = l - \frac{1}{2}(|m+n|+|m-n|), \quad \alpha = |m-n|, \quad \beta = |m+n|.$$

Явные выражения для нескольких первых обобщенных функций P^l_{mn} выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} P^2_{22}(\mu) &= \frac{1}{4}(1+\mu)^2, \\ P^3_{22}(\mu) &= \frac{1}{4}(1+\mu)^2(3\mu-2), \\ P^4_{22}(\mu) &= \frac{1}{4}(1+\mu)^2(1-7\mu+7\mu^2), \quad (149) \\ P^2_{20}(\mu) &= -\frac{\sqrt{6}}{4}(1-\mu^2), \\ P^2_{2-2}(\mu) &= \frac{1}{4}(1-\mu)^2. \end{aligned}$$

Разложение для матрицы рассеяния $\hat{d}(\mathbf{n},\mathbf{n}')$ (22) по обобщенным сферическим функциям ($m, n = 0, \pm 2$) [1] имеет вид

$$d_{mn}(\mathbf{n},\mathbf{n}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{s=-l}^{s=l}(-1)^s\frac{2l+1}{4\pi}d^l_{mn} \times \times P^l_{ms}(\mu)P^l_{sn}(\mu')\exp(is(\varphi-\varphi')). \quad (150)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Решение скалярного уравнения переноса (26) может быть записано в следующем виде [52]:

$$I_{scal}(z,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_I^{(n)}\Phi_I^{(n)}(\mu)\exp\left(-\epsilon_I^{(n)}z\right), \quad (151)$$

где $\epsilon_I^{(n)}$ и $\Phi_I^{(n)}(\mu)$ — n-е собственное значение и соответствующая ему собственная функция. В асимптотическом режиме вклад в сумму (151) дает слагаемое с $n = 0$.

С учетом граничного условия

$$I_{scal}(z=0,\mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi}\delta(1-\mu), & \mu > 0, \\ R(\mu,\mu_0=1), & \mu < 0, \end{pmatrix} \quad (152)$$

Таблица 4.

σ/σ_{tot}	0.6	0.8	0.9	0.95	0.99
σ_a/σ_{tr}	3.2	1.6	0.9	0.4	0.08
$C_I^{(0)}$ (154)	2.50	2.64	2.82	3.02	3.46
$C_I^{(0)}$ [27]	2.52	2.66	2.86	3.12	3.82

где $R(\mu,1)$ есть интенсивность отраженного от среды излучения, и ортогональности собственных функций [52] получаем следующее равенство:

$$\Phi_I^{(0)}(\mu=1) + 2\pi\int_{-1}^{0}\mu d\mu(R(\mu,1)\Phi_I^{(0)}(\mu) = = 2\pi C_I^{(0)}\int_0^1 \mu d\mu\left(\Phi_0^{(0)}(\mu)\right)^2 + + 2\pi C_I^{(0)}\int_{-1}^{0}\mu d\mu\left(\Phi_0^{(0)}(\mu)\right)^2. \quad (153)$$

Предполагая, что в поглощающей среде «отражательные» вклады в правой и левой частях (153) компенсируют друг друга, находим

$$C_I^{(0)} = \frac{\Phi_0^{(0)}(\mu=1)}{2\pi\int_0^1\mu d\mu\left(\Phi_0^{(0)}(\mu)\right)^2}. \quad (154)$$

Сравнение с результатами численных расчетов [27] показывает, что максимальная погрешность, которая следует из равенства (154), не превышает 20 %. Для $\sigma_a > 0.1\sigma_{tr}$ ошибка составляет менее 10% (см. табл. 4). Результаты [27], представленные в табл. 4, получены путем численного интегрирования уравнения переноса для случая индикатрисы Хеньи–Гринстейна со средним косинусом угла рассеяния, равным $\langle\cos\gamma\rangle = 0.875$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Multiple Scattering of Light by Particles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2006).

2. F. C. MacKintosh, J. X. Zhu, D. J. Pine, and D. A. Weitz, Phys. Rev. B **40**, 9342 (1989).

3. J. M. Schmitt, A. H. Gandjbakhche, and R. F. Bonner, Appl. Opt. **31**, 6535 (1992).

4. D. Bicout, C. Brosseau, A. S. Martinez, and J. M. Schmitt, Phys. Rev. E **49**, 1767 (1994).

5. S. G. Demos and R. R. Alfano, Appl. Opt. **36**, 150 (1997).

6. В. В. Тучин, УФН **167**, 517 (1997).

7. V. Sankaran, M. J. Everett, D. J. Maitland et al., Opt. Lett. **24**, 1044 (1999).

8. E. P. Zege and L. I. Chaikovskaya, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **66**, 413 (2000).

9. W. Cai, M. Lax, and R. R. Alfano, Phys. Rev. E **63**, 016606 (2000).

10. A. A. Kokhanovsky, J. Opt. Soc. Amer. A **18**, 883 (2001).

11. M. Moscoso, J. B. Keller, and G. Papanicolaou, J. Opt. Soc. Amer. A **18**, 948 (2001).

12. A. D. Kim and M. Moscoso, Phys. Rev. E **64**, 026612 (2001); Opt. Lett. **27**, 1589 (2002).

13. A. Ishimaru, S. Jaruwatanadilok, and Y. Kuga, Appl. Opt. **40**, 5495 (2001).

14. N. Ghosh, P. K. Gupta, H. S. Patel, B. Jain, and B. N. Singh, Opt. Comm. **222**, 93 (2003).

15. X. Ni, Q. Xing, W. Cai, and R. R. Alfano, Opt. Lett. **28**, 343 (2003).

16. D. A. Zimnyakov, J.-T. Oh, Y. P. Sinichkin, V. A. Trifonov, and E. V. Gurianov, J. Opt. Soc. Amer. A **21**, 59 (2004).

17. N. Ghosh, A. Pradhan, P. K. Gupta, S. Gupta, V. Jaiswal, and R. P. Singh, Phys. Rev. E **70**, 066607 (2004).

18. S. Mujumdar and H. Ramachandran, Opt. Comm. **241**, 1 (2004).

19. G. Yao, Opt. Comm. **241**, 255 (2004).

20. X. Ni and R. R. Alfano, Opt. Lett. **29**, 2773 (2004).

21. M. Xu and R. R. Alfano, Phys. Rev. **72**, 065601 (2005).

22. M. Xu and R. R. Alfano, Phys. Rev. Lett. **95**, 213901 (2005).

23. S. A. Kartazayeva, X. Ni, and R. R. Alfano, Opt. Lett. **30**, 1168 (2005).

24. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Письма в ЖЭТФ **68**, 21 (1998).

25. С. М. Рытов, ДАН СССР **18**, 263 (1938).

26. С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, Изд-во иностр. лит., Москва (1953).

27. H. C. van de Hulst, *Multiple Light Scattering*, Acad. Press, New York (1980).

28. H. Domke, Astrophys. Space Sci. **10**, 379 (1974).

29. I. Kuscer and M. Ribaric, Optica Acta **6**, 42 (1959).

30. Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, Москва (1969).

31. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, Мир, Москва (1981).

32. A. A. Kokhanovsky, *Polarization Optics of Random Media*, Praxis Publ. (2003).

33. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

34. D. Deirmendjian, *Electromagnetic Scattering of Spherical Polydispersions*, Elsevier, New York (1969).

35. E. E. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, Laser Phys. **9**, 1210 (1999).

36. E. E. Gorodnichev, A. I. Kuzovlev, and D. B. Rogozkin, *IRS 2000*: *Current Problems in Atmospheric Radiation*, ed. by W. L. Smith and Yu. M. Timofeev, A. Deepak Publ. Hampton, Virginia (2001), p.287.

37. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Опт. и спектр. **94**, 300 (2003).

38. Ю. А. Кравцов, Изв. вузов. Радиофизика **13**, 281 (1970).

39. Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов, *Геометрическая оптика неоднородных сред*, Наука, Москва (1980).

40. В. И. Татарский, Изв. вузов. Радиофизика **10**, 1762 (1967).

41. Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука, Москва (1968), с. 475.

42. Е. Е. Городничев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **107**, 209 (1995).

43. В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, Москва (1972).

44. R. D. M. Garcia and C. E. Siewert, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **36**, 401 (1986).

45. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва (1958).

46. Л. С. Долин, ДАН СССР **260**, 1344 (1981).

47. В. С. Ремизович, Д. Б. Рогозкин, М. И. Рязанов, Изв. вузов. Радиофизика **24**, 891 (1982).

48. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, ЖЭТФ **115**, 769 (1999).

49. E. Amic, J. M. Luck, and Th. M. Nieuwenhuizen, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 4915 (1996).

50. D. I. Bolgov, V. S. Remizovich, and D. B. Rogozkin, Laser Phys. **8**, 462 (1998).

51. Е. Е. Городничев, А. И. Кузовлев, Д. Б. Рогозкин, Опт. и спектр. **82**, 1188 (1997).

52. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, Москва (1972).