

# СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕРХКОРОТКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ

*А. А. Балакин\*, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, С. А. Скобелев*

*Институт прикладной физики Российской академии наук  
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 28 июля 2006 г.

Приведены результаты численного и аналитического исследования динамики самофокусировки импульсов электромагнитного излучения произвольной длительности. Рассмотрение эволюции волнового поля проведено при достаточно общих предположениях относительно дисперсии среды на основе волнового уравнения в безотражательном приближении. Методы качественного исследования динамики самофокусировки квазимонохроматического излучения обобщены на случай волновых пакетов длительностью несколько периодов колебаний поля. В частности, методом моментов получены достаточное условие коллапса и ряд других интегральных соотношений. С помощью преобразования автомодельного типа показано, что новые структурные особенности связаны, главным образом, с нелинейной дисперсией среды (зависимостью групповой скорости волнового пакета от амплитуды). Численное исследование подтверждает, что увеличение крутизны продольного профиля предшествует эффекту самофокусировки излучения.

PACS: 41.20.Jb, 42.65.Re, 42.65.Tg, 42.65.Jx, 42.65.-k

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из современных направлений в исследовании взаимодействия электромагнитного излучения с веществом связано с использованием все более коротких электромагнитных импульсов. При этом удается выйти на более высокий уровень интенсивностей при той же энергии в импульсе. Новые возможности, которые открываются по мере укорочения длительности импульса, связаны с уширением спектра волнового поля. Развитие оптических методов генерации и детектирования терагерцовых импульсов с использованием фотопроводников и нелинейных кристаллов [1, 2] также стимулирует активный интерес к применению широкополосного излучения в фундаментальных и прикладных исследованиях [3, 4]. Развивается и нелинейная оптика аттосекундных импульсов [5].

В связи с этим возникает новая в теоретическом плане проблема исследования особенностей распространения сверхкоротких импульсов конечной ам-

плитуды, их дифракции в неоднородной среде и взаимодействия такого излучения с веществом. Особенности теоретического описания пространственно-временной эволюции импульсов с шириной спектра порядка несущей частоты связаны с невозможностью применения традиционно используемого в теории волновых процессов приближения медленно меняющихся амплитуд для исследования динамики системы. Необходимо также получить материальные уравнения, адекватно описывающие линейную и нелинейную дисперсию показателя преломления среды в широком диапазоне частот в области прозрачности [6–8]. Следует отметить, что сходные задачи, связанные с описанием заметного уширения спектра излучения, возникают и в композитных средах, например, в кластерной плазме [9], а также при изучении такого уникального явления как сверхдальное распространение ионизирующего фемтосекундного лазерного излучения в атмосфере [10, 11].

На пути решения этой проблемы используется несколько подходов. Прежде всего следует отметить, что для исследования особенностей динамики сверхкоротких импульсов все чаще обращаются

\*E-mail: balakin@appl.sci-nnov.ru

непосредственно к численному решению уравнений Максвелла. Однако даже при использовании самых сверхмощных компьютеров удается проводить исследование лишь двумерных волновых полей на довольно ограниченной трассе распространения [12]. Очевидно, что этого недостаточно для описания реальной ситуации самовоздействия полей, поскольку динамика процесса определяется конкуренцией эффектов дифракции и нелинейной рефракции и, следовательно, существенно зависит от размерности задачи.

Наибольшее распространение получило обобщение приближенного метода медленно меняющейся огибающей, связанное с учетом зависимости групповой скорости от амплитуды волнового поля, линейной дисперсии среды (см., например, [9, 11, 13–15]). В результате задача сводится к анализу уравнения для огибающей волнового пакета, которое иногда называют нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) высокого порядка. Порядок определяется максимальной производной от показателя преломления среды по частоте, которую учитывают при получении уравнения. Третий подход основан на рассмотрении безотражательного распространения импульса в однородной среде. Предполагается, что пространственно-временная структура волнового поля плавно меняется в процессе однонаправленного распространения импульса по трассе из-за дифракции и нелинейности среды, т. е. в пренебрежении эффектами отражения [8, 16, 17]. В случае квазимонохроматического излучения такой подход, очевидно, соответствует переходу к уравнению для огибающей. Учет конечной ширины спектра приводит к новым эффектам, которые проявляются в долговременной эволюции пространственно-ограниченного импульса: формирование дифракционного предвестника, образование характерной подковообразной структуры и дублета в спектре волнового поля [16, 17]. Еще один способ основан на представлении решения исходных уравнений Максвелла в виде набора негармонических пространственно-временных структур автомодельного типа, распространяющихся как в прямом, так и в обратном направлении. В отличие от предыдущих подходов это позволяет, например, рассматривать динамику отражения сверхкороткого импульса от плоской границы раздела двух сред [19]. Однако остается неясной возможность обобщения этого подхода на пространственно-ограниченные (в поперечном направлении) волновые поля.

Следует заметить, что приближенное описание динамики сверхкоротких импульсов в предположе-

нии плавного однонаправленного распространения волнового пакета в среде применимо как для видеоимпульсов, так и для квазимонохроматических волновых пакетов. В данной работе развит именно такой подход [8, 16, 17] для исследования динамики самовоздействия волновых полей в средах со слабой локальной нелинейностью. Статья построена следующим образом. В разд. 2 получены уравнения, описывающие эволюцию волновых пакетов с конечным числом колебаний поля в параксиальном приближении. В разд. 3 проведено качественное исследование структурных особенностей трехмерных волновых полей и определено поведение эффективных параметров распределения поля (центра масс, ширины волнового поля и др.). В следующих разделах исследованы особенности динамики самовоздействия с помощью численного моделирования. Сначала (разд. 4) исследована эволюция волнового поля в среде без дисперсии, затем (разд. 5) рассмотрена роль частотной дисперсии среды в процессе самовоздействия электромагнитного излучения.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Волновое уравнение, описывающее распространение пакета электромагнитных волн вдоль оси  $z$ , удобно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \Delta_{\perp} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

вектор  $\mathbf{P}$  — поляризационный отклик диэлектрической среды в поле интенсивного излучения.

Классический пример материальной связи  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  в слабом поле дает теория дисперсии Лоренца. При небольшом числе феноменологических параметров она приводит к той же частотной зависимости показателя преломления среды, что и в результате квантовомеханического расчета. Обобщение теории Лоренца на случай интенсивного излучения можно провести путем введения в уравнение осциллятора кубической нелинейности [7]. При этом для описания нелинейных нерезонансных процессов в поле линейно поляризованной волны можно воспользоваться уравнением Дуффинга

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \omega_0^2 P + \delta P^3 + \tilde{\gamma} \frac{\partial P}{\partial t} = \chi \omega_0^2 E. \quad (2)$$

Здесь  $\chi$  — статическая линейная восприимчивость,  $\delta, \tilde{\gamma}$  — параметры нелинейности и диссипации. Для простоты сначала мы ограничились наличием одной резонансной частоты  $\omega_0$ . Отсюда для излучения с несущей частотой  $\omega$ , много меньшей  $\omega_0$ ,

$$\omega \ll \omega_0, \quad (3)$$

методом последовательных приближений по параметрам нелинейности  $\delta$  и нестационарности найдем для поляризации  $P$  выражение

$$P = \chi E - \frac{\chi}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\delta \chi^3}{\omega_0^2} E^3 - \tilde{\gamma} \frac{\chi}{\omega_0^2} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (4)$$

Линейной части этого выражения оказывается недостаточно для описания дисперсии диэлектрической проницаемости в относительно широкой области частот. В работе [20] показано, что в соответствии с соотношениями Крамерса–Кронига диэлектрическая проницаемость как функция частоты должна проходить через нуль. Необходимое обобщение выражения (4) можно провести посредством добавления дополнительного осциллятора с собственной частотой, равной нулю (плазменного типа). По существу это означает, что в уравнение для поля (1) следует добавить слагаемое, пропорциональное полю,  $(\omega_{pl}^2/c^2)E$ , которое определяет низкочастотную дисперсию среды. С учетом этого замечания, подставляя выражение (4) в уравнение (1) и используя приближение однонаправленного (безотражательного) распространения волнового поля вдоль оси  $z$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} - \frac{4\pi\delta\chi^3}{(c\omega_0)^2} \frac{\partial^2 E^3}{\partial \tau^2} - \frac{4\pi\chi}{(c\omega_0)^2} \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} - \\ & - \frac{4\pi\chi\tilde{\gamma}}{(c\omega_0)^2} \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + \frac{\omega_{pl}^2}{c^2} E = \Delta_{\perp} E, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\tau = t - z\sqrt{\varepsilon_0}/c$  — время в сопровождающей системе координат,  $\varepsilon_0 = 1 + 4\pi\chi$  — статическая диэлектрическая проницаемость среды,  $\omega_{pl}$  — плазменная частота.

Более точное описание поляризационного отклика должно учитывать дополнительно вклады от нерезонансного возбуждения других осцилляторов и индуцированной анизотропии осциллятора на частоте  $\omega_0$  [6–8]. Оно приводит к некоторой модификации коэффициентов в уравнениях (4), (5). В частности, благодаря этому обстоятельству удается добиться хорошего согласия теоретических результатов с экспериментальными данными по измерению линейной дисперсии кварцевого стекла практически

во всем диапазоне прозрачности при изменении частоты более чем на порядок [6, 8].

Окончательно уравнение, описывающее динамику самовоздействия линейно поляризованного волнового поля в среде с фокусирующей нелинейностью ( $\chi\delta < 0$ ), представим в следующем виде [8, 17]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) + au = \Delta_{\perp} u. \quad (6)$$

Здесь введены следующие новые (безразмерные) переменные:

$$\begin{aligned} z & \rightarrow z \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}\omega c}{\omega_{pl}^2}, \quad r \rightarrow r \frac{c}{\omega_{pl}}, \quad \tau \rightarrow \tau \omega, \\ E & = u \sqrt{\frac{\omega_0^2 \omega_{pl}^2}{4\pi\delta\chi^3 \omega^2}}, \quad \gamma = \frac{4\pi\chi\tilde{\gamma}\omega^3}{\omega_0^2 \omega_{pl}^2}, \quad b = \frac{4\pi\chi\omega^4}{\omega_0^2 \omega_{pl}^2}, \end{aligned}$$

где  $\omega$  — центральная частота широкополосного излучения. Параметры  $b > 0$  и  $a > 0$  характеризуют, соответственно, высокочастотную и низкочастотную (плазменную) дисперсию;  $\gamma > 0$  определяет диссипацию поля.

В отсутствие линейной дисперсии среды ( $a = b = 0$ ) уравнение (6) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) = \Delta_{\perp} u. \quad (7)$$

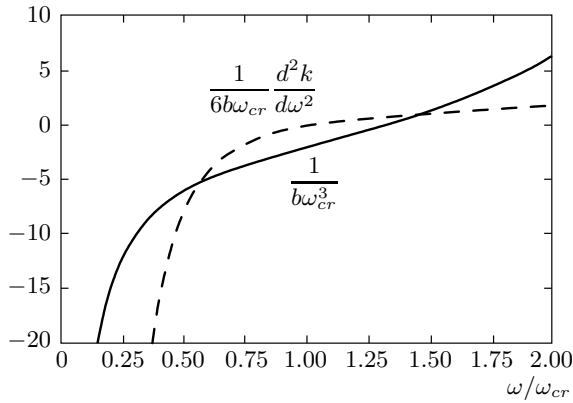
Его можно рассматривать как неодномерное ( $\Delta_{\perp} \neq 0$ ) обобщение модифицированного уравнения Бюргера. Оно относится к типу обобщенных уравнений Хохлова–Заболоцкой и описывает, например, особенности самовоздействия акустических волновых полей в средах с кубической нелинейностью [21]. При  $\gamma = 0, a = 0$  уравнение (6) имеет вид обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right) = \Delta_{\perp} u. \quad (8)$$

Оно используется, например, для описания эволюции упругих волн конечной амплитуды в магнетиках [22]. В зависимости от закона дисперсии фононов, линейно связанных с магнонами, коэффициент  $b$  может принимать как положительные,  $b > 0$ , так и отрицательные,  $b < 0$ , значения.

В рассматриваемом нами случае электромагнитного излучения параметры  $a$  ( $a > 0$ ) и  $b$  ( $b > 0$ ) определяют линейную дисперсию групповой скорости волнового поля в широком диапазоне частот.

На рис. 1 представлены закон дисперсии  $k(\omega) = -a/\omega + b\omega^3$  для одномерного случая ( $\Delta_{\perp} = 0$ ) и зависимость дисперсии групповой скорости



**Рис. 1.** Закон дисперсии (сплошная линия) и зависимость дисперсии групповой скорости от частоты (штриховая линия)

$k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$  от частоты. Для излучения с частотой  $\omega_{cr} = (a/3b)^{1/4}$  дисперсия групповой скорости равна нулю. С помощью выбора центральной частоты  $\varpi$  широкополосного излучения можно влиять на роль дисперсии в динамике системы. Для волновых полей с частотой  $\varpi \gg \omega_{cr}$  преобладающей является нормальная дисперсия групповой скорости, для  $\varpi \ll \omega_{cr}$  — аномальная.

В случае квазимонохроматического волнового пакета

$$u = \psi(z, \mathbf{r}_\perp, \tau) e^{i\omega\tau} + \text{с.с.}$$

из уравнения (6) нетрудно получить уравнение, обобщающее известное НУШ для огибающей [18],

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_\perp \psi + \alpha(\omega) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\tau}^2} + |\psi|^2 \psi + i |\psi|^2 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\tau}} + i \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\tau}^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial^n \psi}{\partial \tilde{\tau}^n} = 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{\tau} = \tau - z/v_{gr}$  — время в сопровождающей системе координат,  $v_{gr}$  — групповая скорость. Для этой цели нужно пренебречь смешанной производной  $\partial^2 \psi / \partial z \partial \tilde{\tau}$ , генерацией третьей гармоники частоты  $\omega$  и перейти в систему координат, движущуюся с групповой скоростью. Видно, что в случае квазимонохроматического излучения нелинейное слагаемое в уравнении (6) распадается на два. Одно описывает обычную кубическую нелинейность в НУШ, второе — зависимость групповой скорости волнового пакета от амплитуды. Как правило, слагаемое  $|\psi|^2 \psi$  заметно превосходит нелинейную поправку к групповой скорости. Однако, несмотря на малость, нелинейная дисперсия приводит к эффекту опрокидывания профиля огибающей импульса. С другой стороны, име-

ются случаи, например, в условиях электромагнитной индуцированной прозрачности, когда эффекты нелинейной дисперсии являются преобладающими.

Параметр  $\alpha(\omega)$  определяется дисперсией групповой скорости. Для сред с нормальной дисперсией групповой скорости  $\alpha < 0$ , а для аномальной  $\alpha > 0$ . Выбором центральной частоты  $\varpi = \omega_{cr}$  можно добиться обращения  $\alpha$  в нуль,  $\alpha(\omega_{cr}) = 0$ . В этом случае дисперсия волнового пакета определяется третьей и более высокими производными по  $\tau$ .

Особенности динамики самовоздействия квазимонохроматического излучения довольно хорошо изучены и экспериментально исследованы в одномерных системах ( $\Delta_\perp = 0$ ) [23]. Следует отметить, что несмотря на малость слагаемых, описывающих дисперсию высших порядков и нелинейную дисперсию, они определяют как эволюцию волновых пакетов в фиберах, так и структуру частотно-модулированных солитонов. Совместное их действие определяет, например, эффект самообострения импульса [23].

Ситуация заметно меняется в неодномерном случае ( $\Delta_\perp \neq 0$ ) из-за реализации эффекта самофокусировки излучения. Чтобы оценить влияние различных слагаемых в уравнении (9), сделаем преобразование

$$\psi = \frac{\Phi(\eta, \xi, \tilde{\tau})}{z_0 - z} \exp\left(-i \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{4(z_0 - z)}\right), \quad (10)$$

где

$$\eta = \frac{\mathbf{r}_\perp}{z_0 - z}, \quad \xi = \frac{z}{z_0(z_0 - z)}, \quad (11)$$

которое в явном виде предполагает процесс самосжатия аксиально-симметричного волнового пакета на длине самофокусировки  $z_0$ . В результате приходим к уравнению

$$i \Phi_\xi + \Delta_\eta \Phi + |\Phi|^2 \Phi + i |\Phi|^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\tau}} + \frac{z_0^2}{(\xi z_0 + 1)^2} \left[ \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{\tau}^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \alpha_n \frac{\partial^n \Phi}{\partial \tilde{\tau}^n} \right] = 0, \quad (12)$$

которое описывает эволюцию волнового пакета на полубесконечном интервале изменения  $\xi$ . Видно, что коэффициент перед дисперсионным слагаемым уменьшается по закону  $\propto \xi^{-2}$ , следовательно, роль дисперсии (даже квадратичной) ослабляется по мере распространения импульса. Напротив, роль нелинейной дисперсии сильно возрастает, поскольку в рассматриваемых координатах самофокусировка излучения соответствует квазиволноводному режиму,

возникающему при компенсации кубической нелинейности дифракцией ( $\Delta_\eta \Phi \approx |\Phi|^2 \Phi$ ). Таким образом, основным эффектом на начальном этапе эволюции системы становится увеличение крутизны продольного профиля и образование ударной волны огибающей [25]. Этим динамика самовоздействия отличается от соответствующего процесса в стандартом НУШ.

Далее мы рассмотрим особенности пространственно-временной эволюции волновых полей на основе уравнения (6). В разд. 3 получен ряд аналитических соотношений, позволяющих качественно проанализировать характерные черты динамики самовоздействия, затем приведены результаты численного исследования отдельно для среды без линейной дисперсии (разд. 4) и с учетом специфики дисперсии (разд. 5).

### 3. КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ

Для получения некоторых достаточно общих соотношений рассмотрим динамику самовоздействия в среде без поглощения. Полагая в уравнении (6)  $\gamma = 0$ , приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + 3u^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right) + au = \Delta_\perp u. \quad (13)$$

В дальнейшем более удобно перейти от уравнения (13) к уравнению для «потенциала»  $\phi$  поля  $u = \phi_\tau$ . В результате для локализованного распределения  $\phi$  получаем уравнение Лагранжа

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} (\phi_\tau)^3 - b \frac{\partial^4 \phi}{\partial \tau^4} = \Delta_\perp \phi - a\phi, \quad (14)$$

которому соответствует следующее выражение для плотности функции Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2} \phi_z \phi_\tau + \frac{\phi_\tau^4}{4} + \frac{b}{2} \phi_{\tau\tau}^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\perp \phi)^2 - a \frac{\phi^2}{2}. \quad (15)$$

В результате приходим к интегральным соотношениям

$$\int \phi_\tau^2 d\tau d\mathbf{r}_\perp = I, \quad (16a)$$

$$\int \phi_\tau \nabla_\perp \phi d\tau d\mathbf{r}_\perp = \mathbf{P}, \quad (16б)$$

$$\int \left[ (\nabla_\perp \phi)^2 - b \phi_{\tau\tau}^2 - \frac{1}{2} \phi_\tau^4 + a \phi^2 \right] d\tau d\mathbf{r}_\perp = H, \quad (16в)$$

сохраняющимся в процессе эволюции системы. К ним следует добавить соотношение

$$\int u d\tau = 0, \quad (17)$$

которое означает отсутствие нулевой (нераспространяющейся) гармоники в спектре волнового пакета.

Существование этих соотношений связано с трансляционной симметрией исходного уравнения (13). Они являются обобщением на случай широкополосного излучения хорошо известных выражений для энергии (числа квантов), импульса и гамильтониана квазимонохроматического волнового пакета.

По аналогии со случаем квазимонохроматических пакетов [26] применим метод моментов для качественного исследования эволюции системы. Исходным для дальнейшего рассмотрения является уравнение непрерывности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 &= -3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\phi_\tau^4}{2} + b \phi_{\tau\tau}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla_\perp \phi)^2 + \\ &+ b \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \phi_\tau^2 + 2 \operatorname{div}_\perp (\phi_\tau \nabla_\perp \phi) - a \frac{\partial}{\partial \tau} \phi^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Оно получается умножением уравнения (13) на  $2\phi_\tau$  и последующим преобразованием к дивергентному виду.

Вначале рассмотрим моменты первого порядка:

$$\frac{\int \tau \phi_\tau^2 d\tau d\mathbf{r}_\perp}{I} = \bar{\tau}, \quad (19a)$$

$$\frac{\int \mathbf{r}_\perp \phi_\tau^2 d\tau d\mathbf{r}_\perp}{I} = \bar{\mathbf{r}}_\perp, \quad (19б)$$

которые описывают движение центра масс волнового поля  $u = \phi_\tau$ . Для них из уравнения (18) можно получить

$$\begin{aligned} I \frac{d\bar{\tau}}{dz} &= \\ &= \int \left[ (\nabla_\perp \phi)^2 + 3 \left[ b \phi_{\tau\tau}^2 + \frac{\phi_\tau^4}{2} \right] + a \phi^2 \right] d\tau d\mathbf{r}_\perp, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$I \frac{d\bar{\mathbf{r}}_\perp}{dz} = -2\mathbf{P}. \quad (20б)$$

Отсюда видно, что поперечная скорость волнового пакета (20б) остается постоянной и определяется начальными условиями (например, при  $z = 0$ ). Для аксиально-симметричного волнового поля ( $P = 0$ ) она равна нулю, а центр пакета неравномерно движется вдоль оси  $z$ . Из уравнения (20a) видно, что все процессы (дифракция, дисперсия и нелинейность) приводят к замедлению продольной скорости распространения электромагнитного сгустка в среде.

Моменты второго порядка

$$\frac{\int (\tau - \bar{\tau})^2 \phi_\tau^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau}{I} = \bar{\tau}^2, \quad (21a)$$

$$\frac{\int r_\perp^2 \phi_\tau^2 d\mathbf{r}_\perp d\tau}{I} = \bar{r}_\perp^2 \quad (21б)$$

характеризуют эффективные продольные и поперечные размеры волнового поля. Из-за неравномерности движения центра масс сгустка (20a) не удается получить простого уравнения, описывающего эволюцию продольного размера поля. Соответствующее уравнение для изменения характерного поперечного размера сгустка имеет вид

$$I \frac{d^2 \bar{r}_\perp^2}{dz^2} = 8 \int \left[ (\nabla_\perp \phi)^2 - \frac{\phi_\tau^4}{2} \right] d\tau d\mathbf{r}_\perp. \quad (22)$$

Для качественного анализа поведения поля удобно переписать уравнение (22), выделив в правой части гамильтониан (интеграл системы) (16в). В результате получим

$$I \frac{d^2 \bar{r}_\perp^2}{dz^2} = 8H + 8 \int (b\phi_{\tau\tau}^2 - a\phi^2) d\mathbf{r}_\perp d\tau. \quad (23)$$

В отсутствие низкочастотной дисперсии ( $a = 0$ ) уравнение такого типа получено ранее в работе [22]. Видно, что при отрицательном гамильтониане ( $H < 0$ ) уменьшение ширины волнового поля до нуля возможно в среде без дисперсии ( $a = b = 0$ ). Условие  $H < 0$  является достаточным и для коллапса в среде с аномальной дисперсией групповой скорости ( $b = 0$ ). Столь определенный вывод не удается сделать для среды с нормальной дисперсией ( $a = 0$ ).

Сделанные выводы представляют собой обобщение соответствующих результатов для НУШ на случай широкополосного излучения. Формально модифицировалось лишь выражение для гамильтониана. Однако из уравнения (23) видна и новая возможность. Она относится к импульсам, спектр которых захватывает области как нормальной, так и аномальной дисперсии. Например, для распределений поля вида  $\exp(-\alpha|\tau|) \sin(\beta\tau)$  нетрудно подобрать  $\alpha$  и  $\beta$  такими, чтобы подынтегральное слагаемое в (23) обратилось в нуль. Это означает, что начальный этап эволюции таких специально сконструированных распределений будет происходить как в среде без дисперсии.

В нелинейной теории неоднородных волновых полей решения с особенностью играют такую же важную роль, как солитоны в одномерных системах. Как и в теории самофокусировки, инвариантность уравнения (13) относительно определенного

класса преобразований типа (10) дает возможность изучить пространственную структуру сингулярных решений. Это связано с более общими свойствами симметрии уравнения (13), чем те, которые привели к интегральным соотношениям (16).

Для качественного исследования модификации волнового поля удобно представить решение уравнения (7) в автомодельном виде

$$u = \frac{1}{\rho(z)} v \left( z, \frac{r}{\rho(z)}, \tau - \frac{\rho_z}{4\rho} r^2 \right), \quad (24)$$

где  $\rho_z = d\rho/dz$ . В теории самофокусировки волновых пучков преобразования такого типа приводят к переносу точки нелинейного фокуса  $z = z_0$  на бесконечность [26]. В результате функция  $v$  оказывается регулярной на всей полуоси  $z$ . В рассматриваемом случае импульсного излучения переход в «схлопывающуюся» систему координат позволяет выделить в явном виде процесс продольной эволюции волнового поля. Разделение движений проявляется в том, что  $\rho(z)$  определяет изменение поперечного размера поля в процессе самофокусировки, а продольная эволюция происходит по структурам подковообразного вида

$$\theta = \tau - \frac{\rho_z}{4\rho} r^2.$$

В случае квазимонохроматического излучения  $\theta$  описывает только искажения фазового фронта волны. Частичная потеря эффекта образования «подков» в уравнении (9) связана с пренебрежением слагаемым  $\partial^2 \psi / \partial z \partial \tau$  при переходе от (7) к (9). Именно с этим слагаемым в уравнении Кадомцева–Петвиашвили связано возникновение изгибной неустойчивости и формирование подковообразной структуры [30].

В новых переменных

$$\xi = \int \frac{dz}{\rho^2(z)}, \quad \eta = \frac{r}{\rho(z)}, \quad \theta = \tau - \frac{\rho_z \rho}{4} \eta^2 \quad (25)$$

динамика самовоздействия волнового поля описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\rho_{zz} \rho^3}{4} \eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \rho^2(z) \left( b \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} - av \right) = \Delta_\perp v, \quad (26)$$

мало отличающимся от исходного, но гораздо более удобным для качественного исследования.

Прежде всего, видно, что темп самосжатия  $\rho(z)$  определяет уровень ослабления дисперсионных эффектов при коллапсе ( $\rho|_{z \rightarrow z_0} \rightarrow 0$ ). Таким обра-

зом, формирование квазиволноводного распределения поля протекает как в среде без дисперсии. Более того, в этом режиме самовоздействия задачу в приближении нелинейной геометрической оптики ( $\Delta_{\perp} \approx 0$ ) удастся свести к квазиодномерной

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\rho_{zz} \rho^3}{4} \eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \approx 0. \quad (27)$$

Для описания процессов в приосевой области ( $\eta \approx 0$ ) аппроксимируем поперечное распределение поля в виде

$$v \approx w(\xi, \theta) \left(1 - \frac{\eta^2}{2}\right). \quad (28)$$

Здесь мы предположили, что характерный масштаб квазиволноводной структуры в новых переменных равен единице. Подставляя соотношение (28) в уравнение (27) и приравнявая коэффициенты перед  $\eta^0$  и  $\eta^2$ , находим

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} + 3w^2 \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad (29a)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = -6 \frac{\overline{w^2}}{\rho^3}. \quad (29b)$$

При получении уравнения (29b) было проведено усреднение  $w^2$  по длительности импульса  $T$ ,

$$\left(\overline{w^2}(\xi) = \frac{1}{T} \int w^2 d\theta\right),$$

чтобы характерный масштаб поля в реальных переменных был функцией только  $z$ .

Уравнение (29a) описывает опрокидывание продольного профиля и образование ударной волны. Этот процесс определяется амплитудой поля и происходит при конечном  $\xi$ , т. е. опережает коллапс волнового поля. Диссипация поля на фронте ударной волны приводит к уменьшению амплитуды импульса  $w(\xi)$  по мере распространения.

Уравнение (29b) можно рассматривать как «обобщение» уравнения (23) для среды без дисперсии ( $a = b = 0$ ) на неконсервативный случай. Следует заметить, что уравнения (29b) и (23) описывают поведение разных величин. Однако, если считать  $r_{\perp}^2 \equiv \rho^2$ , то закон схлопывания при  $\overline{w^2} = \text{const}$  получается один и тот же. Так, например, для коллимированного волнового пучка ( $\rho_z|_{z=0} = 0$ ) из (29b) находим хорошо известный в теории самофокусировки закон [26]

$$\rho \propto \sqrt{z_0^2 - z^2}. \quad (30)$$

В случае специальным образом сфокусированного излучения можно получить

$$\rho \propto z_0 - z$$

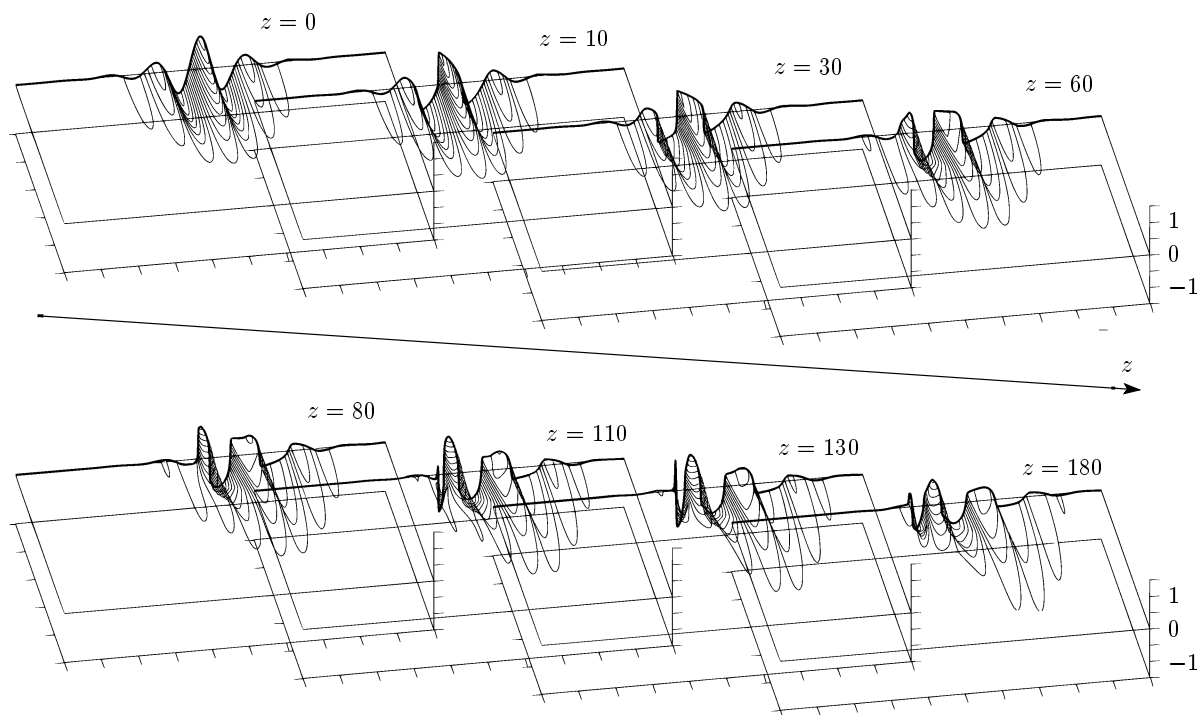
и автомодельный режим самофокусировки типа (10). Для него преобразование (25) является инвариантным. При учете диссипации волнового поля на ударных фронтах подобно тому, как это делается в газодинамике, задача определения темпа схлопывания становится самосогласованной. Однако и в этом случае можно утверждать, что с уменьшением длительности импульса основным эффектом становится увеличения крутизны продольного профиля, темп которого возрастает при самофокусировке излучения.

Для более детального исследования этого процесса обратимся к результатам численного исследования долговременной эволюции системы. Сначала в разд. 4 рассмотрим особенности самовоздействия в среде без дисперсии. Как показывает проведенное выше качественное исследование, именно эти структурные особенности должны доминировать и при наличии дисперсии среды вплоть до области коллапса и опрокидывания профиля пакета. В разд. 5 мы более детально проанализируем подавление эффектов дисперсии в процессе самофокусировки и приведем результаты численного моделирования процессов в среде с дисперсией.

#### 4. ДИНАМИКА САМОВОЗДЕЙСТВИЯ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДЕ БЕЗ ДИСПЕРСИИ

Рассмотрим два случая. Сначала приведем результаты исследования динамики самовоздействия линейно поляризованного поля. Оно описывается тем же уравнением (7), что и самовоздействие акустических сдвиговых волн в бездефектном твердом теле [21]. Особенности динамики самовоздействия в бездисперсионной среде связаны с увеличением крутизны волновой структуры внутри огибающей и последующей диссипацией поля. В результате самофокусировка волновых пакетов с  $H < 0$  протекает в условиях неустраимого поглощения на внутренних ударных фронтах.

Затем, во второй части этого раздела мы рассмотрим особенности самофокусировки циркулярно поляризованного излучения.



**Рис. 2.** Динамика линейно поляризованного поля  $u(z, \tau, r)$  в среде без дисперсии ( $a = 0, b = 0$ ) с  $\gamma = 0.006$ .  
Начальное распределение циркулярно поляризованного поля  $u = 0.6 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\cos(\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$

#### 4.1. Самовоздействие «скалярного» (линейно поляризованного) поля

Результаты численного моделирования динамики самовоздействия начального распределения поля

$$u = 0.6 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\cos \tau}{\text{ch}(0.3\tau)} \quad (31)$$

приведены на рис. 2.

В случае параметров, для которых выполнено условие самосжатия волнового поля ( $H < 0$ ), основным процессом является увеличение крутизны профиля волнового поля внутри каждой половины периода и образование ударных волн трапецеидальной формы. В этом состоит некоторое отличие «кубичной» среды от «квадратичной», в которой на каждом периоде происходит формирование характерного пилообразного профиля.

Поглощение излучения на ударных фронтах (внутри каждого полупериода) оказывается таким, что амплитуда волнового профиля в центральной части остается практически неизменной в процессе самовоздействия. Самофокусировка излучения проявляется лишь в заметном уменьшении поперечного размера волнового поля.

Интерпретация полученных результатов на основе соответствующего обобщения безабберационного приближения (аппарата, разработанного для исследования самовоздействия квазимонохроматического излучения) дана в работе [21], где показано, что процесс схлопывания протекает без заметного изменения амплитуды. В наших численных расчетах можно видеть и некоторые отличия от этой качественной картины. Прежде всего, следует отметить структурные изменения поперечного распределения (формирование двухмасштабного распределения), увеличение продольного размера фокальной области. Кроме того, видно различие в эволюции переднего и заднего полуволновых импульсов. Вблизи переднего фронта амплитуда импульса уменьшается, вблизи заднего растет и становится больше, чем у центрального.

Для качественного исследования процессов в рамках нашего подхода воспользуемся уравнениями для эволюции поля на оси системы (29а) и ширины волнового пучка (29б) в приосевой области ( $\eta \approx 0$ ). Умножая уравнение (29а) на  $2w$ , получим уравнение



$$\frac{\partial w^2}{\partial \xi} + 3w^2 \frac{\partial w^2}{\partial \theta} = 0, \quad (32)$$

которое детально исследовано в газодинамике [28]. Очевидно, распределение поля по  $\theta$  остается «периодическим» с прежним периодом. Образование универсального профиля в процессе опрокидывания каждого полупериода поля дает возможность определить закон затухания слабой ударной волны по мере ее распространения. Непосредственное использование соответствующих выражений из работы [28] приводит к следующему результату:

$$w^2 \propto \frac{1}{\xi}. \quad (33)$$

К такому же выводу приводит и детальное рассмотрение нелинейной диссипации на основе уравнения (296) в работе [21]. Таким образом, для определения характерного поперечного масштаба поля в самосогласованном режиме из (296) находим уравнение

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = -\frac{6\alpha}{\xi \rho^3}, \quad (34)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности в формуле (33). Новая и «старая» эволюционные переменные  $\xi$  и  $z$  связаны следующим дифференциальным соотношением (см. (25)):

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{\rho^2(z)}. \quad (35)$$

Удобно записать систему (34), (35) в виде одного линейного уравнения относительно  $1/\rho(\xi)$ :

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \frac{1}{\rho} = \frac{6\alpha}{\xi} \frac{1}{\rho}. \quad (36)$$

Решениями этого уравнения являются модифицированные функции Бесселя. В результате для описания процесса схлопывания ( $z \rightarrow z_0$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ ) находим

$$\frac{1}{\rho} \propto \sqrt{\xi} I_1(2\sqrt{6\alpha\xi}) \approx \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \exp(2\sqrt{6\alpha\xi}). \quad (37)$$

Возвращаясь к переменной  $z$  (см. (35)), окончательно получаем

$$\rho \propto \sqrt{z_0 - z}, \quad \xi \propto \frac{\ln|z_0 - z|}{z_0}. \quad (38)$$

Этот вывод следует непосредственно из (34) и (35) в предположении, что  $\xi$  — медленная функция  $z$ . Таким образом, для изменения амплитуды в процессе распространения импульса имеем

$$u \propto \frac{1}{\sqrt{\ln|z_0 - z|/z_0} \sqrt{z_0 - z}}. \quad (39)$$

Здесь увеличение амплитуды связано с уменьшением ширины пучка ( $\rho \propto \sqrt{z_0 - z}$ ), а убывание — с диссипацией на ударных фронтах ( $\propto \frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{\ln|z_0 - z|/z_0}}$ ).

Обращаясь к результатам численных расчетов, можно видеть, что уменьшение характерной ширины поля при коллапсе находится в хорошем соответствии с законом  $\rho \propto \sqrt{z_0 - z}$ . Несмотря на правильную тенденцию, формула (39) не обеспечивает необходимого диссипативного снижения темпа возрастания амплитуды поля и дает явно завышенное значение. Видимо, универсального (не зависящего от коэффициента вязкости) поглощения недостаточно для стабилизации (ограничения роста) амплитуды на практически неизменном уровне. Этот вывод мы специально проверили на основе НУШ с дополнительным слагаемым,

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \Delta_{\perp} \psi + |\psi|^2 \psi + i\nu |\psi|^2 \psi = 0, \quad (40)$$

описывающим нелинейную диссипацию излучения.

Такое уравнение получено в работе [21] усреднением по «трапецидальной» периодической волне. Полагая

$$u = U(\tau - \varphi(r, z)) \psi(z, r)$$

и разделяя переменные в предположении, что  $U(\theta)$  — универсальный трапецидальный профиль, можно получить уравнение (40). Расчет поглощения на этом профиле дает значение  $\nu = 0.184$  независимо от величины коэффициента вязкости  $\gamma$  [21].

При численном моделировании нам не удалось добиться стабилизации амплитуды поля при заметном уменьшении (в 5–8 раз) поперечного размера пучка. Ситуация существенно не менялась при изменении значения  $\nu$  в несколько раз. Более успешным оказался подход, связанный с увеличением степени нелинейной диссипации до 2.5. При нелинейном диссипативном слагаемом  $i\nu |\psi|^{2.5} \psi$  с  $\nu = 0.3$  удалось добиться как стабилизации амплитуды, так и характерной двухмасштабной структуры поля при сжатии в системе. Однако остается неясным, с чем связано такое усиление нелинейной диссипации — с «конечной» амплитудой ударной волны, ее неоднородностью или другими факторами.

**4.2. Самовоздействие циркулярно поляризованного поля**

Образование многочисленных ударных фронтов (по два на каждой длине волны) сильно затрудняет численное исследование долговременной эволюции скалярного (линейно поляризованного) поля. Пришлось увеличивать коэффициент вязкости  $\gamma$  до тех пор, пока профиль (внутри полуволны) не становился гладким. Один из способов уменьшения резких продольных градиентов связан с переходом к циркулярно поляризованному полю

$$\mathbf{u} = u(\mathbf{x}_0 + i\mathbf{y}_0)$$

( $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  — единичные векторы вдоль соответствующих осей). Обобщение уравнения (6) для волнового поля с круговой поляризацией приводит к следующему уравнению [17]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - b \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \beta |u|^6 u + \frac{\partial |u|^2 u}{\partial \tau} \right) = \Delta_{\perp} u - au. \quad (41)$$

Кроме диффузионного слагаемого в уравнение (41) добавлена нелинейная диссипация  $\beta \partial |u|^6 u / \partial \tau$  для стабилизации коллапса. Это уравнение может быть получено, например, посредством добавления к соответствующему одномерному уравнению для циркулярно поляризованного поля [24] дополнительного слагаемого  $\Delta_{\perp} u$ . В частности, в одномерном случае [24] для среды с аномальной дисперсией ( $b = 0$ ) в консервативном случае ( $\gamma = 0$ ) найдены солитонные решения, численно показано их упругое взаимодействие [27].

Качественное исследование пространственной динамики системы в консервативном случае ( $\gamma = \beta = 0$ ), очевидно, можно провести методом моментов, как и в разд. 3, соответствующим образом обобщив интегральные соотношения для энергии (16а), импульса (16б) и гамильтониана (16в) комплексного поля  $u = \phi_{\tau}$ .

Можно повторить исследование структурных особенностей поведения волнового поля посредством преобразования уравнения (41) в «схлопывающуюся систему координат» (25). При этом в консервативном случае ( $\gamma = \beta = 0$ ) в тех же переменных (25) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (|v|^2 v) - \frac{\rho_{zz} \rho^3}{4} \eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \rho^2(z) \left( b \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} - av \right) = \Delta_{\perp} v. \quad (42)$$

В процессе самофокусировки, как и в случае «скалярного» поля, формируется квазиодномерное распределение поля автомодельного типа. Можно сделать вывод и об ослаблении дисперсионных эффектов в условиях самофокусировки. Поэтому, как и выше, исследование динамики в среде без дисперсии представляет особый интерес.

Для описания поведения поля в приосевой области  $\eta \approx 0$  получаем уравнения

$$\frac{\partial |w|^2}{\partial \xi} + |w|^2 \frac{\partial |w|^2}{\partial \theta} = 0, \quad (43a)$$

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} = -2 \frac{\overline{|w|^2}}{\rho^3}, \quad (43б)$$

где

$$\overline{|w|^2} = \int |w|^2 d\theta.$$

Это означает, что для циркулярно поляризованного излучения нет «опрокидывания» внутри импульса, а происходит лишь увеличение крутизны профиля огибающей. Ослабление уровня поглощения на ударной волне огибающей сопровождается более медленным затуханием комплексной амплитуды поля [28]:

$$|w|^2 \propto \frac{1}{\sqrt{\xi}}. \quad (44)$$

В результате уравнение для эффективной ширины волнового поля с учетом поглощения на фронте ударной волны огибающей принимает вид

$$\frac{d^2 \rho}{dz^2} \approx -\frac{2\alpha}{\sqrt{\xi} \rho^3}. \quad (45)$$

Как и в случае уравнения линейно поляризованного излучения (34), это уравнение можно переписать для величины  $1/\rho$  и записать решение через функции Бесселя дробного порядка. Однако сравнение с уравнением (34) показывает, что зависимость (43б)  $w^2$  от  $\xi$  является еще более «плавной» и, следовательно, приводит к тем же самым выражениям (38) для  $\rho(z)$  и  $\xi(z)$  в процессе самофокусировки излучения ( $z \rightarrow z_0$ ). Таким образом, для изменения амплитуды поля циркулярно поляризованного излучения получаем

$$|u| \propto \frac{1}{\sqrt[4]{\ln |z_0 - z| / z_0 \sqrt{z_0 - z}}}, \quad (46)$$

т. е. почти такой же закон, что и для линейно поляризованного поля (39).

Итак, в отличие от линейно поляризованного излучения в рассматриваемом случае происходит образование ударной волны огибающей. Формирование

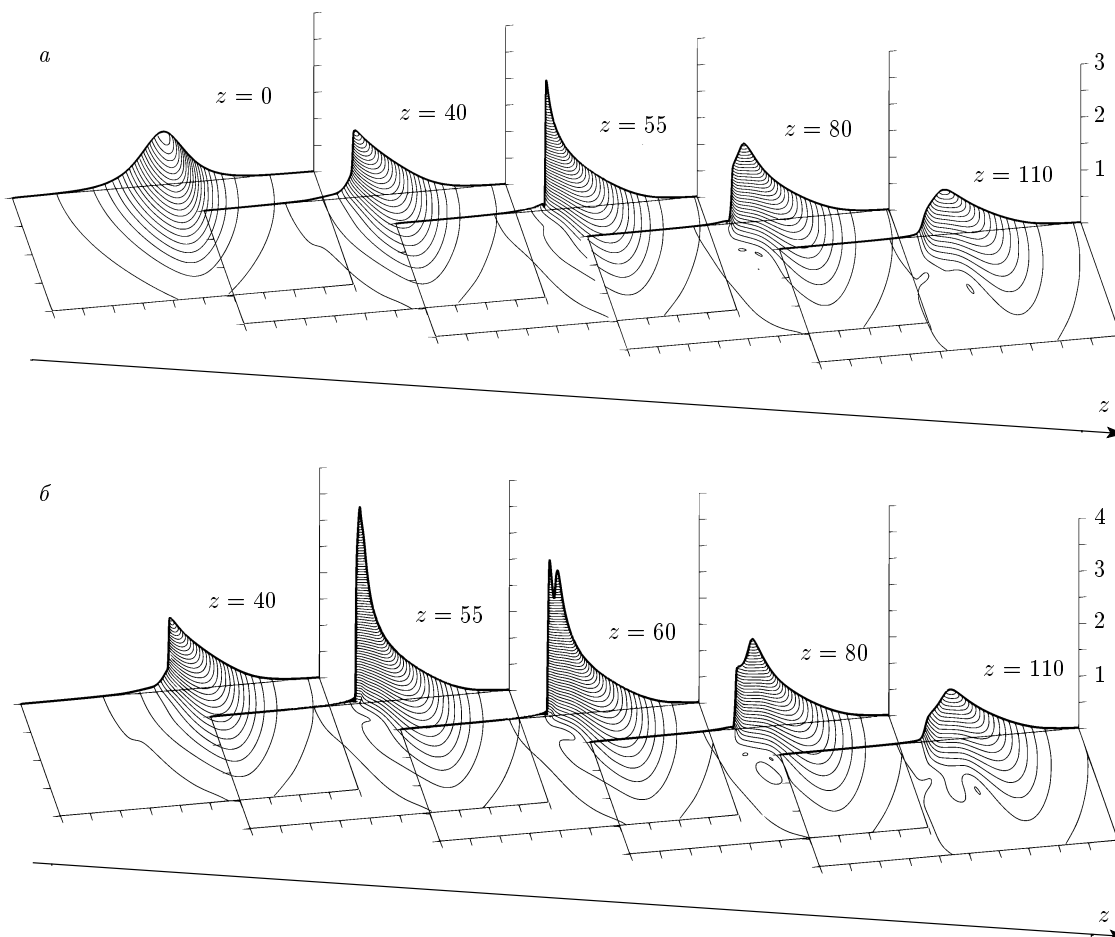


Рис. 3. Динамика циркулярно поляризованного поля  $|u(z, \tau, r)|$  в среде без дисперсии ( $a = 0, b = 0$ ) при различных значениях параметра  $\gamma = 0.04$  (а),  $0.035$  (б). Начальное распределение циркулярно поляризованного поля

$$u = 0.6 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$$

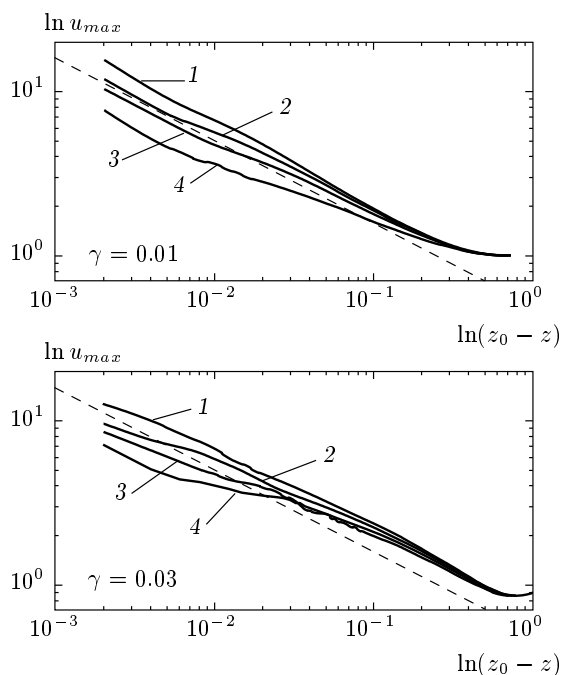
одиночного ударного фронта означает ослабление диссипации в переходной области и, следовательно, возможность не только уменьшения эффективной ширины волнового поля, но и неограниченного возрастания амплитуды поля. В результате следует ожидать возникновения более сложной структурной особенности поля — градиентной катастрофы в условиях коллапса.

Численное моделирование динамики самовоздействия на основе уравнения (41) при  $a = b = 0$  подтверждает сделанные выше качественные выводы. На рис. 3 представлены результаты численного расчета эволюции начального распределения вида

$$u = 0.6 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}. \quad (47)$$

Видно, что увеличение крутизны профиля огибающей

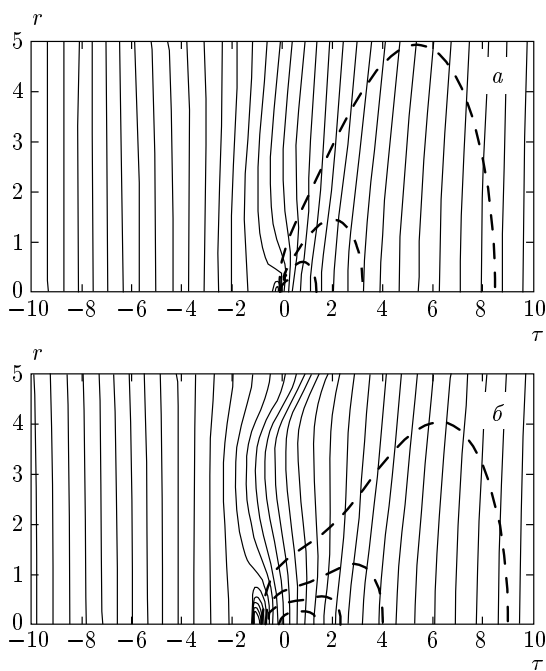
вблизи заднего фронта импульса сопровождается возрастанием поля в переходной области. Как правило, диссипация на ударном фронте была недостаточной для стабилизации коллапса, и приходилось вводить нелинейное поглощение. Сравнение соответствующих процессов для линейно поляризованного и циркулярно поляризованного излучения показывает, что самофокусировка волнового поля приводит к увеличению темпа формирования ударной волны. В отличие от огибающих «обычных» ударных волн, коллапс суживает переходную область до масштабов, меньших половины длины волны. В результате вблизи заднего фронта возникает узкий интенсивный импульс электромагнитного поля. Очевидно, что размер переходной области может уменьшаться настолько, что в спектре поля появляются частоты, которые «обгоняют» импульс. Это приведет



**Рис. 4.** Зависимости максимальной амплитуды волнового поля по мере приближения к особенности для различных начальных длительностей импульса  $\tau = 15$  (1), 8 (2), 5 (3), 2.5 (4). Штриховые линии соответствуют теоретической зависимости (46)

к сглаживанию области сильного поля (см. рис. 3 при  $z > 65$ ). Более четкое формирование структуры, которая бежит от заднего фронта к переднему, видно при меньшем затухании на рис. 3б. Можно трактовать этот эффект как предвестник, источником которого является задний фронт импульса. Исследования поведения поля при коллапсе показывают, что этот закон близок к найденной теоретической зависимости (46). Рисунок 4 иллюстрирует соответствующий вывод для импульсов разных длительностей.

Дополнительным средством исследования структурных особенностей излучения может служить анализ фазы поля. В «ламинарном» режиме распределение фазовых фронтов показывает, например, какие части импульса самофокусируются. Более тонкие детали процессов проявляются в образовании фазовых дефектов (фазовой турбулентности). Они возникают в областях, где амплитуда поля равна нулю. В случае обычно используемых колоколообразных начальных распределений получаемая информация относится к периферийной части поля. Из рис. 5 видно, что фазовые дефекты образуются прежде всего вблизи заднего фронта импульса, где



**Рис. 5.** Фазовые фронты циркулярно поляризованного поля (сплошные линии) и интенсивность  $|u(z, \tau, r)|^2$  (штриховые линии) в среде без дисперсии ( $a = 0, b = 0$ ) с  $\gamma = 0.04$  в двух разных точках  $z = 50$  (а) и 70 (б)

происходит самофокусировка ударной волны огибающей. Затем по мере распространения импульса и в других областях возможно возникновение фазовых дефектов. Они связаны с абберациями при самофокусировке излучения, которые в конечном счете приводят к образованию двухмасштабного поперечного распределения поля.

Таким образом, отличительная особенность динамики самовоздействия сверхкоротких импульсов связана с процессом опрокидывания волнового пакета, который всегда несколько «опережает» процесс самофокусировки излучения. Причем этот эффект становится наиболее заметен для предельно коротких импульсов длительностью менее 10 периодов поля. Для иллюстрации этого факта на рис. 6 показано уменьшение длины самофокусировки излучения по мере укорочения длительности импульса в сравнении с длиной коллапса квазимонохроматического волнового пакета.

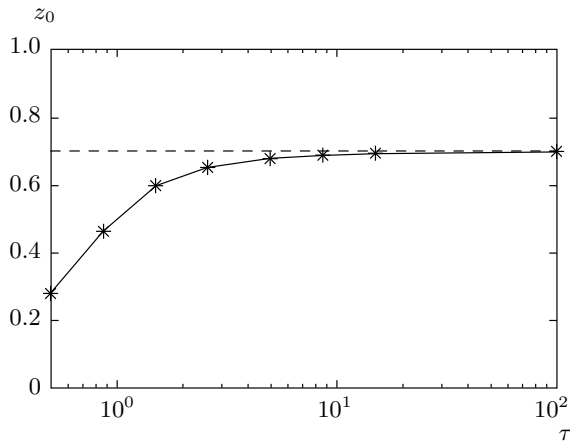


Рис. 6. Зависимость длины образования особенности (градиентной катастрофы и коллапса) от начальной длительности импульса. Штрихами показана длина самофокусировки квазимонохроматического излучения

### 5. ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ САМОВОЗДЕЙСТВИЯ В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

Для обсуждения качественных особенностей эволюции поля в среде с дисперсией рассмотрим уравнение (42) в схлопывающейся системе координат (25). Исследование его показывает, что комплексная амплитуда поля (44) довольно медленно уменьшается в процессе диссипации на ударном фронте. При этом изменение эффективной ширины волнового поля  $\rho(z)$  при самофокусировке  $z \rightarrow z_0$  можно описать следующим выражением:

$$\rho(z) \approx \sqrt{(z_0 - z)/z_0}. \quad (48)$$

В результате уравнение (42) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (|v|^2 v) + \frac{1}{16z_0^2} \eta^2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \exp \left( -\frac{\xi}{z_0} \right) \left( b \frac{\partial^4 v}{\partial \theta^4} - av \right) = \Delta_{\perp} v. \quad (49)$$

Оно описывает «экспоненциальное» ослабление роли дисперсионных эффектов по мере распространения импульса. Аппроксимируя, как и выше, распределение поля в квазиволноводном режиме параболой  $v^2 \approx w^2 (1 - \eta^2)$ , можно сделать следующие оценки. Сравнивая коэффициенты при  $\eta^2$ , найдем в приближении нелинейной геометрической оптики

( $\Delta_{\perp} v \approx 0$ ) связь между длиной самофокусировки  $z_0$  и амплитудой поля:

$$w^2 \propto \frac{1}{16z_0^2}. \quad (50)$$

Из соответствующего уравнения для интенсивности на оси системы следует, что импульс длительностью  $\Delta\tau$  и амплитудой (50) опрокидывается на трассе

$$\xi^* \sim 16z_0^2 \Delta\tau. \quad (51)$$

Таким образом, для параметров системы

$$16z_0 \Delta\tau \approx 4\Delta\tau/w \gg 1 \quad (52)$$

увеличение крутизны продольного профиля на длине  $\xi^*$  (51) протекает как в среде без дисперсии. В процессе дальнейшей эволюции волнового пакета ( $\xi > \xi^*$ ) вывод о формировании ударной волны можно сделать лишь для среды с аномальной дисперсией. Ситуация в среде с преобладающей нормальной дисперсией групповой скорости более сложная. Однако в условиях экспоненциального ослабления дисперсионных эффектов (см. (49)) возможность образования ударных волн огибающих сохраняется.

Далее рассмотрим отдельно структурные особенности самофокусировки волновых полей в средах с преобладающей аномальной ( $b \rightarrow 0$ ) и нормальной ( $a \rightarrow 0$ ) дисперсиями групповой скорости. Для этих случаев динамика самовоздействия квазимонохроматических волновых пакетов довольно хорошо изучена, и мы обсудим здесь специфику импульсов длительностью в несколько периодов колебаний поля. Затем приведем результаты для среды с «нулевой» дисперсией групповой скорости, в которой «вклады» квадратичной дисперсии компенсируют друг друга.

#### 5.1. Аномальная дисперсия

В этом случае картина самовоздействия оказывается наиболее простой. Эволюция начального распределения поля

$$u = 0.6 \exp \left( -\frac{r^2}{200} \right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$$

с  $H < 0$  представлена на рис. 7. В соответствии с рассмотренной выше качественной картиной процесс возрастания амплитуды поля сопровождается быстрым увеличением крутизны заднего фронта волнового пакета. Отсутствие дисперсии на высоких частотах приводит к формированию ударной волны

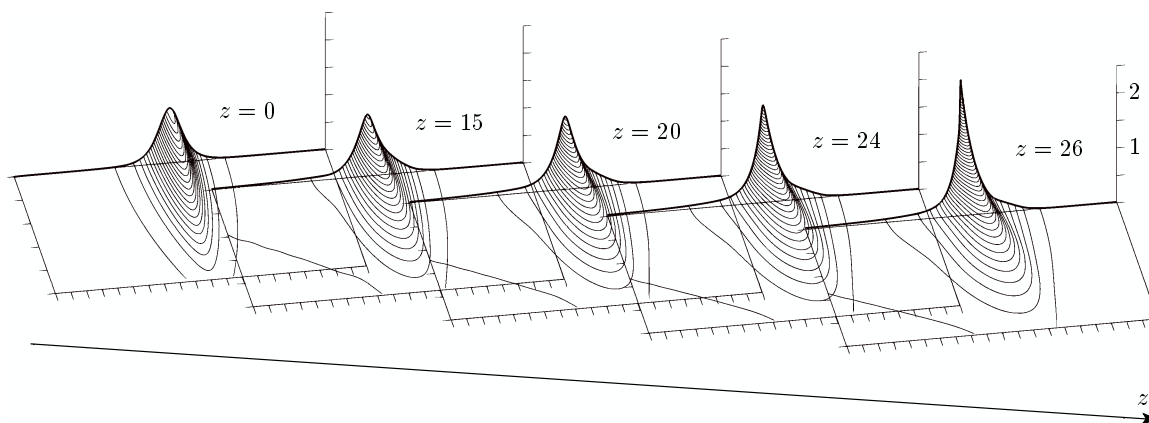


Рис. 7. Динамика циркулярно поляризованного поля  $|u(z, \tau, r)|$  в среде с аномальной дисперсией ( $a = 2, b = 0$ ).  
Начальное распределение циркулярно поляризованного поля  $u = 0.6 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$

оггибающей. Коллапс способствует выделению вблизи заднего фронта интенсивного полуволнового импульса. Амплитуда его ограничивается в результате нелинейного поглощения поля. Для сравнительно небольших начальных амплитуд для стабилизации коллапса достаточно учета диссипации на фронте ударной волны. При увеличении начальной амплитуды для регуляризации особенности приходится вводить дополнительно нелинейную диссипацию поля, как в случае квазимонохроматического излучения. Дальнейшее распространение образовавшейся структуры сопровождается плавным уменьшением максимального значения поля.

В отличие от квазимонохроматического волнового пакета, самосжатие происходит лишь по поперечной (к направлению распространения) координате. Дисперсионное расплывание сверхкоротких импульсов приводит к некоторому увеличению длительности волнового поля [24, 27].

## 5.2. Нормальная дисперсия

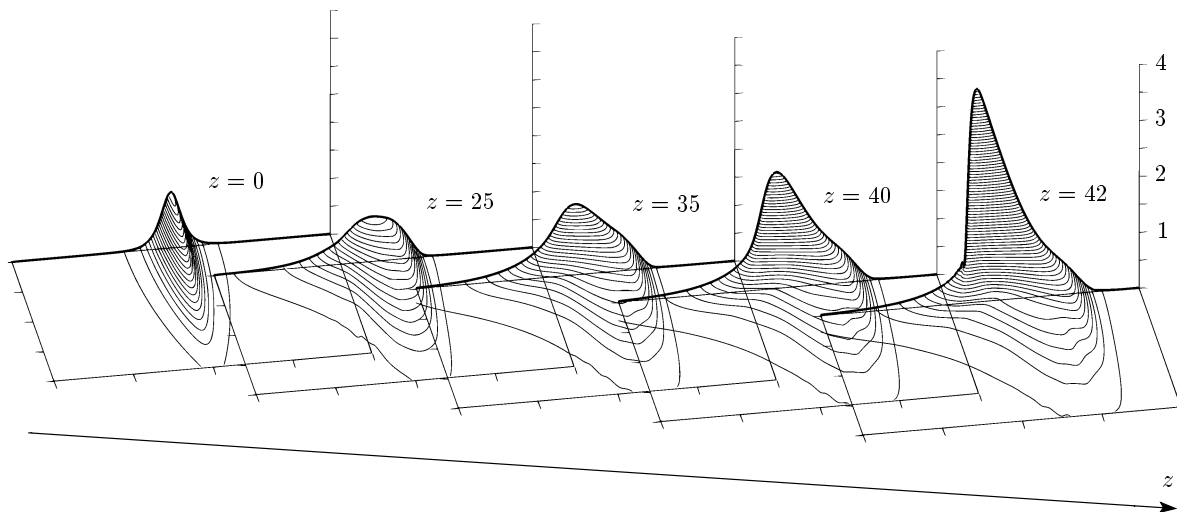
На рис. 8 представлены результаты численного расчета эволюции начального распределения вида

$$u = \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}.$$

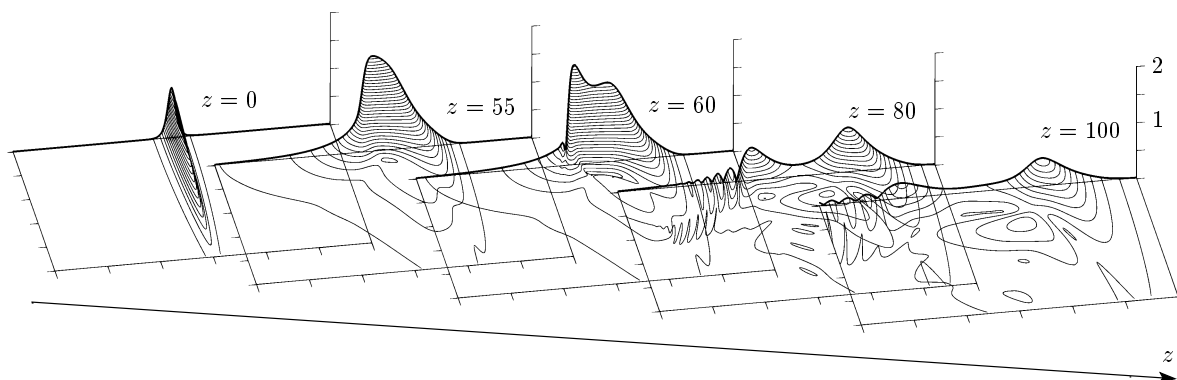
Видно, что самофокусировка протекает в условиях сильного возрастания длительности импульса. Однако и в этом случае, несмотря на заметную роль высокочастотной дисперсии, увеличение крутизны волнового поля вблизи заднего фронта импульса играет определяющую роль в динамике системы.

Основной режим самовоздействия квазимонохроматического излучения в среде с нормальной дисперсией связан с развитием неустойчивости продольного дробления пополам [13, 25, 29]. Соответствующий процесс в случае сверхкороткого импульса представлен на рис. 9. Видно, что увеличение крутизны заднего фронта происходит одновременно с дроблением волнового пакета. В результате деления пополам вблизи заднего фронта образуется более интенсивный импульс. Высокочастотная дисперсия среды стабилизирует опрокидывание профиля оггибающей, а в дальнейшем приводит и к усиленному расплыванию заднего импульса. Как и в случае квазимонохроматического излучения, для сверхкороткого импульса не удается строго доказать существование коллапса. Ограничение максимальной амплитуды квазимонохроматического поля связывают с продольным дроблением пакета. Численное исследование самофокусировки сверхкоротких импульсов показывает, что небольшое увеличение начальной амплитуды (по сравнению со значением на рис. 8) приводит к заметному возрастанию темпа увеличения крутизны профиля оггибающей и стабилизации неустойчивости дробления. При этом происходит «неограниченное» нарастание амплитуды поля, как и в случае аномальной дисперсии (см. рис. 7), с той лишь разницей, что расплывание импульса более заметно.

Уширение импульса в рассматриваемом случае делает оправданным использование НУШ для описания динамики самовоздействия. Численное моделирование процессов на основе обобщенного НУШ (9), учитывающего лишь квадратичную



**Рис. 8.** Динамика циркулярно поляризованного поля  $|u(z, \tau, r)|$  в среде с нормальной дисперсией ( $a = 0, b = 1$ ).  
Начальное распределение циркулярно поляризованного поля  $u = \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$



**Рис. 9.** Динамика циркулярно поляризованного поля  $|u(z, \tau, r)|$  в среде с нормальной дисперсией ( $a = 0, b = 1$ ) и  $\beta = 0.043$ . Начальное распределение циркулярно поляризованного поля  $u = 0.8 \exp\left(-\frac{r^2}{100}\right) \frac{\exp(i\tau)}{\text{ch}(0.3\tau)}$

дисперсию ( $\alpha_n = 0$ ), приводит к сходным результатам [25]. По мере увеличения параметра нелинейной дисперсии можно видеть усиление процесса несимметричного дробления импульса на два в той же последовательности, что и на рис. 9. При значении параметра, превышающем критическое, оставался лишь один наиболее интенсивный импульс вблизи заднего фронта, который «коллапсировал» в процессе дальнейшей эволюции. В этом случае приближение плавной огибающей, очевидно, нарушалось.

### 5.3. «Нулевая» дисперсия

Численное моделирование и в этом случае показывает, что пространственная эволюция волнового

поля протекает, в целом, как в среде без дисперсии (см. рис. 3). Особенности динамики самовоздействия проявляются в модификации спектра. Увеличение крутизны волнового поля вблизи заднего фронта приводит к генерации высоких частот, которые «обгоняют» импульс и накапливаются в его передней части. В результате происходит пространственное разделение спектра широкополосного излучения. Высокочастотная составляющая спектра ( $\omega > \omega_{cr}$ ) сосредотачивается в передней части пакета, а низкочастотная — в задней.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели динамику самовоздействия широкополосного излучения при достаточно общих

предположениях относительно дисперсии среды. Использование приближения однонаправленного (безотражательного) распространения волнового поля привело к уравнению, обобщающему НУШ для импульсов произвольно короткой длительности. Применение методов теории нелинейных волн к этому уравнению позволило провести качественное исследование долговременной эволюции трехмерных волновых пакетов. Оно связано с выделением класса особых решений уравнения: ударных волн, коллапсирующих и других более сложных структур. Достаточное условие коллапса волнового поля найдено методом моментов. Преобразование уравнения в «схлопывающуюся» систему координат позволило установить определяющую роль нелинейной дисперсии (зависимости групповой скорости волнового пакета от амплитуды) в динамике системы. Увеличение крутизны продольного профиля и образование ударных фронтов является характерной особенностью эволюции сверхкоротких импульсов. При этом оказывается, что процесс опрокидывания несколько опережает волновой коллапс. Это означает, что возможно формирование особенности более сложного типа, в которой градиентная катастрофа сопровождается неограниченным возрастанием поля на ударном фронте.

Проведено детальное численное моделирование динамики самовоздействия с целью иллюстрации сделанных выводов. Наиболее трудным для численного расчета оказалось исследование самофокусировки линейно поляризованного излучения в среде без дисперсии. Образование многочисленных ударных фронтов (по два на каждом периоде) приводит к сильной нелинейной диссипации излучения. Особенность самофокусировки излучения в этом случае состоит в уменьшении поперечной локализации поля без сколько-нибудь заметного увеличения амплитуды. Для циркулярно поляризованного излучения как в среде без дисперсии, так и в среде с дисперсией имеет место режим самовоздействия, в котором процесс опрокидывания продольного профиля сопровождается коллапсом. При дальнейшем распространении импульса амплитуда его уменьшается из-за диссипации на ударном фронте.

В среде с нормальной дисперсией имеется и другая возможность. С уменьшением амплитуды (или увеличением длительности) импульса возрастает роль хорошо известной в случае квазимонохроматического излучения неустойчивости дробления импульса пополам. Она приводит к ослаблению ударной волны и уменьшению ее времени жизни.

Отметим в заключение, что образование удар-

ных волн, очевидно, свидетельствует о сильном уширении спектра излучения в процессе самовоздействия. Наибольшего уширения (сверхуширения) спектра следует ожидать при коллапсе поля в широком классе сред (без дисперсии, с преобладающей аномальной дисперсией, с «нулевой» дисперсией). Определение характерных особенностей спектра требует проведения дополнительного исследования. Важную роль здесь может играть и ионизация среды в процессе самофокусировки излучения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 04-02-16420, 05-02-17517, 05-02-17509). Один из авторов (С. С.) также благодарен «Фонду содействия отечественной науке» и фонду «Династия».

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zhiping Jiang and X.-C. Zhang, *Free-Space Electro-Optic Technologies, THz Sensing and Imaging Technology*, Springer, New York (2001); Qin Chen and X.-C. Zhang, in *Ultrafast Laser: Technology and Applications*, ed. by M. E. Fermann, A. Galvanauskas, and G. Sucha, Marcel Dekker, New York (2003).
2. R. A. Cheville and D. Grichkowsky, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 1960 (1985); K. Wynne and D. A. Jaroszynski, *Opt. Lett.* **24**, 25 (1999).
3. D. M. Mittleman, R. H. Jacobsen, and M. C. Nuss, *IEEE J. of Selected Topics in Quan. Elect.* **2**, 679 (1996); S. Wang and X.-C. Zhang, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **37**, 1 (2004).
4. P. Rairoux, M. Schilingen, S. Niedermeier et al., *Appl. Phys. B* **71**, 573 (2000).
5. P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger et al., *Science* **292**, 1689 (2001); R. Kienberger, E. Goulielmakis, M. Uiberacker et al., *Nature* **427**, 817 (2004); R. Lopez-Martens, K. Varju, P. Johnsson et al., *Phys. Rev. Lett.* **94**, 033001 (2005).
6. А. Н. Азаренков, Г. Б. Альтшулер, Н. Р. Белашенков, С. А. Козлов, *Квант. электр.* **20**, 733 (1993).
7. С. Келих, *Молекулярная нелинейная оптика*, Наука, Москва (1981).
8. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **111**, 404 (1997); A. N. Berkovsky, S. A. Kozlov, and Y. A. Shpolyansky, *Phys. Rev. A* **72**, 043821 (2005).
9. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 1112 (2003).



10. A. Braun, G. Korn, X. Liu et al., *Opt. Lett.* **20**, 73 (1995); E. T. J. Nibbering, P. F. Curley, G. Grillion et al., *Opt. Lett.* **21**, 62 (1996).
11. В. П. Кандидов, И. С. Голубцов, О. Г. Косорева, *Квант. электр.* **34**, 348 (2004); L. Berge, S. Scurin, F. Lederer et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 225002 (2004).
12. P. M. Goorjian and Y. Silberberg, *J. Opt. Soc. Amer. B* **14**, 3253 (1997).
13. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **46**, 331 (2003).
14. Е. М. Громов, В. И. Таланов, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **39**, 735 (1996); *ЖЭТФ* **110**, 137 (1996).
15. Th. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
16. Э. М. Беленов, А. В. Назарин, *Письма в ЖЭТФ* **53**, 188 (1991); В. А. Миронов, *ЖЭТФ* **116**, 35 (1999); А. А. Балакин, В. А. Миронов, *Письма в ЖЭТФ* **75**, 741 (2002).
17. А. Г. Литвак, В. А. Миронов, С. А. Скобелев, *Письма в ЖЭТФ* **82**, 119 (2005).
18. А. Г. Литвак, В. И. Таланова, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **10**, 539 (1967).
19. А. Б. Шварцбург, *УФН* **168**, 85 (1998); *УФН* **175**, 833 (2005).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
21. О. В. Руденко, О. А. Сапожников, *УФН* **174**, 970 (2004); *ЖЭТФ* **106**, 395 (1994).
22. С. К. Турицын, Г. Е. Фалькович, *ЖЭТФ* **89**, 258 (1985); В. С. Львов, *Нелинейные спиновые волны*, Наука, Москва (1987).
23. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988); Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич, *Солитоны*, Наука, Москва (2003).
24. Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев, *Письма в ЖЭТФ* **78**, 722 (2003).
25. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, В. А. Миронов, *ЖЭТФ* **130**, 21 (2006).
26. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, Изд-во ИПФ РАН, Н. Новгород (1997).
27. С. А. Скобелев, А. В. Ким, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 727 (2004).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
29. Н. А. Жарова, А. Г. Литвак, Т. А. Петрова и др., *Письма в ЖЭТФ* **44**, 12 (1986).
30. Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, А. В. Шафаренко, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 204 (1983); Е. А. Кузнецов, С. Л. Мушер, *ЖЭТФ* **64**, 947 (1986).