

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ И СТРУКТУРА «ХВОСТОВ» КОНЦЕНТРАЦИИ В МОДЕЛИ ДЫХНЕ

*П. С. Кондратенко**, *Л. В. Матвеев*

*Институт проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук
115191, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 сентября 2006 г.

Решается задача переноса примеси в регулярно неоднородной среде, обладающей сильным контрастом свойств. Проанализированы режимы переноса и структура хвостов концентрации в областях с высокой проницаемостью для двух геометрических конфигураций этих областей: плоскопараллельного слоя и прямого цилиндра. Показано, что смена режимов переноса во времени приводит к сложной структуре асимптотики профиля концентрации на больших расстояниях («хвостов» концентрации). Вычислены зависимость полного количества активных частиц примеси от времени и глубина проникновения частиц в область с низкой проницаемостью.

PACS: 05.60.Cd, 66.10.Cb

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные исследования миграции примесей в неоднородных средах с резким контрастом свойств показывают, что в зависимости от геометрических свойств сред (регулярно-неоднородные, разупорядоченные либо фрактальные) и механизмов переноса (адвекция либо диффузия) режим переноса меняется в широком диапазоне от суб- до супердиффузии [1–3]. Результаты, полученные в рамках различных моделей (например, модели ловушек [1–3], гребешковой модели [4]), заключались в определении дисперсии примеси (или, другими словами, зависимости размера облака частиц от времени, $R(t)$), а также формы профиля концентрации примеси на расстояниях $r \sim R(t)$ [2, 4, 5]. Следует подчеркнуть, что, как правило, режимы переноса частиц, получаемые в рамках определенной постановки, не менялись во времени. Кроме того, подразумевалось, что и при больших расстояниях, $r \gg R(t)$ (в «хвостах» профиля концентрации), зависимость концентрации от координат и времени определяется единственной автомодельной переменной, соответствующей режиму переноса. В последнее время интерес вызывают системы, в которых при неизменном состоянии среды имеет место смена режимов переноса во време-

ни [6–8]. В работе [8] было показано, что при диффузии частиц по перколяционному кластеру с конечным радиусом корреляции режим переноса меняется от субдиффузии к классической диффузии. Здесь же показано, что это приводит к тому, что профиль концентрации в хвостах приобретает сложную форму. Несмотря на то что величина концентрации на таких расстояниях мала, в ряде задач данный вопрос оказывается важным, например при исследовании радиационных загрязнений окружающей среды.

В настоящей работе исследуется перенос примеси в регулярно-неоднородной системе, состоящей из среды с высокой проницаемостью, ограниченной в одном либо двух измерениях (среда I), и среды с низкой проницаемостью, заполняющей оставшуюся часть пространства (среда II). В качестве физического механизма переноса частиц рассматривается классическая диффузия. Данная модель была впервые исследована в работе Дыхне с соавторами [9] применительно к задачам распространения примеси в трещиноватых скалах. В этой работе были определены режимы миграции частиц, оценены зависимости размера облака частиц от времени для каждого режима и продемонстрирована смена режимов со временем. Целью настоящей работы является детальное исследование пространственно-временных характеристик концентрации примеси в модели Дыхне. Особое внимание уделено анали-

*E-mail: kondrat@ibrae.ac.ru

зу структуры асимптотик концентрации на больших расстояниях.

Далее материал расположен следующим образом. В разд. 2 содержится формулировка задачи. Вывод результатов для двух различных геометрических конфигураций среды I содержится в разд. 3 и 4. Обсуждение результатов и заключение приведены в последнем разделе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В среде I концентрация частиц примесей удовлетворяет классическому уравнению диффузии

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n. \quad (1)$$

Ниже мы будем называть $n(\mathbf{r}, t)$ концентрацией активных частиц примеси.

Уравнение для концентрации $c(\mathbf{r}, t)$ частиц в среде II получается из (1) с помощью замен $n \rightarrow c$, $D \rightarrow d$, причем для коэффициентов диффузии справедливо неравенство

$$D \gg d. \quad (2)$$

Как обычно, граничные условия заключаются в непрерывности концентрации и нормальной компоненты плотности потока частиц.

Рассмотрим две геометрические конфигурации среды I, различающиеся числом измерений m , в которых эта область ограничена:

1) $m = 1$ плоско-параллельный слой толщины a (рис. 1а);

2) $m = 2$ прямой цилиндр (не обязательно круглого сечения) с площадью сечения $S \sim a^2$ (рис. 1б).

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ частицы сосредоточены в среде I, занимая объемом размером $R(0) < a$, и рассмотрим поведение концентрации $n(\mathbf{r}, t)$ на временах $t \gg t_0$ ($t_0 = a^2/4D$), когда распределение частиц в среде I однородно по координатам m , вдоль которых она ограничена.

Проинтегрировав уравнение (1) по m координатам внутри среды I и выполнив преобразование Фурье по остальным координатам, а также преобразование Лапласа по времени, приходим к алгебраическому уравнению

$$(s + Dk^2)n_{s\mathbf{k}} + \frac{q_{s\mathbf{k}}}{S_m} = \frac{N_0}{S_m}, \quad (3)$$

где

$$n_{s\mathbf{k}} = \int_0^\infty dt \int d^{3-m}x \exp(-st - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})n(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

$q_{s\mathbf{k}}$ — образ Фурье–Лапласа плотности потока частиц через границу, отнесенной к единице ее площади для $m = 1$ и к единице длины для $m = 2$; \mathbf{x} и \mathbf{k} — $(3 - m)$ -мерные соответственно радиус-вектор и волновой вектор, $N_0 = N(0)$, $N(t)$ — полное число активных частиц (частиц, локализованных в среде I); $S_1 = a$, $S_2 = S$. При выводе уравнения (3) полагалось, что выполнено неравенство

$$kR(0) \ll 1, \quad (5)$$

а начало координат находится внутри объема первоначальной локализации примеси.

Поскольку рассматриваемая задача линейна, связь между величинами $q_{s\mathbf{k}}$ и $n_{s\mathbf{k}}$ должна быть также линейна:

$$q_{s\mathbf{k}} = S_m M(s, \mathbf{k})n_{s\mathbf{k}}, \quad (6)$$

функция $M(s, \mathbf{k})$ будет вычислена ниже. Подставляя выражение (6) в (3), разрешая получающееся соотношение относительно $n_{s\mathbf{k}}$ и выполняя обратные преобразования Фурье и Лапласа, приходим к общему выражению для концентрации активных частиц:

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0}{S_m} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int \frac{d^{3-m}k}{(2\pi)^{3-m}} \times \\ \times \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + st)}{s + Dk^2 + M(s, \mathbf{k})}, \quad \text{Re } b > 0. \quad (7)$$

Интегрирование этого выражения по $(3 - m)$ -мерному радиус-вектору и умножение его на S_m дает полное число активных частиц:

$$N(t) = N_0 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{st}}{s + M(s, 0)}. \quad (8)$$

3. СЛУЧАЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ ($m = 1$)

Обозначим через y координату вдоль нормали к плоской границе. Решение уравнения (1) с указанными заменами приводит к следующему выражению для концентрации частиц в среде II при $t \gg t_0$:

$$c_{s\mathbf{k}}(y) = n_{s\mathbf{k}} \exp \left\{ -y \sqrt{\frac{s + dk^2}{d}} \right\}, \quad y > 0. \quad (9)$$

Из соотношения

$$q_{s\mathbf{k}} = -2d \left. \frac{dc_{s\mathbf{k}}}{dy} \right|_{y=+0}$$

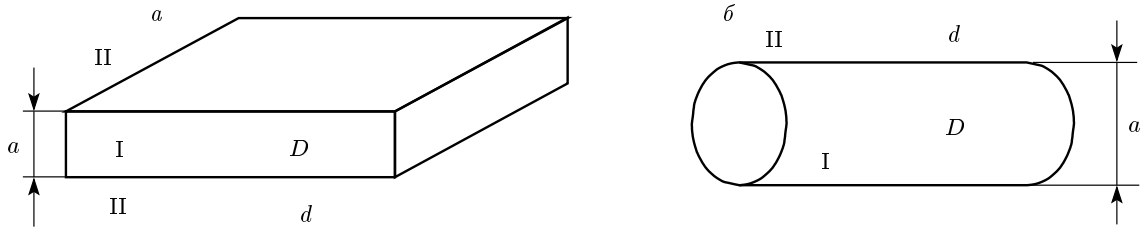


Рис. 1. Геометрия задачи в случаях плоскопараллельного слоя (а) и прямого цилиндра (б)

и равенства (9) следует выражение для плотности потока частиц через границу между средами I и II. Сравнивая результат с выражением (6), получаем

$$M(s, \mathbf{k}) = \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}}, \quad (10)$$

где

$$t_1 = a^2/4d \quad (11)$$

— характерное время диффузии частиц в среду II на расстояние порядка a . Подстановка соотношения (10) в (7) и (8) дает

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0}{a} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \times \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + st)}{s + Dk^2 + \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}}}, \quad (12)$$

$$N(t) = N_0 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \frac{e^{st}}{s + \sqrt{\frac{s}{t_1}}}. \quad (13)$$

Для дальнейшего анализа воспользуемся двумя довольно очевидными утверждениями. Первое касается интервалов интегрирования в выражении (12) по переменной k при фиксированном значении s . Они удовлетворяют неравенствам

$$dk^2 \ll s \quad \text{при} \quad s \gg t_2^{-1}, \quad (14)$$

$$s + Dk^2 \ll \sqrt{\frac{s + dk^2}{t_1}} \quad \text{при} \quad s \ll t_2^{-1}, \quad (15)$$

где

$$t_2 = t_1(D/d)^2. \quad (16)$$

Второе утверждение состоит в том, что интервал интегрирования по переменной s в уравнениях (12), (13) есть

$$s \leq t^{-1} \quad \text{при} \quad x \leq R(t), \quad (17)$$

а в уравнении (12) —

$$s \gg t^{-1} \quad \text{при} \quad x \gg R(t). \quad (18)$$

Теперь рассмотрим поведение концентрации активных частиц на временах $t \ll t_2$. С учетом соотношений (14)–(18) из уравнения (12) получаем

$$n(\mathbf{r}, t) \approx \frac{N_0}{2\pi a D} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \times e^{st} K_0 \left(x \sqrt{\frac{s + \sqrt{s/t_1}}{D}} \right), \quad t \ll t_2. \quad (19)$$

Здесь $K_0(z)$ — функция Макдональда, в аргументе которой для значений $s \gg t_1^{-1}$ можно пренебречь членом $\sqrt{s/t_1}$. Тогда после выполнения интегрирования приходим к выражению

$$n(\mathbf{r}, t) \approx \frac{N_0}{4\pi a D t} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad t_0 \ll t \ll t_1, \quad (20)$$

которое соответствует очевидному факту, что на временах $t_0 \ll t \ll t_1$ перенос примеси в среде I происходит в режиме быстрой (с коэффициентом D) двумерной классической диффузии. На рис. 2а схематически изображено сечение облака примеси по нормали к границе слоя.

Рассмотрим поведение концентрации на временах $t_1 \ll t \ll t_2$. Согласно неравенству (17) аргумент функции K_0 в уравнении (19) в области основного облака частиц ($x \leq R(t)$) аппроксимируется выражением $x(s/D^2t_1)^{1/4}$. Поэтому имеем

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0}{8\pi a D t} F(\eta), \quad \eta = \frac{x^2}{4D\sqrt{tt_1}} \leq 1, \quad (21)$$

где

$$F(\eta) = 4 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{du}{2\pi i} e^u K_0(2\eta^{1/2}u^{1/4}). \quad (22)$$

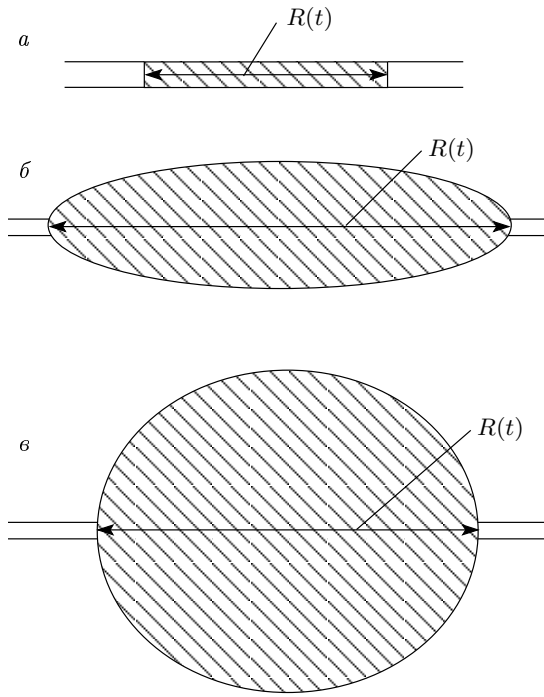


Рис. 2. Сечение облака примеси по нормали к плоскости слоя ($m = 1$) либо вдоль оси цилиндра ($m = 2$) для разных интервалов времени: *a* – быстрая классическая диффузия, $t_0 \ll t \ll t_1$; *б* – субдиффузия, $t_1 \ll t \ll t_2$; *в* – медленная классическая диффузия, $t \gg t_2$

Так как $K_0(z) \approx -\ln z$ при $|z| \ll 1$, из выражения (22) находим $F(0) = 1$. В результате из соотношения (21) следует

$$n(0, t) = \frac{N_0}{8\pi aDt}. \tag{23}$$

Из выражений (21) и (22) вытекает оценка для размера основного облака частиц примеси:

$$R(t) \sim \sqrt{4D\sqrt{tt_1}}, \quad t_1 \ll t \ll t_2, \tag{24}$$

указывающая на субдиффузионный режим переноса в этом временном диапазоне. Отметим, что размер (24) совпадает со среднеквадратичным смещением частиц, полученным в работе [9]. Причиной появления субдиффузионного режима является то, что в среде I, где происходит основной перенос частиц примеси, последние проводят лишь часть времени порядка a/\sqrt{dt} (см. рис. 2б).

Выражение для концентрации в пределе $x \gg R(t)$ при $t_1 \ll t \ll t_2$ находится из выражения (19) путем использования соотношения

$$K_0(z)|_{z \gg 1} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

Применяя далее метод стационарной фазы, получаем следующие асимптотические выражения:

$$n(\mathbf{r}, t) \approx \frac{N_0}{2\sqrt{6}\pi aDt} \exp\left[-3\left(\frac{\eta}{4}\right)^{2/3}\right], \tag{25}$$

$$1 \ll \eta \ll 4(t/t_1)^{3/2}$$

и

$$n(\mathbf{r}, t) \approx \frac{N_0}{4\pi aDt} \exp\left(-\eta\sqrt{\frac{t_1}{t}}\right) = \tag{26}$$

$$= \frac{N_0}{4\pi aDt} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad \eta \gg 4(t/t_1)^{3/2}.$$

Таким образом, видно, что при $t_1 \ll t \ll t_2$ асимптотика профиля концентрации на больших расстояниях состоит из двух частей. При этом последнее выражение для n в (26) совпадает с выражением (20) для концентрации на малых временах.

Перейдем теперь к анализу поведения концентрации на больших временах $t \gg t_2$. Согласно неравенствам (15) и (17), на этих временах при $x \leq R(t)$ последний член в знаменателе выражения (12) оказывается доминирующим. Тогда из (12) следует выражение

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{N_0}{4\pi a dt} \sqrt{\frac{t_1}{\pi t}} e^{-\xi} \equiv \frac{N_0}{(4\pi dt)^{3/2}} e^{-\xi}, \tag{27}$$

$$\xi = \frac{x^2}{4dt} \leq 1,$$

соответствующее режиму медленной (с коэффициентом диффузии d) классической трехмерной диффузии (см. рис. 2в).

Характерные значения переменной Лапласа, приводящие к выражению (27), имеют порядок ξ/t . Поэтому формула (27) справедлива при $\xi \ll t/t_2$ и, наряду с основным облаком, описывает также и ближнюю часть хвоста концентрации при условии $1 \ll \xi \ll t/t_2$. Если $\xi \gg t/t_2$ при $t \gg t_2$, то, в соответствии с (14), под корнем в знаменателе уравнения (12) следует пренебречь слагаемым dk^2 . В результате мы возвращаемся к выражениям (25) и (26), в которых должна быть сделана подстановка

$$\eta = \xi\sqrt{\frac{t}{t_2}}. \tag{28}$$

Таким образом, хвост концентрации на временах $t \gg t_2$ состоит из трех различных по структуре частей, описываемых выражениями (27), (25) и (26). Отсюда следует, что чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть хвоста, тем более ранний по времени режим переноса определяет ее форму.

Рассмотрим зависимость от времени полного числа частиц. Для нее из уравнения (13) следуют простые выражения в двух предельных случаях:

$$\begin{aligned} N(t) &\approx N_0, & t \ll t_1, \\ N(t) &\approx N_0 \sqrt{t_1/\pi t}, & t \gg t_1. \end{aligned} \quad (29)$$

В завершение раздела оценим величину Δ — глубину проникновения частиц в среду II. Из формулы (9) следует, что $\Delta \sim \sqrt{d/s_*}$, где s_* — характерная величина переменной s , дающая основной вклад при обратном преобразовании Лапласа. Из неравенств (17) и (18) следует, что $s_* \sim t^{-1}$ в области переменной x , соответствующей основному облаку частиц в среде I, и $s_* \sim |\Gamma|t^{-1}$ для значений x в хвостах профиля концентрации. Здесь Γ есть показатель экспоненты, определяющей концентрацию в области $x \gg R(t)$. Например, при $t_1 \ll t \ll t_2$ из выражения (25) следует, что

$$|\Gamma| = 3 \left(\frac{\eta}{4}\right)^{2/3} \quad \text{при} \quad 1 \ll \eta \ll 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2},$$

а из (26), что

$$|\Gamma| = \eta \sqrt{\frac{t_1}{t}} \quad \text{при} \quad \eta \gg 4 \left(\frac{t}{t_1}\right)^{3/2}.$$

Учитывая сказанное, мы имеем следующие оценки для глубины проникновения:

$$\Delta \sim \sqrt{dt}, \quad x \lesssim R(t), \quad (30)$$

$$\Delta \sim \sqrt{\frac{dt}{\Gamma}}, \quad x \gg R(t). \quad (31)$$

4. СЛУЧАЙ ПРЯМОГО ЦИЛИНДРА ($m = 2$)

Определяя времена t_0 и t_1 для случая $m = 2$ как

$$t_0 = \frac{S}{4\pi D}, \quad t_1 = \frac{S}{4\pi d}, \quad (32)$$

замечаем, что в интервале $t_0 \ll t \ll t_1$ концентрация в среде II описывается выражением (9). Для частиц в среде I получаем в этом интервале выражения, аналогичные (20) и первой строке в (29):

$$n(x, t) \approx \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right), \quad (33)$$

$$N(t) \approx N_0,$$

которые соответствуют быстрой одномерной классической диффузии. Переменная x в первом соотношении (33) есть координата вдоль оси цилиндра.

При значениях переменной Лапласа $s \ll t_1^{-1}$ и радиальной координаты $\rho \gg \sqrt{S/\pi}$ концентрация в среде II описывается выражением

$$c_{sk}(\rho) = 2n_{sk} \frac{K_0\left(\rho\sqrt{\frac{s+dk^2}{d}}\right)}{\ln\left(\frac{H}{(s+dk^2)t_1}\right)}. \quad (34)$$

Здесь величина $H \sim 1$ зависит от формы сечения цилиндра. Действуя, как и при выводе уравнения (12), приходим к общим выражениям для концентрации и полного числа активных частиц для $m = 2$ при $t \gg t_1$:

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{N_0}{S} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \times \\ &\times \frac{\exp(ikx + st)}{s + Dk^2 + \left(t_1 \ln \frac{H}{(s+dk^2)t_1}\right)^{-1}}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$N(t) \approx N_0 t_1 \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \ln \frac{H}{st_1} = N_0 \frac{t_1}{t}. \quad (36)$$

Как и в разд. 3, для анализа выражения (35) важны неравенства (14)–(18), но с двумя оговорками. Теперь величина t_2 определяется как

$$t_2 = t_1 \frac{D}{d} \ln \frac{D}{d}, \quad (37)$$

а соотношение (15) следует заменить на

$$s + Dk^2 \ll \frac{1}{t_1 \ln(H/st_1)}, \quad s \ll t_2^{-1}. \quad (38)$$

Рассмотрим концентрацию частиц на временах $t \ll t_2$. Пренебрегая величиной dk^2 в подынтегральном выражении в (35) и выполняя интегрирование по k, s , получаем

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{N_0}{s} \frac{t_1}{4t\sqrt{Dt_1 \ln(t/t_1)}} (1 + \zeta) e^{-\zeta}, \\ \zeta &\equiv \frac{|x|}{\sqrt{Dt_1 \ln(t/t_1)}} \ll \frac{t}{t_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Отсюда следует выражение для размера основного облака частиц:

$$R(t) \sim \sqrt{Dt_1 \ln \frac{t}{t_1}}, \quad t_1 \ll t \ll t_2, \quad (40)$$

которое согласуется с выражением для дисперсии частиц, найденным в работе [9].

Отметим, что формула (40) определяет концентрацию частиц не только в основном облаке, но и в ближней части хвоста концентрации, когда $1 \ll \zeta \ll 2t/t_1$. Удаленная часть хвоста, соответствующая $\zeta \gg 2t/t_1$, как и в случае $m = 1$ (см. выражение (26)), описывается формулой (33). Таким образом, в случае прямого цилиндра дальняя асимптотика профиля концентрации при $t_1 \ll t \ll t_2$, так же как и в случае плоскопараллельного слоя, состоит из двух частей.

На больших временах, когда $t \gg t_1$, в знаменателе соотношения (35) последнее слагаемое преобладает над первыми двумя, и после интегрирования мы приходим к формуле (27), описывающей концентрацию частиц в основном облаке и ближней части хвоста при условии

$$\xi \equiv (x^2/4dt) \ll t/t_2. \quad (41)$$

В диапазоне

$$\frac{t}{t_2} \ll \xi \ll \frac{Dt}{dt_1} \ln \frac{t}{t_1} \quad (42)$$

асимптотическое выражение получается из (39) путем замены

$$\zeta = 2\sqrt{\xi \frac{dt}{Dt_1 \ln(t/t_1)}}. \quad (43)$$

При условии

$$\xi \gg \frac{Dt}{dt_1} \ln \frac{t}{t_1} \quad (44)$$

приходим к самой дальней асимптотике, соответствующей выражению (33). Таким образом, хвост концентрационного профиля на временах $t \gg t_2$, как и в случае $m = 1$, состоит из трех различных частей.

Видно, что, как и в случае плоскопараллельного слоя, чем дальше от источника расположена рассматриваемая часть хвоста, тем более ранний режим переноса определяет ее форму.

В заключение раздела отметим, что глубина проникновения частиц в среду II для рассматриваемого здесь случая $m = 2$ определяется оценками (30) и (31), где значение показателя Γ следует брать из формул данного раздела. Например, при $t \gg t_2$ в интервале (42) величина Γ определяется формулами (43) и (41), а в интервале (44) — показателем экспоненты в первой формуле (33).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами исследован перенос примеси в регулярно-неоднородной среде, обладающей сильным контрастом свойств. Рассмотрены две различные геометрические реализации среды окруженной бесконечной слабопроницаемой средой: плоскопараллельный слой и прямой цилиндр. Установлено, что смена режимов переноса с увеличением времени (быстрая классическая диффузия, субдиффузия, медленная классическая диффузия) приводит к сложной структуре асимптотики профиля концентрации на больших расстояниях (хвостов концентрации). Хвост в субдиффузионном режиме состоит из двух, а в режиме медленной классической диффузии из трех различных частей. Чем более удален фрагмент хвоста, тем более ранний режим переноса частиц в основном облаке определяет его форму.

Полное число активных частиц (локализованных в среде с высокой проницаемостью) уменьшается во времени со скоростью, зависящей от геометрии среды: обратно пропорционально корню из времени для плоскопараллельного слоя и первой степени времени для прямого цилиндра.

Глубина проникновения частиц в слабопроницаемую среду имеет обычную классическую диффузионную величину в области основного облака частиц и существенно подавляется в области хвостов.

Работа выполнена при поддержке CRDF (проект RG0-20101-RW40) и РФФИ (грант № 06-08-00176а).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Havlin and D. Ben-Avraham, *Adv. Phys.* **36**, 695 (1987).
2. J.-P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
3. M. B. Isichenko, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
4. В. Е. Ахринчев, Е. Баскин, *ЖЭТФ* **100**, 292 (1991).
5. E. M. Bertin and J.-P. Bouchaud, *Phys. Rev. E* **67**, 026128 (2003).
6. A. V. Chechkin, R. Gorenflo, and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. E* **66**, 046129 (2002).
7. В. Ю. Забурдаев, К. Б. Чукбар, *ЖЭТФ* **121**, 299 (2002).
8. А. М. Дыхне, П. С. Кондратенко, Л. В. Матвеев, *Письма в ЖЭТФ* **80**, 464 (2004).
9. A. M. Dykhne, I. L. Dranikov, P. S. Kondratenko, and A. V. Popov, *J. Hydraulic Res.* **43**, 346 (2005).