ЖЭТФ, 2007, том 132, вып. 1 (7), стр. 209–213

ДИНАМИКА СПИНОВОЙ ЖИДКОСТИ. СПИНОВЫЙ МАЯТНИК

*Р. Н. Гуржи**, *А. Н. Калиненко, А. И. Копелиович, П. В. Пышкин, А. В. Яновский*

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
61103, Харьков, Украина

Рассмотрена динамика спин-неравновесной электронной системы в условиях, когда преобладают столкновения, сохраняющие полный квазиимпульс системы электронов и взаимодействующих с ними квазичастиц. Анализ полученных гидродинамических уравнений показывает возможность возбуждения в неоднородном по своим магнитным свойствам проводящем кольце слабозатухающих колебаний спиновой поляризации, сопровождающихся колебаниями дрейфового тока по кольцу. Рассмотрены также спин-токовые волны в проводнике в баллистическом режиме и указан простой способ, позволяющий отличить в эксперименте эти волны от колебаний спина и тока в гидродинамической ситуации. Показано, что на концах разомкнутого неоднородно-спин-поляризованного проводника возникает разность потенциалов, выявляющая наличие спиновой поляризации электронной плотности. Последний спин-электрический эффект имеет место как в гидродинамическом, так и в обычном диффузионном пределах.

PACS: 72.25.Hg, 72.25.Mk, 73.40.Sx, 73.61.Ga

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные методы создания спин-поляризованных состояний электронов в немагнитных проводниках и контроля над ними уже длительное время вызывают большой интерес [1]. Были предложены устройства, лежащие в основе современной спинтроники. Как правило, внимание уделялось электронным системам в тех условиях, когда взаимодействием электронов можно пренебречь. В работах [2–4] рассмотрено влияние межэлектронного рассеяния, однако не в условиях развитой гидродинамики [5], когда электронная система проводника может рассматриваться как жидкость с присущими ей эффектами стационарного и нестационарного течения.

Между тем, ситуация развитой гидродинамики вполне реальна в наносистемах на основе полупроводников и полуметаллов (а также в электронной системе на поверхности жидкого гелия [6]). Для этого, прежде всего, необходимо, чтобы длина свободного пробега электронов определялась нормальными столкновениями [7], т. е. такими, при которых полный импульс системы взаимодействующих квазичастиц сохраняется. Таковыми являются столкновения электронов друг с другом, а также их столкновения с фононами, если фононы не выносят неравновесный импульс из системы раньше, чем возвращают его электронам. Электронные гидродинамические эффекты наблюдались в полупроводниковых гетероструктурах [8] (см. также [9]) в интервале электронных температур 1.5–20 К. В этом интервале температур электронов длина их свободного пробега относительно столкновений друг с другом l_{ee} значительно меньше длины пробега относительно столкновений с дефектами данной гетероструктуры l_i, а температура фононов в условиях эксперимента [8] была настолько мала, что столкновения с фононами не играли существенной роли. Повышение электронной температуры уменьшило бы межэлектронную длину l_{ee}, способствуя гидродинамической ситуации. Однако, поскольку фононы эффективно выносят импульс из низкоразмерной электронной системы, находящейся в хорошем акустическом контакте с окружением, значительное повышение температуры кристалла, нарушая неравенство $l_{ee} \ll l_{ep}$ (l_{ep} — длина пробега относительно столкновений с фононами), играет для таких систем отрицательную роль. Если же условиями эксперимента обеспечить сохранение суммарного импульса электронов и фононов, ослабив контакт системы с окружением, то увеличение частоты столкновений электронов с фононами, уменьшая длину пробега относительно нормальных столкновений l_N, напротив, способствует гидродинамике.

В условиях развитой гидродинамики состояние электронной системы в каждой точке $\mathbf{r}$ описывается двумя переменными: скоростью $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и плотностью $\rho(\mathbf{r})$ жидкости. В спин-поляризованной системе плотность спиновых компонент различна и пе-

*E-mail: gurzhi@ilt.kharkov.ua

ременная плотности приобретает спиновый индекс: $\rho_\sigma(\mathbf{r})$. Скорость же, напротив, одинакова в главном приближении для обеих компонент, поскольку частые столкновения между электронами с противоположным направлением спина формируют общую дрейфовую скорость электронной системы. Если размеры проводника значительно превышают радиус экранирования (который весьма мал для металлов и гетероструктур на основе полупроводников), то электронную жидкость в линейном по внешнему электрическому полю приближении следует рассматривать как несжимаемую: полная плотность электронов фиксирована, но соотношение плотностей спиновых компонент может меняться от точки к точке. Для токового канала несжимаемость и равенство скоростей компонент, очевидно, приводят к независимости полного тока I через сечение канала от координаты и вполне определенному его распределению по спиновым компонентам, таким образом, все токовые характеристики системы определяет величина I. Ниже покажем, что в неоднородном по магнитным свойствам канале, замкнутом в кольцо, величина I в отсутствие внешнего поля совершает гармонические слабозатухающие колебания, частота которых определяется параметрами неоднородности. Природу таких колебаний можно пояснить следующим образом: дрейф электронов вследствие спиновой неоднородности кольца приводит к созданию неравновесной спиновой поляризации — накоплению неравновесной плотности спиновых компонент при сохранении полной плотности электронов. Накопление продолжается до тех пор, пока дрейф не будет остановлен силой взаимодействия неравновесных электронов с полем, создающим неоднородность электронного спектра. Благодаря наличию у электронов инертной массы процесс пойдет в обратную сторону. Для описанного колебательного процесса используем название «спиновый маятник». Подчеркнем, что в рассматриваемой системе из-за кулоновского характера взаимодействия при частотах, значительно меньших плазменной, невозможны известные в обычной гидродинамике волны плотности. Поэтому колебания спинового маятника являются единственными собственными колебаниями системы. Отметим также, что в неоднородном кольце, в отличие от однородного, протекание постоянного по времени электрического тока возможно только при включении в цепь источника ЭДС даже при наличии только сохраняющих импульс столкновений: неоднородность приводит к электросопротивлению типа контактного (см., например, [3]), которое в случае нормальных столкновений связано с трением спиновых компонент друг о друга.

Любопытный спин-электрический эффект возможен в разомкнутом проводнике. Ниже будет показано, что наличие несимметричной спиновой поляризации создает на его концах разность потенциалов, что позволяет весьма просто регистрировать спиновую поляризацию. Отметим, что спин-электрический эффект в сегнетомагнитных материалах в равновесном неоднородном состоянии обсуждался в работе [10].

Все отмеченные выше эффекты возможны как в веществах, исходно являющихся магнетиками, т. е. плотность различных спиновых компонент в которых различна за счет обменного взаимодействия, так и в немагнетиках, различие между спиновыми компонентами которых обусловлено эффектом Рашба [11] либо наличием внешнего магнитного поля. Важно заметить, что сама по себе наведенная спиновая неравновесность приводит к появлению магнитных свойств у немагнетика, поэтому спиновая неравновесность приводит во втором порядке малости по ней к указанным выше статическим и динамическим спин-электрическим эффектам в немагнетике. Неоднородность магнитных свойств образца для гетероструктур может быть создана неоднородным полем затвора (как известно [12], поле затвора влияет на величину эффекта Рашба), неоднородным магнитным полем, а также неоднородным характером инжекции спиновой неравновесности.

2. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Гидродинамические уравнения для носителей тока могут быть получены из квазиклассического кинетического уравнения для функции распределения электронов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial(\varepsilon + e\varphi)}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + J(f) \qquad (1)$$

методом, аналогичным примененному в работах [13, 14]. В формуле (1) f считается функцией времени t, координаты $\mathbf{r}$, импульса $\mathbf{p}$ и спинового индекса σ. Уравнение (1) записано таким образом, что допускает зависимость энергетического спектра носителей от координат: энергия электрона в кристалле ε предполагается функцией $\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$, σ, скорость $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$; φ — возникающий вследствие неравновесности электрический потенциал, $J(f)$ — оператор столкновений. Если считать столкновения электронов с потерей импульса крайне маловероятными и предположить выполненными неравенства $l_N/L, \omega l_N/v_F \ll 1$, L — характерный размер устройства, v_F — скорость Ферми, ω — характерная частота изучаемых процессов, то уравнение (1) может быть решено путем разложения по данным малым параметрам. В низшем порядке разложения имеем уравнение $J_N(f^{(0)}) = 0$ (J_N — часть оператора столкновений, соответствующая нормальным столкновениям), решение которого в главном приближении $f^{(0)}$ имеет вид

$$f^{(0)} = n(\varepsilon_\sigma - \delta\mu_\sigma - \mathbf{u}\cdot\mathbf{p}), \quad n(z) = \left(e^{(z-\mu)/T} + 1\right)^{-1}, \tag{2}$$

т. е. квазиравновесное распределение со скоростью дрейфа $\mathbf{u}$, добавками к химическому потенциалу $\delta\mu_\sigma$, зависящими от $\mathbf{r}$ и t (вариации температуры в данной работе не рассматриваются). Применяя метод, использованный в работах [13, 14], из условий разрешимости уравнений первого и второго порядков малости получаем для величин $\delta\mu_\sigma$, $\mathbf{u}$, φ уравнения

$$\frac{\partial\delta\rho_\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_{0\sigma}\mathbf{u} = \left(\hat{D} + \hat{F}\right)\delta\rho_\sigma, \tag{3}$$

$$m\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \sum_\sigma \rho_\sigma \operatorname{grad}(\delta\mu_\sigma + e\varphi) = \left(\hat{V} + \hat{U}\right)\mathbf{u}, \tag{4}$$

$$\sum_\sigma \delta\rho_\sigma = 0. \tag{5}$$

Здесь плотность спиновой компоненты $\rho_\sigma = \rho_{0\sigma} + \delta\rho_\sigma$, $\rho_{0\sigma}$ — равновесная плотность (величина $\delta\rho_\sigma$ является функцией $\delta\mu_\sigma$, в линейном приближении $\delta\rho_\sigma = \Pi_\sigma\delta\mu_\sigma$, Π_σ — плотность состояний спиновой компоненты на поверхности Ферми),

$$m\rho = -(1/h)^r r^{-1}\sum_\sigma \int p^2\frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon}\,d^r p, \quad \rho = \sum_\sigma \rho_\sigma,$$

r — размерность задачи. Явный вид операторов диффузии $\hat{D}$, спин-флипа $\hat{F}$, вязкости $\hat{V}$ и оператора $\hat{U}$, описывающего иные механизмы релаксации импульса, для нас не существен, соответствующие члены в уравнениях (3), (4) предполагаются малыми и будут использоваться только при оценках по порядку величины. Уравнение (3) выражает сохранение числа частиц, (4) — сохранение импульса всей системы, при их получении мы предполагали энергетический спектр электронов изотропным. Уравнения (3), (4) записаны в линейном приближении по $\mathbf{u}$, содержащие же $\delta\mu_\sigma$, $\delta\rho_\sigma$ члены выписаны точно в предположении $\mathbf{u}\to 0$, данное приближение является достаточным для целей этой работы, поскольку нелинейные эффекты будут рассмотрены в отсутствие дрейфа. Уравнение (5) является отмеченным выше условием несжимаемости кулоновской жидкости.

Уравнение (4) может быть переписано в следующем виде (в пренебрежении малыми релаксационными членами $\hat{V}$ и $\hat{U}$):

$$m\rho\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{grad}P + e\rho\operatorname{grad}\varphi + \left(\frac{1}{h}\right)^r\sum_\sigma\int(\operatorname{grad}\varepsilon_\sigma)\delta n\, d^r p = 0, \tag{6}$$

$$P = \left(\frac{1}{h}\right)^r r^{-1}\sum_\sigma p v\delta n\, d^r p,$$

$$\delta n = n(\varepsilon - \delta\mu_\sigma) - n(\varepsilon), \quad \frac{\partial P}{\partial\delta\mu_\sigma} = \rho_\sigma,$$

преобразование от одного вида к другому осуществляется интегрированием по частям в пространстве импульсов. Уравнение (6) является естественным обобщением уравнения Эйлера [15] для смеси жидкостей, которые взаимодействуют с электрическим полем и полем, создающим неоднородный спектр электронов, $P(\delta\mu_\sigma)$ — неравновесная добавка к давлению электронного газа. Давление, очевидно, не создает суммарной силы, действующей на электроны в кольце,

$$\oint \operatorname{grad}P\,dx = 0,$$

dx — перемещение вдоль кольца (в случае однородного проводника сила давления может быть компенсирована электрическим полем $\operatorname{grad}\varphi$), сила же $\operatorname{grad}\varepsilon_\sigma$, действуя на неравновесные по спину электроны, способна вызывать коллективный дрейф в кольце. Рисунок демонстрирует возникновение суммарной силы, действующей на спиновую неравновесность, вызванную дрейфом электронов по кольцу с неоднородной равновесной спиновой плотностью.

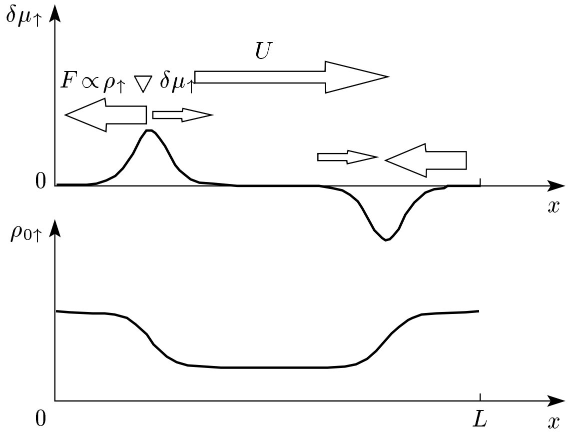
Задача о спиновом маятнике, т. е. о связанных с током I колебаниях, описываемых уравнениями (3)–(5), в линейном приближении может быть решена точно. Частота колебаний ($I = I_0 e^{i\omega t}$)

$$\omega^2 = \left(\oint\left(\frac{\rho_\uparrow}{\rho}\right)'^2\Pi^{-1}dx\right)\left(\oint\frac{m}{\rho}dx\right)^{-1}, \quad \Pi^{-1} = \sum_\sigma \Pi_\sigma^{-1}, \tag{7}$$

$$u = \frac{I}{es\rho}, \quad \delta\mu_\sigma = i\left(\frac{I}{es\omega\Pi_\sigma}\right)\left(\frac{\rho_\sigma}{\rho}\right)',$$

$$e\varphi' = -\left(\frac{i}{\omega es}\right)\left[m\rho^{-1}\omega^2 + \sum_\sigma\frac{\rho_\sigma}{\rho}\left(\Pi_\sigma^{-1}\left(\frac{\rho_\sigma}{\rho}\right)'\right)'\right]I.$$

Здесь индекс «↑» условно обозначает одну из спиновых компонент (любую), штрих означает дифференцирование по координате x, s — площадь сечения проводника, которая для простоты предполагается



На нижнем графике изображено распределение равновесной спиновой плотности вдоль кольца длиной L. При направлении дрейфа $\mathbf{u}$ вправо в местах неоднородности $\rho_{0\uparrow}$ возникает спиновая неравновесность $\delta\mu_\uparrow$ (верхний график). Суммарная сила, составленная из локальных сил F, действующих на электроны, направлена влево — она приводит к перемене знака дрейфа

не зависящей от x. Как следует из формулы (7), для существования колебаний необходимо, чтобы относительная концентрация спиновых компонент менялась вдоль кольца, $\omega \approx \alpha v_F/\sqrt{LL_1}$, здесь степень магнитной неоднородности $\alpha = (\rho_{\sigma max} - \rho_{\sigma min})/\rho$, v_F — скорость Ферми, L — длина кольца, L_1 — расстояние, на котором происходит изменение спектра.

Колебания спинового маятника могут быть возбуждены «магнитным ударом»: быстрым (за время, много меньшее ω^{-1}) включением магнитного поля, пронизывающего кольцо. Такое включение создает начальный ток $I = es\Phi/cm$, Φ — магнитный поток.

Неучтенные пока процессы диссипации энергии гидродинамического потока приводят, естественно, к затуханию колебаний спинового маятника (7). Время затухания нетрудно оценить:

$$\tau \approx \left(\frac{e^2\rho sR}{mL} + \frac{D}{L_1^2} + \tau_{sf}^{-1}\right)^{-1}. \qquad (8)$$

Здесь R — электросопротивление кольца в однородном состоянии; второе слагаемое обусловлено диффузией неравновесных спинов через область неоднородности спектра, коэффициент диффузии в гидродинамическом режиме определяется нормальными столкновениями: $D \approx l_N v_F$, третье слагаемое — релаксацией неравновесной спиновой концентрации за время спин-флипа τ_{sf}. Как видно из формулы (8), неоднородность в виде резкой границы между веществами с разными магнитными свойствами приведет к сильному затуханию колебаний.

Интересной представляется возможность поддержания амплитуды колебаний неизменной (как это делается в обычных маятниковых часах) за счет связи кольца посредством магнитного поля с подкачивающим энергию элементом.

Отметим, что колебательные процессы в проводнике, затрагивающие спиновую степень свободы, возможны не только в условиях гидродинамического транспорта, но и для одномерного проводника в бесстолкновительном, баллистическом режиме. Дело в том, что в одномерном случае практически любое токовое распределение носителей (кроме существенно неравновесного по энергии) является дрейфовым, т. е. описывается выражением вида (2), с той только разницей, что спиновые компоненты не связаны между собой и их дрейфовая скорость может быть различна. Следовательно, для данной ситуации вместо формул (3), (4) справедливы уравнения

$$\frac{\partial\delta\rho_\sigma}{\partial t} + (\rho_{0\sigma}\mathbf{u}_\sigma)' = 0, \qquad (9)$$

$$m\rho_\sigma\frac{\partial\mathbf{u}_\sigma}{\partial t} + \rho_\sigma(\delta\mu_\sigma + e\varphi)' = 0. \qquad (10)$$

В пространственно-однородном случае эти уравнения (совместно с формулой (5)) имеют решение

$$\delta\mu_\sigma, u_\sigma \propto e^{i(\omega t + kx)}, \quad \omega^2 = \frac{\rho_\uparrow\rho_\downarrow\Pi^{-1}}{m\rho}\,k^2. \qquad (11)$$

Волны спиновой концентрации (11) качественно отличаются от колебаний спинового маятника (7): они существуют как в кольце ($k = 2\pi n/L$), так и в разомкнутом проводнике ($k = \pi n/L$), они не связаны с протеканием тока по проводнику (в случае кольца такая связь появляется в меру его неоднородности). Наиболее простой экспериментальный способ различить эти колебания — создать преграду протеканию тока по кольцу.

Проанализируем теперь спин-электрический эффект в незамкнутом однородном проводнике. При $\mathbf{u} = 0$ из формул (6), (5) для разности потенциалов на концах проводника получаем

$$\begin{gathered}\varphi(L) - \varphi(0) = (e\rho)^{-1}\left[P(0) - P(L)\right],\\ P(x) = \left(\rho_\uparrow - \rho_\downarrow\frac{\Pi_\uparrow}{\Pi_\downarrow}\right)\delta\mu_\uparrow(x) + \\ + \left(\Pi_\uparrow - \frac{\rho_\uparrow}{\Pi_\uparrow}\frac{d\Pi_\uparrow}{d\delta\mu_\uparrow}\right)\delta\mu_\uparrow^2(x).\end{gathered} \qquad (12)$$

Приведенное выражение для давления есть разложение этой величины по степеням $\delta\mu$. Видно, что в случае немагнетика эффект появляется во втором порядке (член второго порядка выписан именно для случая немагнетика), в коэффициентах перед $\delta\mu$ и

$\delta\mu^2$ все величины относятся к равновесному состоянию. Из выражения (12) следует, что присутствие на концах разомкнутого проводника неодинаковой по величине спиновой неравновесности создает разность потенциалов, которая может быть непосредственно измерена. Эта разность потенциалов существует в течение времени τ_φ, которое определяется либо релаксацией спиновой поляризации за счет процессов спин-флипа, либо диффузионным ее выравниванием по длине проводника:

$$\tau_\varphi \approx (\tau_{sf}^{-1} + D/L^2)^{-1}.$$

За это время через измерительный прибор проходит заряд $q \approx \Delta\varphi\tau_\varphi$. Если спиновая поляризация в немагнетике создана, например, пропусканием через него тока из магнетика, то после отключения тока инжекции через присоединенный к концам немагнетика вольтметр протечет заряд q, что укажет на существовавшую в немагнетике неравновесную спиновую плотность.

Необходимо отметить, что данный спин-электрический эффект не специфичен для ситуации гидродинамического транспорта. Из уравнений непрерывности

$$\frac{\partial\delta\rho_\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\sigma_\sigma\left(\operatorname{grad}(\delta\mu_\sigma + e\varphi)\right) = 0, \qquad (13)$$

справедливых для спинового транспорта в диффузионном пределе при преобладании не сохраняющих импульс столкновений (σ_σ — парциальный вклад в электропроводность), дополненных уравнением (5), нетрудно получить для однородного проводника

$$e\varphi(x) = \frac{1}{\sigma}\left[\left(\sigma_\downarrow\frac{\Pi_\uparrow}{\Pi_\downarrow} - \sigma_\uparrow\right)\delta\mu_\uparrow(x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sigma_\uparrow}{\Pi_\uparrow}\frac{d\Pi_\uparrow}{d\delta\mu_\uparrow} - \frac{d\sigma_\uparrow}{d\delta\mu_\uparrow}\right)\delta\mu_\uparrow^2(x)\right]. \qquad (14)$$

Квадратичный по $\delta\mu_\uparrow$ член приведен для случая немагнетика, $\sigma = \sum_\sigma \sigma_\sigma$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение укажем, что при обеспечении условий гидродинамического транспорта $\tau_N \ll \omega^{-1} \ll \tau$ (см. формулы (7), (8), τ_N — время свободного пробега относительно нормальных столкновений) в неоднородном по своим исходным магнитным свойствам проводящем кольце могут быть возбуждены слабозатухающие колебания поляризации спиновой плотности частотой ω, сопровождающиеся колебаниями дрейфового тока по кольцу. Если, например, неоднородность создана в гетероструктуре неоднородным электростатическим полем затвора, создающим неоднородное рашбовское расщепление спиновых компонент, то, согласно формуле (7),

$$\omega = v_F\sqrt{\frac{2}{L}\oint\left(\frac{\Delta p_F}{p_F}\right)'^2 dx}\,,$$

где Δp_F — разность фермиевских импульсов спиновых компонент (предположено, что $\Delta p_F/p_F \ll 1$). В немагнитном неоднородном кольце создание локальной спиновой поляризации приводит к нелинейным колебаниям типа «спинового маятника», рассмотрение которых выходит за рамки данной статьи. Показано, что как в обычном диффузионном, так и в гидродинамическом случаях спиновая поляризация в разомкнутом проводнике может быть детектирована измерением разности потенциалов на его концах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (грант Ф10/51-2005), НАН Украины (грант 3-026/2004), гранта Президента Украины для молодых ученых (GP/F11/0014).

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Žutić, J. Fabian, and S. Das Sarma, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004).
2. K. Flensberg, T. S. Jensen, and N. A. Mortensen, Phys. Rev. B **64**, 245308 (2001).
3. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, A. V. Yanovsky, E. N. Bogachek, and Uzi Landman, J. Supercond. **16**, 201 (2003).
4. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, A. I. Kopeliovich, A. V. Yanovsky, E. N. Bogachek, and Uzi Landman, Low Temp. Phys. **29**, 606 (2003).
5. Р. Н. Гуржи, Письма в ЖЭТФ **44**, 771 (1963).
6. В. А. Бунтарь, Ю. З. Ковдря, В. Н. Григорьев, Ю. П. Монарха, С. С. Соколов, ФНТ **13**, 789 (1987).
7. Р. Н. Гуржи, УФН **94**, 689 (1968).
8. L. W. Molenkamp and M. J. M. de Jong, Phys. Rev. B **49**, 5038 (1994); **51**, 13389 (1995).
9. R. N. Gurzhi, A. N. Kalinenko, and A. I. Kopeliovich, Phys. Rev. Lett. **74**, 3872 (1995).
10. Г. А. Смоленский, И. Е. Чупис, УФН **137**, 415 (1982).
11. E. I. Rashba, Sov. Phys. Sol. St. **2**, 1109 (1960).
12. J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagi, and T. Enoki, Phys. Rev. Lett. **78**, 1335 (1997).
13. Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович, ЖЭТФ **55**, 1105 (1968).
14. Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович, ФТТ **11**, 3109 (1969).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).