

ДИНАМИКА ШИРИНЫ СПЕКТРА ИНТЕНСИВНЫХ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ ИЗ МАЛОГО ЧИСЛА КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Ю. А. Шполянский*

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 3 августа 2006 г.

Выведена зависимость среднеквадратичной ширины спектра светового импульса из малого числа колебаний светового поля от пройденного расстояния в оптическом волноводе с произвольной дисперсией и нерезонансной электронной нелинейностью. Зависимость позволяет по входным параметрам импульса и характеристикам волновода быстро получать экспрессные предсказания сценариев начальной эволюции спектра: уширение, независимость от расстояния или сжатие. Показано, что ширина спектра импульсов увеличивается при учете обогащения спектра за счет генерации кратных гармоник. При этом для импульсов со спектром в области аномальной групповой дисперсии волновода существует диапазон интенсивностей, для которого характерно самосжатие основного спектрального пика вокруг центральной частоты излучения.

PACS: 42.65.Re, 42.60.Rn, 42.65.Wi

1. ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим направлением развития лазерной техники является освоение все более коротких временных диапазонов. К настоящему времени в лабораториях стали привычными фемтосекундные лазеры, ведутся эксперименты по генерации аттосекундных импульсов [1].

С прорывом в новый временной диапазон меняет облик и физика взаимодействия лазерного излучения с веществом. Так, распространение фемтосекундных импульсов в оптической среде без ее разрушения (по крайней мере, за длительность импульса) оказалось возможным при существенно больших интенсивностях излучения, чем для пикосекундных импульсов. Это привело к возможности свободно наблюдать нелинейные явления, которые в поле более длинных импульсов наблюдаются редко. Например, в фемтосекундной нелинейной оптике генерация спектров излучения с шириной, превосходящей центральную частоту, наблюдается практически в любых прозрачных средах [2]. Такие сверхширокие спектры называют континуумными или суперконтинуумными [3]. Существуют различные методы ком-

пенсации рассогласования фаз континуумных спектров, что позволяет получать предельно короткие импульсы (ПКИ), содержащие лишь несколько колебаний светового поля (см., например, [4, 5]).

Привычный и эффективный в нелинейной оптике квазимонохроматических импульсов метод медленно меняющихся огибающих при описании динамики импульсов со сверхширокими спектрами перестает быть плодотворным [6, 7]. Поэтому в последние годы много внимания было уделено как модификации этого метода [1, 8–11], так и разработке новых теоретических подходов. Существенное развитие получил полевой подход [12–21], в рамках которого анализируется однонаправленная (безотражательная) динамика непосредственно электрического поля импульса, а не его огибающей. Уравнения эволюции поля обычно получают в приближении медленно меняющегося профиля поля излучения [22]. Не обладая существенными преимуществами перед уравнениями эволюции огибающих при описании дисперсии линейного отклика вещества, полевые уравнения проще и адекватней описывают нелинейные процессы генерации и кросс-модуляции компонент сверхуширяющегося спектра излучения.

*E-mail: shpolyan@mail.ru

Еще большей общностью по сравнению с полевым обладает спектральный подход [23, 24]. При выводе уравнений эволюции спектров излучения не требуются приближения ни медленно меняющейся огибающей, ни медленно меняющегося профиля. Более того, спектральный подход позволяет легко выявлять границы применимости этих приближений. Спектральные уравнения, в отличие от полевых, позволяют описывать эволюцию излучения в средах со сложной и сильной дисперсией линейного и нелинейного откликов вещества.

Уравнения динамики полей и спектров интенсивных фемтосекундных импульсов в прозрачных средах с нерезонансной дисперсией и нелинейностью не решены аналитически для общего случая. Сценарии эволюции полей и спектров обычно изучают методами численного моделирования, построенными на основе этих уравнений [16, 19, 20, 23]. Авторы работы [25], пренебрегая высокочастотной дисперсией волновода, нашли аналитические решения солитонного типа для упрощенного полевого уравнения, которое в более общем виде было выведено в работе [16].

В работах [26, 27] на основе полевых уравнений были получены аналитические выражения, описывающие изменение средних параметров поля ПКИ в волноводе. Было показано, что при распространении слабоинтенсивных импульсов в дисперсионной среде квадрат их среднеквадратичной длительности как функция расстояния в общем случае имеет вид параболы. Для случая интенсивных ПКИ в нелинейных волноводах параболический закон изменения квадрата длительности является хорошим приближением к рассчитываемому прямым численным интегрированием полевых уравнений.

В работе [28] были выведены выражения для динамики среднеквадратичной ширины спектра существенно несимметричных (например, частотно-модулированных) импульсов с континуумным спектром в оптических волноводах, дисперсия эффек-

тивной константы распространения которых представима в виде ряда по четным, положительным и отрицательным, степеням частоты излучения. В настоящей работе эти выражения обобщены на случай предельно коротких импульсов с любым начальным профилем, распространяющихся в волноводах с произвольным законом линейной дисперсии. Показано, что динамика квадрата среднеквадратичной ширины спектра, как и длительность ПКИ, в нелинейной среде приближенно описывается параболической зависимостью. Полученные выражения по входным параметрам излучения и характеристикам среды позволяют быстро определять сценарии начальной эволюции спектра: его уширение, независимость от расстояния, или сжатие, что проиллюстрировано на примере распространения ПКИ в оптическом волокне из кварцевого стекла. Построены поля значений коэффициентов изменения ширины спектра, определяющие области реализации перечисленных сценариев. Показано, что ширина спектра ПКИ всегда увеличивается при учете обогащения спектра за счет генерации кратных гармоник. При этом в области аномальной групповой дисперсии волновода даже для симметричных импульсов без начальной частотной модуляции существует диапазон входных интенсивностей, для которого имеет место самосжатие основного спектрального пика вокруг центральной частоты излучения.

2. ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ИНТЕНСИВНЫХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

В настоящей работе рассматривается эволюция сверхшироких спектров фемтосекундных импульсов в оптических волноводах с произвольной дисперсией в области их прозрачности. В работе [23] было показано, что динамика спектра $G(z, \omega) = F(E(z, t))$ в волноводе описывается уравнением

$$\frac{\partial G}{\partial z} + i \frac{\omega n(\omega)}{c} G + i \frac{\omega^2 \chi}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega - \alpha) G(\alpha - \beta) G(\beta)}{\omega n(\omega) + (\omega - \alpha) n(\omega - \alpha) + (\alpha - \beta) n(\alpha - \beta) + \beta n(\beta)} d\alpha d\beta = 0. \quad (1)$$

Здесь z — направление распространения, ω — частота излучения, t — время, c — скорость света в вакууме, $n(\omega)$ — дисперсионная зависимость произвольного вида эффективного линейного показателя преломления от частоты излучения, например,

измеренная экспериментально; χ — кубичная нелинейная восприимчивость, количественно характеризующая нерезонансный нелинейный поляризационный отклик материала сердцевинки волновода вида $P_{nl} = \chi E^3$; E — значение напряженности электри-

ческого поля линейно поляризованных световых импульсов; F обозначает преобразование Фурье, записанное в виде

$$F(E(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2)$$

При переходе к новой переменной g , такой что

$$G(z, \omega) = g(z, \omega) \exp[-iz\omega n(\omega)/c], \quad (3)$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -i \frac{\omega^2 \chi}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \alpha) g(\alpha - \beta) g(\beta) \times \frac{\exp[iz\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}/c]}{A(\omega, \alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad (4)$$

где для краткости введено обозначение для знаменателя в подынтегральном выражении формулы (1):

$$A(\omega, \alpha, \beta) = \omega n(\omega) + (\omega - \alpha)n(\omega - \alpha) + (\alpha - \beta)n(\alpha - \beta) + \beta n(\beta). \quad (5)$$

Изменение g определяется обычно малой для диэлектриков нелинейностью среды, поэтому можно ожидать быстрой сходимости итерационной процедуры получения решения (4), например, методом последовательных приближений Пикара. Как было показано в работе [28], в первой итерации это решение имеет вид

$$g^{[1]}(z, \omega) = g_0(\omega) + g_1(z, \omega), \quad (6)$$

где $g_0(\omega) = g(0, \omega) = G(0, \omega)$ — спектр излучения на входе в среду (при $z = 0$) и

$$g_1(z, \omega) = -i \frac{\omega^2 \chi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \alpha) g_0(\alpha - \beta) g_0(\beta) \times \frac{\exp[iz\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}/c] - 1}{i\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}A(\omega, \alpha, \beta)} d\alpha d\beta. \quad (7)$$

Продолжая согласно методу Пикара итерационную процедуру, для второго приближения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial z} g^{[2]}(z, \omega) = -i \frac{\omega^2 \chi}{\pi c} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{[1]}(z, \omega - \alpha) g^{[1]}(z, \alpha - \beta) g^{[1]}(z, \beta) \times \frac{\exp[iz\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}/c]}{A(\omega, \alpha, \beta)} d\alpha d\beta. \quad (8)$$

Интегрируя это уравнение от 0 до z и оставляя в правой части слагаемые, содержащие степени χ не выше второй, получаем

$$g^{[2]}(z, \omega) = g^{[1]}(z, \omega) + g_2(z, \omega) = g_0(\omega) + g_1(z, \omega) + g_2(z, \omega), \quad (9)$$

где

$$g_2(z, \omega) = -3 \frac{\omega^2 \chi^2}{\pi^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \alpha) \times g_0(\alpha - \beta) g_0(\beta - \gamma) g_0(\gamma - \delta) g_0(\delta) \times \beta^2 \psi(\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta,$$

$$\psi(\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\exp[iz\{2\omega n(\omega) - B(\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta)\}/c] - 1}{i\{2\omega n(\omega) - B(\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta)\}/c} - \frac{\exp[iz\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}/c] - 1}{i\{2\omega n(\omega) - A(\omega, \alpha, \beta)\}/c} \frac{1}{i\{2\beta n(\beta) - A(\beta, \gamma, \delta)\}A(\beta, \gamma, \delta)A(\omega, \alpha, \beta)}, \quad (10)$$

$$B(\omega, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \omega n(\omega) + (\omega - \alpha)n(\omega - \alpha) + (\alpha - \beta)n(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)n(\beta - \gamma) + (\gamma - \delta)n(\gamma - \delta) + \delta n(\delta).$$

Полагая дисперсию линейного показателя преломления $n(\omega) = N_0 + \Delta n(\omega)$ слабой, т.е. считая $\Delta n(\omega) \ll N_0 = \text{const}(\omega)$, что характерно для прозрачных диэлектрических сред, а также ограничиваясь анализом лишь начальных тенденций развития спектра, разложим экспоненциальные функции в формулах (7), (10) в ряд до слагаемых порядка z^2 включительно. Тогда

$$g_1(z, \omega) \approx -i \frac{\omega \chi z}{2\pi c N_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \alpha) g_0(\alpha - \beta) \times g_0(\beta) d\alpha d\beta + \frac{3\omega \chi z^2}{4\pi c^2 N_0} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \alpha) g_0(\alpha - \beta) \times g_0(\beta) \beta \{\Delta n(\omega) - \Delta n(\beta)\} d\alpha d\beta, \quad (11)$$

$$g_2(z, \omega) \approx -\frac{9\omega^2 \chi^2 z^2}{40\pi^2 c N_0^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\omega - \alpha) g_0(\alpha - \beta) \times g_0(\beta - \gamma) g_0(\gamma - \delta) g_0(\delta) d\alpha d\beta d\gamma d\delta. \quad (12)$$

Многочисленные интегральные свертки в правых частях (11), (12) кажутся достаточно громоздкими для расчета, однако на основе преобразования Фурье они могут быть переписаны в более компактной и удобной для дальнейшего анализа форме через электрическое поле импульса на входе в волновод. Осуществляя такую процедуру и подставляя результат в формулу (9), а также в соответствии с равенством (3) возвращаясь к исходной переменной G , получаем

$$G^{[2]}(z, \omega) \approx (G_0(\omega) + zI_0(\omega) + z^2 J_0(\omega)) \times \exp\left(-\frac{i\omega n(\omega)z}{c}\right), \quad (13)$$

где

$$I_0(\omega) = -\frac{2\pi\chi}{cN_0} i\omega F(E_0^3), \quad (14)$$

$$J_0(\omega) = \left\{ \frac{3\pi\chi}{cN_0} i\omega F(E_0^2 E_D) - \frac{\pi\chi}{c^2 N_0} (i\omega)^2 n(\omega) F(E_0^3) \right\} + \frac{18\pi^2 \chi^2}{5c^2 N_0^2} (i\omega)^2 F(E_0^5), \quad (15)$$

$$E_D(t) = F^{-1} \left(\frac{i\omega n(\omega)}{c} G_0(\omega) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega n(\omega)}{c} G_0(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Нелинейные функционалы от исходного спектра I_0 , J_0 определяются параметрами импульса при $z = 0$ ($E_0(t) = E(0, t)$ — поле импульса при $z = 0$) и характеристиками нелинейной дисперсионной среды. Правая часть (14) и первые два слагаемых в правой части (15), сгруппированные в фигурные скобки, соответствуют первой итерации метода последовательных приближений Пикара (11). Эти слагаемые кубичны по электрическому полю исходного импульса. Третье слагаемое в правой части (15) соответствует второй итерации и совпадает с правой частью (12). Оно является функционалом от пятой степени электрического поля. Слагаемые в фигурных скобках ха-

рактеризуют изменение спектра импульса в результате совместного воздействия дисперсии и нелинейности среды. Правая часть (14) и третье слагаемое в правой части (15) связаны только с нелинейным воздействием среды на импульс.

Выражения (14), (15) содержат нелинейные слагаемые третьего и пятого порядков по электрическому полю, поэтому формула (13) описывает генерацию третьей и пятой кратных гармоник в нелинейной среде. Кратные гармоники более высоких нечетных порядков не могут быть учтены в первых двух итерациях метода последовательных приближений Пикара, и в настоящей работе не анализируются.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ШИРИНЫ СПЕКТРА ИНТЕНСИВНЫХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Формула (13) может быть использована для вывода выражений, характеризующих начальную динамику ширины спектра импульса. Мы будем рассматривать изменение в зависимости от расстояния следующей величины:

$$\Delta\omega^2(z, \omega_{min}, \omega_{max}) = \frac{1}{W(z, \omega_{min}, \omega_{max})} \times \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} [\omega - \langle \omega(z, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle]^2 |G(\omega, z)|^2 d\omega = \langle \omega^2(z, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle - \langle \omega(z, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle^2 \approx \approx \Delta\omega^2(0, \omega_{min}, \omega_{max}) + \sum_{i=1}^2 P_i(\omega_{min}, \omega_{max}) z^i, \quad (16)$$

которая представляет собой квадрат среднеквадратичной ширины спектральной плотности импульса $G(\omega, z)$ в полосе частот $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, $0 \leq \omega_{min} < \omega_{max} \leq \infty$. Здесь $P_i(\omega_{min}, \omega_{max})$, $i = 1, 2$, — коэффициенты разложения $\Delta\omega$ по степеням z^i . В формуле (16) введена величина

$$W(z, \omega_{min}, \omega_{max}) = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} |G(\omega, z)|^2 d\omega \approx \approx W(0, \omega_{min}, \omega_{max}) + \sum_{i=1}^2 M_{0,i}(\omega_{min}, \omega_{max}) z^i, \quad (17)$$

характеризующая энергию спектральных компонент импульса в полосе частот $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$, и

моменты спектральной плотности первого и второго порядков в этой же полосе частот:

$$\begin{aligned} \langle \omega^j(z, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle &= \frac{1}{W(z, \omega_{min}, \omega_{max})} \times \\ &\times \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \omega^j |G(\omega, z)|^2 d\omega \approx \\ &\approx \langle \omega^j(0, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^2 M_{j,i}(\omega_{min}, \omega_{max}) z^i, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

В выражениях (17), (18) величины $M_{j,i}(\omega_{min}, \omega_{max})$, $j = 0, 1, 2$, $i = 1, 2$, — коэффициенты разложения соответствующих функций по степеням z^i . При $\omega_{min} = 0$, $\omega_{max} = \infty$ формула (16) представляет собой квадрат среднеквадратичной ширины спектра в соответствии со стандартным определением.

Из формулы (13) следует, что квадрат модуля спектральной плотности импульса, фигурирующий в (16)–(18), с точностью до слагаемых, содержащих степени z не выше второй, представляется в виде суммы

$$|G(z, \omega)|^2 \approx |G_0(\omega)|^2 + \sum_{i=1}^2 K_i(\omega) z^i, \quad (19)$$

где

$$K_1(\omega) = 2 [\text{Re}(G_0(\omega)) \text{Re}(I_0(\omega)) + \text{Im}(G_0(\omega)) \text{Im}(I_0(\omega))], \quad (20)$$

$$K_2(\omega) = |I_0(\omega)|^2 + 2 [\text{Re}(G_0(\omega)) \text{Re}(J_0(\omega)) + \text{Im}(G_0(\omega)) \text{Im}(J_0(\omega))]. \quad (21)$$

Очевидно, что коэффициенты $M_{0,i}(\omega_{min}, \omega_{max})$, $i = 1, 2$, в (17) выражаются через $K_i(\omega)$ как

$$M_{0,i}(\omega_{min}, \omega_{max}) = \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} K_i(\omega) d\omega. \quad (22)$$

С учетом формул (17), (22) коэффициенты $M_{j,i}(\omega_{min}, \omega_{max})$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2$, в (18) имеют вид:

$$\begin{aligned} M_{j,1}(\omega_{min}, \omega_{max}) &= \frac{1}{W(0, \omega_{min}, \omega_{max})} \times \\ &\times \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} K_1(\omega) [\omega^j - \langle \omega^j(0, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle] d\omega, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{j,2}(\omega_{min}, \omega_{max}) &= \frac{1}{W^2(0, \omega_{min}, \omega_{max})} \times \\ &\times \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} [W(0, \omega_{min}, \omega_{max}) K_2(\omega) - \\ &- M_{0,1}(\omega_{min}, \omega_{max}) K_1(\omega)] \times \\ &\times [\omega^j - \langle \omega^j(0, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle] d\omega. \quad (24) \end{aligned}$$

Коэффициенты $P_i(\omega_{min}, \omega_{max})$, $i = 1, 2$, в (16) связаны с $M_{j,i}(\omega_{min}, \omega_{max})$ формулами

$$P_1(\omega_{min}, \omega_{max}) = M_{2,1}(\omega_{min}, \omega_{max}) - 2 \langle \omega(0, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle M_{1,1}(\omega_{min}, \omega_{max}), \quad (25)$$

$$P_2(\omega_{min}, \omega_{max}) = M_{2,2}(\omega_{min}, \omega_{max}) - M_{1,1}(\omega_{min}, \omega_{max}) - 2 \langle \omega(0, \omega_{min}, \omega_{max}) \rangle M_{1,2}(\omega_{min}, \omega_{max}). \quad (26)$$

Эти коэффициенты по параметрам импульса при $z = 0$ и характеристикам среды позволяют быстро, без решения нелинейного интегродифференциального уравнения (1) предсказывать начальную динамику среднеквадратичной ширины спектра в полосе частот $\omega \in [\omega_{min}, \omega_{max}]$ и делать выводы о том, какой из режимов начального уширения, сжатия или распространения с неизменяющейся шириной спектра будет иметь место.

4. НОРМИРОВКА УРАВНЕНИЙ

Для выявления сценариев динамики ширины спектра спектральные уравнения и полученные выражения удобно записать в нормированных переменных. Для начала осуществим переход в систему координат, движущуюся с групповой скоростью импульса $V_g = c/n_g$, где $n_g = n(\omega_0) + \Delta n_l^0$ — групповой показатель преломления на центральной частоте спектра импульса ω_0 и введено обозначение

$$\Delta n_l^0 = \omega_0 \frac{dn(\omega_0)}{d\omega_0}. \quad (27)$$

Это соответствует замене переменных во временной области

$$\tau = t - z/V_g. \quad (28)$$

Преобразование Фурье от $E(z, \tau)$ будет иметь вид

$$G_\tau(z, \omega) = F(E(z, \tau)) = \exp \frac{i\omega z}{V_g} G(z, \omega).$$

Далее введем переменные

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \frac{E}{E_{max}}, & \tilde{G}_\tau &= \frac{G_\tau}{E_{max}}, & \tilde{\tau} &= \omega_0 \tau, \\ \tilde{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0}, & \tilde{z} &= \frac{\omega_0 \Delta n_1^0 z}{c},\end{aligned}\quad (29)$$

где E_{max} — максимальное значение электрического поля на входе в среду, а также определим зависимость:

$$\begin{aligned}\tilde{n}(\tilde{\omega}) &= n(\tilde{\omega}\omega_0), & A(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= \\ &= \tilde{\omega}\tilde{n}(\tilde{\omega}) + (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})\tilde{n}(\tilde{\omega} - \tilde{\alpha}) + \\ &+ (\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})\tilde{n}(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}) + \tilde{\beta}\tilde{n}(\tilde{\beta}).\end{aligned}\quad (30)$$

Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{G}_\tau}{\partial \tilde{z}} + \frac{\tilde{n}(\tilde{\omega}) - n_g}{\Delta n_0^l} i\tilde{\omega}\tilde{G}_\tau + \frac{i\tilde{\omega}^2 \chi E_{max}^2}{\pi \Delta n_0^l} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{G}_\tau(\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})\tilde{G}_\tau(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})\tilde{G}_\tau(\tilde{\beta})}{A(\tilde{\omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} d\tilde{\alpha} d\tilde{\beta} = 0.\end{aligned}\quad (31)$$

Заметим, что при $\tilde{\omega} = 1 \leftrightarrow \omega = \omega_0$ множитель, записанный в виде дроби во втором слагаемом, принимает значение -1 .

В соответствии с переходом от уравнения (1) к (31) преобразуются и все следующие из (1) выражения, приведенные выше. В частности, формулы (14), (15) переписываются как

$$\tilde{I}(\tilde{\omega}) = -\frac{i\tilde{\omega}Q}{3}F(\tilde{E}_0^3),\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\tilde{\omega}) &= -\frac{Q}{6}(i\tilde{\omega})^2 \frac{\tilde{n}(\tilde{\omega}) - n_g}{\Delta n_0^l} F(\tilde{E}_0^3) + \\ &+ \frac{Q}{2}i\tilde{\omega}F(\tilde{E}_0^2 \tilde{E}_D) + \frac{Q^2}{10}(i\tilde{\omega})^2 F(\tilde{E}_0^5).\end{aligned}\quad (33)$$

Здесь

$$\tilde{E}_D = F^{-1} \left[i\tilde{\omega} \frac{\tilde{n}(\tilde{\omega}) - n_g}{\Delta n_0^l} \tilde{G}_0(\tilde{\omega}) \right],$$

а

$$Q = \frac{4\Delta n^{nl}}{\Delta n_0^i}\quad (34)$$

представляет собой эффективную нелинейную константу, характеризующую относительное влияние нелинейных эффектов по сравнению с дисперсионными. Форма записи (34) совпадает с выражением для эффективной нелинейной константы в уравнении для электрического поля ПКИ, приведенной в работе [19]. Параметр

$$\Delta n^{nl} = n_2 I = \frac{3\pi\chi E_{max}^2}{2n(\omega_0)}\quad (35)$$

по сути представляет собой добавку к показателю преломления, определяемую влиянием нелинейности. При этом предполагается, что величина χ , так же как и E_{max} , записана в системе единиц СГСЭ, а n_2 и интенсивность излучения I — в системе СИ, и использовано соотношение [6]

$$I \left[\frac{\text{кВт}}{\text{см}^2} \right] = \frac{3n(\omega_0)}{8\pi} E_{max}^2 [\text{СГСЭ}].\quad (36)$$

Именно выражения (32) и (33) применяются в настоящей работе при расчете нормированных коэффициентов (20), (21), с учетом (25), (26) определяющих динамику среднеквадратичной ширины континуумных спектров.

5. ДИНАМИКА СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ШИРИНЫ СПЕКТРА ИМПУЛЬСОВ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯ В ОПТИЧЕСКОМ ВОЛОКНЕ ИЗ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА

Проиллюстрируем применение полученных выше выражений на примере импульсов из малого числа колебаний поля, распространяющихся в оптическом волокне из кварцевого стекла телекоммуникационного типа. Рассмотрим сначала симметричные спектрально ограниченные импульсы вида

$$E_0(\tau) = E_{max} \exp(-2\tau^2/\tau_p^2) \sin(\omega_0 \tau).\quad (37)$$

В соответствии с терминологией, принятой для более длинных импульсов, будем называть такие импульсы «гауссовыми», тогда τ_p определяет временную длительность квадрата условной гауссовой «огнивающей» $E_{max} \exp(-2\tau^2/\tau_p^2)$ импульса по полной ширине на уровне e^{-1} от максимума (возведение в квадрат связано с тем, что длительность обычно определяют для энергетических величин), E_{max} — «амплитуда», характеризующая пиковую интенсивность; гармоническая составляющая $\sin(\omega_0 \tau)$ описывает колебательный характер поля ПКИ, ω_0 — центральная частота спектра импульса.

Линейная дисперсия кварцевого стекла в области прозрачности может быть описана с высокой точностью зависимостью Селлмейера:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2},\quad (38)$$

где резонансные частоты $\omega_j = 2\pi c/\lambda_j$, соответствуют длинам волн $\lambda_1 = 0.0684043$ мкм, $\lambda_2 = 0.1162414$ мкм, $\lambda_3 = 9.896161$ мкм и амплитуды резонансов аппроксимируются значениями

$B_1 = 0.696163$, $B_2 = 0.4079426$, $B_3 = 0.8974794$ (см., например [7]). Вклад волноводной дисперсии рассматриваемого волокна мал по сравнению с дисперсией, обусловленной материалом. Константа коэффициента нелинейного показателя преломления кварцевого стекла принимается равной $n_2 = 2.9 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ [7]. Важной характеристикой дисперсионной зависимости (38) является длина волны нулевой групповой дисперсии $\lambda_D \approx 1.27 \text{ мкм}$, которой соответствует частота $\omega_D = 2\pi c/\lambda_D$, такая что [7]

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left(2 \frac{\partial n}{\partial \omega_D} + \omega_D \frac{\partial^2 n}{\partial \omega_D^2} \right) = 0. \quad (39)$$

Несложно показать, что для импульса вида (37) выполняется равенство $K_1(\omega) \equiv 0$ и, следовательно, $P_1 = 0$. В работе [28] уравнение (1) было решено только в первой итерации метода последовательных приближений Пикара, поэтому анализировалась динамика несимметричных импульсов с начальной частотной модуляцией, для которых $P_1 \neq 0$. Полученные в настоящей работе выражения для второго приближения Пикара позволяют изучать в том числе и динамику симметричных импульсов.

На рис. 1, 2 приведены карты уровней зависимости нормированных коэффициентов

$$\tilde{P}_2(0, 2\omega_0) = \left(\frac{c}{\omega_0^2 \Delta n_0^l} \right)^2 P_2(0, 2\omega_0), \quad (40)$$

$$\tilde{P}_2(0, \infty) = \left(\frac{c}{\omega_0^2 \Delta n_0^l} \right)^2 P_2(0, \infty) \quad (41)$$

от входных параметров импульса из двух колебаний поля ($\tau_p = 2T_0 = 4\pi/\omega_0$) — центральной длины волны излучения $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ и интенсивности I . Рисунок 1 характеризует динамику ширины начального спектрального пика, центрированного на частоте ω_0 в полосе $\omega \in [0, 2\omega_0]$, т. е. без учета кратных гармоник. Рисунок 2 соответствует рассмотрению динамики спектра импульса в бесконечной полосе частот $\omega \geq 0$ с учетом генерации кратных третьей и пятой гармоник, присутствующих в нелинейных функционалах $I_0(\omega)$, $J_0(\omega)$, см. формулы (14), (15) (в нормированном виде — формулы (32), (33)). Сопоставление рис. 1, 2 показывает, что начальное уширение ($\tilde{P}_2(0, \infty) > 0$) спектра симметричного спектрально ограниченного импульса, содержащего на входе в волновод лишь две полные осцилляции светового поля, при рассмотрении полного набора спектральных компонент реализуется для всего поля значений длины волны и интенсивности, однако начальная динамика ширины спектрального пика в полосе

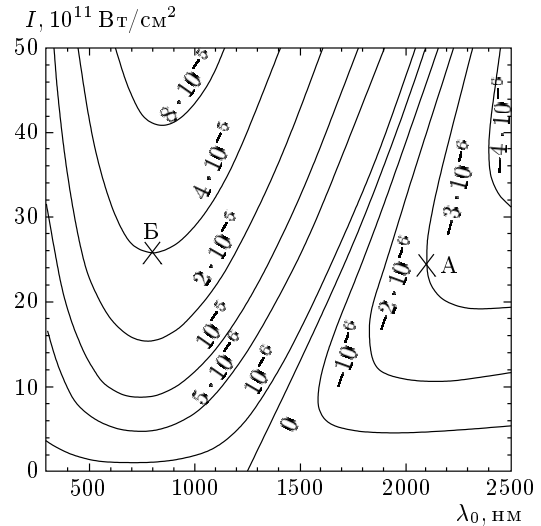


Рис. 1. Зависимость коэффициента изменения спектра $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0)$ от центральной длины волны λ_0 и интенсивности I для гауссовых импульсов с начальной длительностью, равной двум периодам колебаний светового поля, в оптическом волокне из кварцевого стекла. Крестиками указаны точки А, Б, определяющие значения параметров, для которых ниже проиллюстрирована детальная динамика электрического поля и спектра импульса

частот $\omega \in [0, 2\omega_0]$ может характеризоваться как его уширением ($\tilde{P}_2(0, 2\omega_0) > 0$) в области нормальной групповой дисперсии ($\lambda < \lambda_D$), так и его самосжатием ($\tilde{P}_2(0, 2\omega_0) < 0$) в области аномальной групповой дисперсии ($\lambda > \lambda_D$) в определенном интервале значений интенсивности излучения при фиксированной длине волны.

Рисунки 1, 2 позволяют определять режимы, когда искомое начальное изменение ширины спектра реализуется, например, при заданных центральной длине волны, интенсивности или некоторых ограничениях на диапазон их изменения. Существует возможность определять различные экстремальные режимы. Например, рис. 1 позволяет выявить области параметров, при которых реализуется максимальное уширение или сжатие основного спектрального пика, или, наоборот, его ширина не претерпевает существенных изменений. Точка А на рис. 1 является примером точки в области аномальной групповой дисперсии волокна, в которой касательная к линии уровня становится вертикальной. Она соответствует минимальному возможному значению центральной длины волны импульса, при которой реализуется сценарий сжатия центрального спектрального пика, характеризуемый данным значением коэффи-

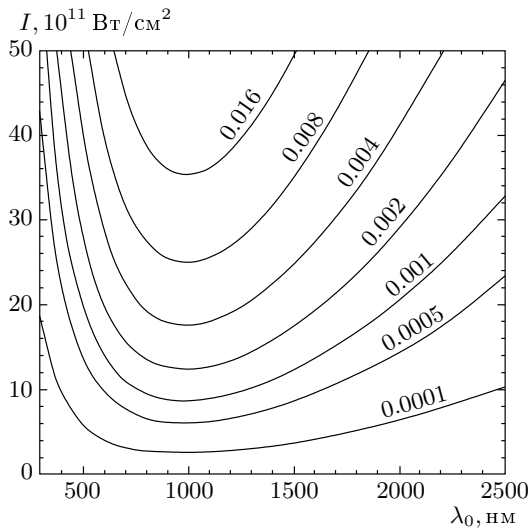


Рис. 2. Зависимость коэффициента изменения спектра $\tilde{P}_2(0, \infty)$ от центральной длины волны λ_0 и интенсивности I для гауссовых импульсов с начальной длительностью, равной двум периодам колебаний светового поля, в оптическом волокне из кварцевого стекла

центра изменения ширины спектра $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0)$. Точка Б на рис. 1 — пример точки в области нормальной групповой дисперсии, в которой касательная горизонтальна. Она соответствует минимальному значению интенсивности, при котором реализуется данный сценарий начального уширения центрального спектрального пика. Для точек А и Б ниже проиллюстрирована детальная динамика электрического поля и спектра импульса в кварцевом волокне, полученная на основе численного решения нормированного уравнения (31) методом расщепления по физическим процессам — дисперсионному и нелинейному воздействию на импульс [7].

Отметим, что благодаря использованию алгоритма быстрого преобразования Фурье при получении $\tilde{I}_0(\tilde{\omega})$, $\tilde{J}_0(\tilde{\omega})$, численный расчет каждого из полей значений, представленных на рис. 1, 2, занимает менее 5 мин на персональном компьютере Pentium III с тактовой частотой 1 ГГц. При этом для получения результатов достаточно возможностей стандартных математических пакетов, а рассмотрение волноводов с другим видом дисперсионной зависимости практически не требует модификации алгоритма.

На рис. 3 представлены рассчитанные численно нормированные спектральная плотность $|\tilde{G}|$ и электрическое поле \tilde{E} импульса из двух колебаний поля с параметрами $\lambda_0 = 2100$ нм, $I = 2.5 \cdot 10^{12}$ Вт/см²

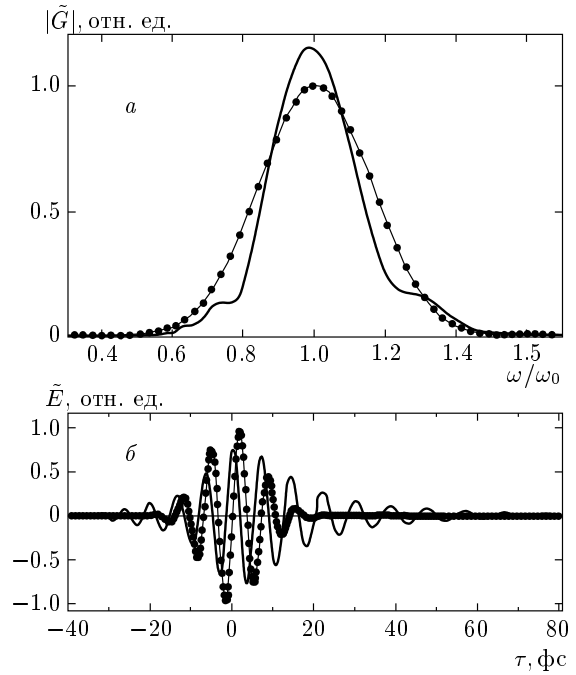


Рис. 3. Нормированные модуль спектральной плотности (а) и электрическое поле (б) импульса из двух колебаний поля с параметрами $\lambda_0 = 2100$ нм, $I = 2.5 \cdot 10^{12}$ Вт/см² на входе (линия с кружками) и выходе (линия без кружков) из отрезка кварцевого волокна длиной 1 мм в системе координат, движущейся с групповой скоростью импульса. Параметры импульса соответствуют точке А на рис. 1

на входе и выходе из отрезка кварцевого волокна длиной 1 мм в системе координат, движущейся с групповой скоростью импульса. Из рис. 3а видно, что в соответствии с предсказаниями рис. 1 центральный пик спектра импульса испытывает саможатие в волокне. При этом во временной области импульс уширяется за счет появления новых колебаний (рис. 3б) и становится частотно модулированным: мгновенная частота уменьшается от переднего фронта к хвосту импульса, что типично для аномальной групповой дисперсии.

На рис. 4 в полулогарифмическом масштабе представлен модуль нормированной спектральной плотности $|\tilde{G}|$ для импульса с теми же параметрами, но для более широкого диапазона частот — с учетом генерации третьей и пятой кратных гармоник. Формулы (32), (33) соответствуют первым двум итерациям метода последовательных приближений Пикара и потому не могут описывать генерацию кратных гармоник выше пятой.

В соответствии с предсказаниями рис. 2 спектр

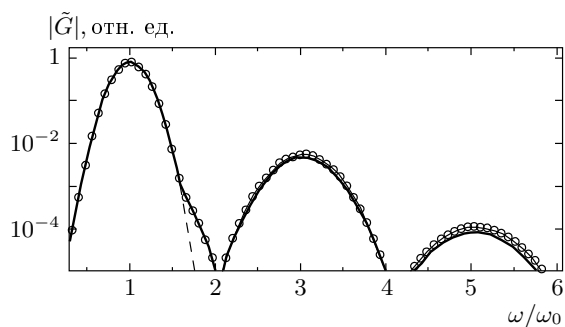


Рис. 4. Генерация кратных частот при распространении импульса из двух колебаний поля с параметрами $\lambda_0 = 2100$ нм, $I = 2.5 \cdot 10^{12}$ Вт/см², соответствующими рис. 3. Штриховая линия — спектр на входе в оптическое волокно из кварцевого стекла, жирная линия — спектр на расстоянии 0.05 мм от входа, рассчитанный прямым численным интегрированием (31), тонкая линия с кружками — спектр на том же расстоянии 0.05 мм, рассчитанный на основе метода последовательных приближений по формулам (32), (33)

импульса с учетом генерации кратных гармоник в целом уширяется на начальном этапе нелинейного распространения, несмотря на дальнейшее сужение спектрального пика, которое еще практически не регистрируемо на расстоянии 0.05 мм, так как $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0)$ меньше $\tilde{P}_2(0, \infty)$ по абсолютным значениям на несколько порядков. Как видно из рис. 1, 2, такое соотношение между значениями $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0)$ и $\tilde{P}_2(0, \infty)$ типично для всего рассматриваемого диапазона длин волн и интенсивностей, т. е. генерация кратных гармоник происходит на характерных расстояниях, значительно меньших расстояний, на которых наблюдается изменение основного спектрального пика. Этот вывод подтверждается прямым численным решением уравнения (31) — см. рис. 4. Кроме того, близость численного решения уравнения (31) и результатов, полученных на основе выведенных в настоящей работе формул, дополнительно подтверждает корректность последних.

На рис. 5 по аналогии с рис. 3 представлены рассчитанные численно нормированные спектральная плотность $|\tilde{G}|$ и электрическое поле \tilde{E} импульса с параметрами $\lambda_0 = 810$ нм, $I = 2.6 \cdot 10^{12}$ Вт/см² для отрезка кварцевого волокна длиной 0.5 мм. В этом случае параметры соответствуют точке Б на рис. 1. Несмотря на близость входных интенсивностей, детальная динамика спектральной плотности существенно отличается от представленной на рис. 3б. Видно, что центральный пик спектра им-

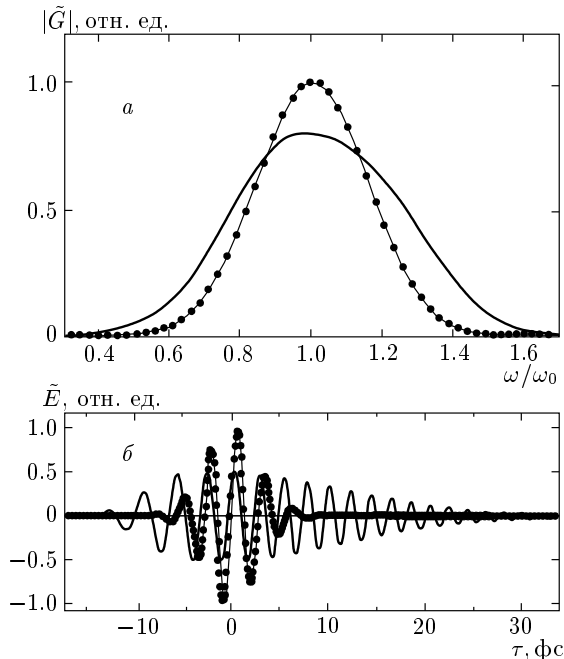


Рис. 5. Нормированные модуль спектральной плотности (а) и электрическое поле (б) импульса из двух колебаний поля с параметрами $\lambda_0 = 810$ нм, $I = 2.6 \cdot 10^{12}$ Вт/см² на входе (линия с кружками) и выходе (линия без кружков) из отрезка кварцевого волокна длиной 0.5 мм в системе координат, движущейся с групповой скоростью импульса. Параметры импульса соответствуют точке Б на рис. 1

пульса самоуширяется, что соответствует предсказаниям рис. 1 для точки Б. Изменение спектра более гладкое, чем рассмотренное ранее.

Во временной области импульс, как и в предыдущем случае, уширяется за счет появления новых колебаний (рис. 3б), но формируемая зависимость мгновенной частоты от времени становится обратной — частота увеличивается со временем из-за нормальной групповой дисперсии среды. Генерация третьей и пятой кратных гармоник на начальном этапе распространения качественно повторяет представленную на рис. 4.

В связи с активным изучением влияния начальной фазы поля на различные эффекты в оптике интенсивных ПКИ (см., например, [29] и ссылки в ней) представляет интерес зависимость полученных результатов от начальной фазы. Модель «гауссова» профиля (37) является традиционной в оптике малых длительностей, однако она не позволяет анализировать зависимость динамики спектра от начальной фазы поля в случае ПКИ. Формальное введение отличной от нуля начальной фазы $\varphi_0 \neq 0$ в (37), т. е.

замена $\sin(\omega_0\tau)$ на $\sin(\omega_0\tau + \varphi_0)$ для импульса из малого числа колебаний нарушает требование равенства нулю постоянной составляющей — компоненты спектра на нулевой частоте,

$$G(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} E(z, \tau) d\tau = 0, \quad (42)$$

— уже на входе в волновод. Условие (42) следует, например, из базового для уравнения (1) предположения прозрачности оптической среды для спектральных компонент импульса.

Рассмотрим зависимость

$$E'_0(\tau) = \frac{d}{d\tau} \times \left[E_{max} \exp\left(-\frac{2\tau^2}{\tau_p^2}\right) \sin(\omega_0\tau - \varphi_0) \right], \quad (43)$$

полученную на основе (37) и по построению удовлетворяющую условию (42) для любых значений начальной фазы φ_0 . Проанализируем влияние начальной фазы на динамику среднеквадратичной ширины спектра ПКИ вида (43), имеющего, как и ранее, значение параметра $\tau_p = 2T_0 = 4\pi/\omega_0$. На рис. 6 в качестве примера изображены профили ПКИ для значений $\varphi_0 = 0, \pi/4, \pi/2$. При $\varphi_0 = 0$ структура колебаний на входе в волновод из-за дифференцирования в формуле (43) по времени становится «косинусоподобной» — напряженность электрического поля имеет максимум при $\tau = 0$ (рис. 6, жирная сплошная линия). При $\varphi_0 = \pi/2$ (рис. 6, тонкая сплошная линия) импульс «синусоподобный» и по структуре похож на график зависимости (37) — рис. 3б, 5б, линии с кружками.

Расчеты показывают, что влияние начальной фазы на динамику ширины спектра ПКИ из двух колебаний поля очень мало для исследуемого диапазона интенсивностей. Были рассмотрены значения φ_0 в пределах $[-\pi, \pi]$ с шагом $\pi/12$. На рис. 7, 8 по аналогии с рис. 1, 2 представлены карты уровней $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0), \tilde{P}_2(0, \infty)$ для ПКИ вида (43). Результаты справедливы для любых значений φ_0 . Варьирование φ_0 приводит к изменению значений $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0), \tilde{P}_2(0, \infty)$ в пределах 0.5 %, что неразличимо в масштабе рис. 7, 8. Сопоставление рис. 1, 2 и рис. 7, 8 показывает близость сценариев изменения ширины спектра ПКИ вида (37) и (43). Все качественные выводы, сделанные выше для ПКИ вида (37), верны и для ПКИ вида (43).

Влияние начальной фазы на динамику ширины спектра увеличивается при уменьшении длительности ПКИ. Полученные результаты показывают, что

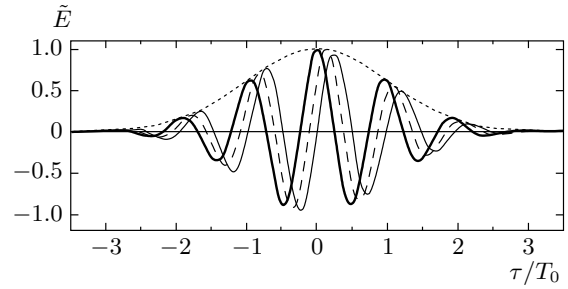


Рис. 6. Нормированное электрическое поле импульсов вида (43) для различных значений начальной фазы: $\varphi_0 = 0$ (жирная линия), $\pi/4$ (штриховая), $\pi/2$ (тонкая). Для наглядности точками обозначена общая для всех импульсов «оглабляющая», непосредственно в расчете не участвующая

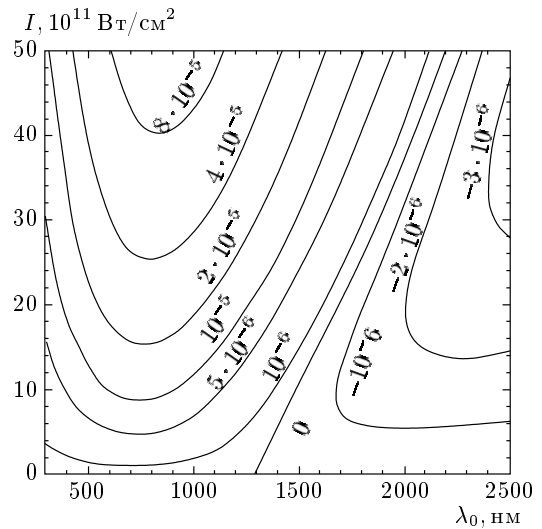


Рис. 7. Зависимость коэффициента изменения спектра $\tilde{P}_2(0, 2\omega_0)$ от центральной длины волны λ_0 и интенсивности I для импульсов вида (43) с начальной длительностью $\tau_p = 2T_0 = 2\lambda_0/c$ в оптическом волокне из кварцевого стекла

для спектрально ограниченных импульсов длительностью $\tau_p \geq 2T_0$ это влияние пренебрежимо мало. Наиболее короткие импульсы со спектром в области прозрачности оптических сред, полученные экспериментально, имеют длительность порядка 1.3–1.5 колебаний поля [1, 4, 5]. Особенности динамики таких импульсов в прозрачных средах составляют тему для отдельного исследования и здесь не рассматриваются. Для их анализа вместо моделей (37), (43) должны использоваться реальные временные профили, измеренные экспериментально. Соответству-

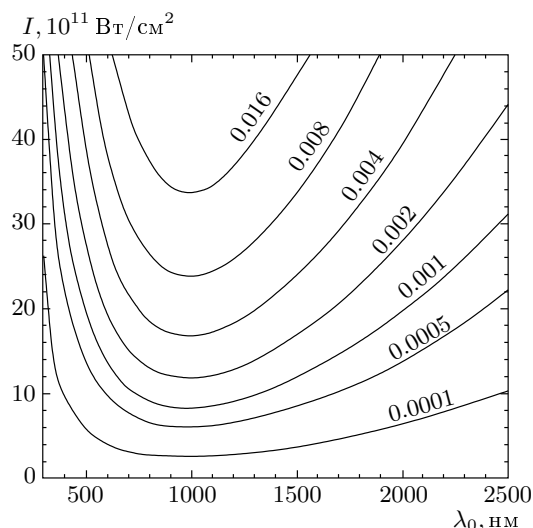


Рис. 8. Зависимость коэффициента изменения спектра $\tilde{P}_2(0, \infty)$ от центральной длины волны λ_0 и интенсивности I для импульсов вида (43) с начальной длительностью $\tau_p = 2T_0 = 2\lambda_0/c$ в оптическом волокне из кварцевого стекла

ющее исследование возможно провести на основе применяемого в настоящей работе подхода, так как оценки показывают, что даже спектр фемтосекундного импульса из одного колебания светового поля уместается в области прозрачности многих оптических материалов, в частности, кварцевого стекла.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе уравнение динамики континуумного спектра излучения в однородной изотропной среде с произвольной дисперсией и нерезонансной электронной нелинейностью решено с точностью до второго приближения Пикара. На основе этого решения получена аналитическая зависимость среднеквадратичной ширины спектра излучения от пройденного световым импульсом расстояния в оптическом волноводе, которая по входным параметрам излучения и характеристикам среды позволяет быстро определять сценарии начальной эволюции спектра: уширение, независимость от расстояния или сжатие. Рассчитаны значения коэффициента начального изменения ширины спектра импульса из двух колебаний поля в оптическом волокне телекоммуникационного типа из кварцевого стекла. Показано, что ширина спектра импульсов всегда увеличивается при учете обогащения спектра за счет генерации кратных

гармоник, которая происходит на самом начальном этапе распространения. На больших расстояниях становится заметным изменение спектрального пика вблизи центральной длины волны. При этом для импульсов со спектром в области аномальной групповой дисперсии существует диапазон интенсивностей, для которого характерно самосжатие основного спектрального пика. Показано, что начальная фаза электрического поля спектрально ограниченных импульсов из двух и более колебаний поля не оказывает влияния на динамику ширины спектра для рассмотренного диапазона входных интенсивностей.

Работа поддержана государственным контрактом № 02.442.11.7568 в рамках ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники» на 2002–2006 г., грантом РФФИ № 05-02-16556-а и грантом для молодых ученых фонда некоммерческих программ Д. Зиминой «Династия». Автор выражает признательность С. А. Козлову за идею проведения исследований, легших в основу настоящей работы, чтение рукописи статьи и многочисленные полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Th. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
2. A. Brodeur and S. L. Chin, *J. Opt. Soc. Amer. B* **16**, 637 (1999).
3. R. R. Alfano, *The supercontinuum Laser Source*, Springer, Berlin (1989).
4. M. Nisoli, S. De Silvestri, O. Svelto et al., *Opt. Lett.* **22**, 522 (1997).
5. G. Steinmeyer, D. H. Sutter, L. Gallman et al., *Science* **286**, 1507 (1999).
6. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, Москва (1988).
7. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
8. Th. Brabec and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3282 (1997).
9. N. Karasawa, Sh. Nakamura, N. Nakagawa et al., *IEEE J. Quant. Electron.* **37**, 398 (2001).
10. M. A. Porras, *Phys. Rev. A* **60**, 5069 (1999).

11. A. L. Gaeta, Phys. Rev. Lett. **84**, 3582 (2000).
12. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
13. А. В. Ведерко, О. Б. Дубровская, В. Ф. Марченко, А. П. Сухоруков, Вестник МГУ, физика, астрон. **33**, 4 (1992).
14. A. N. Azarenkov, G. V. Altshuller, and S. A. Kozlov, in *Studies in Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam (1992), Vol. 3, p. 429.
15. В. Н. Серкин, Э. М. Шмидт, Т. Л. Беляева и др., КЭ **24**, 923 (1997).
16. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
17. A. Nazarkin and G. Korn, Phys. Rev. A **58**, 61 (1998).
18. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
19. В. Г. Беспалов, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Оптич. ж. **67**, 5 (2000).
20. A. V. Husakou and J. Herrmann, J. Opt. Soc. Amer. B **19**, 2171 (2002).
21. M. Kolesik and J. V. Moloney, Phys. Rev. E **70**, 036604 (2004).
22. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, Москва (1990).
23. V. G. Bespalov, S. A. Kozlov, Yu. A. Shpolyansky, and I. A. Walmsley, Phys. Rev. A **66**, 013811 (2002).
24. С. А. Козлов, П. А. Петрошенко, Письма в ЖЭТФ **76**, 241 (2002).
25. Д. В. Карташев, А. В. Ким, С. А. Скобелев, Письма в ЖЭТФ **78**, 722 (2003).
26. Д. Л. Белов, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Оптич. ж. **69**, 46 (2002).
27. Yu. A. Shpolyanskiy, D. L. Belov, M. A. Bakhtin, and S. A. Kozlov, Appl. Phys. B **77**, 349 (2003).
28. Д. Л. Белов, С. А. Козлов, Ю. А. Шполянский, Изв. РАН, сер. физ. **69**, 1128 (2005).
29. D. B. Milošević, G. G. Paulus, and W. Becker, Phys. Rev. Lett. **89**, 153001 (2002).