ЖЭТФ, 2007, том 131, вып. 5, стр. 922–931

ОСОБЕННОСТИ ДВУХФОТОННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НУТАЦИИ В СИСТЕМЕ БИЭКСИТОНОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

П. И. Хаджи[*], *В. В. Васильев*

Приднестровский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
MD 3300, Тирасполь, Молдова

Институт прикладной физики Академии наук Республики Молдова
MD 2028, Кишинев, Молдова

Поступила в редакцию 28 августа 2006 г.

Изучены особенности явления двухфотонной нутации в системе когерентных биэкситонов в полупроводниках типа CuCl. Показано, что в зависимости от параметров системы нутация представляет собой процесс периодического превращения пар фотонов в биэкситоны и обратно. Предсказана возможность фазового контроля процесса оптической нутации.

PACS: 42.65.-k

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптическая нутация относится к явлениям когерентного взаимодействия поля с веществом и представляет собой периодическое изменение начального состояния системы под влиянием поля внешней электромагнитной волны, которое приводит к соответствующей модуляции излучения среды [1, 2]. При теоретическом описании явления нутации обычно используется полуклассическое приближение, в котором среда описывается квантовомеханически, а поле — классически с помощью уравнений Максвелла. В работе [3] представлена теория оптической нутации в системе из двухуровневых атомов, взаимодействующих с конечным числом фотонов в резонаторе. Теория оптической нутации в экситонной области спектра развита в работах [4–9]. Показано, что частота нутации существенно зависит от уровня возбуждения кристалла. Исследовано явление нутации в системе когерентных экситонов, фотонов и биэкситонов в области M-полосы люминесценции полупроводников [7–10]. Изучена двухфотонная нутация в системе когерентных биэкситонов [8–12] и показано, что оптическая нутация как периодическое превращение фотонов в биэкситоны и обратно имеет место только при отличной от нуля расстройке резонанса либо при учете упругих межчастичных взаимодействий.

Процесс двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла характеризуется гигантской силой осциллятора по отношению к экситонному переходу [13]. В связи с этим метод двухфотонного возбуждения биэкситонов получил широкое распространение при экспериментальном исследовании оптических свойств полупроводников. Нелинейность, обусловленная двухфотонной генерацией биэкситонов, хорошо проявляется в различных нелинейно-оптических явлениях, таких как оптическая бистабильность и мультистабильность [14, 15], явление самоотражения лазерного излучения [16], нелинейное пропускание тонкой пленки [17], распространение лазерного излучения в нелинейных направленных ответвителях [18], а также в экспериментальных [19] и теоретических [20] исследованиях оптических свойств при больших уровнях возбуждения и др. Отметим, что в работах [8–12] не рассматривались фазовые аспекты явления оптической нутации. Поэтому возникает вопрос о возможности проявления двухфотонной нутации биэкситонов при учете начальной разности фаз между амплитудами материального и электромагнитного полей. Этот вопрос до сих пор не ставился, и его решение неизвестно. Возможность осуществления фазового контроля нелинейно-оптических явлений обусловила необхо-

[*] E-mail: tdsu4@idknet.com

димость более глубокого рассмотрения динамики явления двухфотонной нутации биэкситонов с учетом фазовых соотношений.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ДВУХФОТОННОЙ НУТАЦИИ

Рассмотрим явление оптической нутации в системе когерентных фотонов и биэкситонов в полупроводниках типа CuCl в условиях двухфотонного взаимодействия света с биэкситонами под действием ультракоротких импульсов лазерного излучения. Предполагается, что длительность τ_p импульсов намного меньше времени τ_{rel} релаксации биэкситонов, $\tau_p \ll \tau_{rel}$. В этом случае процессами релаксации биэкситонов можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за время действия импульса. По этой причине в дальнейшем учитываются только процессы вынужденного излучения и поглощения света с участием биэкситонов. Предполагая спектральную ширину ΔE импульсов намного меньшей энергии связи I_m биэкситонов (которая в кристаллах CuCl составляет величину порядка 30–40 мэВ [13, 21–24]), можно пренебречь другими процессами, такими, например, как оптическая экситон-биэкситонная конверсия и экситон-фотонное взаимодействие. Указанные процессы характеризуются огромной расстройкой резонанса с фотонами, обеспечивающими двухфотонную генерацию биэкситонов. Считаем также, что до поступления импульсов в кристалл в нем отсутствовали экситоны и биэкситоны.

Рассматриваемое нами явление оптической нутации состоит в попарном превращении одинаковых фотонов в биэкситоны и излучательной рекомбинации биэкситонов с образованием пар фотонов (рис. 1). Гамильтониан, описывающий процессы двухфотонной генерации и излучательной рекомбинации биэкситонов, имеет вид [8, 9, 13, 14]

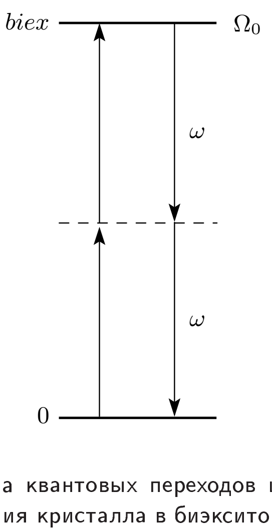

Рис. 1. Схема квантовых переходов из основного состояния кристалла в биэкситонное

$$H_{int} = \hbar\mu\left(\hat{b}^\dagger\hat{c}\hat{c} + \hat{c}^\dagger\hat{c}^\dagger\hat{b}\right), \tag{1}$$

где $\hat{b}$ ($\hat{b}^\dagger$) и $\hat{c}$ ($\hat{c}^\dagger$) — операторы уничтожения (рождения) соответственно биэкситона и фотона, μ — константа двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла [13]. Определим ее из следующих соображений. При низких уровнях возбуждения вероятность двухфотонной генерации биэкситонов мала. Однако с ростом уровня возбуждения вероятность этого процесса увеличивается. В работе [13] показано, что для кристаллов типа CuCl и CdS вероятность процесса двухфотонного возбуждения биэкситонов сравнивается с вероятностью однофотонного возбуждения экситонов из основного состояния кристалла при плотности фотонов $f_c = 10^{15}$ см$^{-3}$. Поэтому, следуя работе [13], можно записать, что $\mu\sqrt{f_c} = \varphi$, где φ — константа экситон-фотонного взаимодействия. Характерное поле E_c можно определить из выражения $E_c^2/8\pi = \hbar\omega f_c$. Далее полагаем $\mu = \varphi/\sqrt{f_c}$.

Условием применимости гамильтониана (1) является неравенство $\Delta E \ll I_m$, которое упоминалось выше. Это неравенство легко обеспечивается в кристалле CuCl [13, 21–24]. Об этом свидетельствуют эксперименты по наблюдению процесса двухфотонной генерации биэкситонов из основного состояния кристалла. Поскольку такие процессы характеризуются гигантской силой осциллятора [13, 21–24], они имеют место даже при умеренных уровнях возбуждения, т. е. при умеренных плотностях биэкситонов.

Используем приближение среднего поля, в котором среднее значение операторов отлично от нуля: $\langle\hat{b}\rangle = b \neq 0$, $\langle\hat{c}\rangle = c \neq 0$. Величины b и c здесь считаются комплексными амплитудами материального и электромагнитного полей. Усредняя гейзенберговские уравнения движения для операторов $\hat{b}$ и $\hat{c}$ ($i\hbar\dot{\hat{b}} = [\hat{b}, \hat{H}]$ и т. д.), в этом приближении получаем уравнения движения для соответствующих амплитуд b и c. Можно считать, что все фотоны являются когерентными. Они имеют одну и ту же частоту, волновой вектор и поляризацию, причем эти характеристики не меняются за время действия импульса. Образующиеся биэкситоны тоже являются когерентными. Тогда в условиях полной когерентности системы можно факторизовать среднее значение от произведения нескольких операторов в виде произведения средних значений каждого из операторов. Получающаяся таким образом система нелинейных дифференциальных уравнений с использованием гамильтониана (1), описывающая временную эволюцию амплитуд материального и электромагнитного полей, имеет вид

$$i\dot{b} = \Omega_0 b + \mu cc, \tag{2}$$

$$i\dot{c} = \omega c + 2\mu c^* b, \tag{3}$$

где Ω_0 — собственная частота биэкситона, ω — частота фотона. Поскольку состояния фотонов и биэкситонов являются когерентными и макрозаполненными, величины b и c можно считать функциями времени и представить их в виде произведения амплитуд и фазовых множителей.

Полученную систему уравнений (2), (3) дополним начальными условиями, которые запишем в виде

$$b|_{t=0} = b_0 \exp(i\varphi_0), \quad c|_{t=0} = c_0 \exp(i\psi_0), \tag{4}$$

где каждая из переменных характеризуется своей начальной амплитудой и фазой. Из уравнений (2), (3) видно, что явление двухфотонной нутации биэкситонов представляет собой существенно нелинейный процесс.

Уравнения (2), (3) для комплексных амплитуд b и c допускают стационарные решения, из которых легко получить закон дисперсии поляритонного типа в области частоты биэкситонного перехода:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\Omega_0 + 2\omega \pm \sqrt{(\Omega_0 - 2\omega)^2 + 16\mu^2 f}\right), \tag{5}$$

где Ω — частота поляритона, $f = |c|^2$ — стационарная плотность фотонов. Видно, что форма и положение поляритонных ветвей зависят от уровня возбуждения кристалла. Величина расщепления между поляритонными ветвями при $\Omega_0 = 2\omega$ равна $\Delta\Omega = 4\mu\sqrt{f}$. Расщепление тем больше, чем больше стационарная плотность f фотонов.

Введем далее в рассмотрение плотности частиц $N = |b|^2$, $f = |c|^2$ и две компоненты «поляризации», $Q = i(b^* cc - c^* c^* b)$ и $R = b^* cc + c^* c^* b$. Используя уравнения (2) и (3), легко получить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{N} = -\mu Q, \quad \dot{f} = 2\mu Q, \tag{6}$$

$$\dot{Q} = \Delta R + 2\mu f(4N - f), \tag{7}$$

$$\dot{R} = -Q\Delta, \tag{8}$$

где $\Delta = 2\omega - \Omega_0$ — расстройка резонанса. Используя условия (4), можно записать начальные условия для плотности частиц и компонент «поляризации»:

$$\begin{aligned} &N|_{t=0} \equiv N_0 = |b_0|^2, \quad f|_{t=0} \equiv f_0 = |c_0|^2, \\ &Q|_{t=0} \equiv Q_0 = 2f_0\sqrt{N_0}\sin\theta_0, \\ &R|_{t=0} \equiv R_0 = 2f_0\sqrt{N_0}\cos\theta_0, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\theta_0 = \varphi_0 - 2\psi_0$ — начальная разность фаз.

Решая систему (6)–(8) с использованием условий (9), получаем интеграл движения для плотности частиц и выражение для Q:

$$2N + f = 2N_0 + f_0, \tag{10}$$

$$Q^2 = -\left[\frac{\Delta}{\mu}(N_0 - N) - 2f_0\sqrt{N_0}\cos\theta_0\right]^2 + \\ + 4N(2N_0 + f_0 - 2N)^2. \tag{11}$$

Выражение (10) представляет собой закон сохранения числа частиц в системе. Используя далее уравнение для $\dot{N}$ из (6) и выражение (11) для Q, можно получить решение для функции $N(t)$. Далее будем интересоваться временной эволюцией плотности биэкситонов при различных значениях начальных плотностей N_0 и f_0 частиц и начальной разности фаз θ_0. Временную эволюцию плотности фотонов, $f(t)$, легко найти, используя уравнение (10).

3. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из уравнений (6) и (11) следует, что если в начальный момент $f_0 = 0$, а $N_0 \neq 0$, то система не эволюционирует, она покоится. Плотность биэкситонов $N = N_0 = \mathrm{const}$ не изменяется во времени. Следовательно, в отсутствие фотонов в начальный момент времени невозможен процесс двухфотонного распада биэкситонов. Это обусловлено тем, что при получении систем уравнений (2), (3) и затем (6)–(8) мы учитывали только индуцированные переходы, а спонтанными пренебрегали. Поэтому если в начальный момент времени отсутствуют фотоны, то отсутствуют и вынужденные процессы излучения. По этой причине плотность биэкситонов не меняется.

Напротив, если $N_0 = 0$, а $f_0 \neq 0$, то система эволюционирует во времени и решение уравнения (6) для плотности биэкситонов имеет вид

$$N = N_- \operatorname{sn}^2\left(2\mu\sqrt{N_+}\,t\right), \tag{12}$$

где $\operatorname{sn} x$ — эллиптическая функция Якоби [25] с модулем k. Здесь

$$N_{\pm} = \frac{1}{2}\left(f_0 + s^2 \pm \sqrt{s^2(2f_0+s^2)}\right),$$
$$k^2 = \frac{N_-}{N_+}, \quad s = \frac{\Delta}{4\mu}. \tag{13}$$

Из выражения (12) следует, что плотность биэкситонов осциллирует во времени, изменяясь от нуля до $N = N_-$ с периодом

$$T = \frac{K(k)}{\mu\sqrt{N_+}}, \tag{14}$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k [25].

Из соотношений (13) видно, что $N_- = f_0^2/4s^2$ при $s^2 \gg f_0$ и кривая $N_-(s)$ имеет форму, подобную кривой Лоренца. Это значит, что максимальная плотность монотонно убывает с ростом $|\Delta|$, т. е. не все исходные фотоны превращаются в биэкситоны. Это обусловлено различной степенью деформации поляритонных ветвей при $\Delta \neq 0$, т. е. различными вкладами фотонной и биэкситонной компонент в формирование поляритонных ветвей закона дисперсии.

Из выражения (14) следует, что при больших расстройках резонанса ($s^2 \gg f_0$), т. е. в пределе малой плотности фотонов в начальный момент времени, период колебаний T убывает с ростом s:

$$T = \frac{\pi}{2\mu|s|}.$$

Наоборот, при большой плотности фотонов ($f_0 \gg s^2$) период колебаний монотонно растет с ростом f_0 (либо с уменьшением s),

$$T = \frac{\ln\left(4\sqrt{2f_0}\,|s|\right)}{\mu\sqrt{2f_0}},$$

и обращается в бесконечность при $|s| \to 0$. При нулевой расстройке резонанса ($\Delta = 0$) решение (12) принимает вид

$$N = \frac{f_0}{2}\,\mathrm{th}^2\left(\mu\sqrt{2f_0}\,t\right). \tag{15}$$

Отсюда следует, что при $\Delta = 0$ временная эволюция плотности биэкситонов является апериодической: плотность биэкситонов монотонно растет со временем, пока все фотоны попарно не превратятся в биэкситоны, чем процесс эволюции и завершается.

Изучим более детально явление двухфотонной нутации биэкситонов для случая точного резонанса, $\Delta = 0$. Используя выражения (6) и (11), основное уравнение эволюции биэкситонов можно представить в виде

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)^2 + W(N) = E_0, \tag{16}$$

где

$$W = -16N(N - N_0 - f_0/2)^2,$$
$$E_0 = -4f_0^2 N_0 \cos^2\theta_0. \tag{17}$$

Выражение (16) можно рассматривать как уравнение колебаний нелинейного осциллятора, где $(dN/dt)^2$, $W(N)$ и E_0 играют роль соответственно кинетической, потенциальной и полной энергии. Качественно поведение функции $N(t)$ можно установить, изучая зависимость потенциальной энергии нелинейного осциллятора от N при различных соотношениях между параметрами. При нулевой полной энергии ($E_0 = 0$) изменение функции $N(t)$ возможно в той области значений N, где $W(N) \le 0$. Максимальное и минимальное значения функции $N(t)$, между которыми она изменяется, определяются из решения уравнения $W(N) = 0$. Из системы уравнений (6)–(9) можно установить начальное условие для скорости изменения функции $N(t)$. Видно, что знак производной dN/dt при $t = 0$ определяется только знаком функции $\sin\theta_0$. При начальной разности фаз $\pi(2k+1) \le \theta_0 \le 2\pi(k+1)$ получаем $dN/dt|_{t=0} > 0$, а при $2\pi k \le \theta_0 \le \pi(2k+1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем $dN/dt|_{t=0} < 0$.

Обсудим особенности временной эволюции плотности биэкситонов сначала для начальной разности фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Из выражения (17) следует, что в этом случае полная энергия $E_0 = 0$. Уравнение $W(N) = E_0 = 0$ имеет три корня: $N_1 = 0$, $N_2 = N_3 = N_0 + f_0/2$. Поэтому решение уравнения для $N(t)$ имеет вид

$$N = \left(N_0 + \frac{f_0}{2}\right) \times$$
$$\times \left[\frac{\sqrt{N_0} \pm \sqrt{N_0 + f_0/2}\,\mathrm{th}\left(2\mu\sqrt{N_0+f_0/2}\,t\right)}{\sqrt{N_0+f_0/2} \pm \sqrt{N_0}\,\mathrm{th}\left(2\mu\sqrt{N_0+f_0/2}\,t\right)}\right]^2, \tag{18}$$

где знаки «+» и «−» соответствуют начальным условиям $\dot N|_{t=0} > 0$ и $\dot N|_{t=0} < 0$. На рис. 2 представлена временная эволюция решений (18) со знаками «+» и «−» (соответствующих противоположным по знаку начальным разностям фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$) для плотности биэкситонов $N(t)$ в зависимости от отношения f_0/N_0.

Из решения (18) и рис. 2 следует, что в пределе больших времен ($2\mu\sqrt{N_0 + f_0/2}\,t \gg 1$) плотность биэкситонов асимптотически стремится к значению $N_0 + f_0/2$, т. е. с течением времени все фотоны превращаются в биэкситоны. Время нормировано на величину $\tau_0 = \left(2\mu\sqrt{N_0}\right)^{-1}$. Решения со знаками «+»

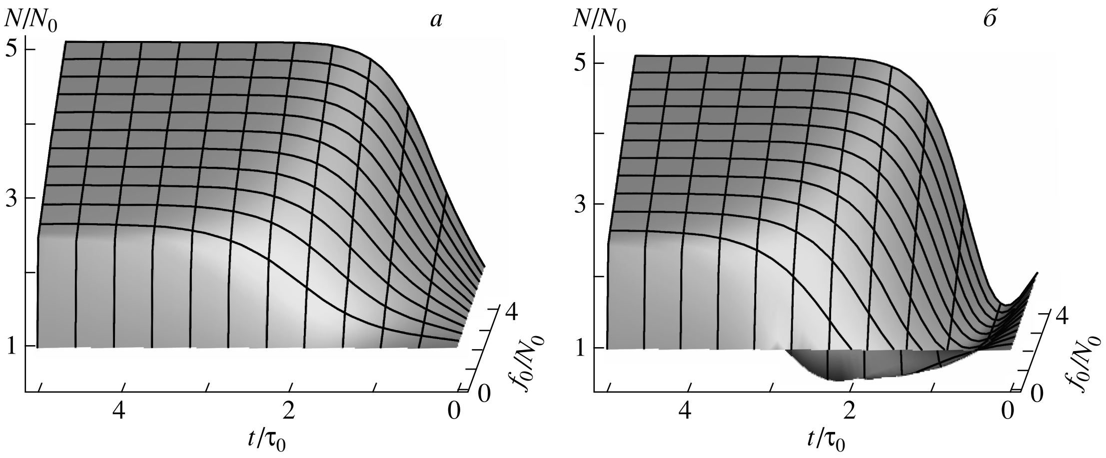

Рис. 2. Временная эволюция нормированной плотности N/N_0 биэкситонов при начальной разности фаз $\theta_0 = -(2k+1)\pi/2$ (*а*) и $\theta_0 = (2k+1)\pi/2$ (*б*), т.е. решения со знаками «+» и «−», для различных значений параметра f_0/N_0 ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

и «−» по-разному ведут себя только на начальном этапе эволюции. В области плато функция N/N_0 для данного момента времени линейно растет с ростом параметра f_0/N_0. Решение со знаком «+», справедливое при $\theta_0 = -(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, со временем монотонно растет от значения N_0 до значения $N_0 + f_0/2$ (рис. 2*а*). Скорость роста на начальном этапе тем больше, чем больше значение параметра f_0/N_0. Решение со знаком «−», справедливое при $\theta_0 = +(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, на начальном этапе сначала убывает со скоростью тем большей, чем больше параметр f_0/N_0, в момент времени $t = t_0$,

$$t_0 = \frac{\operatorname{arth}\sqrt{N_0/(N_0+f_0/2)}}{2\mu\sqrt{N_0+f_0/2}}, \tag{19}$$

обращается в нуль, затем монотонно растет и также стремится к значению $N_0 + f_0/2$ (рис. 2*б*). Таким образом, оба решения асимптотически стремятся к одному и тому же значению плотности биэкситонов $N = N_0 + f_0/2$. Это означает, что имеющиеся в системе фотоны полностью превращаются в биэкситоны, чем процесс эволюции и завершается. Система в обратном направлении (с распадом биэкситонов) не эволюционирует. Поэтому можно утверждать, что при $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, процесс превращения всех фотонов в биэкситоны является апериодическим, хотя решение со знаком «−» на начальном этапе описывает процесс распада всех биэкситонов с последующим их восстановлением и генерацией дополнительного количества биэкситонов за счет имеющихся в системе фотонов. Отметим, что время t_0, в течение которого решение со знаком «−» обращается в нуль, тем больше, чем больше N_0. При $N_0 = 0$ получаем $t_0 = 0$, при этом решения (18) со знаками «+» и «−» совпадают и приводят к решению (15).

Обсудим теперь динамику взаимодействия биэкситонов со светом для начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, когда полная энергия E_0 отлична от нуля и равна $E_0 = -4f_0^2 N_0$. Уравнение $W(N) = E_0$ в этом случае имеет три действительных положительных корня, один из которых совпадает с начальной плотностью N_0 биэкситонов, а два других определяются формулами

$$N_\pm = \frac{1}{2}\left[N_0 + f_0 \pm \sqrt{N_0(N_0+2f_0)}\right]. \tag{20}$$

Здесь N_+ является наибольшим корнем, а соотношение между N_- и N_0 определяется значениями N_0 и f_0. Оказывается, что $N_0 < N_-$ при $N_0 < f_0/4$, $N_0 > N_-$ при $N_0 > f_0/4$ и, наконец, N_0 и N_- совпадают при $N_0 = f_0/4$. В соответствии с этим имеют место три различных решения для функции $N(t)$.

При $N_0 < f_0/4$ получаем

$$N = N_0 + (N_- - N_0)\,\mathrm{sn}^2\left(2\mu\sqrt{N_+ - N_0}\,t\right). \tag{21}$$

Модуль k эллиптической функции Якоби и период T колебаний плотности биэкситонов определяются выражениями

$$k^2 = \frac{N_- - N_0}{N_+ - N_0}, \quad T = \frac{K(k)}{\mu\sqrt{N_+ - N_0}}. \tag{22}$$

Функция $N(t)$ изменяется периодически в пределах от N_0 до N_-.

При $N_0 > f_0/4$ находим, что

$$N = N_+ + \frac{N_0 - N_+}{\mathrm{dn}^2\left(2\mu\sqrt{N_+ - N_-}\,t\right)}\,. \qquad (23)$$

Модуль k эллиптической функции и период T соответственно равны

$$k^2 = \frac{N_0 - N_-}{N_+ - N_-}, \quad T = \frac{K(k)}{\mu\sqrt{N_+ - N_-}}\,. \qquad (24)$$

Функция $N(t)$ осциллирует в пределах от N_- до N_0.

Наконец, при $N_0 = f_0/4$ находим

$$N = N_0. \qquad (25)$$

Период «колебаний» при этом равен

$$T_0 = \frac{\pi}{\mu\sqrt{3f_0}}\,. \qquad (26)$$

Из равенства (25) следует, что при $N_0 = f_0/4$ система находится в покое, так как процесс превращения фотонов в биэкситоны и процесс излучательной рекомбинации биэкситонов сбалансированы. При $N_0 = f_0/4$ полная энергия осциллятора совпадает с минимумом потенциальной энергии $E_0 = W_{min} = -f_0^3$. В начальный момент времени осциллятор находится на дне потенциальной ямы и его начальная скорость равна нулю, в этом случае колебания отсутствуют. В самом деле, если в уравнениях (6)–(11) положить $N = N_0 + x$, где $|x| < N_0$, то при $f_0 = 4N_0$ линеаризованная версия основного уравнения дает уравнение

$$\dot{x}^2 + 48\mu^2 N_0 x = 0,$$

решение которого при начальных условиях $x|_{t=0} = \dot{x}|_{t=0} = 0$ имеет вид $x = 0$, т. е. $N = N_0$. Частота «колебаний» при этом равна $\omega_0^2 = 48\mu^2 N_0$, что совпадает с (26).

Амплитуда A колебаний плотности биэкситонов при $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ определяется выражением

$$A = \frac{1}{2}\left|N_0 - f_0 + \sqrt{N_0(N_0 + 2f_0)}\right|. \qquad (27)$$

На рис. 3 представлена временная эволюция нормированной плотности N/N_0 биэкситонов при различных значениях параметра f_0/N_0 для начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и при расстройке $\Delta = 0$. Видно, что плотность биэкситонов периодически изменяется со временем. Сразу же после начального момента времени плотность биэкситонов убывает (возрастает) при $f_0/N_0 < 4$

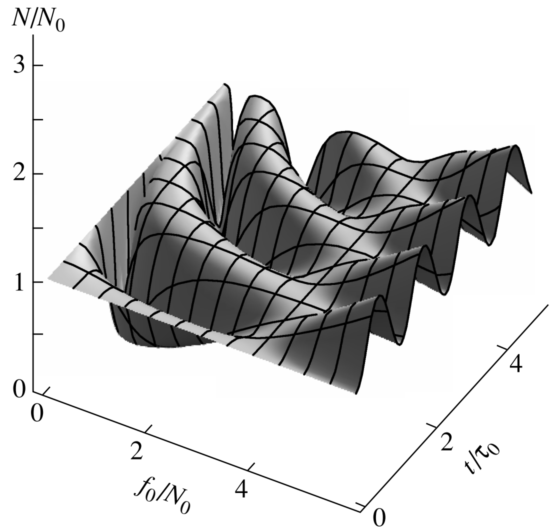

Рис. 3. Временная эволюция нормированной плотности N/N_0 биэкситонов при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ в зависимости от параметра f_0/N_0

($f_0/N_0 > 4$). При $f_0/N_0 = 4$ колебания отсутствуют, плотность биэкситонов $N/N_0 = 1$. Поверхность, являющаяся огибающей всех максимумов функции $N(t)/N_0$ при $f_0/N_0 < 4$ и всех минимумов при $f_0/N_0 > 4$, является плоскостью с координатой $N/N_0 = 1$. Значения функции $N(t)/N_0$ и ее минимумов в области $f_0/N_0 < 4$ располагаются ниже единицы, т. е. ниже огибающей плоскости. Соответственно значения функции $N(t)/N_0$ и ее максимумы в области $f_0/N_0 > 4$ располагаются выше единицы. При $f_0/N_0 = 4$ все максимумы преобразуются в минимумы и наоборот. Профили минимумов в области $f_0/N_0 < 4$ являются довольно узкими и острыми по сравнению с более сглаженными профилями максимумов. В области $f_0/N_0 > 4$ профили минимумов и максимумов практически одинаковы. Из рис. 3 видно также, что с ростом отношения f_0/N_0 амплитуда колебаний функции $N(t)/N_0$ сначала монотонно убывает, обращается в нуль при $f_0/N_0 = 4$ и затем снова растет.

Что касается периода колебаний T, то он монотонно убывает с ростом отношения f_0/N_0 от бесконечно большого значения при $f_0/N_0 \ll 1$ до нуля при $f_0/N_0 \gg 1$ (рис. 4). Из полученных решений следует, что процесс двухфотонной нутации биэкситонов при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ является периодическим во времени.

При произвольных значениях начальной разности фаз θ_0 динамика процесса существенно опреде-

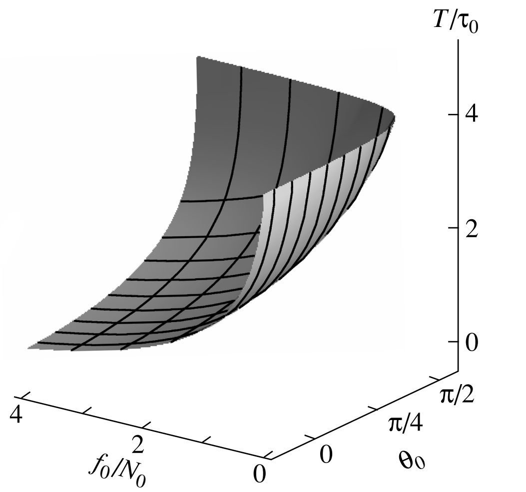

Рис. 4. Зависимость периода T/T_0 колебаний плотности биэкситонов от начальной разности фаз θ_0 и величины параметра f_0/N_0

ляется величиной θ_0. Полная энергия нелинейного осциллятора в этом случае зависит от θ_0 и равна $E_0 = -4f_0^2 N_0 \cos^2\theta_0$. Критические значения плотности биэкситонов определяются из решения кубического уравнения

$$N^3 - (2N_0 + f_0)N^2 + \\ + \frac{(2N_0+f_0)^2}{4}N - \frac{N_0 f_0^2 \cos^2\theta_0}{4} = 0, \quad (28)$$

которое следует из условия $W(N) = E_0$. Исследование этого уравнения показывает, что во всей области изменения параметров N_0, f_0 и θ_0 оно имеет три действительных положительных корня, два из которых, N_{min} и N_{max}, определяют амплитуду A колебаний плотности биэкситонов. Третий корень, $N = N_1$, является наибольшим: $N_1 > N_{max} > N_0 > N_{min}$. С ростом θ_0 от нуля до $\pi/2$ уровень полной энергии E_0 постепенно смещается вверх, приближаясь к нулю при $\theta_0 = \pm\pi/2$. Это приводит к изменению координат точек пересечения прямой E_0 с кубической параболой $W(N)$. С ростом θ_0 корень N_{max} монотонно растет, а корни N_{min} и N_1 монотонно убывают, причем $N_{min} = 0$, а $N_1 = N_{max} = N_0 + f_0$ при $\theta_0 = \pm\pi/2$. Если $N_0 = f_0/4$, то при $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ корни N_{min} и N_{max} совпадают и равны N_0, а $N_1 = 4N_0$, тогда как при $\theta_0 = \pm\pi/2$ корни N_{max} и N_1 совпадают и равны $3N_0$, а $N_{min} = 0$. Отметим, что при $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ корни N_{max} и N_{min} соответственно равны N_0 и N_-, а $N_1 = N_+$, где величины $N_\pm$ определяются формулой (20). В общем случае для трех указанных корней имеют место выражения

$$N_{max} = \frac{1}{3}(2N_0+f_0)\left(1 - \cos\frac{\alpha - 2\pi}{3}\right),$$
$$N_{min} = \frac{1}{3}(2N_0+f_0)\left(1 - \cos\frac{\alpha + 2\pi}{3}\right), \quad (29)$$
$$N_1 = \frac{1}{3}(2N_0+f_0)\left(1 + \cos\frac{\alpha}{3}\right),$$

где

$$\cos\alpha = -1 + \frac{27 f_0^2 N_0 \cos^2\theta_0}{(2N_0+f_0)^3}.$$

Решение уравнения для $N(t)$ в этом случае принимает вид

$$N = N_{min} + (N_{max} - N_{min}) \times \\ \times \operatorname{sn}^2\left(2\mu\sqrt{N_1 - N_{min}}\,t \pm F(\varphi_0, k)\right), \quad (30)$$

где

$$\varphi_0 = \arcsin\frac{N_0 - N_{min}}{N_{max} - N_{min}}, \quad k^2 = \frac{N_{max} - N_{min}}{N_1 - N_{min}}, \quad (31)$$

а $F(\varphi_0, k)$ — неполный эллиптический интеграл первого рода [25].

Амплитуда A и период T колебаний выражаются формулами

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}(2N_0+f_0)\sin\frac{\alpha}{3}, \quad T = \frac{K(k)}{\mu\sqrt{N_1 - N_{min}}}. \quad (32)$$

Решения со знаками «+» и «−» соответствуют начальным условиям $\dot{N}|_{t=0} > 0$ и $\dot{N}|_{t=0} < 0$.

Из полученного решения (30) видно, что процесс двухфотонной нутации биэкситонов является периодическим. Амплитуда и период колебаний существенно зависят от начальной разности фаз θ_0 и от начальных плотностей N_0 и f_0 частиц. Полагая N_0 и f_0 фиксированными, можно управлять динамикой процесса нутации, изменяя только лишь начальную разность фаз θ_0. На рис. 5 представлена временная эволюция плотности биэкситонов в зависимости от начальной разности фаз θ_0 как от параметра при фиксированном значении отношения f_0/N_0. Видно, что с ростом θ_0 от нуля до $\pi/2$ амплитуда и период колебаний плотности биэкситонов монотонно растут. Отметим, что даже исчезающе малое изменение θ_0 относительно $\pi/2$ приводит к резкой смене апериодического режима эволюции на периодический. Если в (32) положить $\theta_0 = \pi/2 - \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$, то период колебаний T можно представить приближенной формулой

$$T = \frac{1}{2\mu\sqrt{N_0 + f_0/2}} \ln\frac{16(f_0+N_0)^{3/2}}{\sqrt{N_0}\, f_0 \varepsilon}, \quad (33)$$

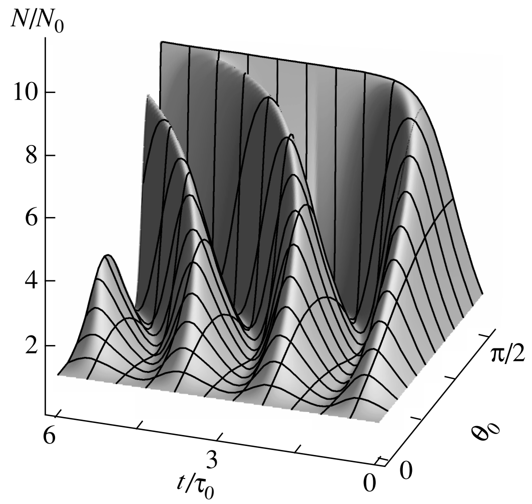

Рис. 5. Временная эволюция нормированной плотности N/N_0 биэкситонов в зависимости от начальной разности фаз θ_0 при $\Delta = 0$ и $f_0/N_0 = 4$

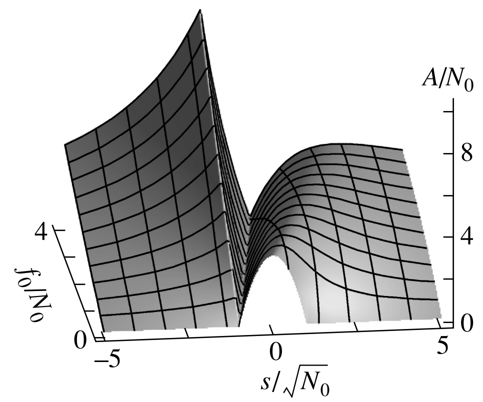

Рис. 6. Зависимость амплитуды колебаний плотности $\Delta N/N_0$ биэкситонов от нормированной расстройки резонанса $s/\sqrt{N_0}$ и параметра f_0/N_0 при $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

тогда как амплитуда колебаний слабо убывает с ростом ε (при $\varepsilon \ll 1$) и равна

$$\frac{A}{N_0} = 1 + \frac{f_0}{2N_0}\,.$$

Четвертым независимым управляющим параметром теории (кроме N_0, f_0, θ_0) является расстройка резонанса Δ. При $\Delta \neq 0$ решения существенно усложняются. Важным свойством изучаемого процесса является то, что при $\Delta \neq 0$ апериодические процессы отсутствуют. Амплитуда и период колебаний зависят и от расстройки резонанса Δ.

Обсудим динамику процесса двухфотонной нутации биэкситонов при $\Delta \neq 0$ для случая $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Как и при $\Delta = 0$, в этом случае также возможны три различных типа решений. Выражение (11) для Q^2 представляется в виде произведения трех биномов:

$$Q^2 = 16(N_+ - N)(N_- - N)(N - N_0),$$

где

$$\begin{gathered} N_\pm = \frac{1}{2}\left\{N_0 + f_0 + s^2 \pm \right. \\ \left. \pm\sqrt{\left(\sqrt{N_0}+s\right)^2\left[\left(\sqrt{N_0}-s\right)^2+2f_0\right]}\right\}, \\ s = \frac{\Delta}{4\mu}. \end{gathered} \qquad (34)$$

Полагая здесь $\Delta = 0$ ($s = 0$), получаем выражение (20). Легко показать, что если $N_0 < N_0^-$, то мы приходим к решениям (21), (22), если же $N_0 > N_0^-$, то решениями служат выражения (23), (24) и, наконец, если $N_0 = N_0^-$, то решение представляется в виде (25). Здесь

$$N_0^- = \frac{1}{2}\left[s^2 + \frac{f_0}{2} - \sqrt{s^2(s^2+f_0)}\right]. \qquad (35)$$

Амплитуда A колебаний определяется выражением

$$\begin{gathered} \frac{A}{N_0} = \frac{1}{2}\left|1 - \frac{f_0}{N_0} - \frac{s^2}{N_0} + \right. \\ \left. + \sqrt{\left(1+\frac{s}{\sqrt{N_0}}\right)^2\left[\left(1-\frac{s}{\sqrt{N_0}}\right)^2+\frac{2f_0}{N_0}\right]}\,\right|. \end{gathered} \qquad (36)$$

Амплитуда колебаний имеет максимумы в зависимости от s при $s = f_0/2\sqrt{N_0}$ и $s = -\sqrt{N_0}$, где соответственно $A = N_0$ и $A = f_0/2$, и обращается в нуль при $s/\sqrt{N_0} = f_0/4N_0 - 1$ (рис. 6).

В общем случае при произвольных θ_0, N_0, f_0 и Δ решение для $N(t)$ выражается формулой (30), где три характерные плотности $N_1 > N_{max} > N_{min}$ теперь являются корнями следующего кубического уравнения:

$$\begin{gathered} N^3 - N^2(2N_0 + f_0 + s^2) + \\ + N\left[(N_0 + f_0/2)^2 + 2s^2N_0 - sf_0\sqrt{N_0}\cos\theta_0\right] - \\ - s^2N_0^2 - (f_0^2N_0\cos^2\theta_0)/4 + \\ + sf_0N_0\sqrt{N_0}\cos\theta_0 = 0. \end{gathered} \qquad (37)$$

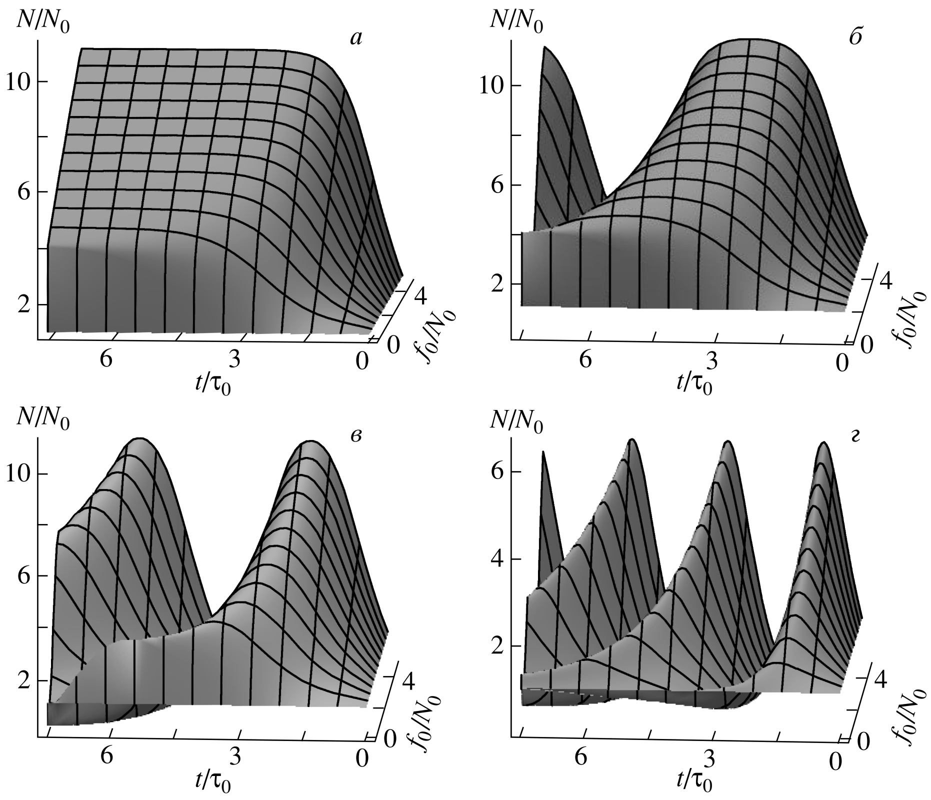

Рис. 7. Временная эволюция плотности биэкситонов N в зависимости от величины параметра f_0/N_0 для значений нормированной расстройки резонанса $s/\sqrt{N_0} = 0$ (*а*), 0.01 (*б*), 0.1 (*в*), 0.99 (*г*)

При $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$ функция $N(t)$ зависит от величины нормированной расстройки резонанса $s/\sqrt{N_0}$, но не зависит от ее знака. На рис. 7 представлена временная эволюция $N(t)$ плотности биэкситонов в зависимости от величины параметра f_0/N_0 для четырех значений нормированной расстройки резонанса $s/\sqrt{N_0}$. Видно, что с ростом параметра $s/\sqrt{N_0}$ возникает ряд новых особенностей временной эволюции системы. Если при $s = 0$ имеет место апериодический режим эволюции (рис. 7*а*), то при $s > 0$ он заменяется периодическим режимом. При этом чем больше $s/\sqrt{N_0}$, тем меньше период колебаний (рис. 7*б*–*г*). Кроме того, при $s = 0$ плотность биэкситонов для фиксированного момента времени t линейно растет с ростом параметра f_0/N_0. При $s > 0$ рост плотности биэкситонов оказывается нелинейным, причем чем больше значение величины $s/\sqrt{N_0}$, тем быстрее развиваются максимумы функции $N(t)$ с ростом f_0/N_0 (рис. 7). Видно также, что амплитуда колебаний функции $N(t)$ быстро убывает с ростом параметра $s/\sqrt{N_0}$, так как при этом растет минимум функции $N(t)$, но убывает ее максимум. Эти особенности легко понять, если обратиться к выражению (11) и учесть, что потенциальная энергия нелинейного осциллятора $W(N) = -Q^2(N) < 0$ при $s \neq 0$ находится в более узкой области значений N, чем при $s = 0$. Эта область значений быстро сужается с ростом расстройки Δ (либо $s/\sqrt{N_0}$).

Из рис. 8 можно видеть, что период колебаний плотности биэкситонов монотонно убывает с ростом параметров $s/\sqrt{N_0}$ и f_0/N_0. Если $\theta_0 \neq (2k+1)\pi/2$, то эволюция функции $N(t)$ зависит не только от величины нормированной расстройки резонанса $s/\sqrt{N_0}$, но также и от ее знака.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируем основные результаты. Из полученных выражений следует, что явление двухфотонной нутации в системе когерентных фотонов и биэкситонов представляет собой либо апериодический режим попарного превращения всех фотонов в биэкситоны при начальной разности фаз $\theta_0 = \pm(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, либо периодический режим превращения фотонов в биэкситоны и обратно при $\theta_0 \neq \pm(2k+1)\pi/2$. Предсказывается возможность

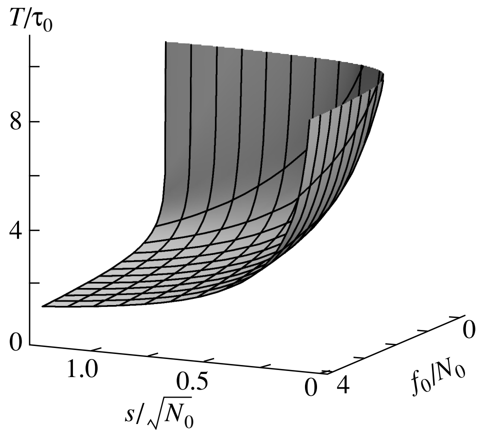

Рис. 8. Период колебаний плотности биэкситонов при $\theta_0 = \pi/2$ в зависимости от $s/\sqrt{N_0}$ и f_0/N_0

установления особого режима эволюции системы при $\theta_0 = \pm k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — покоя. При непрерывном изменении отношения f_0/N_0 плотностей частиц амплитуда колебаний непрерывно изменяется и обращается в нуль при $f_0 = 4N_0$. Частота нутации существенно определяется начальными плотностями частиц и начальной разностью фаз θ_0. Влияние начальной разности фаз θ_0 на процесс нутации свидетельствует о возможности фазового контроля этого процесса. Способы осуществления фазового контроля в системе материальных и электромагнитных волн в условиях бозе-эйнштейновской конденсации обсуждаются в работе [26].

Оценим период колебаний исходя из формулы (26) и выражения для константы μ двухфотонного возбуждения биэкситонов в виде $\mu = \varphi/\sqrt{f_0}$ [13]. Для константы экситон-фотонного взаимодействия φ берем величину $\varphi = 4 \cdot 10^{11}$ с$^{-1}$ [8]. Тогда при $f_0 \approx 10^{15}$ см$^{-3}$ в соответствии с выражением (26) получаем для периода колебаний $T_0 \approx 0.5 \cdot 10^{-11}$ с, а для частоты нутации $\Omega = 2\pi/T_0 \approx 10^{12}$ с$^{-1}$. Параметр τ_0 на рис. 2–5, 7, 8 равен $\tau_0 \approx 1.1 \cdot 10^{-12}$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нелинейная спектроскопия*, под ред. Н. Бломбергена, Мир, Москва (1979).
2. П. А. Апанасевич, *Основы теории взаимодействия света с веществом*, Наука и техника, Минск (1977).
3. А. И. Бурштейн, А. Ю. Пусеп, ЖЭТФ **69**, 1927 (1975).
4. A. S. Davydov and A. A. Sericov, Phys. Stat. Sol. (b) **56**, 351 (1973).
5. V. V. Samartsev, U. E. Sheibut, and U. S. Ivanov, Spectrosc. Lett. **9**, 57 (1976).
6. С. Н. Белкин, С. А. Москаленко, А. Х. Ротару и др., ФТТ **22**, 1961 (1980).
7. П. И. Хаджи, С. А. Москаленко, С. И. Белкин, Письма в ЖЭТФ **29**, 223 (1979).
8. С. А. Москаленко, П. И. Хаджи, А. Х. Ротару, *Солитоны и нутация в экситонной области спектра*, Штиинца, Кишинев (1980).
9. П. И. Хаджи, *Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1985).
10. П. И. Хаджи, С. А. Москаленко, С. Н. Белкин и др., ФТТ **22**, 749 (1980).
11. П. И. Хаджи, С. Н. Белкин, ФТТ **21**, 3291 (1979).
12. П. И. Хаджи, С. А. Москаленко, С. Н. Белкин, УФЖ **25**, 361 (1980).
13. E. Hanamura, Sol. St. Comm. **12**, 951 (1973); J. Phys. Soc. Jpn. **39**, 1506 (1975).
14. П. И. Хаджи, Г. Д. Шибаршина, А. Х. Ротару, *Оптическая бистабильность в системе когерентных экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1988).
15. А. Х. Ротару, В. З. Трончу, ФТТ **40**, 1999 (1998).
16. П. И. Хаджи, К. Д. Ляхомская, КЭ **29**, 43 (1999).
17. П. И. Хаджи, С. Л. Гайван, ЖЭТФ **108**, 1831 (1995); КЭ **22**, 929 (1995).
18. O. V. Korovai, O. P. Nosenko, N. N. Kordonskaya, and P. I. Khadzhi, Вестник Приднестровкого университета, сер. физ.-техн. и матем. науки, вып. 3, 21 (2005).
19. R. Shimano and M. Kuwata-Gonokami, Phys. Rev. Lett. **72**, 530 (1994).
20. П. И. Хаджи, Л. Ю. Надькин, КЭ **36**, 415 (2006).
21. П. И. Хаджи, *Кинетика рекомбинационного излучения экситонов и биэкситонов в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1977).
22. А. И. Бобрышева, *Биэкситоны в полупроводниках*, Штиинца, Кишинев (1979).
23. E. Hanamura and H. Haug, Phys. Rep. C **33**, 209 (1977).
24. M. Combescot, Phys. Rev. B **41**, 3517 (1990); Phys. Rep. **221**, 167 (1992).
25. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).
26. Л. П. Питаевский, УФН **176**, 345 (2006).