

РЕАКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

*П. О. Казинский**

*Томский государственный университет
634050, Томск, Россия*

Поступила в редакцию 2 февраля 2007 г.

Предложено пуанкаре-инвариантное описание эффективной динамики локализованной системы заряженных частиц в классической электродинамике при помощи ее собственных мультипольных моментов. Дано релятивистски-инвариантное определение собственных мультипольных моментов системы заряженных частиц. Предложен новый общеквариантный функционал действия для релятивистской идеальной жидкости. В случае релятивистской заряженной пыли доказана эквивалентность описания проблемы реакции излучения мультипольных моментов с помощью модели частиц и гидродинамической модели. Получена эффективная модель для точечной нейтральной системы заряженных частиц, обладающей собственным дипольным моментом, и описана ее свободная динамика. Найден связанный импульс точечного диполя.

PACS: 03.50.De, 04.20.Fy

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания систем с большим числом степеней свободы встречается во многих разделах теоретической физики. Обычно эта проблема решается при помощи выделения существенных степеней свободы и пренебрежения несущественными, либо усреднения по последним. Например, в методе ренорм-группы, который часто используется в квантовой теории поля и теории критических явлений, такая процедура осуществляется при помощи интегрирования в функциональном интеграле по части поля модели, а, например, в методе среднего поля — при помощи решения самосогласованных уравнений. В настоящей работе мы рассмотрим аналог таких процедур усреднения применительно к системе заряженных частиц (или к заряженным жидкостям) в классической электродинамике.

Прежде всего мы исключим из модели электромагнитные поля, создаваемые заряженными частицами, и получим таким образом некоторую эффективную модель. Простейшими моделями такого рода в классической электродинамике являются модель точечной заряженной частицы, подчиняющейся уравнениям Лоренца–Дирака [1, 2], ее обобщения на безмассовый случай [3] и на случай искривленного, многомерного пространства–времени [4–7].

Также к таким моделям можно отнести модели, возникающие при классическом описании заряженных частиц со спином [8–16].

Затем мы «укоротим» описание эффективной модели и будем описывать ее динамику при помощи задания траектории центра масс и нескольких первых мультипольных моментов. Другими словами, будет построена модель точечной частицы с внутренними степенями свободы в виде мультипольных моментов. Релятивистские эффективные модели для неточечных объектов в классической электродинамике рассматривались в работах [17–20]. Нерелятивистский подход (разложение по степеням $1/c$) к эффективной динамике системы заряженных частиц, учитывающей реакцию излучения мультипольных моментов, можно найти в работах [21, 22].

Работа построена следующим образом. В разд. 2 вводятся основные обозначения и дается релятивистское определение собственных мультиполей системы заряженных частиц, совпадающее в нерелятивистском пределе со стандартным определением. На основании этого определения строятся мультипольные разложения потенциалов Льенара–Вихерта и полного тока системы.

В разд. 3 потенциалы Льенара–Вихерта (еще не разложенные по мультиполям) подставляются в уравнения движения частиц. К получающемуся в результате плохо определенному выражению применя-

*E-mail: kpo@phys.tsu.ru

ется процедура регуляризации, физический смысл которой состоит в усреднении всех флуктуаций электромагнитного поля в малой окрестности заряженной системы, и получаются эффективные уравнения движения для центра масс и мультипольных моментов системы. Затем мы проводим усреднение по всем мелкомасштабным флуктуациям траекторий частиц, что позволяет оборвать цепочку эффективных уравнений движения и таким образом замкнуть систему уравнений. Как частные случаи, эффективные уравнения движения содержат уравнения Лоренца–Дирака и уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди [8–10, 23, 24]. Также в этом разделе выводятся эффективные уравнения движения центра масс и дипольного момента для точечной нейтральной системы заряженных частиц, обладающей дипольным моментом (точечный диполь). Найдено общее решение этих уравнений в отсутствие внешних полей, описывающее свободный, медленно вращающийся, излучающий диполь. Кроме того, проводится анализ эффективных уравнений движения центра масс точечного диполя, аналогичный сделанному Тейтельбомом [25] для точечной заряженной частицы. А именно, найдено выражение для связанного импульса точечного диполя и полной мощности его излучения.

В разд. 4 рассматривается эффективная динамика заряженных жидкостей. Строится функционал действия для идеальной заряженной релятивистской жидкости, взаимодействующей с электромагнитным полем. Оказывается, что в случае заряженной пыли, т. е. идеальной жидкости без давления, эффективная модель, описывающая реакцию излучения мультипольных моментов, совпадает с рассмотренной в предыдущем разделе эффективной моделью для системы заряженных частиц. Это позволяет интерпретировать приближения, сделанные в предыдущем разделе.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И МУЛЬТИПОЛИ

Пусть в пространстве–времени дана система N электрически заряженных частиц с мировыми линиями $x_a(\tau_a)$, $a = 1, \dots, N$. Динамика такой системы определяется функционалом действия¹⁾

¹⁾ Здесь и далее мы используем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$. Греческие индексы поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского $\eta_{\mu\nu}$ на $\mathbf{R}^{3,1}$. Круглые (квадратные) скобки у пары индексов обозначают симметризацию (антисимметризацию) без $1/2$. Жирным шрифтом обозначается пространственная часть координат.

$$S[x_a(\tau_a), A(x)] = \sum_{a=1}^N \left[-m_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{x}_a^2} - \int d^4x A_\mu j_a^\mu \right] - \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $F = dA$ — тензор напряженности электромагнитного поля; точки означают производные по соответствующему параметру на мировой линии частицы, а плотность электрического тока имеет стандартный вид:

$$j_a^\mu(x) = e_a \int d\tau_a \delta^4(x - x_a(\tau_a)) \dot{x}_a^\mu(\tau_a). \quad (2)$$

Уравнения движения, доставляющие минимум действию (1), в калибровке Лоренца $\partial_\mu A^\mu = 0$ записываются как

$$m_a \frac{d}{d\tau_a} \left(\frac{\dot{x}_a^\mu}{\sqrt{\dot{x}_a^2}} \right) = e_a F^\mu{}_\nu(x_a) \dot{x}_a^\nu, \quad (3)$$

$$\square A^\mu = 4\pi \sum_{a=1}^N j_a^\mu.$$

Электромагнитное поле, создаваемое системой зарядов, легко найти, используя запаздывающую функцию Грина [26]

$$G^-(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (4)$$

Сворачивая функцию Грина с правой частью уравнений Максвелла, получаем

$$A^\mu(x) = 2 \sum_{a=1}^N e_a \int d\tau_a \theta(x^0 - x_a^0(\tau_a)) \times \delta((x - x_a(\tau_a))^2) \dot{x}_a^\mu(\tau_a). \quad (5)$$

Потенциалы Льенара–Вихерта (5) описывают поле, создаваемое системой зарядов. При этом любое решение однородных уравнений Максвелла, которое может быть добавлено к этим потенциалам, считается внешним полем.

Для определения мультипольных моментов нам будет удобно выбрать параметры на мировых линиях частиц следующим образом. Пусть $z^\mu(\tau)$ — времениподобная кривая в пространстве Минковского, а τ — натуральный параметр на ней. Тогда все траектории будем параметризовать этим параметром τ так, чтобы было выполнено условие

$$\dot{z}_\rho(\tau) \xi_a^\rho(\tau) = 0, \quad \dot{z}^2(\tau) = 1, \quad (6)$$

где

$$\xi_a^\mu(\tau) := x_a^\mu(\tau) - z^\mu(\tau).$$

Иначе говоря, точки в пространстве–времени, отвечающие одному значению параметра τ , должны лежать на гиперплоскости, ортогональной $\dot{z}^\mu(\tau)$. Калибровка (6) правильно фиксирует параметризацию на мировых линиях частиц при условии, что

$$\frac{d\tau_a}{d\tau} = \frac{1 - \dot{z}_\rho \xi_a^\rho}{\dot{z}_\sigma dx_a^\sigma / d\tau_a} > 0. \quad (7)$$

При достаточно малых $\xi_a^\mu(\tau)$ (а именно этот случай нас и будет интересовать) условие (7) выполнено, поскольку в знаменателе стоит скалярное произведение двух времениподобных векторов. Времениподобную кривую $z(\tau)$ определим равенством

$$\sum_{a=1}^N m_a \xi_a^\mu(\tau) = 0 \quad (8)$$

и будем называть ее центром масс.

Перейдем теперь к определению мультипольных моментов. Под электрическими и магнитными мультипольными моментами системы точечных заряженных частиц будем подразумевать неприводимые компоненты тензоров²⁾

$$\sum_{a=1}^N e_a \xi_{\mu_1}^a \cdots \xi_{\mu_n}^a, \quad \sum_{a=1}^N e_a \xi_{\mu_1}^a \cdots \xi_{[\mu_{n-1}}^a \dot{\xi}_{\rho]}^a \text{Pr}_{\mu_n}^\rho, \quad (9)$$

соответственно, где

$$\text{Pr}_{\mu}^\nu := \delta_{\mu}^{\nu} - \dot{z}^{\nu} \dot{z}_{\mu}$$

— проектор на ортогональное дополнение к \dot{z}^μ . Очевидно, что так определенные мультипольные моменты ортогональны \dot{z}^μ .

Мультипольные моменты (9) образуют полную систему в том смысле, что суммарный ток, стоящий в правой части уравнений Максвелла (3), и потенциалы Льенара–Вихерта (5) могут быть переписаны через них с любой наперед заданной степенью точности. Например, первые три порядка по ξ в разложении потенциалов Льенара–Вихерта имеют вид

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) = & qDz_{\mu} + D[d_{\mu} - n_{\rho}d^{\rho}z_{\mu}] + \\ & + \frac{1}{2}D[QDz_{\mu} + X^{\rho}Q_{\rho\sigma}X^{\sigma}D^2z_{\mu} + S_{\mu\nu}n^{\nu} + \\ & + (\dot{z}^{\rho} - n^{\rho})\dot{Q}_{\rho\sigma}(\delta_{\mu}^{\sigma} - n^{\sigma}\dot{z}_{\mu})] + O(\xi^3), \quad (10) \end{aligned}$$

²⁾ Обычно электрические мультипольные моменты определяются как бесследовые тензоры (см., например, [21]), так как на больших расстояниях и в стационарном случае электромагнитные поля заряженной системы зависят только от их бесследовой части. Однако в динамическом случае и/или на малых расстояниях от источника необходимо использовать полные тензоры.

где после всех дифференцирований нужно положить $\tau = \tau_{ret}$. Здесь были введены стандартные обозначения для кинематических величин:

$$\begin{aligned} X_{\mu} = & x_{\mu} - z_{\mu}(\tau), \quad R = \dot{z}_{\rho}X^{\rho}, \quad n_{\mu} = \frac{X_{\mu}}{R}, \\ D = & \frac{d}{Rd\tau}, \quad X^2|_{\tau=\tau_{ret}} = 0, \quad X_0|_{\tau=\tau_{ret}} > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

и мультипольных моментов

$$\begin{aligned} q = & \sum_{a=1}^N e_a, \quad d_{\mu} = \sum_{a=1}^N e_a \xi_{\mu}^a, \\ Q_{\mu\nu} = & \sum_{a=1}^N e_a \xi_{\mu}^a \xi_{\nu}^a, \quad S_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^N e_a \xi_{[\mu}^a \dot{\xi}_{\rho]}^a \text{Pr}_{\nu]}^{\rho}, \end{aligned} \quad (12)$$

т. е. для полного заряда, собственных дипольного, квадрупольного и магнитного моментов. Кроме того,

$$Q := \eta^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}$$

— след квадрупольного момента.

В частности, когда мультипольные моменты не зависят от времени и система как целое движется равномерно и прямолинейно, мы получаем релятивистское обобщение хорошо известного выражения [21]:

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) = & \frac{q}{R}\dot{z}_{\mu} - \frac{n_{\rho}d^{\rho}}{R^2}\dot{z}_{\mu} + \\ & + \frac{3n^{\rho}\bar{Q}_{\rho\sigma}n^{\sigma}\dot{z}_{\mu} + S_{\mu\nu}n^{\nu}}{2R^3} + O(\xi^3), \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\bar{Q}_{\mu\nu} := Q_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\text{Pr}_{\mu\nu}Q$$

— бесследовая часть собственного квадрупольного момента.

Выпишем также первые три порядка по ξ в разложении суммарной плотности электрического тока:

$$\begin{aligned} j^{\mu}(x) = & \int d\tau \left\{ q\dot{z}^{\mu} + (d^{\mu} - \dot{z}^{\mu}d^{\rho}\partial_{\rho}) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[(S^{\mu\rho} - \dot{Q}^{\mu\rho} + \dot{Q}^{\sigma[\mu}\bar{\text{Pr}}_{\rho]}^{\sigma]}) \partial_{\rho} + \dot{z}^{\mu}Q^{\rho\sigma}\partial_{\rho\sigma} \right] \left. \right\} \times \\ & \times \delta^4(x - z(\tau)) + O(\xi^3), \quad (14) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\text{Pr}}_{\mu\nu} := \dot{z}_{\mu}\dot{z}_{\nu}.$$

Поскольку ток (14) сохраняется, он сохраняется и в каждом порядке по ξ . Разложение для потенциалов Льенара–Вихерта (10) можно получить, сворачивая функцию Грина с суммарным током (14).

Таким образом, на больших расстояниях от изучаемой системы заряженных частиц ее можно рассматривать как некоторую точечную частицу с внутренними характеристиками: полным зарядом, дипольным моментом и т. д.

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА МУЛЬТИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

Теперь мы подставим потенциалы Льенара–Вихерта (еще не разложенные по мультиполям) в выражения для силы Лоренца и регуляризуем получающееся в результате плохо определенное выражение. После применения к силе Лоренца процедуры регуляризации возникнет бесконечный ряд по степеням параметра регуляризации и ξ_μ^a . Чтобы оборвать этот ряд, необходимо наложить определенные ограничения на характерные масштабы рассматриваемого заряженного объекта. В результате мы получим уравнения движения эффективной модели, описывающей систему заряженных частиц. Ниже в конце данного раздела в качестве примера будет получена эффективная модель для нейтрального точечного объекта с дипольным моментом, описана ее свободная динамика и исследованы некоторые ее свойства.

Итак, после исключения электромагнитных полей эффективные уравнения движения заряженных частиц запишутся в низших порядках по ξ_μ^a как

$$m_a \frac{d}{d\tau} \left[\dot{z}_\mu + \dot{\xi}_\rho^a \text{Dr}_\mu^\rho \right] = e_a F_{\mu\nu}^{rr}(x_a(\tau)) \dot{x}_a^\nu + e_a F_{\mu\nu}(\dot{z}^\nu + \dot{\xi}_a^\nu) + e_a \partial_\rho F_{\mu\nu} \xi_a^\rho \dot{z}^\nu + \dots, \quad (15)$$

где $F_{\mu\nu}$ — напряженность внешнего электромагнитного поля, взятая в точке $z^\mu(\tau)$. Как мы видим, линейный порядок по ξ импульса частицы ортогонален \dot{z}^μ , именно поэтому мы определили собственные магнитные мультипольные моменты спроектированными проектором pr_b^μ . Это, в частности, обеспечивает согласованность определений момента импульса и магнитного момента.

Напряженность электромагнитного поля $F_{\mu\nu}^{rr}$ строится на основании потенциалов (5) и задается выражением

$$F_{\mu\nu}^{rr}(x_a(\tau)) = 4 \sum_{b=1}^N e_b \int ds \theta(X^0 + \xi_{ab}^0) \times \delta'((X + \xi^{ab})^2) (X_{[\mu} + \xi_{[\mu}^{ab})(\dot{z}_{\nu]} + \dot{\xi}_{\nu]}^b), \quad (16)$$

где

$$X_\mu := z_\mu(\tau) - z_\mu(s), \quad \xi_\mu^{ab} := \xi_\mu^a(\tau) - \xi_\mu^b(s).$$

Разлагая подинтегральное выражение (16) по степеням ξ , приходим к выражению

$$\delta'(X^2)(X_{[\mu} + \xi_{[\mu}^{ab})\dot{x}_{\nu]}^b + \delta''(X^2)((\xi^{ab})^2 + 2X^\rho \xi_\rho^{ab}) \times \times (\xi_{[\mu}^{ab} + X_{[\mu}]\dot{x}_{\nu]}^b + + 2\delta'''(X^2)(\xi_\rho^{ab} X^\rho)^2 (\xi_{[\mu}^{ab} + X_{[\mu}]\dot{x}_{\nu]}^b + \dots \quad (17)$$

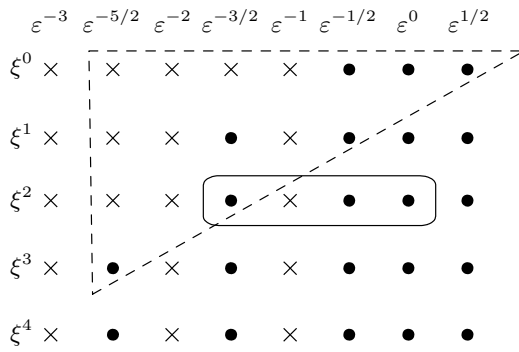
Здесь многоточием обозначены слагаемые, которыми в нашем приближении можно пренебречь (см. ниже). Кроме того, мы не стали выписывать θ -функцию. Согласно предположениям, которые будут подробно изложены ниже, она не вносит вклада в ряд (17).

Подставляя разложение (17) в формулу (16), получим плохо определенное выражение — каждое слагаемое в (17) при интегрировании будет приводить к расходимостям. Чтобы избавиться от расходимостей, регуляризуем функцию Грина (4) следующим образом:

$$G^-(x) = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(x^2) \rightarrow G_\varepsilon^-(x) = = \frac{\theta(x^0)}{2\pi} \delta(x^2 - \varepsilon). \quad (18)$$

Такая регуляризация приведет к тому, что аргументы всех δ -функций в ряде (17) получат приращение на $-\varepsilon$, в результате чего все интегралы станут сходящимися. Физическая интерпретация такой процедуры состоит в том, что мы проводим усреднение по всем флуктуациям электромагнитного поля, созданного системой заряженных частиц, вплоть до масштаба $\varepsilon^{1/2}$. Другими словами, параметр регуляризации является характерным масштабом флуктуаций электромагнитного поля заряженного объекта. Такая процедура усреднения аналогична схемам усреднения, применяемым в методах среднего поля и ренорм-группы (см., например, [27, 28]).

Разлагая регуляризованную напряженность поля (16) в асимптотический ряд по степеням параметра регуляризации, получим ряд по степеням ξ и ε , структура которого изображена на рисунке. Необходимые для проведения асимптотического разложения формулы приведены в Приложении. Как было доказано в работе [29], все члены ряда при полных степенях параметра регуляризации лагранжевы, т. е. могут быть получены варьированием эффективного действия, которое получается подстановкой потенциалов Льенара–Вихерта в действие (1) и применением к нему процедуры регуляризации (18). Слагаемые при целых степенях ε связаны с радиационными потерями и являются нелагранжевыми.



Часть бесконечной решетки, отображающей вклады интеграла (16). Равные нулю слагаемые обозначены крестами. Это вклады при целых отрицательных степенях ε , а также при $\xi^k \varepsilon^{-(l+3)/2}$, $k \leq l$. Штриховой треугольник выделяет те вклады, которые мы учитываем при рассмотрении неточечной заряженной системы частиц, удовлетворяющей условиям (19), (20) и (21), (22). Например, слагаемое при $\varepsilon^{-5/2}$ в формуле (23) отображено в левом нижнем углу штрихового треугольника. Три выделенные точки отображают вклады силы самодействия в эффективные уравнения движения центра масс нейтрального точечного объекта с точностью до первой радиационной поправки

3.1. Ограничения на характерные масштабы

Для того чтобы выделить из полученного ряда конечное число слагаемых, потребуем выполнения определенных ограничений, налагаемых на характерные масштабы рассматриваемой системы заряженных частиц и члены асимптотического ряда.

1. Пусть l — характерный масштаб изменения траектории $z(\tau)$, причем l много больше, чем параметр регуляризации $\varepsilon^{1/2}$. Из размерных соображений ясно, что с ростом степени параметра регуляризации число производных от полей $z(\tau)$ и $\xi_\mu^a(\tau)$ в членах асимптотического ряда одного порядка по ξ возрастает (см., например, ниже формулу (23)). Поэтому необходимо провести усреднение по всем осцилляциям полей $\xi_\mu^a(\tau)$, частоты которых больше, чем l^{-1} , поскольку в противном случае, если, например, характерное время изменения полей $\xi_\mu^a(\tau)$ будет меньше чем $\varepsilon^{1/2}$, члены асимптотического ряда при высших степенях ε будут давать больший вклад, чем при низших, т. е. необходимо будет учесть влияние всех членов бесконечного асимптотического ряда. Сама процедура усреднения не является существенной. Мы будем просто в дальнейшем считать, что характерное время изменения полей $\xi_\mu^a(\tau)$ не меньше l . Такой подход обоснован в том случае, когда

вкладом резонансов, т. е. турбулентными течениями внутри системы заряженных частиц, можно пренебречь³⁾.

После такого усреднения n -я производная от $\xi_\mu^a(\tau)$ по τ будет порядка ξ/l^n , где ξ — характерный масштаб значений переменных $\xi_\mu^a(\tau)$. В результате разложение интеграла (16) будет вестись по двум безразмерным величинам ξ/l и $\varepsilon^{1/2}/l$, коэффициентами при которых будут некоторые комбинации из полей $\xi_\mu^a(\tau)$, $z^\mu(\tau)$ и их производных.

2. Как можно видеть из рисунка, необходимым условием того, чтобы имело смысл использовать полученное асимптотическое разложение, является выполнение условий

$$\xi \ll \varepsilon^{1/2} \ll l. \tag{19}$$

С физической точки зрения условия (19) означают, что мы рассматриваем систему, которая намного меньше, чем характерный масштаб изменения электромагнитного поля (после усреднения при помощи регуляризации). В то же время характерный масштаб изменения электромагнитного поля должен быть много меньше, чем характерных масштаб флуктуаций траектории $z(\tau)$.

3. В отсутствие каких-либо априорных сведений об изучаемой системе заряженных частиц будем считать, что

$$M_{n+k} \lesssim M_n (\xi/l)^k \tag{20}$$

для любого натурального числа k . Здесь M_n обозначает величину n -го мультипольного момента⁴⁾ (9). Другими словами, мы предполагаем, что начиная с мультипольного момента n -го порядка, в рассматриваемом заряженном объекте отсутствуют коллективные явления, такие как спонтанное намагничивание и т. п., т. е., начиная с n -го мультиполя, в нем нет какой-либо высокоупорядоченной структуры. При выполнении этого условия ведущий вклад в силу самодействия содержится в первых n порядках по ξ разложения асимптотического ряда. В дальнейших вычислениях мы будем рассматривать, в основном, случай $n \leq 2$.

Условие (20) позволяет нам при вычислениях оценивать выражение по количеству входящих в него полей $\xi_\mu^a(\tau)$ (конечно, для тех порядков по ξ , где выполнено условие (20)), не заботясь о том, что, вообще говоря, после суммирования по всем частицам

³⁾ Прекрасное изложение метода усреднения и обзор современных результатов в этой области можно найти в работе [30].

⁴⁾ Здесь и далее мы используем не совсем стандартную нумерацию мультипольных моментов. Обычно, n -й мультипольный момент (в наших обозначениях) называют 2^n -польным.

вклады, пропорциональные более высоким степеням ξ , могут усилиться, а пропорциональные более низким степеням ξ — наоборот, взаимно сократиться.

Удобно представлять себе систему заряженных частиц, удовлетворяющую трем приведенным выше условиям, как некоторую локализованную в пространстве жидкость (газ), для изучения эффективной динамики которой можно пренебречь возможными турбулентными течениями внутри нее. В этой жидкости возможно некоторое распределение зарядов, но в результате перемешивания в ней отсутствуют высокоупорядоченные структуры.

4. Наконец, потребуем выполнения двух более технических условий. Во-первых, наложим несколько более жесткое ограничение на величину ξ , чем (19), потребовав

$$\xi/l \ll (\varepsilon^{1/2}/l)^{4/3}. \quad (21)$$

Во-вторых, будем считать, что

$$\varepsilon/l^2 \lesssim \xi/l. \quad (22)$$

Это условие характеризует то, насколько рассматриваемый заряженный объект отличается от точечного. В пределе точечной частицы, $\xi \rightarrow 0$, как мы впоследствии увидим, эффективные уравнения движения центра масс сведутся к уравнениям Лоренца–Дирака, что, конечно, является ожидаемым результатом.

Таким образом, условия (19), (20) и (21), (22) определяют частичный порядок на решетке вкладов интеграла (16), изображенной на рисунке.

3.2. Реакция излучения

Оставляя только члены ряда, выделенные на рисунке штриховым треугольником, и пренебрегая слагаемыми более высокого порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{rr}(x_a(\tau)) = & -4 \sum_{b=1}^N e_b \left\{ \frac{3\varepsilon^{-5/2}}{8} (\xi^{ba})^2 \xi_{[\mu}^{ba} z_{\nu]} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^{-3/2}}{16} \left[4\xi_{[\mu}^{ba} \dot{x}_{\nu]} + (\xi^{ba})^2 \ddot{z}_{[\mu} z_{\nu]} - 2(\ddot{z}^\rho \xi_\rho^{ba} + 2\dot{z}^\rho \dot{\xi}_\rho^b) \xi_{[\mu}^{ba} z_{\nu]} \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{16} \left[(2 - 3\ddot{z}^\rho \xi_\rho^{ba} - 6\dot{z}^\rho \dot{\xi}_\rho^b) \ddot{z}_{[\mu} z_{\nu]} + 2\ddot{z}_{[\mu} \dot{\xi}_{\nu]}^b + \right. \\ & + 2\ddot{\xi}_{[\mu}^b z_{\nu]} - 2\xi_{[\mu}^{ba} \dot{z}_{\nu]} - \frac{\ddot{z}^2}{2} \xi_{[\mu}^{ba} z_{\nu]} \left. \right] - \frac{1}{6} \dot{z}_{[\mu} \dot{z}_{\nu]} + \\ & \left. + \frac{\varepsilon^{1/2}}{32} \left[3\overset{(4)}{z}_{[\mu} z_{\nu]} + 2\dot{z}_{[\mu} \dot{z}_{\nu]} + \frac{5}{2} \ddot{z}^2 \ddot{z}_{[\mu} z_{\nu]} \right] \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

где

$$\xi_\mu^{ba} = \xi_\mu^b(\tau) - \xi_\mu^a(\tau).$$

Следовательно, в рамках наших приближений сила реакции излучения, действующая на точечную заряженную частицу a рассматриваемой системы, запишется как

$$\begin{aligned} e_a F_{\mu\nu}^{rr}(x_a(\tau)) \dot{x}_a^\nu = & - \sum_{b=1}^N e_a e_b \left\{ \frac{3\varepsilon^{-5/2}}{2} (\xi^{ba})^2 \xi_\mu^{ba} + \right. \\ & + \frac{\varepsilon^{-3/2}}{4} \left[(4 + 2\dot{z}^\rho (\xi_\rho^b + \right. \\ & \left. + \dot{\xi}_\rho^a)) \xi_\mu^{ba} + (\xi^{ba})^2 \ddot{z}_\mu - 4\dot{\xi}^{a\rho} \xi_\rho^{ba} \dot{z}_\mu \right] + \\ & + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{4} \left[(2 - \dot{z}^\rho (\xi_\rho^b + \dot{\xi}_\rho^a)) \ddot{z}_\mu - 2(\ddot{z}^\rho \dot{\xi}_\rho^a + \dot{z}^\rho \ddot{\xi}_\rho^b) \dot{z}_\mu + \right. \\ & + 2\ddot{\xi}_\mu^b + \frac{3}{2} \ddot{z}^2 \xi_\mu^{ba} \left. \right] - \frac{2}{3} [\ddot{z}_\mu + \ddot{z}^2 \dot{z}_\mu] + \\ & \left. + \frac{3\varepsilon^{1/2}}{8} \left[\overset{(4)}{z}_\mu + \frac{3}{2} \ddot{z}^2 \ddot{z}_\mu + 3\ddot{z}^\rho \dot{z}_\rho \dot{z}_\mu \right] \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Численные коэффициенты при отличных от нуля степенях параметра регуляризации зависят от использованной схемы регуляризации функции Грина, поэтому различные степени параметра регуляризации следует рассматривать как некоторые новые параметры эффективной модели, значения которых берутся из эксперимента. Процедура усреднения (регуляризации) дает нам только соотношения между порядками величин этих новых параметров.

Чтобы несколько упростить формулы, удобно ввести так называемые физические массы частиц

$$\tilde{m}_a = m_a + \frac{e_a q}{2} \varepsilon^{-1/2} \quad (25)$$

и переопределить мировую линию центра масс $z(\tau)$, потребовав выполнения (8) уже относительно физических масс. Тогда эффективные уравнения движения центра масс после проектирования на направление 4-скорости \dot{z}^μ и ортогональное к нему дополнение имеют вид

$$\begin{aligned} (\tilde{M} + G) \ddot{z}_\mu = & F_\mu^{LD} + F_\mu^{(6)} + F_{\mu\nu} (q\dot{z}^\nu + \dot{d}^\nu) + \\ & + F_{\rho\sigma} \dot{d}^\rho \dot{z}^\sigma \dot{z}_\mu + d^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu, \\ \dot{G} = & F_{\rho\sigma} \dot{z}^\rho \dot{d}^\sigma, \quad \tilde{M} = \sum_{a=1}^N \tilde{m}_a, \quad (26) \\ G = & \frac{\varepsilon^{-3/2}}{2} (qQ - d^2), \end{aligned}$$

где

$$F_\mu^{LD} = \frac{2}{3} q^2 [\ddot{z}_\mu + \ddot{z}^2 \dot{z}_\mu]$$

— сила Лоренца–Дирака, а

$$F_\mu^{(6)} = -\frac{3\varepsilon^{1/2}}{8} q^2 \left[\overset{(4)}{z}_\mu + \frac{3}{2} \ddot{z}^2 \ddot{z}_\mu + 3\ddot{z}^\rho \dot{z}_\rho \dot{z}_\mu \right]. \quad (27)$$

Формально «жесткое» слагаемое (27) есть не что иное, как выражение для расходимости, возникающее в эффективной модели $d = 6$ электродинамики точечной массивной частицы дополнительно к перенормировке массы [6, 7]. Для нерелятивистских моделей заряженных частиц с нетривиальной внутренней структурой такие жесткие вклады в силу взаимодействия были давно известны и в четырехмерном пространстве–времени (см., например, работу [31] и ссылки в ней). Исследование динамики и квантование моделей релятивистских частиц с жестким слагаемым (27) можно найти в работах [32, 33]. Отметим, что в пределе точечной заряженной частицы, когда все высшие мультипольные моменты становятся бесконечно малыми, уравнения (26) переходят в уравнения Лоренца–Дирака [17, 19].

Чтобы замкнуть систему уравнений (26) и получить эффективную модель для системы заряженных частиц, необходимо знать эволюцию дипольного момента. Изменение следа квадрупольного момента, который, как кажется, входит в уравнения (26), не важно, поскольку его влияние на эффективную динамику центра масс свелось в нашем приближении к возникновению добавки G к полной массе системы. Эволюция последней задается вторым уравнением в (26), т. е. фактически фиксируется законом сохранения 4-импульса.

Итак, чтобы получить эволюцию дипольного момента, снова воспользуемся уравнениями (15) и (24). В ведущем порядке с учетом первой нетривиальной поправки от самодействия они запишутся как

$$\tilde{m}_a \frac{d}{d\tau} \left[\dot{z}_\mu + \xi_\rho^a \text{Dr}_\mu^\rho \right] = e_a \varepsilon^{-3/2} (q \xi_\mu^a - d_\mu) + e_a F_{\mu\nu} (\dot{z}^\nu + \dot{\xi}_a^\nu) + e_a \xi_a^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu. \quad (28)$$

Вообще, уравнения движения описывают динамику механических моментов, поэтому мы должны связать механические моменты с электрическими (магнитными). Наиболее простой способ сделать это — выделить в рассматриваемой системе различные сорта частиц.

Будем говорить, что две частицы одного сорта, если и только если они имеют одинаковое отношение заряда к физической массе, $\lambda = e/\tilde{m}$. Пусть рассматриваемая система заряженных частиц содержит K сортов частиц с удельными зарядами λ_s , $s = 1, \dots, K$. Тогда суммируя уравнение (28) по частицам одного сорта, получаем

$$\frac{d}{d\tau} \left[\dot{d}_\mu^s + (q_s + \dot{z}^\rho d_\rho^s) \dot{z}_\mu \right] = \lambda_s \varepsilon^{-3/2} (q d_\mu^s - q_s d_\mu) + \lambda_s F_{\mu\nu} (q_s \dot{z}^\nu + \dot{d}_s^\nu) + \lambda_s d_s^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu, \quad (29)$$

где q_s и d_μ^s — заряд и дипольный момент, отвечающие сорту s . Полный заряд и полный дипольный момент системы получаются суммированием по всем сортам зарядов q_s и дипольных моментов d_s , соответственно.

Таким образом, мы получили замкнутую систему уравнений (26), (29), описывающую в нашем приближении эволюцию заряженного объекта. Иначе говоря, выделяя существенные степени свободы исходной системы и усредняя или пренебрегая остальными, мы построили эффективную модель.

3.3. Понижение порядка

Как мы видим, уравнения (26) содержат высшие производные полей $z(\tau)$. Однако эти высшие производные являются малыми поправками к свободным уравнениям движения. Действительно, из определения физических масс частиц (25) и требования положительности полной массы $\sum_{a=1}^N m_a$ находим, что

$$q^2/2\tilde{M} < \varepsilon^{1/2}. \quad (30)$$

Следовательно, сила Лоренца–Дирака будет порядка $\varepsilon^{1/2}/l$ по сравнению со свободными уравнениями движения, а жесткое слагаемое (27) — порядка ε/l^2 . Поэтому можно пертурбативно исключить все высшие производные, беря в качестве основы уравнение Лоренца

$$\tilde{M} \ddot{z}_\mu = q F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu. \quad (31)$$

В частности, эта процедура приводит к уравнениям, не содержащим нефизических решений, в отличие от исходных уравнений.

Применение процедуры понижения порядка к уравнениям Лоренца–Дирака можно найти в работе [21], и здесь мы не будем на этом останавливаться. Нас будут интересовать уравнения, определяющие эволюцию дипольных моментов (29). Чтобы несколько упростить уравнения, получающиеся после применения процедуры понижения порядка, потребуем выполнения более сильного условия, нежели (30). А именно, потребуем, чтобы выполнялось

$$q^2/\tilde{M} \ll \xi. \quad (32)$$

С физической точки зрения такое требование сводится к тому, чтобы энергия электромагнитного поля, создаваемого заряженной системой частиц, была много меньше ее массы.

Тогда при подстановке уравнений движения центра масс в (29) можно пренебречь силой Лоренца–Дирака, слагаемым G и жестким вкладом. После этого уравнения (29) переписутся как

$$\begin{aligned} \ddot{d}_\mu^s + \frac{q}{\tilde{M}} \frac{d}{d\tau} (d_s^\rho F_{\rho\sigma} \dot{z}^\sigma) \dot{z}_\mu = \lambda_s \varepsilon^{-3/2} (q d_\mu^s - q_s d_\mu) + \\ + \left[q_s \left(\lambda_s - \frac{q}{\tilde{M}} \right) - \frac{q^2}{\tilde{M}^2} d_s^\rho F_{\rho\sigma} \dot{z}^\rho \right] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu + \\ + F_{\mu\nu} \left(\lambda_s \dot{d}_s^\nu - \frac{q_s}{\tilde{M}} \dot{d}^\nu \right) + \\ + \left(\lambda_s d_s^\rho - \frac{q_s}{\tilde{M}} d^\rho \right) \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu. \quad (33) \end{aligned}$$

3.4. Эволюция высших мультиполей

Уравнения (26), (29), (33) могут рассматриваться в качестве отправной точки для дальнейшего применения теории возмущений по параметру ξ , чтобы учесть влияние мультиполей более высокого порядка на динамику системы. В этой связи полезно получить эволюционные уравнения для мультиполей второго порядка, которые также часто возникают в физических моделях.

Мы ограничимся только ведущими вкладками. Применяя аналогичные рассуждения, использовавшиеся при выводе уравнений движения дипольных моментов, из уравнений (28) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_s \dot{T}_{\mu\nu}^s + \text{pr}_{(\mu}^{\rho} \dot{d}_{\rho}^s \dot{z}_{\nu)} = \\ = \lambda_s \left\{ \varepsilon^{-3/2} \left[q \left(\dot{Q}_{\mu\nu}^s - \dot{Q}_{(\mu\rho}^s \bar{\text{pr}}_{\nu)}^{\rho} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{pr}_{(\mu}^{\rho} \dot{d}_{\rho}^s d_{\nu)} \right] - \lambda_s T_{(\mu}^{s\rho} F_{\rho\nu)} + \right. \\ \left. + \left[\text{pr}_{(\mu}^{\rho} \dot{d}_{\rho}^s - \frac{1}{2} \dot{z}^\rho \left(\dot{Q}_{\rho\sigma}^s \text{pr}_{(\mu}^{\sigma} + S_{\rho(\mu}^s \right) \right) \right] F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_{(\mu\sigma}^s \text{pr}_{\rho}^{\sigma} - \bar{\text{pr}}_{(\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho}^s - S_{(\mu\rho}^s) \right) \partial^\rho F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma \right\}, \\ \frac{d}{d\tau} \left[\dot{Q}_{\mu\nu}^s + Q_{(\mu\rho}^s \dot{z}^\rho \dot{z}_{\nu)} \right] + d_{(\mu}^s \dot{z}_{\nu)} + \\ + \frac{1}{2} \dot{z}_{(\mu} \dot{z}^\rho \left[\dot{Q}_{\rho\sigma}^s \text{pr}_{\nu)}^{\sigma} + S_{\rho\nu)}^s \right] = \\ = \lambda_s \left\{ \varepsilon^{-3/2} \left[2q Q_{\mu\nu}^s - d_{(\mu}^s d_{\nu)} \right] + \right. \\ \left. + 2T_{\mu\nu}^s + d_{(\mu}^s F_{\nu)\rho} \dot{z}^\rho - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\text{pr}_{(\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho}^s + \dot{Q}_{(\mu\sigma}^s \bar{\text{pr}}_{\rho}^{\sigma} + S_{(\mu\rho}^s) \right] F_{\nu)}^{\rho} + \right. \\ \left. + Q_{(\mu\rho}^s \partial^\rho F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma \right\}, \\ \dot{S}_{\mu\nu}^s + d_{[\mu}^s \dot{z}_{\nu]} + \frac{1}{2} \dot{z}_{[\mu} \dot{z}^\rho \left[\dot{Q}_{\rho\sigma}^s \text{pr}_{\nu]}^{\sigma} + S_{\rho\nu]}^s \right] = \\ = \lambda_s \left\{ \varepsilon^{-3/2} d_{[\mu}^s d_{\nu]} + d_{[\mu}^s F_{\nu]\rho} \dot{z}^\rho - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\text{pr}_{[\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho}^s + \dot{Q}_{[\mu\sigma}^s \bar{\text{pr}}_{\rho}^{\sigma} + S_{[\mu\rho}^s) \right] F_{\nu]}^{\rho} + \right. \\ \left. + Q_{[\mu\rho}^s \partial^\rho F_{\nu]\sigma} \dot{z}^\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$T_{\mu\nu}^s := \sum \tilde{n}_a \text{pr}_{\mu}^{\rho} \text{pr}_{\nu}^{\sigma} \dot{\xi}_\rho^a \dot{\xi}_\sigma^a$$

— тензор внутренних напряжений⁵⁾ (потоков импульса) заряженного объекта, отвечающий сорту s . Как и все тензорные величины, характеризующие внутренние свойства системы, $T_{\mu\nu}^s$ ортогонален \dot{z}^μ .

Если система заряженных частиц состоит из частиц одного сорта⁶⁾, то из определения центра масс (8) следует, что собственный дипольный момент заряженного объекта равен нулю. Тогда система уравнений (34) переписывается как

$$\begin{aligned} \lambda \dot{T}_{\mu\nu} = \lambda \left\{ q \varepsilon^{-3/2} \left(\dot{Q}_{\mu\nu} - \dot{Q}_{(\mu\rho} \bar{\text{pr}}_{\nu)}^{\rho} \right) - \lambda T_{(\mu}^{\rho} F_{\rho\nu)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \dot{z}^\rho \left(\dot{Q}_{\rho\sigma} \text{pr}_{(\mu}^{\sigma} + S_{\rho(\mu} \right) F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_{(\mu\sigma} \text{pr}_{\rho}^{\sigma} - \bar{\text{pr}}_{(\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho} - S_{(\mu\rho} \right) \partial^\rho F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma \right\}, \\ \frac{d}{d\tau} \left[\dot{Q}_{\mu\nu} + Q_{(\mu\rho} \dot{z}^\rho \dot{z}_{\nu)} \right] + \\ + \frac{1}{2} \dot{z}_{(\mu} \dot{z}^\rho \left[\dot{Q}_{\rho\sigma} \text{pr}_{\nu)}^{\sigma} + S_{\rho\nu)} \right] = \\ = \lambda \left\{ 2q \varepsilon^{-3/2} Q_{\mu\nu} + 2T_{\mu\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\text{pr}_{(\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho} + \dot{Q}_{(\mu\sigma} \bar{\text{pr}}_{\rho}^{\sigma} + S_{(\mu\rho} \right] F_{\nu)}^{\rho} + \right. \\ \left. + Q_{(\mu\rho} \partial^\rho F_{\nu)\sigma} \dot{z}^\sigma \right\}, \\ \dot{S}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \dot{z}_{[\mu} \dot{z}^\rho \left[\dot{Q}_{\rho\sigma} \text{pr}_{\nu]}^{\sigma} + S_{\rho\nu]} \right] = \\ = -\frac{\lambda}{2} \left[\text{pr}_{[\mu}^{\sigma} \dot{Q}_{\sigma\rho} + \dot{Q}_{[\mu\sigma} \bar{\text{pr}}_{\rho}^{\sigma} + S_{[\mu\rho} \right] F_{\nu]}^{\rho} + \right. \\ \left. + \lambda Q_{[\mu\rho} \partial^\rho F_{\nu]\sigma} \dot{z}^\sigma \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Уравнения движения центра масс (26) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} (\tilde{M} + G) \dot{z}_\mu = F_\mu^{LD} + F_\mu^{(6)} + q F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu + \\ + \frac{1}{2} Q^{\rho\sigma} \partial_{\rho\sigma} F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu + \\ + \frac{1}{2} (\text{pr}^{\rho\sigma} \dot{Q}_\sigma^\nu + \dot{Q}^{\rho\sigma} \bar{\text{pr}}_\sigma^\nu + S^{\rho\nu}) \partial_\rho F_{\mu\nu}, \\ \dot{G} = \frac{1}{2} \dot{Q}^{\rho\nu} \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\mu + \frac{1}{2} (S^{\rho\nu} - \bar{\text{pr}}_\sigma^\rho \dot{Q}^{\sigma\nu}) \dot{F}_{\rho\nu}, \end{aligned} \quad (36)$$

где мы добавили первую поправку по степеням ξ от внешней силы, действующей на систему заряженных частиц как целое. В таких поправках возникают

⁵⁾ Строго говоря, тензор внутренних напряжений определяется как $\int d\tau \delta^4(x - z(\tau)) T_{\mu\nu}(\tau)$.

⁶⁾ Этот случай можно рассматривать как основу для теории возмущений по отклонениям удельных зарядов λ_s от их среднего, одинакового для всех частиц значения.

те же структуры, что были в разложенном по мультиполям полном электрическом токе системы (14), поскольку плотность силы имеет вид

$$\int d^4x F_{\mu\nu}(x)j^\nu(x). \quad (37)$$

В частности, при постоянном однородном внешнем электромагнитном поле $F_{\mu\nu} = \text{const}$ и постоянном квадрупольном моменте $Q_{\mu\nu} = \text{const}$ последнее уравнение в системе (35) есть не что иное, как уравнение Баргманна – Мишеля – Телегди (см. работы [8–11, 16, 23, 24] и ссылки в них). Остальные уравнения системы (35) сводятся к алгебраическим уравнениям для $T_{\mu\nu}$ и $S_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \lambda T_{\mu\nu} &= \frac{\lambda}{4} S_{(\mu\rho} F_{\nu)}^\rho + \frac{1}{4} \dot{z}_{(\mu} \ddot{z}^\rho S_{\rho\nu)} - \\ &\quad - \lambda q \varepsilon^{-3/2} Q_{\mu\nu}, \\ \frac{\lambda}{4} S_{(\mu\rho} F_{\nu)}^\rho - \frac{1}{4} \dot{z}_{(\mu} \ddot{z}^\rho S_{\rho\nu)} &= \\ &= -\lambda^2 q \varepsilon^{-3/2} Q_{(\mu\rho} F_{\nu)}^\rho \tau + \alpha_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\alpha_{\mu\nu}$ — некоторые константы интегрирования. След первого уравнения дает теорему о вириале в рассматриваемом приближении, т. е. взаимосвязь между средней кинетической и средней потенциальной энергиями системы. Второе уравнение является связью относительно уравнений Баргманна – Мишеля – Телегди, которая приводит к следующему.

Ввиду того, что тензор квадрупольного момента постоянен и пространственноподобен, $Q_{\mu\nu} \dot{z}^\nu = 0$, существует такая инерциальная система отсчета, в которой он диагонален⁷⁾ для любого τ . Условие пространственного подобия влечет то, что либо эта инерциальная система отсчета является сопутствующей, и, следовательно, $\ddot{z}^\mu = 0$, либо по крайней мере один из пространственноподобных диагональных элементов $Q_{\mu\nu}$ равен нулю. Из определения квадрупольного момента (12) мы видим, что равенство нулю одного из диагональных элементов влечет равенство нулю линейного размера тела, измеренного вдоль скорости. Другими словами, все заряды в любой момент времени находятся в плоскости, ортогональной скорости заряженного объекта как целого. Поэтому вектор магнитного момента должен быть направлен вдоль скорости. Если же два или три диагональных элемента $Q_{\mu\nu}$ равны нулю, то $S_{\mu\nu} = 0$.

⁷⁾ По поводу канонических форм симметричного тензора второго ранга в пространстве Минковского см., например, [21].

Конечно, равенство нулю каких-то линейных размеров тела, как и равенство нулю вектора магнитного момента, нужно понимать в том смысле, что они пренебрежимо малы.

3.5. Лагранжиан

Как было отмечено выше, вклады при полурелативистских степенях параметра регуляризации ε в выражениях для силы реакции излучения (24), действующей на одну частицу, и эффективных уравнений движения центра масс (26) могут быть получены варьированием эффективного действия.

Чтобы упростить выражение для лагранжиана эффективного действия, выпишем его в натуральной параметризации и сохраним только те слагаемые, которые не более чем линейны по калибровочному условию (6) и его дифференциальным следствиям, поскольку после варьирования и требования выполнения калибровки (6) отброшенные слагаемые не дадут вклада в эффективные уравнения движения. В итоге в нашем приближении имеем

$$\begin{aligned} L &= \sum_{a,b=1}^N e_a e_b \left\{ \frac{3\varepsilon^{-5/2}}{16} (\xi^{ba})^4 + \frac{\varepsilon^{-3/2}}{4} \times \right. \\ &\quad \times \left[(\xi^{ba})^2 (1 + \dot{z}^\rho \xi_\rho^b) - 2 \xi^{b\rho} \xi_\rho^{ba} \dot{z}^\sigma \xi_\sigma^{ba} \right] + \\ &\quad + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{32} \left[16 + 16 \dot{z}^\rho \xi_\rho^a + 8 \xi^{a\rho} \xi_\rho^b + 3 (\xi^{ba})^2 \dot{z}^2 - \right. \\ &\quad \left. - 8 \dot{z}^\rho \xi_\rho^a \dot{z}^\sigma \xi_\sigma^b + 16 \dot{z}^\rho \xi_\rho^{ba} \dot{z}^\sigma \xi_\sigma^b - 2 (\dot{z}^\rho \xi_\rho^{ba})^2 \right] - \\ &\quad \left. - \frac{3\varepsilon^{1/2}}{16} \left[\dot{z}^2 - 3 \dot{z}^2 \dot{z}^\rho \xi_\rho^a + 2 \dot{z}^\rho \xi_\rho^a \right] \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

Варьируя эффективное действие, отвечающее этому лагранжиану, по полям $\xi_\mu^a(\tau)$, получим выражение для силы реакции излучения (24). Варьируя эффективное действие по полям $z^\mu(\tau)$ и отбрасывая высшие члены по степеням ξ , придем к выражению для силы самодействия, входящей в эффективные уравнения движения центра масс (26). В обоих случаях мы, конечно, не воспроизведем силу Лоренца – Дирака.

3.6. Точечный диполь

В заключение этого раздела выведем эффективные уравнения движения для нейтральной системы заряженных частиц в точечном пределе, т. е. при $q = 0$ и $\xi \rightarrow 0$. Строго говоря, мы рассмотрим систему, удовлетворяющую, вместо соотношений (21), (22), условиям

$$\xi/l \ll (\varepsilon^{1/2}/l)^5, \quad q^2 l^2 \ll d^2, \quad (40)$$

где d — величина собственного дипольного момента. Также будем предполагать, что условие (20) выполнено для $n = 1$, т. е., в частности, дипольный момент считается отличным от нуля.

В дальнейшем мы будем выводить эффективные уравнения движения центра масс диполя с такой точностью, чтобы учесть поправки на излучение. Фактически, это требование сводится к тому, что необходимо проводить расчеты с точностью до ведущего нелагранжева вклада в силу самодействия, подобного силе Лоренца–Дирака в случае массивной точечной заряженной частицы. На рисунке нужные нам вклады в уравнения движения центра масс обозначены тремя точками на третьей линии, отвечающей порядку ξ^2 . Остальными вкладками, с учетом оценок (40), можно пренебречь.

Итак, мы будем изучать эффективную динамику точечного нейтрального диполя. Эта модель может быть сформулирована без апелляции к некоторой системе, состоящей из заряженных частиц. Функционал действия для модели точечного диполя получается разложением лагранжиана действия (1) по степеням ξ и удержанием в нем ведущего порядка⁸⁾:

$$S[z(\tau), A(x)] = - \int d\tau \left(M\sqrt{\dot{z}^2} + F_{\mu\nu} d^\mu \dot{z}^\nu \right) - \frac{1}{16\pi} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (41)$$

Это действие определяет только уравнения движения центра масс диполя. Эволюцию вектора дипольного момента необходимо находить из других соображений, например, как мы в этом разделе, представляя диполь в виде системы заряженных частиц.

Как видно из рисунка, два из трех вкладов в силу самодействия точечного диполя являются лагранжевыми. Соответствующие лагранжианы легко получаются из (39), они имеют вид

$$L_{q=0} = -\frac{\varepsilon^{-3/2}}{2} d^2 + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{16} \left[4\dot{d}^2 - 3d^2 \ddot{z}^2 - 4(\dot{z}^\rho \dot{d}_\rho)^2 - 8\dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \ddot{z}^\sigma \dot{d}_\sigma + 2(\ddot{z}^\rho \dot{d}_\rho)^2 \right]. \quad (42)$$

⁸⁾ Релятивистски-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие точечного диполя с электромагнитным полем, $L = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, где $\sigma^{\mu\nu}$ — тензор дипольных моментов, известен давно (см., например, [11]). Однако уравнения движения, следующие из него, зависят от того, как будет представлен тензор дипольных моментов. Например, такой лагранжиан рассматривался в работе [34], где неявно предполагалось, что $d^\rho F_{\rho\mu}$ есть функция от $z(\tau)$, т. е., фактически, что $d_\mu = d_\mu(z(\tau))$, что привело к уравнениям движения, отличным от (45). Другие уравнения движения получаются также, если предположить [11], что $L = \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu}(\tau) F_{\mu\nu}(z(\tau)) \sqrt{\dot{z}^2(\tau)}$.

Таким образом, нам остается найти только третий, нелагранжевый вклад. Довольно громоздкие вычисления, аналогичные вычислениям для случая заряженной системы частиц, рассмотренного выше, показывают, что нелагранжевая часть силы самодействия выглядит как

$$F_\mu^{rr} = \frac{4}{15} d^2 \dot{z}^\mu + \frac{4}{3} (dd) \dot{z}^\mu + \frac{2}{3} \left[2d\ddot{d} + \dot{d}^2 + 2(\dot{z}\dot{d})^2 + \dot{z}^2 d^2 \right] \ddot{z}^\mu + \frac{2}{3} \left\{ d\ddot{d} + \frac{d}{d\tau} \left[3(\dot{z}\dot{d})^2 + \frac{3}{2} \dot{z}^2 d^2 \right] \right\} \dot{z}^\mu - \frac{2}{3} \left\{ \dot{d}\ddot{d} - (\ddot{z}\dot{d} + \dot{z}\ddot{d}) - 2(\dot{z}\dot{d})(\dot{z}\ddot{d}) - 2(\dot{z}\dot{d})(\ddot{z}\dot{d} + \dot{z}\ddot{d}) - \dot{z}^2 [2d\ddot{d} + 6(\dot{z}\dot{d})^2] - 5(\ddot{z}\ddot{z})(dd) + d^2 \left[\frac{2}{5} \dot{z}^\mu \dot{z}^\mu - \dot{z}^4 \right] \right\} \dot{z}^\mu - \frac{2}{3} \left[\ddot{z}\ddot{d} + \ddot{z}\ddot{d} + \dot{z}\dot{d} + \frac{1}{5} \dot{z}^\mu \dot{z}^\mu d + \dot{z}^2 (\dot{z}\dot{d} - \dot{z}\ddot{d}) \right] d_\mu - \frac{2}{3} \left[\dot{z}\dot{d} - 2\dot{z}^2 (\dot{z}\dot{d}) \right] \dot{d}_\mu + \frac{2}{3} (\dot{z}\dot{d}) \ddot{d}_\mu - \frac{2}{3} (\dot{z}\dot{d}) \ddot{d}_\mu. \quad (43)$$

Выпишем также лагранжевый вклад, получающийся варьированием функционала действия с лагранжианом (42):

$$F_\mu^{lagr} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\varepsilon^{-3/2}}{2} d^2 \dot{z}^\mu + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{16} \times \left[(4\dot{d}^2 - 6(\dot{z}\dot{d})^2) \dot{z}^\mu - 9d^2 \dot{z}^2 \dot{z}^\mu - 12(dd) \dot{z}^\mu - 6d^2 \dot{z}^\mu + 4(\dot{z}\dot{d}) \dot{d}_\mu + 4(\dot{z}\dot{d} - \dot{z}\ddot{d}) d_\mu \right] \right\}. \quad (44)$$

Собирая все слагаемые вместе, приходим к следующим эффективным уравнениям движения центра масс точечного диполя:

$$M \ddot{z}_\mu = F_\mu^{lagr} + F_\mu^{rr} + F_{\mu\nu} \dot{d}^\nu + d^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu. \quad (45)$$

Очевидно, что перенормировка массы (25) в данном случае не нужна. Уравнения движения центра масс диполя без учета силы самодействия можно было получить, минимизируя функционал действия (41).

Интересно отметить, что из формулы (45) следует, что точечный диполь, даже без учета самодействия изменяющий свой дипольный момент (например, вращающийся диполь), «чувствует» постоянное однородное внешнее электрическое поле. Этот эффект является чисто релятивистским, поскольку обусловлен изменением нулевой компоненты дипольного момента. В нерелятивистском пределе в силе

$F_{\mu\nu}\dot{d}^\nu$ остается только слагаемое вида $\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{H}$, которое давно известно (см., например, [35, 36]). Кроме того, если 4-вектор дипольного момента изменяется периодически, то полный импульс, переданный диполю за один период при помощи такой силы, будет равен нулю.

С той же точностью, что и эффективные уравнения движения центра масс (45), уравнения, определяющие эволюцию дипольного момента, можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\dot{d}_\mu^s + (q_s + \ddot{z}^\rho d_\rho^s) \dot{z}_\mu \right] = \\ = -\lambda_s q_s \left\{ \varepsilon^{-3/2} d_\mu + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{4} \times \right. \\ \times \left(2\ddot{d}_\mu + \frac{3}{2} \ddot{z}^2 d_\mu - \dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \ddot{z}_\mu - 2\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho \dot{z}_\mu \right) + \\ \left. + \frac{2}{3} \left[\dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \ddot{z}_\mu + (\ddot{z}^\rho \dot{d}_\rho + 2\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho) \dot{z}_\mu + \right. \right. \\ \left. \left. + (\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho + 2\ddot{z}^2 \dot{z}^\rho \dot{d}_\rho) \dot{z}_\mu - \ddot{z}^\rho \dot{z}_\rho d_\mu - \ddot{z}^2 \dot{d}_\mu - \ddot{d}_\mu \right] \right\} + \\ + \lambda_s \left[F_{\mu\nu} (q_s \dot{z}^\nu + \dot{d}_s^\nu) + d_s^\rho \partial_\rho F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \right]. \quad (46) \end{aligned}$$

Выражение в левой части уравнения, вклады при $\varepsilon^{-3/2}$, $\varepsilon^{-1/2}$ и слагаемое на последней строке тривиальным образом получаются из (24), в то время как при выводе слагаемого, ответственного за излучение диполя, пришлось учитывать следующие члены разложения вкладов (17) по степеням параметра регуляризации.

Таким образом, мы получили уравнения движения эффективной модели для нейтрального точечного объекта с дипольным моментом. Заметим, что аналогичным образом могут быть получены уравнения движения эффективной модели для нейтральной системы с магнитным моментом и обращающимся в нуль дипольным моментом.

Полученная эффективная модель существенно упрощается, если последними двумя слагаемыми в последней строке формулы (46), пропорциональными d_s^μ , можно пренебречь по сравнению с первым в той же строке. Такое предположение выглядит разумным, если вспомнить, что мы рассматриваем предел $\xi \rightarrow 0$. Тогда, суммируя уравнения (46) по сортам частиц, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\dot{d}_\mu - \dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \dot{z}_\mu \right] = -\alpha \left\{ \varepsilon^{-3/2} d_\mu + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{4} \left(2\ddot{d}_\mu + \frac{3}{2} \ddot{z}^2 d_\mu - \dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \ddot{z}_\mu - 2\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho \dot{z}_\mu \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \left[\dot{z}^\rho \dot{d}_\rho \ddot{z}_\mu + (\ddot{z}^\rho \dot{d}_\rho + 2\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho) \dot{z}_\mu + \right. \right. \\ \left. \left. + (\dot{z}^\rho \ddot{d}_\rho + 2\ddot{z}^2 \dot{z}^\rho \dot{d}_\rho) \dot{z}_\mu - \ddot{z}^\rho \dot{z}_\rho d_\mu - \ddot{z}^2 \dot{d}_\mu - \ddot{d}_\mu \right] \right\} + \\ + \alpha F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu. \quad (47) \end{aligned}$$

Вся информация о сортах частиц, из которых состоит система, теперь содержится в одной положительной константе

$$\alpha := \sum_{s=1}^K q_s \lambda_s.$$

Можно рассматривать эти уравнения как «дипольный» аналог уравнений Баргманна–Мишеля–Теллеги. Тем не менее, уравнения (47) не являются их простой переформулировкой.

Отметим интересное свойство уравнений (47): их правая часть ортогональна 4-вектору скорости центра масс \dot{z}^μ . Это свойство является следствием репараметризационной инвариантности исходной модели (1). Поэтому из уравнений эволюции дипольного момента (47) немедленно следует, что

$$\dot{z}^\rho \dot{d}_\rho = 0. \quad (48)$$

Как мы видим, уравнения движения эффективной модели содержат высшие производные полей $z(\tau)$ и $d(\tau)$, что, вообще говоря, приводит к существованию у таких уравнений нефизических решений (ниже будет приведен явный пример). Однако все эти решения противоречат нашим предположениям, исходя из которых мы строили эффективную модель. Чтобы избавиться от нефизических решений можно поступить так же, как было сделано в случае заряженной системы частиц, а именно, пертурбативно понизить порядок уравнений. Для этого можно, например, предположить, что выполнено условие

$$d^2/\varepsilon^{3/2} \ll M, \quad (49)$$

т. е. энергия самодействия точечного диполя много меньше его энергии покоя без поля. Тогда все высшие производные от $z(\tau)$ пертурбативно выражаются через низшие при помощи уравнений (45), из которых исключена сила самодействия. Что касается \ddot{d}_μ , то аналогичная процедура может быть применена к уравнениям (46) или (47) в предположении, что величина $\lambda_s q_s l^2/\varepsilon^{3/2}$, или, соответственно, $\alpha l^2/\varepsilon^{3/2}$, порядка единицы или меньше.

3.7. Полная мощность излучения

Извлечем некоторую физическую информацию из довольно громоздких уравнений (45), (46) и (47).

Во-первых, как можно видеть из выражения для силы реакции излучения (43), полная излученная мощность при малых ускорениях центра масс равна

$$\mathcal{P}_\mu = \frac{2}{3} \dot{d}^{\rho} \ddot{d}_\rho \dot{z}_\mu \quad (50)$$

и совпадает с хорошо известным нерелятивистским выражением (см., например, [21]) для дипольного излучения. Полную мощность излучения при сравнительно больших ускорениях эффективные уравнения движения (45) найти не позволяют, поскольку из них не ясно, что относится к связанному импульсу, а что к излученной мощности.

Чтобы провести такое разбиение, необходимо вернуться к исходной модели (1) или (41), определить для нее тензор энергии-импульса излучения и посчитать его поток через трехмерную трубку, окружающую мировую линию частицы. Выражение для полной мощности излучения диполя выглядит как⁹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu = & \frac{2}{5} \left[\frac{1}{3} d\ddot{d} - \frac{1}{7} \dot{z}^2 d^2 + \frac{8}{21} (\dot{z}\dot{d})^2 \right] \ddot{z}_\mu - \\ & - \left[\frac{4}{15} (d\ddot{d} - (\dot{z}\dot{d})(\dot{z}\ddot{d})) - \frac{4}{105} (\dot{z}\dot{d})(\ddot{z}\dot{d} + \dot{z}\ddot{d}) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{7} \frac{d}{d\tau} (\dot{z}^2 d^2) \right] \dot{z}_\mu - \frac{2}{3} \left[\dot{d}^2 - (\dot{z}\dot{d})^2 + \right. \\ & \quad \left. + \dot{z}^2 \left(\frac{2}{5} d\ddot{d} - \frac{8}{5} \dot{d}^2 + 6(\dot{z}\dot{d})^2 \right) + d^2 \left(\dot{z}^4 - \frac{2}{5} \dot{z}^2 \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{5} (\dot{z}\dot{d}) (\ddot{z}\dot{d} - 9\dot{z}\ddot{d}) - \frac{7}{5} (\ddot{z}\ddot{z})(d\dot{d}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{5} (\dot{z}\dot{d}) (2\dot{z}\ddot{d} - 3\dot{z}\dot{d}) \right] \dot{z}_\mu - \frac{4}{5} \left[\frac{2}{3} \dot{z}\dot{d}\ddot{d} - \frac{13}{21} (\dot{z}\dot{d})(\ddot{z}\dot{z}) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\dot{z}^2}{7} \left(\frac{11}{3} \dot{z}\ddot{d} - 8\dot{z}\dot{d} \right) \right] d_\mu - \frac{2}{15} \left[7\ddot{z}\ddot{d} - \frac{83}{7} \dot{z}^2 (\dot{z}\dot{d}) \right] \dot{d}_\mu - \\ & \quad - \frac{2}{15} [\dot{z}\ddot{d} - \dot{z}\dot{d}] \ddot{d}_\mu. \quad (51) \end{aligned}$$

Можно доказать, что в любой модели теории поля, описывающей взаимодействие точечного источ-

⁹⁾ В цикле работ [37] было получено выражение для мощности излучения точечной частицы, обладающей магнитным моментом. Оно совпадает с выражением (51) с точностью до некоторых знаков и очевидных опечаток. Это не удивительно, поскольку поле точечного магнетона получается из поля точечного диполя при помощи дуализации [38] $F_{\mu\nu} \rightarrow *F_{\mu\nu}$, что легко усмотреть, например, из вида действия (41). При этом можно доказать, что вид тензора энергии-импульса излучения точечного источника в классической электродинамике в $d = 4$ не зависит от того, построен он по F или по $*F$.

ника с полями, подчиняющимися принципу суперпозиции (как, например, в электродинамике), функция Грина которых сосредоточена на световом конусе, связанный импульс точечного источника будет локальной величиной, т.е. выражаться через конечное число полей и их производных. В соответствии с этим утверждением, эффективные уравнения движения центра масс (45) должны быть представимы в виде

$$\frac{d}{d\tau} [M\dot{z}_\mu + P_\mu^{bound}] = -\mathcal{P}_\mu, \quad (52)$$

где P_μ^{bound} — задающийся локальным выражением 4-импульс, связанный с «одетой» частицей. Действительно, можно убедиться, что

$$P_\mu^{bound} = P_\mu^{lagr} + P_\mu^{rr}, \quad (53)$$

где P_μ^{lagr} — выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (44) для F_μ^{lagr} , взятое с обратным знаком, а «дипольный» аналог члена Шотта выглядит как

$$\begin{aligned} P_\mu^{rr} = & -\frac{4}{15} d^2 \dot{z}^{(4)}_\mu - \frac{4}{5} (d\dot{d}) \dot{z}_\mu - \\ & - \frac{2}{3} \left[d\ddot{d} - \frac{1}{5} \dot{d}^2 + \frac{32}{35} \dot{z}^2 d^2 + \frac{78}{35} (\dot{z}\dot{d})^2 \right] \dot{z}_\mu + \\ & + \frac{2}{3} \left[\dot{d}\ddot{d} + \frac{2}{5} (\dot{z}\dot{d})(\dot{z}\ddot{d}) - \frac{d}{d\tau} \left((\dot{z}\dot{d})^2 + \frac{4}{5} \dot{z}^2 d^2 \right) \right] \dot{z}_\mu - \\ & - \frac{2}{15} \left[\dot{z}\ddot{d} - 2\dot{z}\dot{d} - \ddot{z}\dot{d} + \frac{13}{7} \dot{z}^2 (\dot{z}\dot{d}) \right] d_\mu + \\ & + \frac{2}{15} [\dot{z}\ddot{d} + 4\dot{z}\dot{d}] \dot{d}_\mu + \frac{2}{3} (\dot{z}\dot{d}) \ddot{d}_\mu. \quad (54) \end{aligned}$$

Тот факт, что сила реакции излучения (43) действительно отличается от полной мощности излучения (51) на полную производную от локальной величины, можно рассматривать как косвенный способ контроля правильности полученных выражений.

Также отметим, что в нерелятивистском пределе в выражении для мощности излучения (51) остаются только слагаемые с наименьшим числом производных, поскольку после восстановления в формулах скорости света, каждая производная по τ будет содержать c^{-1} . В результате имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu = & \frac{2}{3} \left[\ddot{\mathbf{d}}^2 - \frac{1}{10} \frac{d^4 \mathbf{d}^2}{dt^4} \right] \dot{z}_\mu - \\ & - \frac{2}{15} \left[4 \dot{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{d}} + \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{z}} \mathbf{d} + 10 \dot{\mathbf{z}} \ddot{\mathbf{d}}) \right] d_\mu - \\ & - \frac{2}{15} \frac{d}{dt} \left[\mathbf{d} \ddot{\mathbf{d}} \dot{z}_\mu - (3 \dot{\mathbf{d}} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{d} \ddot{\mathbf{d}}) \dot{z}_\mu - \right. \\ & \left. - (4 \dot{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{z}} \mathbf{d} + 10 \dot{\mathbf{z}} \ddot{\mathbf{d}}) d_\mu + (\ddot{\mathbf{z}} \mathbf{d} + 3 \dot{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{d}}) \dot{d}_\mu \right], \quad (55) \end{aligned}$$

где точки означают производные по лабораторному времени t . В частности, из этой формулы следует, что средняя энергия, излученная точечным диполем в единицу времени, равна $(2/3)\overline{\dot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}}}$ [21].

3.8. Свободная динамика

Заканчивая рассмотрение эффективной модели точечного диполя, опишем ее свободную динамику. В отсутствие внешних полей и при нулевом ускорении центра масс уравнения движения (45), (46), (47) редуцируются к системе¹⁰⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\varepsilon^{-1/2}}{4} \dot{d}^2 + \frac{\varepsilon^{-3/2}}{2} d^2 \right] &= \frac{2}{3} \dot{d}^{\rho} \ddot{d}_{\rho}, \\ \left(1 + \frac{\alpha \varepsilon^{-1/2}}{2} \right) \ddot{d}_{\mu} &= -\alpha \varepsilon^{-3/2} d_{\mu} + \frac{2\alpha}{3} \ddot{d}_{\mu}, \end{aligned} \quad (56)$$

соответственно. Для того чтобы эта система уравнений обладала нетривиальными (отличными от нуля) решениями с характерным масштабом изменения бóльшим либо равным l , необходимо чтобы положительная константа α удовлетворяла условиям

$$\alpha^2/\varepsilon \ll \varepsilon^{1/2}/l \ll 1. \quad (57)$$

Напомним, что указанное выше ограничение на масштаб флуктуаций полей $z(\tau)$ и $d(\tau)$ возникало при выводе этих уравнений.

Если дополнительно потребовать выполнения равенства

$$d^2 = \text{const}, \quad (58)$$

то первое уравнение системы (56) будет являться следствием второго. Как уже обсуждалось выше, уравнения (56) необходимо решать пертурбативно, используя оценку (57), но в данном случае их можно решить точно и сделать приближения прямо в общем решении. Точные выражения для характеристических чисел, отвечающих второму уравнению в (56), довольно громоздки, и мы выпишем только их приближенные значения (с учетом условия (57)):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &\approx \pm i\omega - \gamma, \quad \lambda_3 \approx \frac{\omega^2}{2\gamma}, \\ \omega^2 &= \tilde{\alpha} \varepsilon^{-3/2}, \quad \gamma = \frac{\tilde{\alpha}^2}{3} \varepsilon^{-3/2}, \\ \tilde{\alpha} &= \frac{2\alpha}{2 + \alpha \varepsilon^{-1/2}} \approx \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \varepsilon^{-1/2}. \end{aligned} \quad (59)$$

¹⁰⁾ Второе уравнение в системе (56) напоминает уравнения движения гармонического осциллятора с трением. Существование таких осцилляций в нерелятивистских моделях заряженных частиц с внутренней структурой известно давно (см., например, [39]).

Решение, соответствующее третьему характеристическому числу, называется самоускоряющимся решением, так как оно экспоненциально возрастает со временем. Легко видеть, что $\lambda_3 \gg l^{-1}$, поэтому мы должны отбросить это решение, поскольку оно не удовлетворяет нашему исходному предположению о характерном времени изменения полей $\xi_{\mu}^{\alpha}(\tau)$. Согласно оценке (57), коэффициент затухания γ мал, т. е. $\gamma \ll l^{-1}$, по этой причине решение второго уравнения системы (56) вида

$$\begin{aligned} d_{\mu}(\tau) &= [a_{\mu} \cos(\omega\tau) + b_{\mu} \sin(\omega\tau)] e^{-\gamma\tau}, \\ a^2 &= b^2, \quad a_{\rho} b^{\rho} = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

удовлетворяет требованию (58) с той же точностью, с какой верны сами эффективные уравнения движения. Это решение описывает свободный медленно вращающийся излучающий диполь.

Знание частоты вращения диполя и коэффициента затухания позволяют определить значение перенормированной константы α по формуле

$$\tilde{\alpha} = 3\gamma\omega^{-2}, \quad (61)$$

которая, напомним, характеризует внутреннюю структуру точечного диполя.

4. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В этом разделе мы рассмотрим пуанкаре-инвариантный гидродинамический подход к описанию системы заряженных частиц, которую можно представлять себе как релятивистскую идеальную заряженную жидкость (газ). При некоторых предположениях, которые будут подробно изложены ниже, гидродинамический подход к описанию эффективной динамики окажется эквивалентным “частичному” подходу, изложенному в предыдущем разделе.

Вид функционала действия (1) для системы частиц подсказывает естественную общеквариантную гидродинамическую формулировку.

Пусть задана некоторая 3-брана N , вложенная диффеоморфизмом $x^{\mu}(\tau)$ в пространство Минковского $\mathbb{R}^{3,1}$. Если брана N — это само пространство–время, то о диффеоморфизме $x^{\mu}(\tau)$ можно думать как о некотором общекординатном преобразовании в нем. Введем векторные плотности $\rho^i(\tau)$ и $e^i(\tau)$ на бране N , которые будут описывать плотности потоков массы и электрического заряда, со-

ответственно. Тогда гидродинамическое обобщение действия (1) запишется как¹¹⁾

$$S[x(\tau), A(x)] = - \int_N d^4\tau \sqrt{\rho^i \rho^j h_{ij}} - \int_{\mathbb{R}^{3,1}} d^4x \left[A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (62)$$

где $h_{ij} = \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \eta_{\mu\nu}$ — индуцированная метрика на бране N . Эта метрика плоская, так как пространство–время плоское.

Ввиду того, что мы рассматриваем локализованную в пространстве жидкость, будем считать, что векторные плотности $\rho^i(\tau)$ и $e^i(\tau)$ обращаются в нуль на пространственной бесконечности. Плотность электрического тока в объемлющем пространстве (т. е. в пространстве–времени) имеет вид

$$j^\mu(x) = \int_N d^4\tau \delta^4(x - x(\tau)) e^i(\tau) \partial_i x^\mu(\tau). \quad (63)$$

Конечно, в этой формуле можно проинтегрировать δ -функцию, получив в результате якобиан, но мы оставим плотность тока в таком виде, чтобы лучше прослеживалась аналогия с «частичным» подходом, где плотность электрического тока имела вид (2).

Другими словами, функционал действия (62) задает динамику на бесконечномерной группе диффеоморфизмов $x(\tau^0, \boldsymbol{\tau})$ пространственноподобных гиперповерхностей: $\tau^0 = \text{const}$ и ее образа в пространстве–времени¹²⁾.

Требование инвариантности функционала действия (62) относительно калибровочных преобразований электромагнитных потенциалов налагает ограничение на возможный вид плотности $e^i(\tau)$ в виде закона сохранения заряда

$$\partial_i e^i = 0. \quad (64)$$

При выполнении этого условия уравнения движения материи, следующие из действия (62), запишутся как

$$\partial_i \left(\frac{\rho^i \rho^j \partial_j x_\mu}{\sqrt{\rho^2}} \right) = F_{\mu\nu} e^i \partial_i x^\nu. \quad (65)$$

¹¹⁾ Функционал действия, описывающий взаимодействие бран с (не)абелевыми калибровочными полями, был впервые предложен в работе [40].

¹²⁾ Теоретико-групповой подход к нерелятивистской гидродинамике можно найти, например, в [41]. В этой работе уравнения движения жидкости рассматриваются как уравнения геодезических на бесконечномерной группе диффеоморфизмов, генерируемых потоками жидкости, которая снабжена право-инвариантной римановой метрикой.

Тензор энергии–импульса материи

$$T_{mat}^{\mu\nu} = \int d^4\tau \delta^4(x - x(\tau)) \frac{\rho^i \rho^j}{\sqrt{\rho^2}} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \quad (66)$$

есть не что иное, как тензор энергии–импульса релятивистской пыли¹³⁾ (см., например, [47]).

В определенном смысле гидродинамический подход (62) редуцируется к модели частиц в предположении, что

$$e^i(\tau) = \lambda(\tau) \rho^i(\tau), \quad (67)$$

где $\lambda(\tau)$ — некоторая скалярная функция на N , описывающая отношение заряда к массе. В этом случае из уравнений движения (65) следует закон сохранения массы

$$\partial_i \rho^i = 0, \quad \rho^i \partial_i \lambda = 0. \quad (68)$$

Поскольку в нашем подходе поля $\rho^i(\tau)$ и $\lambda(\tau)$ не являются динамическими, уравнения (68) необходимо рассматривать как ограничения на их возможный выбор. При выполнении закона сохранения массы уравнения движения (65) обладают частичной репараметризационной инвариантностью, которая влечет их ортогональность векторному полю $\rho^i \partial_i x^\mu$.

4.1. Мультипольные моменты

Теперь, имея в виду предположение (67), перейдем к определению мультиполей для релятивистских заряженных жидкостей. Пусть $z^\mu(\sigma)$ — некоторая мировая линия в пространстве Минковского с заданной на ней натуральной параметризацией. Тогда, аналогично (6), потребуем, чтобы¹⁴⁾

$$\dot{z}_\rho(\tau^0) \xi^\rho(\tau) = 0, \quad \dot{z}^2(\tau^0) = 1, \quad (69)$$

где

$$\xi^\mu(\tau) = x^\mu(\tau^0, \boldsymbol{\tau}) - z^\mu(\tau^0),$$

¹³⁾ Функционал действия (62) естественным образом обобщается на случай идеальной жидкости с давлением (см. другие примеры лагранжианов в работах [42–46]). Вводя на бране N скалярную плотность $p(\tau)$, характеризующую давление жидкости, для действия идеальной жидкости можем записать

$$S[x(\tau)] = - \int_N d^4\tau \left[\sqrt{\rho^2} + p \ln \sqrt{\frac{\rho^2}{-h}} \right],$$

где h — детерминант индуцированной метрики, а $\rho^i(\tau)$ теперь описывает поток внутренней энергии.

¹⁴⁾ Как и в случае частиц, мы считаем, что условие (69) выполнено в малой окрестности мировой линии $z(\tau)$, где $\rho^i \partial_i x^\mu$ отлично от нуля.

а точки означают производные по τ^0 . Условие (69) частично фиксирует параметризацию на бране N и расслаивает ее на семейство пространственноподобных гиперповерхностей $\tau^0 = \text{const}$. Поэтому условие (69) можно рассматривать как калибровку, фиксирующую репараметризационную инвариантность модели (62). Траектория центра масс определяется уравнением

$$\int d\tau \rho^0(\tau) \xi^\mu(\tau) = 0, \quad (70)$$

а определение мультиполей (9) переходит в

$$\int d\tau e^0(\tau) \xi_{\mu_1}(\tau) \dots \xi_{\mu_n}(\tau), \quad (71)$$

$$\int d\tau e^i(\tau) \xi_{\mu_1}(\tau) \dots \xi_{[\mu_{n-1}}(\tau) \partial_i \xi_{\rho}(\tau) \text{pr}_{\mu_n]}^\rho.$$

Легко видеть, что потенциалы Льенара–Вихерта выражаются через мультипольные моменты и их производные. Действительно, разлагая δ -функцию в гидродинамическом аналоге формулы (5) по степеням ξ , мы получим выражения, содержащие $\xi_\mu(\tau)$:

$$\int d\tau \delta^{(k)}((x - z(\tau^0))^2) \xi_{\mu_1}(\tau) \dots \xi_{\mu_{n-1}}(\tau) \times \\ \times e^i(\tau) \partial_i (z_{\mu_n}(\tau^0) + \xi_{\mu_n}(\tau)), \quad (72)$$

что, очевидно, переписывается через мультипольные моменты (71).

Что касается механических моментов, то из уравнений движения частиц (3) легко увидеть общее правило соответствия между механическими моментами в «частичном» и гидродинамическом подходах:

$$\sum_a \leftrightarrow \int d\tau, \quad m_a \leftrightarrow \rho^0, \quad \frac{d}{d\tau} \leftrightarrow \frac{\rho^i}{\rho^0} \partial_i. \quad (73)$$

Существующий в этом правиле произвол фиксируется требованием, чтобы перед осуществлением замены (73) все массы m_a были вынесены из-под дифференцирования по τ . Например, тензор внутренних напряжений, возникший в формуле (34), переписется согласно этому правилу как

$$T_{\mu\nu} = \int d\tau \frac{\rho^i \rho^j}{\rho^0} \partial_i \xi_\rho \partial_j \xi_\sigma \text{pr}_\mu^\rho \text{pr}_\nu^\sigma. \quad (74)$$

4.2. Доказательство эквивалентности двух подходов

Далее мы не будем повторять вычислений предыдущего подраздела, а вместо этого покажем, что получающиеся уравнения движения эффективной модели идентичны полученным в рамках модели частиц. Кроме того, несмотря на это утверждение, которое мы докажем ниже, уравнения движения центра

масс (26) были еще раз выведены автором уже с использованием гидродинамического подхода.

Аналогично изложенным выше рассуждениям, касающимся потенциалов Льенара–Вихерта, может быть доказано, что уравнения движения центра масс выражаются через механические моменты и мультиполи (71).

После введения сортов эволюционные уравнения мультипольных моментов, отвечающих каждому сорту, как механических, так и электрических (магнитных), выражаются через собственные мультипольные моменты. В гидродинамике под сортами понимаются области на гиперповерхностях $\tau^0 = \text{const}$ постоянного удельного заряда $\lambda(\tau^0, \tau)$.

Поскольку гидродинамические уравнения движения и выражения для мультиполей переходят в соответствующие выражения «частичного» подхода в предположении, что

$$\rho^i(\tau) = (\rho^0(\tau), 0), \quad (75)$$

в силу независимости мультипольных моментов, упомянутые выше уравнения движения идентичны уравнениям движения, полученным в предыдущем разделе. Стоит отметить, что перенормировка массы в гидродинамическом подходе выглядит как

$$\tilde{\rho}^i = \rho^i + \frac{e^i q}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \partial_i \tilde{\rho}^i = 0. \quad (76)$$

Автор признателен И. В. Горбунову и А. А. Шарпову за внимательное прочтение и конструктивную критику черновой версии этой работы, а также В. Г. Багрову за плодотворное обсуждение некоторых ее разделов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-17352), гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-5103.2006.2, фонда некоммерческих программ «Династия» и Международного центра фундаментальной физики в Москве.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим асимптотическое разложение по параметру регуляризации ε интеграла

$$\int ds \theta(X^0(s)) \delta(X^2(s) - \varepsilon) \varphi(s), \quad (77)$$

где

$$X_\mu(s) = z_\mu(\tau) - z_\mu(\tau + s),$$

а $\varphi(s)$ — некоторая гладкая функция.

Поскольку точка $s = 0$ является невырожденной критической точкой функции $X^2(s)$, можно ввести координату t на мировой линии частицы, так чтобы $X^2(s(t)) = t^2$. Тогда интеграл (77) запишется как

$$\int dt \theta(-t) \delta(t^2 - \varepsilon) f(t), \quad f(t) = \varphi(s(t)) \frac{ds}{dt}. \quad (78)$$

Используя стандартные правила интегрирования δ -функции, получаем

$$\begin{aligned} \int dt \theta(-t) \delta(t^2 - \varepsilon) f(t) &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k f(0)}{dt^k} \varepsilon^{(k-1)/2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Учитывая дифференциальные следствия равенства $X^2(s(t)) = t^2$, несложно получить полезные соотношения:

$$\begin{aligned} f(0) &= \varphi(0), \\ f'(0) &= \dot{\varphi}(0), \\ f''(0) &= \ddot{\varphi}(0) + \frac{\dot{z}^2}{4} \varphi(0), \\ f'''(0) &= \ddot{\varphi}'(0) + \dot{z}^2 \dot{\varphi}(0) + \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho \varphi(0), \\ f^{(4)}(0) &= \overset{(4)}{\varphi}(0) + \frac{5}{2} \dot{z}^2 \ddot{\varphi}(0) + 5 \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho \ddot{\varphi}(0) + \\ &+ \left(\frac{3}{2} \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho + \frac{4}{3} \dot{z}^2 + \frac{35}{48} (\dot{z}^2)^2 \right) \varphi(0), \\ f^{(5)}(0) &= \overset{(5)}{\varphi}(0) + 5 \dot{z}^2 \ddot{\varphi}'(0) + 15 \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho \ddot{\varphi}'(0) + \\ &+ \left(9 \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho + 8 \dot{z}^2 + 5 (\dot{z}^2)^2 \right) \dot{\varphi}(0) + \\ &+ \left(5 \dot{z}^\rho \dot{z}'_\rho + 2 \dot{z}^\rho \overset{(5)}{z}'_\rho + 10 \dot{z}^2 \dot{z}'^\rho \dot{z}'_\rho \right) \varphi(0), \end{aligned} \quad (80)$$

где в левых частях равенств производные берутся по t , а в правых — по натуральному параметру τ .

Асимптотическое разложение по параметру ε интегралов

$$\int ds \theta(X^0(s)) \delta^{(k)}(X^2(s) - \varepsilon) \varphi(s) \quad (81)$$

получается дифференцированием по $-\varepsilon$ асимптотического разложения (79) интеграла (77). Используя эти формулы, легко найти асимптотическое разложение по параметру регуляризации напряженности поля (16). Например, для первого слагаемого в формуле (17) необходимо взять

$$\varphi(s) = (X_{[\mu} + \xi_{[\mu}^{ab} \dot{x}_{\nu]}^b).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Lorentz, *Theory of Electrons*, В. G. Teubner, Leipzig (1909); Г. А. Лоренц, *Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения*, Гостехтеориздат, Москва (1956).
2. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **167**, 148 (1938).
3. P. O. Kazinski and A. A. Sharapov, Class. Quant. Grav. **20**, 2715 (2003).
4. B. S. DeWitt and R. W. Brehme, Ann. Phys. **9**, 220 (1960).
5. J. M. Hobbs, Ann. Phys. **47**, 141 (1968).
6. Б. П. Косяков, ТМФ **119**, 119 (1999).
7. P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D **66**, 025017 (2002).
8. J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 243 (1926).
9. Н. J. Bhabha and H. C. Corben, Proc. Roy. Soc. London A **178**, 273 (1941).
10. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
11. A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, New York (1964).
12. P. E. G. Rowe and G. T. Rowe, Phys. Rep. **149**, 287 (1987).
13. A. O. Barut and N. Unal, Phys. Rev. A **40**, 5404 (1989).
14. S. L. Lyakhovich, A. Yu. Segal, and A. A. Sharapov, Phys. Rev. D **54**, 5223 (1996).
15. A. Frydryszak, E-print archives, hep-th/9601020.
16. В. Г. Багров, Г. С. Бисноватый-Коган, В. А. Бордо-вицын, А. В. Борисов, О. Ф. Дорофеев, В. Ч. Жуковский, Ю. Л. Пивоваров, О. В. Шорохов, В. Я. Эпп, *Теория излучения релятивистских частиц*, Физматлит, Москва (2002).
17. A. Ori and E. Rosenthal, J. Math. Phys. **45**, 2347 (2004).
18. П. О. Казинский, ЖЭТФ **128**, 312 (2005).
19. J. M. Sánchez and E. Poisson, E-print archives, gr-qc/0512111.
20. A. I. Harte, Phys. Rev. D **73**, 065006 (2006).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматлит, Москва (2001).

22. N. Itoh, Phys. Rev. A **43**, 1002 (1991).
23. R. H. Good, Jr., Phys. Rev. **125**, 2112 (1962).
24. S. K. Wong, Nuovo Cimento **65**, 689 (1970).
25. C. Teitelboim, Phys. Rev. D **1**, 1572 (1970); **3**, 297 (1971).
26. Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва (1964).
27. K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
28. Ш. Ма, *Современная теория критических явлений*, Мир, Москва (1980).
29. П. О. Казинский, А. А. Шарипов, ТМФ **143**, 375 (2005).
30. В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, МЦНМО (2002).
31. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ **20**, 211 (1950).
32. M. S. Plyuschaу, Phys. Lett. B **253**, 50 (1991).
33. V. V. Nesterenko, A. Feoli, and G. Scarpetta, Class. Quant. Grav. **13**, 1201 (1996).
34. J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **85**, 1354 (2000).
35. M. Wilkens, Phys. Rev. Lett. **72**, 5 (1994).
36. G. Spavieri, Phys. Rev. A **59**, 3194 (1999).
37. В. А. Бордовицын, Н. Н. Бызов, Г. К. Разина, В. Я. Эпп, Изв. ВУЗов. Физика **21**, 557 (1978); В. А. Бордовицын, Н. Н. Бызов, Г. К. Разина, Изв. ВУЗов. Физика **23**, 454 (1980); **23**, 861 (1980).
38. В. А. Бордовицын, В. С. Гущина, И. Н. Жукова, Изв. ВУЗов. Физика **36**, 148 (1993); **36**, 247 (1993); В. А. Бордовицын, В. С. Гущина, Изв. ВУЗов. Физика **37**, 49 (1994); **38**, 155 (1995); **38**, 293 (1995).
39. D. Bohm and M. Weinstein, Phys. Rev. **74**, 1789 (1948).
40. A. P. Balachandran, B. S. Skagerstam, and A. Stern, Phys. Rev. D **20**, 439 (1979).
41. V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer, New York (1998).
42. A. H. Taub, Phys. Rev. **94**, 1468 (1954).
43. B. F. Schutz, Jr., Phys. Rev. D **2**, 2762 (1970).
44. D. Brown, Class. Quant. Grav. **10**, 1579 (1993).
45. P. Hájíček and J. Kijowski, Phys. Rev. D **57**, 914 (1998); **61**, 129901(E) (2000) (erratum).
46. R. Jackiw, V. P. Nair, S.-Y. Pi, and A. P. Polychronakos, J. Phys. A **37**, 327 (2004).
47. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2001).