ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 5, стр. 851–859

ДИНАМИКА ФАНТОМНОЙ МАТЕРИИ

А. А. Шацкий *

Астрокосмический центр, Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 декабря 2006 г.

Рассматривается сферически-симметричная модель эволюции самогравитирующей материи с уравнением состояния $p = -(1+\delta)\varepsilon$ (при условии $\delta = \text{const}$). Уравнения модели записываются в сопутствующей материи системе отсчета. Определяется критерий существования и образования горизонта. Часть уравнений Эйнштейна интегрируется аналитически. Определяются начальные условия и ограничения на них в присутствии горизонта. Для малых δ найдено аналитическое решение сферически-симметричных нестационарных уравнений Эйнштейна. Определяются условия перехода динамики материи от коллапса к раздуванию. Оцениваются характерные времена эволюции системы. Доказывается, что черная дыра будет уменьшать свой радиус горизонта (т. е. «растворяться») при аккреции на нее фантомной материи (при $\delta > 0$).

PACS: 04.20.-q, 04.40.-b, 04.70.-s

1. ВВЕДЕНИЕ

Фантомной принято считать материю, которая нарушает нулевое энергетическое условие [1]. Для материи, нарушающей это условие, сумма плотности энергии ε и давления p, $\varepsilon + p$, меньше нуля[1]. При этом в настоящей работе мы предполагаем, что плотность энергии ε у фантомной материи положительна (в сопутствующей ей системе отсчета). Величина $\varepsilon + p$ пропорциональна плотности энергии в системе отсчета, связанной с фотоном [2]. Разумеется, такая система отсчета бессмысленна; имеет смысл лишь асимптотический предел для системы, скорость которой приближается к скорости света.

Фантомная материя обладает рядом экзотических свойств, благодаря чему есть необходимость в ее детальном изучении.

Во-первых, только с такой материей возможно существование «кротовых нор» (см., например, [3] или [4]).

Во-вторых, есть гипотеза [5], что фантомная материя обладает уникальным свойством растворения в ней черных дыр. До сих пор это было доказано только для несамосогласованного решения (когда влиянием гравитации такой материи по сравнению с гравитацией обычной материи можно пренебречь). В то же время возможность окончательного растворения черной дыры в фантомной материи потребовала бы пересмотра определения и описания термина «горизонт событий», см. разд. 3.

В-третьих, современное состояние наблюдательной космологии позволяет говорить о возможном доминировании во вселенной фантомной материи (по последним результатам измерения ускорения расширяющейся вселенной). Кроме того, реальным примером существования фантомной материи является квантовое поле эффекта Казимира (между близкими плоскими проводящими пластинами [6]). Таким образом, вопрос изучения такой материи представляет реальный практический интерес [3, 7].

В-четвертых, известно аналитическое решение уравнений Эйнштейна для космологического уравнения состояния

$$\varepsilon + p = 0,$$

поэтому возможны малые отклонения от этого точного равенства в сторону уравнения состояния, соответствующего случаю фантомной материи, и появляется возможность найти решение в первом приближении по параметру малости.

С помощью найденного таким образом аналитического решения снимаются указанные выше проти-

*E-mail: shatskiy@asc.rssi.ru

[1] Сами величины ε и p определяются в сопутствующей материи системе отсчета.

воречия и вопросы. Вопросы устойчивости решения в данной работе не рассматриваются.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Выберем сопутствующую материи систему отсчета (см., например, [8]). Метрический тензор в сферически-симметричном случае удобно выбрать в следующем виде[2)]

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dR^2 - e^\mu d\Omega^2. \quad (1)$$

Здесь компонента метрики $e^\mu \equiv r^2$ определяет площадь сферы вокруг центра системы ($4\pi r^2$), компоненты метрики ν, λ, μ и r являются функциями координат R и t,

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

— элемент телесного угла.

Уравнения Эйнштейна, соответствующие метрике (1), можно записать в виде[3)]

$$8\pi\varepsilon = -e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3}{4}(\mu')^2 - \frac{1}{2}\mu'\lambda'\right) + \\ + e^{-\nu}\left(\frac{1}{2}\dot\mu\dot\lambda + \frac{1}{4}(\dot\mu)^2\right) + e^{-\mu}, \quad (2)$$

$$8\pi p_\parallel = -e^{-\nu}\left(\ddot\mu + \frac{3}{4}(\dot\mu)^2 - \frac{1}{2}\dot\mu\dot\nu\right) + \\ + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\mu'\nu' + \frac{1}{4}(\mu')^2\right) - e^{-\mu}, \quad (3)$$

$$8\pi p_\perp = e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}(\nu')^2 + \frac{1}{2}\mu'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}(\mu')^2 - \frac{1}{4}\mu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\mu'\nu'\right) + \\ + e^{-\nu}\left(\frac{1}{4}\dot\lambda\dot\nu + \frac{1}{4}\dot\mu\dot\nu - \frac{1}{4}\dot\lambda\dot\mu - \frac{1}{2}\ddot\lambda - \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(\dot\lambda)^2 - \frac{1}{2}\ddot\mu - \frac{1}{4}(\dot\mu)^2\right), \quad (4)$$

$$2\dot\mu' + \dot\mu\mu' - \dot\lambda\mu' - \nu'\dot\mu = 0, \quad (5)$$

где

$$p_\parallel \equiv -T_R^R$$

— продольное давление,

$$p_\perp \equiv -T_\theta^\theta = -T_\varphi^\varphi$$

— поперечное давление; штрих означает производную по R, а точка — по t, T_i^k — компоненты тензора энергии–импульса.

Если давление изотропно, $p_\parallel = p_\perp = p$, то из этих уравнений можно получить два полезных соотношения, которые также можно получить прямо из формулы $T^k_{i;k} = 0$ (тождества Бианки):

$$\dot\lambda + 2\dot\mu = -2\frac{\dot\varepsilon}{p+\varepsilon}, \quad \nu' = -2\frac{p'}{p+\varepsilon}. \quad (6)$$

Запишем уравнение состояния материи:

$$p = p_\perp = p_\parallel = w\varepsilon, \quad w \equiv -(1+\delta), \quad (7)$$

где w — постоянный параметр, определяющий это уравнение. Для случая $\delta = 0$ из уравнений (6) очевидно, что

$$-p = \varepsilon = \text{const},$$

откуда следует известное решение [9] с Λ-членом:

$$\varepsilon = \varepsilon_\Lambda > 0, \quad \nu_\Lambda = -\lambda_\Lambda = \ln(1 - r_g/R - \Lambda R^2). \quad (8)$$

В этом выражении константа r_g соответствует гравитационному радиусу при наличии горизонта, а константа $\varepsilon_\Lambda \equiv 3\Lambda/8\pi$ есть плотность энергии космологического Λ-члена.

Из-за наличия Λ-члена при больших R метрика становится нефизичной (из-за внешнего горизонта). Поэтому здесь нужно определить максимально допустимый радиус R_∞:

$$\Lambda R_\infty^2 = 1. \quad (9)$$

Кроме того, асимптотика метрики при больших R должна быть галилеевой:

$$\nu_\infty \to 0. \quad (10)$$

Далее, говоря о физической бесконечности, будем все же предполагать, что границы метагалактики не достигаются, т. е. $R < R_\infty$.

3. КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГОРИЗОНТА ВИДИМОСТИ

Радиус горизонта событий зависит от всей будущей эволюции материи [3]. Для описания реальных черных дыр это неудобно и с математической, и с практической точек зрения, поскольку определение

2) Мы используем систему единиц: $c = 1$ и $G = 1$.

3) Вывод этих уравнений можно посмотреть, например, в [8] (задача 5 к § 100).

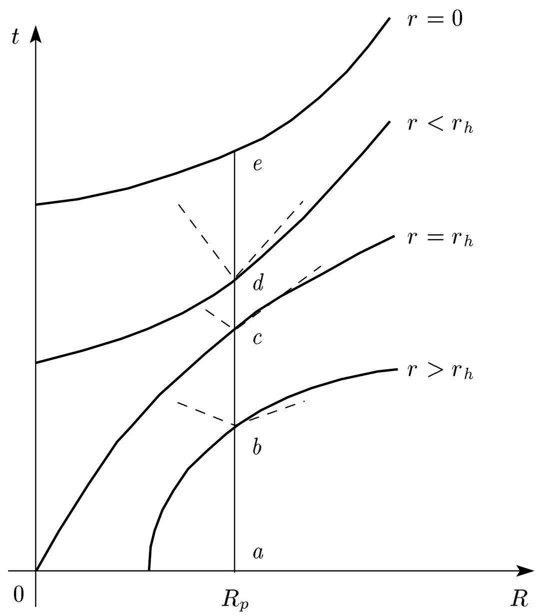

Рис. 1. Прямая a-b-c-d-e — мировая линия наблюдателя в координатах сопутствующей системы отсчета. Кривые линии — зависимости $t(R)$ для разных поверхностей $r = \mathrm{const}$. Штриховые линии — световые конусы, внутри которых может распространяться свет. В точке b световой конус пересекает поверхности $r = \mathrm{const}$, следовательно, в этой точке еще нет горизонта. В точке d световой конус целиком проходит над кривой $r = \mathrm{const}$, следовательно, он пересекает только поверхности с $r < r(R_p, t)$, поэтому точка d находится уже под горизонтом

горизонта событий не локально. Обычно, говоря о черной дыре, мы подразумеваем существование горизонта видимости («apparent horizon») и предполагаем образование горизонта событий в конце эволюции (как будет видно из дальнейшего, это не всегда соответствует действительности).

Дадим локальное определение горизонту видимости r_h [3]. Докажем, что горизонт видимости в системе со сферической симметрией образуется в момент достижения падающей частицей с ненулевой массой покоя скорости света относительно поверхностей $r = \mathrm{const}$ в той же самой точке, где в данный момент находится излучающая частица.

Предположим теперь, что мы с большого радиуса r_∞, находясь на частице материи с координатой R_∞, следим за частицей материи с координатой R_p, которая излучает свет, пролетая через сферы радиуса $r(R_p, t)$. Критерием того, что частица еще не достигла горизонта, является то обстоятельство, что мы все еще видим свет от нее, т. е. свет, распространяясь, еще пересекает поверхности с радиусами $r = \mathrm{const}$. Следовательно, критерием достижения частицей горизонта является событие, при котором распространяющийся свет уже не может пересекать поверхности с радиусами $r > r(R_p, t)$. Выразим этот критерий математически.

На рис. 1 прямой вертикальной линией a-b-c-d-e обозначена мировая линия частицы R_p в координатах сопутствующей системы отсчета $(R,\, t)$ от момента покоя — (a) до центра системы (e), где $r = 0$. Сплошные кривые линии, проходящие через точки $e,\ d,\ c,\ b$, обозначают линии постоянных значений $r(R, t)$ соответственно при $r = 0$, $r < r_h$, $r = r_h$ и $r > r_h$. Штриховыми линиями с вершинами в этих точках обозначены конусы, внутри которых может распространяться свет, излученный частицей R_p. Поэтому, согласно указанному выше критерию, горизонт существует в той точке, где конус касается линии $r = \mathrm{const}$, на рисунке эта линия соответствует значению $r = r_h$ (она проходит через точку c).

Условие постоянства радиуса $r(R, t)$ имеет вид

$$dr = 0 = \dot{r}\, dt + r'\, dR. \tag{11}$$

Отсюда можно выразить тангенс угла наклона кривой $r = \mathrm{const}$ к оси R:

$$\left.\frac{dt}{dR}\right|_{r=\mathrm{const}} = -\frac{r'}{\dot{r}}. \tag{12}$$

Для светового конуса (по определению) имеем

$$ds^2 = 0,$$

отсюда с учетом (1)

$$\left.\frac{dt}{dR}\right|_{ds=0} = \sqrt{e^{\lambda-\nu}}. \tag{13}$$

Тогда критерием отсутствия горизонта будет условие

$$\left.\frac{dt}{dR}\right|_{ds=0} < \left.\frac{dt}{dR}\right|_{r=\mathrm{const}}. \tag{14}$$

Подставляя сюда выражения (12) и (13) и вводя физическую скорость V частицы материи, получим этот критерий в виде

$$V^2 \equiv e^{\lambda-\nu} \left(\dot{r}/r'\right)^2 < 1. \tag{15}$$

Запишем элемент собственного (физического) времени

$$d\tau \equiv e^{\nu/2} dt, \tag{16}$$

физическое продольное расстояние

$$l(R,t) \equiv \int_0^R e^{\lambda/2}\, dR \tag{17}$$

и элемент физической длины

$$dl \equiv e^{\lambda/2}\, dR. \tag{18}$$

Тогда скорость движения вещества относительно поверхностей $r = \mathrm{const}$ будет иметь вид

$$V = \left.\frac{dl}{d\tau}\right|_{r=\mathrm{const}} = \sqrt{e^{\lambda-\nu}} \left.\frac{dR}{dt}\right|_{r=\mathrm{const}} = \sqrt{e^{\lambda-\nu}}\,\frac{\dot r}{r'}. \tag{19}$$

Тем самым доказывается утверждение[4)], что горизонт видимости образуется в момент достижения веществом скорости $|V| = 1$ относительно поверхностей $r = \mathrm{const}$.

4. ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Интегрируя первое уравнение (6) с учетом начальных условий, получаем

$$e^{\lambda} = e^{\lambda_0} \left(\frac{R}{r}\right)^4 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{2/\delta}. \tag{20}$$

Интегрирование второго уравнения (6) дает

$$\nu = -2\frac{1+\delta}{\delta} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\Lambda}\right) + c_0(t). \tag{21}$$

Функцию $c_0(t)$ можно положить равной нулю допустимым преобразованием времени $t = t(\tilde t)$. Тогда

$$\nu = -2\frac{1+\delta}{\delta} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_\Lambda}\right). \tag{22}$$

При этом при $R \to \infty$ автоматически выполняется условие (10).

Переписываем уравнение (5) в виде

$$2\dot r' = r'\dot\lambda + \dot r \nu'. \tag{23}$$

Выразим отсюда $\dot\lambda$ и подставим его в уравнение (2). Получим

$$8\pi\varepsilon r^2 = \frac{1}{r'}\frac{d}{dR}\left(r - r r'^2 e^{-\lambda} + r\dot r^2 e^{-\nu}\right). \tag{24}$$

[4)] Это утверждение неприменимо на горловине «кротовой норы» (при ее наличии), так как там $e^{-\lambda} = 0$ тождественно. Поэтому условие существования горизонта около горловины определяется асимптотически: $V^2 \to 1$ при $r \to r_h$.

Введем новую величину, имеющую смысл массы

$$M(R,t) \equiv \int_0^R 4\pi\varepsilon r^2 r'\, dR. \tag{25}$$

После интегрирования уравнения (24) можно получить два уравнения:

$$\begin{gathered} 2M = r\left(1 - r'^2 e^{-\lambda} + \dot r^2 e^{-\nu}\right), \\ V^2 = 1 - \frac{e^{\lambda}}{r'^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Отсюда при условии

$$\left. r'^2 e^{-\lambda}\right|_{r=r_h} \neq 0$$

радиус горизонта определяется как

$$r_h = 2M(R_h, t_h). \tag{27}$$

Заметим, что уравнение (3) совпадает с уравнением (2) при замене производной по времени на производную по координате (и наоборот), замене $\lambda \leftrightarrow \nu$ и замене знака в последнем слагаемом этих уравнений. С учетом этого, по аналогии, уравнение (24) можно переписать в виде

$$-8\pi p_\parallel r^2 = \frac{1}{\dot r}\frac{d}{dt}\left(r - r r'^2 e^{-\lambda} + r\dot r^2 e^{-\nu}\right). \tag{28}$$

После интегрирования по времени с учетом (26) и начальных условий получаем

$$2M = 2M_0 - \int_0^t 8\pi p_\parallel r^2 \dot r\, dt. \tag{29}$$

Здесь

$$M_0 \equiv M(R, 0). \tag{30}$$

Из выражений (25) и (26) получаем выражение для начальной массы при наличии горизонта

$$2M_0 \equiv r_1 + \int_{r_1}^R 8\pi\varepsilon_0 R^2\, dR, \tag{31}$$

где r_1 — начальный радиус горизонта, определяемый формулой

$$r_1 = r_g + \Lambda r_1^3 \approx r_g. \tag{32}$$

Формула (29) определяет смещение горизонта в веществе за счет работы сил давления над внутренними слоями материи (при коллапсе материи к центру). В работе [10] формула (29) была получена для частного случая $w = \mathrm{const}$.

5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗ ГОРИЗОНТА

Определим начальные условия задачи для модели, в которой нет горизонта в начальный момент времени. Допустимым преобразованием $R = R(\tilde{R})$ можно в начальный момент времени определить

$$r_0 = R \quad \Longrightarrow \quad r_0' = 1. \tag{33}$$

Кроме того, можно задать в начальный момент условие покоя материи:

$$\dot{r}_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = 0, \quad \dot{\nu}_0 = 0. \tag{34}$$

Тогда из уравнений (26) можно получить

$$\lambda_0 = -\ln(1 - S), \tag{35}$$

где

$$S \equiv 2M_0/R,$$

причем этот результат не зависит от выбора δ.

6. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ГОРИЗОНТА

В рассматриваемой модели предполагается возможность существования горизонта в начальный момент времени, причем это касается и чисто вакуумного решения с Λ-членом. Поэтому о начальных условиях вблизи горизонта стоит сказать отдельно.

Начальное условие (33) сохраняется. С учетом (15) имеем, с одной стороны,

$$V_0^2\big|_{r_h} = (\dot{r}_0)^2\, e^{(\lambda_0 - \nu_0)}\Big|_{r_h} = 1,$$

а с другой стороны,

$$\dot{r}_0 = 0, \quad e^{\lambda_0}\big|_{r_h} \to \infty.$$

Поэтому на горизонте мы получаем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Устранив эту неопределенность, мы получим физическое распределение для скорости V_0 в начальный момент:

$$|V_0(R)| = \begin{cases} 0, & R \neq r_h, \\ 1, & R = r_h, \end{cases} \tag{36}$$

т. е. начальное распределение скорости — это функция с «выколотой точкой».

Для более корректного обоснования формулы (36) модифицируем начальные условия: будем считать $\dot{r}_0 \neq 0$. Перепишем второе выражение (26) в виде

$$e^{-\lambda_0} = 1 + \alpha - S, \tag{37}$$

где $\alpha \equiv \dot{r}_0^2 e^{-\nu_0}$ — величина, определяемая начальным распределением скорости материи.

Отсюда для начального распределения скорости получаем

$$V_0^2(R) = \frac{\alpha}{1 + \alpha - S}. \tag{38}$$

При $\alpha \to 0$ выражение (38) переходит в (36).

7. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Введем обозначение

$$y \equiv \ln(\varepsilon/\varepsilon_\Lambda). \tag{39}$$

При $\delta \to 0$ имеем $\varepsilon \to \varepsilon_\Lambda$, поэтому $y \to 0$ при $\delta \to 0$.

Подставляя $\dot{\lambda}$ и ν' из уравнений (6) в уравнение (23), получаем

$$\delta\left(\frac{\dot{r}'}{\dot{r}r'} + \frac{2}{r}\right) = \frac{\dot{y}}{\dot{r}} - (1 + \delta)\frac{y'}{r'}. \tag{40}$$

Перейдем от старых координат (R, t) к новым координатам (r, r_h), являющимся функциями старых координат. Путем тривиального математического преобразования получаем следующее выражение:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{r}} - \frac{y'}{r'} = \frac{\partial y}{\partial r_h}\left(\frac{\dot{r}_h}{\dot{r}} - \frac{{r_h}'}{r'}\right). \tag{41}$$

В разд. 10 будет показано, что при малых δ изменение r_h тоже мало (причем пропорционально δ). Учитывая также то, что $y \to 0$ при $\delta \to 0$, получаем, что при $\delta \to 0$ правой частью в (41) можно пренебречь. Тогда уравнение (40) переписывается в виде

$$\delta\left(\frac{\dot{r}'}{\dot{r}r'} + \frac{2}{r}\right) \approx 0. \tag{42}$$

Теперь найдем решение уравнений Эйнштейна, в котором функция y (а также ε и ν) зависит явно только от функций r и r_h и не зависит явно от t и R. При таком задании плотности материи зависимость $\varepsilon(r)$ определяется исключительно заданием начального распределения плотности материи.

При $\delta \to 0$ выражения (22) и (37) для ν_0 и λ_0 должны стремиться соответственно к ν_Λ и λ_Λ (см. (8)), а α должно стремиться к нулю. В соответствии с этим выбираем распределение плотности энергии в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_\Lambda\left[1 - \frac{\delta}{2}\ln\left(1 + \alpha - \frac{r_h}{r}\right)\right], \\ \nu &= -2\frac{1+\delta}{\delta}y \approx (1 + \delta)\ln\left(1 + \alpha - \frac{r_h}{r}\right). \end{aligned} \tag{43}$$

В главном приближении по δ с учетом начальных условий получаем

$$\frac{\dot{r}'}{r'} \approx -\frac{2\dot{r}}{r} \quad \Longrightarrow \quad r' \approx \left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{44}$$

Из выражения (31) получаем

$$2M_0 \approx r_g + \Lambda R^3 - \frac{3}{2}\delta\Lambda r_1^3 I(R/r_1 - 1),$$

где

$$I(x) = x^3\left[\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9}\right] + x^2\left[\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right] + \\ + x\left[\ln x - 1\right] - (x+1)^3\left[\frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{1}{9}\right] - \frac{1}{9}, \tag{45}$$

$$\lim_{x\to 0} I(x) = x(\ln x - 1) \to 0.$$

Учитывая, что ε явно зависит только от r, из выражения (29) получаем

$$2M = 2M_0(R) - (1+\delta)\int_r^R 8\pi\varepsilon r^2\,dr = \\ = 2M_0(r) - \delta\int_r^R 8\pi\varepsilon r^2\,dr. \tag{46}$$

В главном приближении по δ выражение (46) переписывается в виде

$$2M \approx r_g + \Lambda r^3 - \delta\Lambda\left[R^3 - r^3 + \frac{3}{2}r_1^3 I(r/r_1 - 1)\right]. \tag{47}$$

Из (20) и (37) находим

$$e^\lambda \approx \frac{(R/r)^4}{1+\alpha-S}\left[\frac{1 - \dfrac{\delta}{2}\ln\left(1+\alpha - r_h/r\right)}{1 - \dfrac{\delta}{2}\ln\left(1+\alpha - r_h/R\right)}\right]^{2/\delta}. \tag{48}$$

Отсюда, с помощью (26), применяя второй замечательный предел к (48), получаем

$$e^\lambda \approx \frac{(R/r)^4}{1+\alpha-S}\left(\frac{1+\alpha-r_h/R}{1+\alpha-r_h/r}\right), \\ V^2 \approx 1 - \frac{1-2M/r}{1+\alpha-S}\left(\frac{1+\alpha-r_h/R}{1+\alpha-r_h/r}\right). \tag{49}$$

Согласно второму выражению (26), радиус горизонта r_h определяется формулой $r_h = 2M$. Тогда при $\delta \to 0$ из (47) получаем

$$r_h - r_1 \approx -\delta\Lambda(R^3 - r_1^3). \tag{50}$$

Из найденного решения, однако, неясно направление эволюции системы (коллапс или расширение). Направление эволюции определяется ускорением, действующим на материю в начальный момент.

8. УСКОРЕНИЕ

Для второй производной радиуса r по времени t из уравнений (3) и (37) в начальный момент получаем

$$2Re^{-\nu_0}\ddot{r}_0 = (1+\delta)8\pi\varepsilon R^2 + R\dot{r}_0\dot{\nu}_0 e^{-\nu_0} - \\ - S + R{\nu'}_0(1+\alpha-S). \tag{51}$$

Собственное ускорение $a = dV/d\tau$ сопутствующего материи наблюдателя в начальный момент равно (см. (19))

$$a_0 = \ddot{r_0}e^{\lambda_0/2-\nu_0}. \tag{52}$$

При малых δ из (43) и (45) получаем

$$\nu_0 \approx (1+\delta)\ln\left(1+\alpha-S\right), \\ S \approx \frac{r_g}{R} + \Lambda R^2 - \frac{3}{2}\delta\Lambda\frac{r_1^3}{R}I(R/r_1 - 1), \\ RS' \approx -\frac{r_g}{R} + 2\Lambda R^2 + \frac{3}{2}\delta\Lambda\frac{r_1^3}{R}\times \\ \times\left[I(R/r_1-1) - RI'(R/r_1-1)\right]. \tag{53}$$

Переписываем (51) с учетом (53)[5)]

$$2Re^{-\nu_0}\ddot{r}_0 \approx \delta\left[\frac{r_g}{R} + \Lambda R^2 + \frac{3}{2}\Lambda r_1^3 I'\right] + \\ + \alpha\frac{r_g/R - 2\Lambda R^2 + \frac{3}{2}\delta\Lambda r_1^3(I' - I/R)}{1+\alpha-S}. \tag{54}$$

Отсюда видно, что (как и должно быть) ускорение равно нулю при $\delta = 0$ (и $\alpha = 0$).

При радиусах R, близких к r_1, доминирующими в (54) оказываются члены, содержащие

$$I' \approx \ln(R/r_1 - 1)/r_1 < 0.$$

Обозначим

$$R_{cr} \approx r_1\left[1 + \exp\left(-\frac{2}{3\delta\Lambda r_1 R_{cr}}\right)\right] \approx \\ \approx r_1\left[1 + \exp\left(-\frac{2}{3\delta\Lambda r_1^2}\right)\right] \approx r_1. \tag{55}$$

Тогда из (54) находим, что при $\delta > 0$ при $R > R_{cr}$ в начальный момент материя будет расширяться, а при $R < R_{cr}$ (в непосредственной близости от горизонта) — коллапсировать.

---

5) Здесь, так же, как и ранее, штрих означает производную по R.

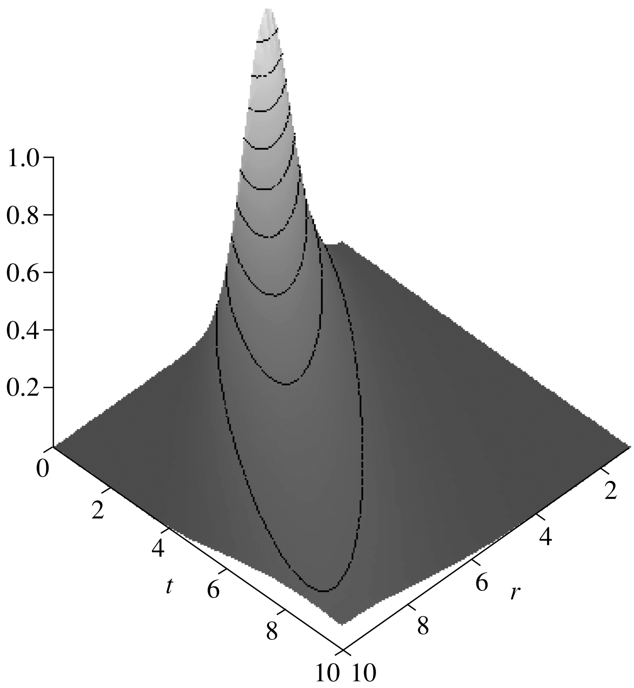

Рис. 2. Поведение сгустка фантомной материи. Сгусток, имевший в состоянии покоя гауссово распределение, с течением времени начинает размываться. По вертикальной оси отложена нормированная на единицу плотность энергии

9. ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА ЭВОЛЮЦИИ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы не будем предполагать малости δ. Тогда, пренебрегая α, с помощью (51) можно получить характерное время эволюции системы:

$$T \sim \sqrt{r/|\ddot{r}|}.$$

В случае, если начальное распределение материи имеет большие градиенты, всеми членами, кроме содержащих $R\nu_0{}'$, в выражении (51) можно пренебречь. Тогда из (51) и (52) получаем

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 &\approx \frac{w}{\delta}\left(\frac{\varepsilon_0{}'}{\varepsilon_0}\right)\left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\Lambda}\right)^{2w/\delta}(1-S), \\ a_0 &\approx \frac{w}{\delta}\left(\frac{\varepsilon_0{}'}{\varepsilon_0}\right)\sqrt{1-S}. \end{aligned} \tag{56}$$

Согласно формулам (56), имеются два противоположных варианта эволюции материи с начальным распределением в виде шарового слоя с локальным максимумом плотности энергии

1. В случае фантомной материи ($\delta > 0$) получаем размывающийся слой материи (см. рис. 2).

2. В случае $\delta < 0$ получаем коллапсирующий слой материи.

Заметим, что чем больше градиент плотности, тем быстрее происходит эволюция. Видимо, эти выводы можно обобщить и на несферическую модель.

Соответствующие выражениям (56) характерные времена эволюции определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &\sim \sqrt{\frac{\left|(\delta/w)R\varepsilon_0(\varepsilon_\Lambda/\varepsilon_0)^{2w/\delta}\right|}{|\varepsilon_0{}'(1-S)|}}, \\ T_2 &\sim \sqrt{\frac{|(\delta/w)R\varepsilon_0|}{\left|\varepsilon_0{}'\sqrt{(1-S)}\right|}}. \end{aligned} \tag{57}$$

Здесь T_1 — время для наблюдателя, удаленного на бесконечность, а T_2 — для наблюдателя, сопутствующего материи.

В заключение этого раздела рассмотрим эволюцию участка максимальной плотности энергии («горба», см. рис. 2). На этом участке $R\nu_0{}' \approx 0$, поэтому формулы (51) и (52) на нем принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{r}_0 &\approx \frac{e^{(\nu_0)}\left[(1+\delta)\cdot 8\pi\varepsilon_0 R^2 - S\right]}{2R}, \\ a_0 &\approx \frac{(1+\delta)\cdot 8\pi\varepsilon_0 R^2 - S}{2R\sqrt{1-S}}. \end{aligned} \tag{58}$$

Поскольку при начальном распределении материи, аналогичном показанному на рис. 2, в точке максимума

$$S = \int\limits_0^R 8\pi\varepsilon\, R^2\, dR/\, R < 8\pi\varepsilon_0 R^2,$$

ускорение в этой точке оказывается положительным, т. е. «горб» разлетается от центра системы (при любых $\delta > 0$).

10. ДИНАМИКА ГОРИЗОНТА ВИДИМОСТИ

Поскольку все частицы могут пересекать горизонт только в одном направлении, на горизонте между координатами R_h и t_h устанавливается строгое соответствие. Это означает, что зависимость $R_h(t)$ имеет характер непрерывной и монотонно-возрастающей функции ($\dot{R}_h > 0$).

Рассматривая формулу (29) на горизонте и дифференцируя ее по времени, получаем для изменения радиуса горизонта выражение

$$\dot{r}_h = 8\pi\varepsilon_0 R_h^2 \frac{dR_h}{dt} - 8\pi w\varepsilon r^2 \dot{r}. \tag{59}$$

Учитывая выражение (12), переписываем (59) в виде

$$\dot{r}_h = 8\pi\varepsilon_0 R_h^2 \dot{R}_h \left(1 + wr' \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\,\frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (60)$$

Рассмотрим два варианта изменения радиуса горизонта.

10.1. Тестовая материя

Исследуем динамику горизонта для тестовой материи (которая пренебрежимо мало влияет на изменения системы и на радиус горизонта). Для такой материи все функции должны зависеть только от r. В противном случае метрика в статической (несопутствующей) системе координат получается нестатичной, что означает влияние на нее материи (т. е. нарушение условия того, что материя является тестовой).

Уравнение (11) определяет условие постоянства r, а условие постоянства компоненты метрики ν имеет вид

$$d\nu = 0 = \nu'\,dR + \dot{\nu}\,dt. \qquad (61)$$

Решая совместно уравнения (11) и (61), получаем

$$\nu'\dot{r} = \dot{\nu} r'. \qquad (62)$$

Из уравнений (23) и (62) получаем

$$2\dot{r'}/r' = \dot{\lambda} + \dot{\nu}. \qquad (63)$$

Интегрирование этого уравнения с начальными условиями дает

$$r' = \sqrt{\exp\left(\lambda - \lambda_0 + \nu - \nu_0\right)}, \qquad (64)$$

Откуда, с учетом выражений (20) и (22), находим

$$r' = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\,\frac{R^2}{r^2}. \qquad (65)$$

Теперь выражение (60) для изменения радиуса горизонта запишется в виде

$$\dot{r}_h = 8\pi\varepsilon_0 R_h^2 \dot{R}_h (1 + w) = -8\pi\delta\varepsilon_0 R_h^2 \dot{R}_h. \qquad (66)$$

Таким образом, при $w < -1$ имеем $\dot{r}_h < 0$, т. е. в случае тестовой материи будет происходить уменьшение радиуса горизонта, черная дыра будет «растворяться» в фантомной материи. В выражении (66) «тестовость» материи проявляется в чрезвычайной малости величины $8\pi\varepsilon_0 R^2 \ll 1$. Этот результат был предсказан и доказан для несопутствующей материи системы отсчета (жесткой системы отсчета, покоящейся относительно удаленных звезд) в работе [5].

10.2. Нетестовая материя

Формулу (66) можно обобщить на нетестовую материю. Для этого достаточно заметить, что в случае постоянного радиуса горизонта метрические коэффициенты на горизонте тоже не зависят от времени (гравитационное поле на некотором радиусе r определяется только массой внутри этого радиуса, т. е. в данном случае радиусом горизонта). Поэтому при $\dot{r}_h = 0$ должно выполняться соотношение

$$d\nu|_{r_h} = 0.$$

Используя это в выражении (61) на горизонте, получаем в итоге тот же результат (66). Следовательно, если радиус горизонта не меняется при аккреции материи, то должно быть $w = -1$.

При $\delta = 0$ радиус горизонта не меняется, а при малых δ он меняется слабо. Если рассматривать уравнение (61) при $r = r_h$, то можно записать

$$d\nu\big|_{r_h} = \dot{\nu}\,dt + \nu'\,dR. \qquad (67)$$

Решая совместно уравнения (11) и (67), получаем

$$\nu'\dot{r} = \dot{\nu} r' - r' \left.\frac{d\nu}{dt}\right|_{r=r_h=\mathrm{const}} \qquad (68)$$

— аналог уравнения (62). Из уравнений (68) и (23) получаем

$$\frac{2\dot{r'}}{/r'} = \dot{\lambda} + \dot{\nu} - \left.\frac{d\nu}{dt}\right|_{r=r_h=\mathrm{const}}. \qquad (69)$$

Интегрирование этого уравнения с начальными условиями дает

$$r' = \sqrt{\exp(\lambda - \lambda_0 + \nu - \nu_0)\exp\left(\nu_{[1]} - \nu_{[2]}\right)}. \qquad (70)$$

Здесь введены обозначения $[1] \equiv (r_h, 0)$, $[2] \equiv \equiv (R_h, t_h)$, причем $r_{[1]} = r_{[2]} = r_h$. Аналогично находим выражение для изменения радиуса горизонта:

$$\begin{gathered} \dot{r}_h = 8\pi\varepsilon_0 R_h^2 \dot{R}_h [1 + w\Psi], \\ \Psi \equiv \sqrt{\exp\left(\nu_{[1]} - \nu_{[2]}\right)} = \left(\frac{\varepsilon_{[1]}}{\varepsilon_{[2]}}\right)^{w/\delta}. \end{gathered} \qquad (71)$$

Это точные выражения, они не зависят от δ. Таким образом, направление смещения горизонта определяется начальными условиями распределения материи. Условие уменьшения радиуса горизонта имеет вид

$$w\Psi < -1.$$

При распределении материи, зависящем явно только от r, получается $\Psi = 1$. Тогда из выражений (13), (43), (49) и (71) получаем

$$\dot{r}_h \approx -3\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\right)\Lambda r_h^2(1+\alpha-S)^{3/2} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad T_{r_1\to r_h} \approx \frac{\sqrt{\alpha}(r_1-r_h)}{3|\delta|\Lambda r_1 r_h(1+\alpha-S)^{3/2}}. \qquad (72)$$

Отсюда видно, что в общем случае эффект «растворения» черной дыры при малых δ достаточно мал.

11. ВЫВОДЫ

Основной вывод настоящей работы состоит в подтверждении гипотезы о возможном уменьшении радиуса горизонта («растворении») черной дыры.

Заметим, что на бесконечности не возникает никакого парадокса, связанного с этим эффектом. В отсутствие материи метрика на бесконечности продолжает оставаться шварцшильдовской (с Λ-членом). Соответственно, полная масса всей системы, связанная с этой метрикой, остается постоянной. Дело в том, что во время эволюции масса и энергия перераспределяются в пространстве: внешняя волна фантомной материи уносит массу и энергию, соответствующие первоначальной черной дыре (которая «растворяется» под действием внутренней волны фантомной материи). Если же окончательного «растворения» черной дыры не произошло, то полная энергия системы складывается из массы измененной черной дыры и энергии внешней волны фантомной материи.

Автор выражает глубокую благодарность за обсуждение различных вопросов при подготовке статьи И. Д. Новикову и Н. С. Кардашеву.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 04-02-16987-а и 04-02-17257-а) и программы поддержки научных школ (грант № НШ-1653.2003.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Visser, *Lorential Wormholes: from Einstein to Hawking*, Springer AIP (1996).

2. А. А. Шацкий, Астрон. ж. **84**, 99 (2007).

3. V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*, Kluver AP (1998).

4. А. А. Шацкий, Астрон. ж. **81**, 579 (2004).

5. E. Babichev, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, E-print archives gr-qc/0507119.

6. A. R. Khabibullin, N. R. Khusnutdinov, and S. V. Sushkov, E-print archives hep-th/0510232.

7. Н. С. Кардашев, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, Астрон. ж. **83**, 675 (2006).

8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

9. M. Wyman, Phys. Rev. **75**, 1930 (1949).

10. А. А. Шацкий, А. Ю. Андреев, ЖЭТФ **116**, 353 (1999).