

ПИКОСЕКУНДНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ СОЛИТОНЫ ПРИ АНИЗОТРОПНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С СИСТЕМОЙ СПИНОВ

А. А. Заболотский*

*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 29 января 2007 г.

В рамках найденной автором интегрируемой модели изучается эволюция продольно-поперечных звуковых импульсов, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю в системе парамагнитных примесей с эффективным спином $S = 1/2$. Динамика импульсов акустического поля в среде с орторомбической симметрией спин-акустического взаимодействия описывается вне рамок приближения медленных огибающих. Решение модели найдено с применением развитой техники метода обратной задачи рассеяния, основанной на решении проблемы Римана – Гильберта и учитывающей специфическую симметрию задачи.

PACS: 41.20.Jb, 42.50.Md, 43.25.+y

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные когерентные оптические явления, которые ассоциируются с солитонными и другими автомодельными решениями [1, 2], в настоящее время наиболее детально изучены аналитически в рамках интегрируемых моделей [3]. При распространении упругих волн в парамагнитных кристаллах солитоноподобные импульсы могут образовываться за счет эффектов, связанных с ангармоническими колебаниями и дисперсией [4–6], а также в условиях нелинейного когерентного взаимодействия акустических волн с содержащимися в среде парамагнитными примесями при акустической самоиндуцированной прозрачности (СИП) [7–9]. Акустическая СИП проявляется в низкотемпературных кристаллических образцах, содержащих парамагнитные примеси [10]. В работах [11, 12] этот эффект наблюдался на примесях Fe^{2+} в кристаллических матрицах MgO и $LiNbO_3$. Генерация пикосекундных акустических импульсов в лабораторных условиях [4–12] стимулировала появление серии теоретических работ, посвященных изучению эволюции этих импульсов в парамагнитных кристаллах. Акустические импульсы длительностью от пикосекунд до десятков пикосекунд не могут быть описаны в приближении

медленных огибающих, поскольку импульс содержит небольшое число осцилляций. Теория акустических импульсов в эффективной двухуровневой среде без применения приближения медленной огибающей развивалась рядом авторов, см. [8] и ссылки в этой работе, а также работы [13–15]. В качестве физической среды, в которой может быть реализована модель эволюции акустического импульса с пикосекундной длительностью, может быть предложен кристалл, содержащий дублеты Крамерса примесных парамагнитных ионов Co^{2+} [5, 6].

Теоретические исследования акустической СИП, проведенные в работах [7, 8] и в ряде других работ, базируются на ее аналогии с оптической самоиндуцированной прозрачностью. Помимо аналогии между оптической и акустической СИП имеются принципиальные отличия, связанные, например, с условиями формирования масштаба скоростей и характерных частот. Акустические солитоны могут образовываться на расстояниях в несколько десятков микрон и менее и имеют в общем случае две поперечные и продольную компоненты. Это приводит, как правило, к значительно более сложной схеме спин-фононного взаимодействия по сравнению с взаимодействием света с двухуровневой средой особенно при анизотропном спин-фононном взаимодействии.

Экспериментальные условия наблюдения коге-

*E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

рентных акустических солитонов в протяженной среде зачастую требуют применения гелиевых температур. Акустический резонансный эффект — аналог оптической СИП — наблюдался при низких температурах в кристалле MgO [11] и в LiNbO₃ [12] с парамагнитными примесями Fe²⁺ при распространении продольного акустического импульса под ненулевым углом к направлению внешнего магнитного поля. Когерентная эмиссия — генерация лавины акустических фононов после частичной инверсии заселенности спиновой системы — была изучена экспериментально в работах [5, 6]. В этих работах исследовалась эффективная двухуровневая среда, состоящая из метастабильного, расщепленного вследствие эффекта Зеемана $\bar{E}(^2E)$ дублета Крамерса Cr³⁺ в однокристаллическом образце рубина. В эксперименте дублет, локализованный на оптическом расстоянии, взаимодействует с оптическими фононами. Селективное лазерное возбуждение приводит к возникновению когерентной акустической эмиссии.

Генерация пикосекундных акустических импульсов в кристаллах не представляет в настоящее время сложной экспериментальной проблемы [4]. Для описания этих импульсов не применимо приближение медленной огибающей. Изучение нелинейной динамики оптических когерентных импульсов без огибающей в эффективных двухуровневых средах в рамках интегрируемых систем уравнений в частных производных было начато 35 лет назад Ейлбеком с соавторами [16–18]. Найденная в работе [16] интегрируемая система редуцированных уравнений Максвелла–Блоха имеет большую область применимости, чем уравнения резонансной СИП, поскольку при их выводе не применяется приближение медленной огибающей. Эти уравнения описывают динамику однокомпонентного линейно поляризованного электромагнитного поля [18]. Недавно нами было показано, что интегрируемые редуцированные уравнения Максвелла–Блоха допускают обобщение на случай эволюции двухкомпонентной электромагнитной волны с произвольной поляризацией в изотропной среде [19]. Затем эта модель была нами обобщена на случай анизотропной среды [20, 21]. Теоретическое исследование нелинейной динамики продольно-поперечных акустических импульсов без огибающей выполнено в серии работ автора [13–15]. В этих работах показано, что динамика акустических импульсов без огибающей может быть изучена в рамках новых, полностью интегрируемых уравнений, представляющих математический и практический интерес.

В настоящей работе развивается вариант метода

обратной задачи рассеяния (МОЗР) [3] для модели, описывающей эволюцию трехкомпонентного акустического импульса вне рамок приближения медленной огибающей в среде с орторомбической симметрией спин-фононного взаимодействия. Сильная анизотропия спин-фононного взаимодействия может сопровождаться малым отличием фазовых (линейных) скоростей поперечных и продольной звуковых волн. Такая ситуация реализуется в упругоизотропных кристаллах, например, в ионных кристаллах галогенидов щелочных металлов с центральными силами взаимодействия между атомами [22]. Эта особенность используется в настоящей работе при построении интегрируемой в рамках МОЗР модели. Здесь приводятся две формы представления Лакса этой модели. Аппарат МОЗР строится на основе решения проблемы Римана–Гильберта (РГ) для более удобной для решения задачи пары Лакса.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 дан вывод физической модели эволюции трехкомпонентного акустического поля в анизотропной среде. В разд. 3 дан вывод интегрируемого варианта модели, описаны свойства симметрии и развит соответствующий задаче аппарат метода обратной задачи. Затем в разд. 4 приводится солитонное решение модели, а в разд. 5 обсуждаются полученные результаты. В Приложении приводится форма пары Лакса изучаемой интегрируемой модели со спектральным параметром на эллиптической кривой.

2. ВЫВОД ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Следуя работе [8], приведем вывод уравнений, описывающих динамику продольно-поперечной волны в кристалле с парамагнитными примесями. Считаем, что внешнее постоянное и однородное магнитное поле \mathbf{V} направлено вдоль оси z . Зеемановское взаимодействие магнитного момента $\hat{\mu}^{(a)}$, находящегося в точке a , вносит в общий гамильтониан вклад

$$\hat{H}_a = -\hat{\mu}^{(a)}\mathbf{V}.$$

Компоненты $\hat{\mu}^{(a)}$ выражаются через компоненты спина $\mathbf{S}^{(a)}(\mathbf{r}_a)$, где \mathbf{r}_a — радиус-вектор a -го спина, следующим образом:

$$\hat{\mu}_j^{(a)} = -\sum_k \mu_B g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}.$$

Здесь μ_B — магнетон Бора, g_{jk} — компоненты тензора Ланде. С учетом этого имеем

$$\hat{H}^z = \sum_{a=1}^N \hat{H}_a^z = \mu_B \sum_a \sum_{j,k} B_j g_{jk} \hat{S}_k^{(a)}, \quad (1)$$

где N — общее число спинов. Поскольку эффективный спин равен $1/2$, он может быть разложен по матрицам Паули:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{S}_y^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_z^a &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

Считаем, что оси x, y, z , направленные вдоль главных осей тензора Ланде, совпадают с осями симметрии кристалла, тогда в недеформированной невозмущенной среде тензор Ланде диагонален:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} = g_{jj} \delta_{jk},$$

δ_{jk} — дельта-функция. Деформацию кристалла акустической волной описываем линейными поправками к тензору Ланде:

$$g_{jk} = g_{jk}^{(0)} + \sum_{p,q} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \right)_0 \mathcal{E}_{pq} + \dots, \quad (3)$$

где \mathcal{E}_{pq} — тензор упругих деформаций кристалла в месте расположения спина. Производные берутся в точке с нулевой деформацией. Компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора смещений $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_{pq} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_p}{\partial x_q} + \frac{\partial U_q}{\partial x_p} \right). \quad (4)$$

Суммирование по однородно расположенным в кристалле ионам со спинами $1/2$ заменяем интегрированием по всему пространству. Обозначим угловыми скобками усреднение по квантовым состояниям:

$$S_k = \langle \hat{S}_k^{(a)}(\mathbf{r}) \rangle = \text{Tr} \hat{S}_k^{(a)} \hat{\rho}, \quad k = x, y, z.$$

Здесь $\hat{\rho}$ — матрица плотности двухуровневой среды — кramerсовского дублета, расщепленного под действием магнитного поля. Предполагаем, что число фононов велико, поэтому применимо классическое описание динамики акустического поля. Двухуровневая среда рассматривается как квантовая. При этих условиях получаем следующие вклады в гамильтониан, связанный с примесями:

$$\hat{H}_s = \int n \hbar \omega_B \sum_{\gamma=x,y,z} \nu_\gamma S_\gamma d\mathbf{r}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}_{int} \rangle &= \sum_a \sum_{j,k,p,q=x,y,z} \mu_B B_j F_{jk,pq} \times \\ &\times \int \mathcal{E}_{pq}(\mathbf{r}) \langle \hat{S}_k^{(a)}(\mathbf{r}) \rangle d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_\gamma &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{S}_\gamma^a \hat{\rho} \right\}, \\ \nu_\gamma &= \frac{g_{\gamma\gamma} B_\gamma}{g B}, \\ F_{jk,pq} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \end{aligned}$$

— постоянные спин-фононной связи, $\hat{\rho}$ — матрица плотности, $\omega_B = g \mu_B B / \hbar$ — частота зеемановского расщепления дублетов Крамерса,

$$g = \sqrt{g_{xx}^2 + g_{yy}^2 + g_{zz}^2}, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2},$$

$$n(\mathbf{r}) = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

— плотность парамагнитных примесей. Интеграл (5) берется по всему объему кристалла. Угловые скобки означают усреднение по квантовым состояниям.

Динамика акустических волн в кристалле без учета ангармоничности описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2} \int \sum_{\gamma=x,y,z} \left\{ \frac{p_\gamma^2}{N_0} + \lambda_\gamma \left(\frac{\partial U_\gamma}{\partial z} \right)^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (7)$$

где N_0 — молекулярная масса, p_γ — компоненты плотности момента, ассоциированные с динамическим смещением молекул в кристалле, $\lambda_\gamma = \lambda_{\gamma\gamma zz}$ — диагональные элементы тензора модуля упругих деформаций кристалла [23], отвечающие смещениям по оси z .

Эволюция матрицы плотности эффективной двухуровневой среды и компонент тензора напряжений описывается уравнениями

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}. \quad (9)$$

Здесь

$$H = H_a + \langle \hat{H}_{int} \rangle.$$

Естественно предположить, что для масштабов времен в десятки пикосекунд релаксационными процессами можно пренебречь. Мы будем рассматривать распространение акустических импульсов в такой спиновой системе только вдоль оси z кристалла.

Симметрия спин-фотонного взаимодействия и выбор направления магнитного поля определяют симметрию коэффициентов связи и, как следствие,

вид системы эволюционных уравнений. Рассмотрим динамику трехкомпонентного акустического поля, имеющего две поперечные и продольную компоненты, дающие вклад во взаимодействие. Для одномерной среды, протяженной по оси z , только z -компоненты тензора напряжений не равны нулю. Это означает, что смещение U_j определяет элементы \mathcal{E}_{jz} , $j = x, y, z$. Например, в случае орторомбической симметрии кристалла смещение молекул в x -направлении не изменяет связь между проекциями спина S_y, S_z и фононами в первом приближении в разложении (3) и т.д. При выполнении этих предположений и произвольном направлении вектора магнитного поля гамильтониан (6) приводится к виду

$$\hat{H}_{int} = \sum_{\alpha} \sum_j \mu_B B_j F_{jj,jz} \mathcal{E}_{jz} \hat{S}_j^{(\alpha)}. \quad (10)$$

Такую же структуру гамильтониана спин-фононного взаимодействия можно получить из гамильтониана спин-решеточного взаимодействия в парамагнетиках, найденного в работе [24] для значительно более общей симметрии спин-решеточной связи, но при определенном выборе направления магнитного поля. Для вывода гамильтониана (10) непосредственно из уравнения (13) работы [24] достаточно ограничиться линейной зависимостью взаимодействия от $\partial U_p / \partial x_q$, предположить одномерность протяженной среды и выбрать направление магнитного поля вдоль этой среды, т. е. вдоль оси z .

При изучении эволюции в одномерной среде коэффициенты упругости в правой части (7) могут быть выбраны приблизительно равными $\lambda_x \approx \lambda_y \approx \lambda_z$, поскольку, как отмечено выше, они имеют другую физическую природу. Фазовая скорость акустической компоненты U_x пропорциональны $\sqrt{\lambda_x}$ и т. д. Эффективность взаимодействия в нелинейном режиме определяется длиной взаимодействия, и для волн с почти равными скоростями это взаимодействие наиболее эффективно. Поэтому исследование случаев спин-решеточного взаимодействия с близкими фазовыми скоростями акустических компонент представляет особый интерес. При выводе интегрируемой версии модели ниже предполагается, что групповые скорости полей близки к фазовым, т. е. данная модель описывает высоко эффективное спин-фононное взаимодействие.

Ввиду сделанных выше предположений, ограничимся изучением эволюции поперечных $\mathcal{E}_{xz}, \mathcal{E}_{yz}$ и продольной \mathcal{E}_{zz} компонент акустического поля, распространяющихся вдоль оси z с одинаковой фазо-

вой скоростью. При этих условиях остаются три эффективных произвольных действительных константы спин-фононного взаимодействия. Никакие дополнительные ограничения на величины констант спин-решеточного взаимодействия не используются. Для кристалла с орторомбической симметрией коэффициентов спин-фононной связи и произвольного направления магнитного поля эти коэффициенты имеют вид

$$f_{\gamma} = \sum_{j=x,y,z} B_j F_{jj,\gamma z} B^{-1}, \quad \gamma = x, y, z. \quad (11)$$

Для случая направления магнитного поля по оси z и гамильтониана (13) из работы [24] эти три коэффициента легко могут быть выражены через амплитуду магнитного поля и коэффициенты F_{ij} .

В этих приближениях гамильтониан $\hat{H}_s + \hat{H}_{int}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \hat{H}_s + \hat{H}_{int} = \\ & = \int \frac{\hbar \omega_B}{g} \sum_{\alpha} \sum_{\gamma=x,y,z} \left(g \nu_{\gamma} \hat{S}_{\gamma}^{(\alpha)} + f_{\gamma} \mathcal{E}_{\gamma z} \hat{S}_{\gamma}^{(\alpha)} \right) dr. \quad (12) \end{aligned}$$

После усреднения по всем примесям α сумма гамильтонианов (12) приводится к виду, аналогичному виду гамильтониана взаимодействия трехкомпонентного поля с эффективной двухуровневой средой:

$$\begin{aligned} & \hat{H}_s + \hat{H}_{int} = \\ & = \int \frac{f_x n \hbar \omega_B}{g} \left[\tilde{a} \sigma_x G_x + \tilde{b} \sigma_y G_y + \tilde{c} \sigma_z G_z \right] dr, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_{\gamma} &= \mathcal{E}_{\gamma z} + \frac{g \nu_{\gamma}}{f_{\gamma}}, \quad \tilde{a} = \frac{f_x}{f_0}, \quad \tilde{b} = \frac{f_y}{f_0}, \\ \tilde{c} &= \frac{f_z}{f_0}, \quad f_0 = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}, \end{aligned}$$

где σ_{γ} , $\gamma = x, y, z$ — матрицы (2) без индекса a , т. е. они отвечают всему ансамблю примесей.

Используя (8) и (13), получаем систему уравнений

$$\frac{\partial S_x}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{c} G_z S_y + \tilde{b} G_y S_z, \quad (14)$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial \tilde{t}} = \tilde{c} G_z S_x - \tilde{a} G_x S_z, \quad (15)$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{b} G_y S_x + \tilde{a} G_x S_y. \quad (16)$$

Здесь

$$\tilde{t} = \frac{t f_0 n \hbar \omega_B}{g}, \quad S_{\gamma} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \hat{\sigma}_{\gamma} \hat{\rho} \}, \quad \gamma = x, y, z.$$

Эта система с точностью до знака G_γ совпадает с уравнениями Блоха для двухуровневой среды с дипольным переходом. Компоненты классического вектора Блоха выражаются через соответствующие компоненты матрицы плотности $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{22}), \quad S_x = \frac{1}{2}(\rho_{12} + \rho_{21}), \\ S_y &= \frac{i}{2}(\rho_{12} - \rho_{21}). \end{aligned} \quad (17)$$

Справедливо следующее условие нормировки:

$$S_z^2 + S_x^2 + S_y^2 = (\rho_{11} + \rho_{22})^2 = S_0^2(z). \quad (18)$$

Следующий шаг состоит в нахождении уравнения эволюции полей G_γ . Дифференцируем по z уравнения (9) для смещения \mathbf{U} . Затем, используя определения тензора напряжений и гамильтониан (12), получаем систему эволюционных уравнений для акустического поля, усредненную по квантовым состояниям:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{xz}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{xz}}{\partial z^2} = \frac{\tilde{a} n \hbar \omega_B f_0}{g N_0} \frac{\partial^2 S_x}{\partial z^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{yz}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{yz}}{\partial z^2} = \frac{\tilde{b} n \hbar \omega_B f_0}{g N_0} \frac{\partial^2 S_y}{\partial z^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{zz}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{zz}}{\partial z^2} = \frac{2\tilde{c} n \hbar \omega_B f_0}{g N_0} \frac{\partial^2 S_z}{\partial z^2}, \quad (21)$$

где $v = \sqrt{\lambda_x / N_0}$, $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$.

3. ИНТЕГРИРУЕМАЯ РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ

Для вывода систем уравнений (14)–(16), (19)–(21) были использованы предположения о виде взаимодействия, одномерности среды, отсутствии релаксационных процессов и дисперсии, а также предполагалось равенство фазовых скоростей компонент акустической волны. Используя еще одно реалистическое приближение, покажем, что системы нелинейных уравнений (14)–(16), (19)–(21) приводятся к интегрируемой системе уравнений.

Как правило, нормированная плотность парамагнитных ионных примесей мала. Это условие позволяет использовать приближение однонаправленного распространения волн. Впервые в нелинейной оптике это приближение, известное из гидродинамики, применялось в работе [16] для вывода редуцированных уравнений Максвелла–Блоха. Условие выполнения приближения состоит в том, что нормированная плотность примесей имеет тот же порядок малости, что и сумма производных по временной и про-

странственной переменным. В использованных выше обозначениях это означает, что производная

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\chi}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t}$$

действующая на поле G_γ мала, т. е.,

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx -\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{O}(\epsilon),$$

где ϵ — малый параметр.

При выполнении приближения однонаправленного распространения производные по z в правых частях уравнений (19)–(21) заменяются на производные $(v^{-1} \partial / \partial t)$ с точностью $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. В итоге приводим систему уравнений (19)–(21) к виду

$$\frac{\partial G_x}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial G_x}{\partial t} = \frac{\tilde{a} f_0 n \hbar \omega_B}{v^2 N_0 g} \frac{\partial S_x}{\partial t}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial G_y}{\partial t} = \frac{\tilde{b} f_0 n \hbar \omega_B}{v^2 N_0 g} \frac{\partial S_y}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{1}{v} \frac{\partial G_z}{\partial t} = \frac{2\tilde{c} f_0 n \hbar \omega_B}{v^2 N_0 g} \frac{\partial S_z}{\partial t}. \quad (24)$$

Из уравнений (14)–(16) и (22)–(24) следует, что

$$\tilde{a} G_x^2(z, t) + \tilde{b} G_y^2(z, t) + 2\tilde{c} G_z^2(z, t) = G_0^2(t). \quad (25)$$

Перейдем к движущейся системе координат, $t \rightarrow t - z/v$, и введем нормированные вектор-функции

$$\mathbf{W} = \hat{J}_1 \mathbf{G} G_0^{-1}, \quad (26)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} S_0^{-1}, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{W} = (W_x, W_y, W_z), \quad \mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z), \dots,$$

$\hat{J}_1 = \text{diag}(\tilde{a}, \tilde{b}, 2\tilde{c})$ — диагональная матрица.

Заменим переменные

$$\tilde{\chi} = \frac{(f_0 n \hbar \omega_B)^2}{2g^2 \lambda_x} \int_0^z S_0(z') dz', \quad (28)$$

$$\tilde{\tau} = \frac{(f_0 n \hbar \omega_B)}{g \lambda_x} \int_0^{t-z/v} G_0(t') dt' \quad (29)$$

и перепишем системы уравнений (14)–(16) и (22)–(24) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}} = -a_z W_z R_y + a_y W_y R_z, \quad (30)$$

$$\frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}} = a_z W_z R_x - a_x W_x R_z, \quad (31)$$

$$\frac{\partial R_z}{\partial \tilde{\tau}} = -a_y W_y R_x + a_x W_x R_y, \quad (32)$$

$$\frac{\partial R_\gamma}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{\partial W_\gamma}{\partial \tilde{\chi}}, \quad (33)$$

где

$$a_x = \tilde{a}^2, \quad a_y = \tilde{b}^2, \quad a_z = 2\tilde{c}^2.$$

Эта система уравнений является полностью интегрируемой.

3.1. Представление Лакса

Представим систему уравнений (30)–(33) в виде условия совместности двух линейных систем уравнений. Для этого сделаем замену

$$\mathbf{V} = \hat{J}\mathbf{W},$$

где $\hat{J} = \text{diag}\{a_x, a_y, a_z\}$. Тогда система уравнений (30)–(33) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_x} \frac{\partial V_x}{\partial \tilde{\chi}} &= \frac{\partial R_x}{\partial \tilde{\tau}} = -V_z R_y + V_y R_z, \\ \frac{1}{a_y} \frac{\partial V_y}{\partial \tilde{\chi}} &= \frac{\partial R_y}{\partial \tilde{\tau}} = V_z R_x - V_x R_z, \\ \frac{1}{a_z} \frac{\partial V_z}{\partial \tilde{\chi}} &= \frac{\partial R_z}{\partial \tilde{\tau}} = -V_y R_x + V_x R_y. \end{aligned} \quad (34)$$

Линейная система уравнений, условие совместности которой приводит к системе (34), т.е. пара Лакса (126), (127), со спектральным параметром на эллиптической кривой приведена в Приложении. Применение МОЗР к этой паре Лакса требует конструирования ядра интеграла Коши на торе, что приводит к ряду математических трудностей. Для $k \neq 1, 0$, см. Приложение, этого можно избежать, поскольку пара Лакса (126), (127) при этих условиях допускает алгебраическую параметризацию. Случаи $k = 1, 0$ относительно просты и могут быть рассмотрены отдельно. Переход к следующей алгебраической форме представления Лакса для системы (34) описан в Приложении:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi &:= \mathbf{L}(\lambda) \Phi = w_0(\lambda) \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) V_x & \left(\lambda \mathcal{E} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\lambda} \right) \\ - \left(\lambda \bar{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{E}}{\lambda} \right) & i \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) V_x \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \chi} \Phi &:= \mathbf{A}(\lambda) \Phi = w_1(\lambda) \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) R_x & \left(\lambda \mathcal{R} + \frac{\bar{\mathcal{R}}}{\lambda} \right) \\ - \left(\lambda \bar{\mathcal{R}} + \frac{\mathcal{E}}{\lambda} \right) & i \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) R_x \end{pmatrix} \Phi, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$w_0(\lambda) = \left[1 - \frac{k'^2}{4k^2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$w_1(\lambda) = \frac{-a_x a_y}{(a_y - a_x) w_0(\lambda) - a_x}$$

и введены новые переменные

$$\tau = \frac{k'^2}{4k} \tau', \quad \chi = \frac{k'^2}{4k} \chi'.$$

3.2. Свойства симметрии

Перечислим свойства симметрии матриц $\mathbf{L}(\lambda)$, $\mathbf{A}(\lambda)$:

$$\mathbf{L}(1/\lambda) = \sigma_1 \mathbf{L}(-\lambda) \sigma_1, \quad \mathbf{A}(1/\lambda) = \sigma_1 \mathbf{A}(-\lambda) \sigma_1, \quad (37)$$

$$\mathbf{L}(-\lambda) = \sigma_3 \mathbf{L}(\lambda) \sigma_3, \quad \mathbf{A}(-\lambda) = \sigma_3 \mathbf{A}(\lambda) \sigma_3, \quad (38)$$

$$\overline{\mathbf{L}(-\bar{\lambda})} = \sigma_1 \mathbf{L}(\lambda) \sigma_1, \quad \overline{\mathbf{A}(-\bar{\lambda})} = \sigma_1 \mathbf{A}(\lambda) \sigma_1, \quad (39)$$

$$\overline{\mathbf{L}(1/\bar{\lambda})} = \mathbf{L}(\lambda), \quad \overline{\mathbf{A}(1/\bar{\lambda})} = \mathbf{A}(\lambda). \quad (40)$$

Здесь σ_1 и σ_3 — стандартные матрицы Паули. Фундаментальные решения линейной системы (35), (36) обладают, очевидно, такими же свойствами симметрии.

Определим группу преобразований комплексной плоскости λ , состоящую из идентичного преобразования I и элементов, действующих следующим образом:

$$u_{g_1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad u_{g_2}(\lambda) = -\lambda, \quad u_{g_3}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}. \quad (41)$$

Преобразования $\{I, u_{g_1}, u_{g_2}, u_{g_3}\}$ образуют абелеву группу подстановок \mathcal{S} , состоящую из псевдоконформного преобразования u_{g_1} , преобразования «четности» u_{g_2} и комбинированного преобразования u_{g_3} , $g_3 = g_1 g_2$.

Преобразования фундаментальных решений $\psi(\tau, \chi; \zeta)$ системы уравнений (35), (36), имеющих вид 2×2 -матричнозначных функций и отвечающих свойствам симметрии (37)–(40), также образуют абелеву группу \mathcal{G} , ассоциированную с группой подстановок \mathcal{S} . Группа \mathcal{G} является группой автоморфизмов:

$$\begin{aligned} g : \psi(\tau, \chi; \zeta) &\rightarrow \\ &\rightarrow \hat{U}(g) \psi(\tau, \chi; u_g(\zeta)) \in \{\psi(\tau, \chi; \zeta)\} \end{aligned} \quad (42)$$

и включает элементы:

$$\{g_0 = I, g_1, g_2, g_3\}, \quad g_k = g_k^{-1},$$

$$g_i = g_j g_k, \quad i \neq j \neq k,$$

действующие следующим образом:

$$\widehat{U}(g_1)\psi = \overline{\psi(\chi, \tau; u_{g_1}(\lambda))}, \quad (43)$$

$$\widehat{U}(g_2)\psi = \sigma_3 \psi(\chi, \tau; u_{g_2}(\lambda)) \sigma_3, \quad (44)$$

$$\widehat{U}(g_3)\psi = \sigma_3 \overline{\psi(\chi, \tau; u_{g_3}(\lambda))} \sigma_3. \quad (45)$$

Для полноты описания свойств симметрии приведем здесь преобразования данных рассеяния (элементов матрицы рассеяния $a(\chi; \lambda)$ и $b(\chi; \lambda)$, см. ниже уравнение (58)) относительно действия преобразований группы подстановок \mathcal{S} , которые следуют из соотношений (43)–(45):

$$a(\chi; u_{g_1}(\lambda)) = \overline{a(\chi; \lambda)}, \quad b(\chi; u_{g_1}(\lambda)) = \overline{b(\chi; \lambda)}, \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a(\chi; u_{g_2}(\lambda)) &= a(\chi; \lambda), \\ b(\chi; u_{g_2}(\lambda)) &= -b(\chi; \lambda), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a(\chi; u_{g_3}(\lambda)) &= \overline{a(\chi; \lambda)}, \\ b(\chi; u_{g_3}(\lambda)) &= -\overline{b(\chi; \lambda)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Соответствующие преобразования коэффициента

$$c(\chi; \lambda_1) = \frac{b(\chi; \lambda_1)}{\partial a(\chi; \lambda) / \partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_1},$$

где $a(\chi; \lambda_1) = 0$, имеют вид

$$c(\chi; u_{g_1}(\lambda_1)) = -\frac{1}{\lambda_1} \overline{c(\chi; \lambda_1)}, \quad (49)$$

$$c(\chi; u_{g_2}(\lambda_1)) = c(\chi; \lambda_1), \quad (50)$$

$$c(\chi; u_{g_3}(\lambda_1)) = -\frac{1}{\lambda_1} \overline{c(\chi; \lambda_1)}. \quad (51)$$

Пусть нули λ_{0k} , $k = 1, 2, \dots, n$, коэффициента $a(\chi; \lambda)$ невырождены, т. е. $|\lambda_{0k}| \neq 1$ и $|\lambda_{0k}| \neq 0, \infty$. Из свойств симметрии (49)–(51) следует, что нули λ_{0k} , а также $\lambda_{2k} = 1/\overline{\lambda_{0k}}$, $\lambda_{3k} = -\lambda_{0k}$ и $\lambda_{4k} = -1/\overline{\lambda_{0k}}$ являются эквивалентными точками, см. ниже.

3.3. Уравнения метода обратной задачи рассеяния

Ограничимся рассмотрением решений для $\mathcal{E}(\tau, \chi)$, имеющих конечный носитель и исчезающих на бесконечностях:

$$\mathcal{E}(\tau, \chi) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Импульсы поля $\mathcal{E}(\tau, \chi) \rightarrow 0$ распространяются на фоне устойчивого основного состояния

$$\mathcal{E}(\chi, \tau) \equiv 0. \quad (52)$$

Этому «фоновому» состоянию отвечают «граничные» условия

$$R_x(\chi, 0) = 1, \quad \mathcal{E}(\chi, 0) = \mathcal{R}(\chi, 0) = 0. \quad (53)$$

Начальные данные задачи Коши $\mathbf{V}(\tau, 0)$ для системы уравнений (35) выбраны достаточно гладкими и достаточно быстро затухающими при $\tau \rightarrow \pm\infty$.

Введем матрично-значные функции

$$\Phi_- = (\phi', \tilde{\phi}'), \quad \Phi_+ = (\tilde{\psi}', \psi'), \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi'(\chi, \tau; \lambda), \quad \tilde{\phi}' = \tilde{\phi}'(\chi, \tau; \lambda), \\ \psi' &= \psi'(\lambda, \tau; \lambda), \quad \tilde{\psi}' = \tilde{\psi}'(\chi, \tau; \lambda) \end{aligned}$$

— столбцы функций. Пусть эти функции имеют асимптотики:

$$\Phi_{\pm}'(\tau; \lambda) \rightarrow \exp[-i\omega_3(\lambda)\tau\sigma_3], \quad \tau \rightarrow \pm\infty, \quad (55)$$

где

$$\text{Im}\omega_3 = 0, \quad \omega_3(\lambda) = \omega_0(\lambda)\Lambda(\lambda), \quad \Lambda(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^{-2}.$$

Выбираем функции Йоста — фундаментальные решения (36) — в виде

$$\begin{aligned} \Phi^- &= \left(\exp[(-i\mu_- + i\mu_0)\sigma_3] \phi', \right. \\ &\quad \left. \exp[(i\mu_- - i\mu_0)\sigma_3] \tilde{\phi}' \right) := (\phi, \tilde{\phi}), \\ \Phi^+ &= \left(\exp[-i\mu_+\sigma_3] \tilde{\psi}', \exp[i\mu_+\sigma_3] \psi' \right) := \\ &= (\tilde{\psi}, \psi), \end{aligned} \quad (56)$$

где μ_0 и μ_{\pm} — действительные функции переменных χ и τ , χ , соответственно, причем

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mu_-(\tau, \chi) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mu_+(\tau, \chi) = 0. \quad (57)$$

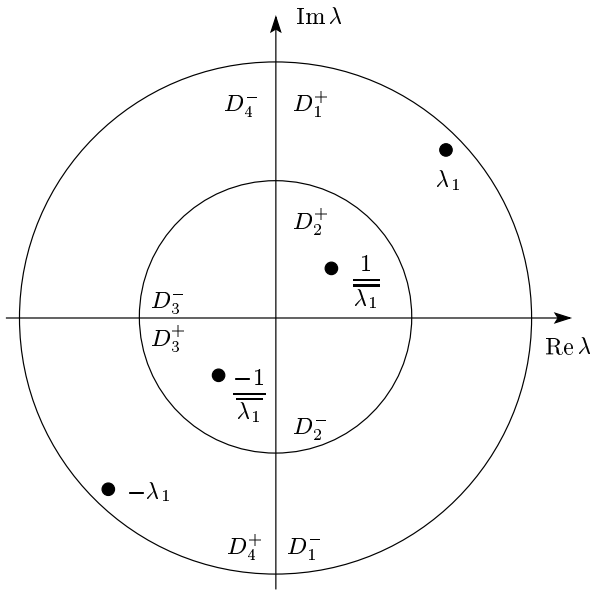
Функции $\mu_0(\chi)$ и $\mu_{\pm}(\tau, \chi)$ не зависят от λ , см. ниже.

Условие полноты для собственных функций дает

$$\Phi^- = \Phi^+ \mathbf{T}, \quad \mathbf{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & -\overline{b(\overline{\lambda})} \\ b(\lambda) & \overline{a(\overline{\lambda})} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Здесь λ лежит на контуре

$$\Gamma = \{\lambda : \text{Im}\lambda = 0 \cup \text{Re}\lambda = 0\},$$



Комплексная плоскость λ . Внутренний круг имеет единичный радиус, радиус внешнего круга $l_0 \rightarrow \infty$. Контур Γ_k^+ (Γ_k^-) обходит область D_k^+ (D_k^-) вдоль ее границы против (по) часовой стрелки. Контур Γ^+ (Γ^-) огибает область D^+ (D^-) против (по) часовой стрелке. Положение эквивалентных полюсов отмечено жирными точками

см. рисунок, \mathbf{T} — матрица рассеяния.

Эволюция данных рассеяния, которую мы находим из системы (35) стандартным образом, для граничных условий (53) имеет простой вид:

$$\begin{aligned} a(\chi; \lambda) &= a(0; \lambda), \\ b(\chi; \lambda) &= b(0; \lambda) \exp [2i\epsilon \omega_3(\lambda)\chi], \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{0n}(\chi) &= \lambda_{0n}(0), \\ c(\chi; \lambda_{0n}) &= c(0; \lambda_{0n}) \exp [2i\epsilon \omega_3(\lambda_{0n})\chi]. \end{aligned} \quad (60)$$

Пусть $a(\lambda) \neq 0, a(\bar{\lambda}) \neq 0$. Введем новые функции-столбцы:

$$\mathbf{M}(\tau; \lambda) := \begin{pmatrix} \phi_1 \exp(i\mu_- - i\mu_0 + i\omega_3\tau) \\ \phi_2 \exp(-i\mu_- + i\mu_0 + i\omega_3\tau) \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\tau; \lambda) := \begin{pmatrix} \widetilde{\phi}_1 \exp(-i\mu_- + i\mu_0 - i\omega_3\tau) \\ \widetilde{\phi}_2 \exp(i\mu_- - i\mu_0 - i\omega_3\tau) \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$\mathbf{N}(\tau; \lambda) := \begin{pmatrix} \psi_1 \exp(i\mu_+ - i\omega_3\tau) \\ \psi_2 \exp(-i\mu_+ - i\omega_3\tau) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\tau; \lambda) := \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1 \exp(-i\mu_+ + i\omega_3\tau) \\ \widetilde{\psi}_2 \exp(i\mu_+ + i\omega_3\tau) \end{pmatrix}, \quad (64)$$

где $\phi_k, \widetilde{\phi}_k, \psi_k, \widetilde{\psi}_k$ — k -е компоненты столбцов $\phi, \widetilde{\phi}, \psi, \widetilde{\psi}$, соответственно. Тогда получаем

$$\mathbf{M}(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \rightarrow -\infty,$$

$$\mathbf{N}(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$\widetilde{\mathbf{N}}(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

В нулях $a(\lambda_n)$ столбцы матрицы (\mathbf{M}, \mathbf{N}) пропорциональны:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\chi, \tau; \lambda_n) &= \\ &= b(\chi; \lambda_n)\mathbf{N}(\chi, \tau; \lambda_n) \exp [2i\Lambda(\lambda_n)\tau]. \end{aligned} \quad (67)$$

Используя, например, выражение (61) для \mathbf{M} , перепишем систему (35) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\phi_1 \exp(i\omega_3\tau))}{\partial \tau} &= w_0(\lambda) \left\{ \left[-i\Lambda(\lambda) (V_x - 1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \mu_+}{\partial \chi} \right] \phi_1 \exp(i\omega_3\tau) + \left(\lambda \mathcal{E} + \frac{\overline{\mathcal{E}}}{\lambda} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-2i\mu_+) \phi_2 \exp(i\omega_3\tau) \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\phi_2 \exp(-i\omega_3\tau))}{\partial \tau} &= w_0(\lambda) \left\{ \left[i\Lambda(\lambda) (V_x - 1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \mu_+}{\partial \chi} \right] \phi_2 \exp(-i\omega_3\tau) - \left(\lambda \overline{\mathcal{E}} + \frac{\mathcal{E}}{\lambda} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(2i\mu_+) \phi_1 \exp(-i\omega_3\tau) \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Интегрируя уравнения (68), (69) и используя соответствующие асимптотики, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\tau; \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_+(\tau - s, \lambda) \mathbf{Q}_-(s; \lambda) \mathbf{M}(s; \lambda) ds. \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\tau; \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_-(\tau - s, \lambda) \mathbf{Q}_+(s; \lambda) \mathbf{N}(s; \lambda) ds. \end{aligned} \quad (71)$$

Здесь

$$\mathbf{Q}_-(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} -i\Lambda(V_x - 1) - i\frac{\partial_\tau \mu_-}{\omega_0} & \left(\lambda\bar{\mathcal{E}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\lambda}\right) \exp(2i\mu_- - 2i\mu_0) \\ -\left(\lambda\bar{\mathcal{E}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\lambda}\right) \exp(-2i\mu_- + 2i\mu_0) & i\Lambda(V_x - 1) + i\frac{\partial_\tau \mu_-}{\omega_0} \end{pmatrix}, \quad (72)$$

$$\mathbf{Q}_+(\tau; \lambda) = \begin{pmatrix} -i\Lambda(V_x - 1) - i\frac{\partial_\tau \mu_+}{\omega_0} & \left(\lambda\bar{\mathcal{E}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\lambda}\right) \exp(2i\mu_+) \\ -\left(\lambda\bar{\mathcal{E}} + \frac{\bar{\mathcal{E}}}{\lambda}\right) \exp(-2i\mu_+) & i\Lambda(V_x - 1) + i\frac{\partial_\tau \mu_+}{\omega_0} \end{pmatrix}, \quad (73)$$

$$\mathbf{G}_+(\tau; \lambda) = \omega_0(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2i\omega_0(\lambda)\Lambda(\lambda)\tau) \end{pmatrix} \theta(\tau), \quad (74)$$

$$\mathbf{G}_-(\tau; \lambda) = -\omega_0(\lambda) \begin{pmatrix} \exp(-2i\Lambda(\lambda)\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \theta(-\tau), \quad (75)$$

где $\theta(\tau)$ — тэта-функция. Коэффициент \mathbf{G}_+ (\mathbf{G}_-) аналитичен в I и III (II и IV) квадрантах комплексной плоскости λ . Аналогичные уравнения могут быть получены для функций $\widetilde{\mathbf{M}}$ и $\widetilde{\mathbf{N}}$.

Пусть области D_j^\pm , $j = 1 - 4$, комплексной плоскости λ , чьи границы изображены на рисунке, определены следующим образом:

$$\begin{aligned} D_1^+ &= \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap l_0 > |\lambda| > 1\}, \\ D_1^- &= \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap l_0 > |\lambda| > 1\}, \\ D_2^+ &= \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap |\lambda| < 1\}, \\ D_2^- &= \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda > 0 \cap |\lambda| < 1\}, \\ D_3^+ &= \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap |\lambda| < 1\}, \\ D_3^- &= \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap |\lambda| < 1\}, \\ D_4^+ &= \{\text{Im } \lambda < 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap l_0 > |\lambda| > 1\}, \\ D_4^- &= \{\text{Im } \lambda > 0 \cap \text{Re } \lambda < 0 \cap l_0 > |\lambda| > 1\}. \end{aligned}$$

Здесь $l_0 \rightarrow \infty$.

Группа \mathcal{S} является группой автоморфизмов каждой из следующих областей комплексной плоскости:

$$D^+ = D_1^+ \cup D_2^+ \cup D_3^+ \cup D_4^+, \quad D^- = D_1^- \cup D_2^- \cup D_3^- \cup D_4^-.$$

Определим стандартные фундаментальные области

$$D_1^+ = D^+/\mathcal{S}, \quad D_1^- = D^-/\mathcal{S},$$

соответственно. В силу свойств симметрии точки λ_1^\pm , $\lambda_2^\pm = \overline{\lambda_1^\pm}^{-1}$, $\lambda_3^\pm = -\lambda_1^\pm$, $\lambda_4^\pm = -\overline{\lambda_1^\pm}^{-1}$ эквивалентны, где $\lambda_j^\pm \in D_j^\pm$, $j = 1-4$.

Пусть $\lambda \in D_1^+$. В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ из уравнения (70) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\tau; \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4k^2}{k^2\lambda} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{-\infty}^{\tau} \mathcal{F}(t) \exp(2i\mu_-(t) - 2i\mu_0) dt \end{pmatrix} + \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (76) \end{aligned}$$

Ввиду выбора канонической нормировки находим, что условие отсутствия в этих разложениях членов, имеющих порядок λ^0 , за исключением единицы, определяет значения $\mu_-(\tau, \chi)$:

$$\mu_-(\tau, \chi) = \frac{4k^2}{k'^2} \int_{-\infty}^{\tau} [1 - V_x(\tau', \chi)] d\tau'. \quad (77)$$

Тем же способом из соответствующих уравнений для \mathbf{N} находим выражение для $\mu_+(\tau, \chi)$:

$$\mu_+(\tau, \chi) = \frac{4k^2}{k'^2} \int_{\infty}^{\tau} [1 - V_x(\tau', \chi)] d\tau'. \quad (78)$$

Дополнительно условие симметрии (39) фиксирует значение $\mu_0(\chi)$:

$$\begin{aligned} \mu_0(\chi) &= \mu_-(\tau, \chi) - \mu_+(\tau, \chi) = \\ &= 4\frac{a_y(a_z - a_x)}{a_x(a_y - a_z)} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - V_x(\tau', \chi)] d\tau'. \quad (79) \end{aligned}$$

Аналогичное (76) разложение по степеням λ может быть получено для $\lambda \in D_k^+, k = 2, 3, 4$ в соответствующем пределе. Используя свойства симметрии, нетрудно показать, что получающиеся в результате выражения для функций $\mu_{\mp}(\tau, \chi), \mu_0(\chi)$ совпадают с (77)–(79), соответственно.

3.4. Проблема Римана – Гильберта

Проблема Римана – Гильберта (РГ) формулируется в терминах $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}}$ с помощью уравнений (58):

$$\frac{\mathbf{M}(\tau, \chi; \lambda)}{a(\chi, \lambda)} = \tilde{\mathbf{N}}(\tau, \chi; \lambda) + \rho(\chi; \lambda)e^{2i\Lambda\tau}\mathbf{N}(\tau, \chi; \lambda), \quad (80)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{M}}(\tau, \chi; \lambda)}{\bar{a}(\chi, \bar{\lambda})} = \mathbf{N}(\tau, \chi; \lambda) - \tilde{\rho}(\chi; \lambda)e^{-2i\Lambda\tau}\tilde{\mathbf{N}}(\tau, \chi; \lambda), \quad (81)$$

где

$$\rho(\chi; \lambda) = \frac{b(\chi; \lambda)}{a(\chi; \lambda)}, \quad \tilde{\rho}(\chi; \lambda) = \frac{\overline{b(\chi; \bar{\lambda})}}{\overline{a(\chi; \bar{\lambda})}}. \quad (82)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Psi_+(\tau, \chi; \lambda) &= \left(\frac{\mathbf{M}(\tau, \chi; \lambda)}{a(\chi; \lambda)}, \mathbf{N} \right), \\ \Psi_-(\tau, \chi; \lambda) &= \left(\tilde{\mathbf{N}}, \frac{\tilde{\mathbf{M}}(\tau, \chi; \lambda)}{\bar{a}(\chi, \bar{\lambda})} \right). \end{aligned} \quad (83)$$

Функции (83) имеют каноническую нормировку на бесконечности:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi_{\pm}(\tau, \chi; \lambda) = \mathbf{I}, \quad (84)$$

где \mathbf{I} — единичная 2×2 -матрица.

Матрично-значная функция Ψ_+ аналитична везде в области D^+ , а Ψ_- аналитична в D^- , за исключением конечного числа полюсов. Условие скачка может быть сформулировано для пары фундаментальных областей D_1^+, D_2^- и областей D_1^+, D_4^- на соответствующей границе между ними. Затем условие скачка должно быть распространено на всю комплексную плоскость. Условия скачка для функции $\Psi^+(\lambda)$, аналитичной в D_1^+ , и $\Psi^-(\lambda)$, аналитичной в D_1^- и D_4^- , имеют вид

$$\Psi_+(\tau, \chi; \lambda) = \Psi_-(\tau, \chi; \lambda)\mathbf{J}_+(\tau, \chi; \lambda), \quad (85)$$

$$\lambda \in D_1^+ \cap D_1^-,$$

$$\Psi_+(\tau, \chi; \lambda) = \Psi_-(\tau, \chi; \lambda)\mathbf{J}_-(\tau, \chi; \lambda), \quad (86)$$

$$\lambda \in D_1^+ \cap D_4^-.$$

Здесь 2×2 -матрица \mathbf{J} определяется спектральными данными $\{a(\lambda), b(\lambda)\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\pm}(\tau, \chi; \lambda) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 \pm \rho(\chi; \lambda)\tilde{\rho}(\chi; \lambda) & \pm \tilde{\rho}(\chi; \lambda)e^{-2i\Lambda\tau} \\ \rho(\chi; \lambda)e^{2i\Lambda\tau} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (87)$$

Фундаментальные области D_k^{\pm} и контуры Γ_k^{\pm} , обходящие вдоль границ соответствующие области против (индекс «+») и по (индекс «-») часовой стрелке, см. рисунок, отображаются элементами группы S :

$$\begin{aligned} u_{g_1}\{D_1^{\pm}\} &= \{D_2^{\pm}\}, \\ u_{g_2}\{D_1^{\pm}\} &= \{D_3^{\pm}\}, \quad u_{g_3}\{D_1^{\pm}\} = \{D_4^{\pm}\}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} u_{g_1}\{\Gamma_1^{\pm}\} &= \{\Gamma_2^{\pm}\}, \quad u_{g_2}\{\Gamma_1^{\pm}\} = \{\Gamma_3^{\pm}\}, \\ u_{g_3}\{\Gamma_1^{\pm}\} &= \{\Gamma_4^{\pm}\}. \end{aligned} \quad (89)$$

При этом, например, контур Γ_1^+ отображается в контур Γ_2^+ с изменением ориентации.

Обозначим через \mathbf{J}_{jk} матрицу скачка на границе $\lambda \in D_j^+ \cap D_k^-$ для функций, аналитичных в областях D_j^+ и D_k^- . Для эквивалентных точек $\lambda \in \Gamma$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_+(\lambda) &\equiv \mathbf{J}_{11}(\lambda) = \overline{\mathbf{J}_{22}(1/\bar{\lambda})} = \\ &= \overline{\sigma_3 \mathbf{J}_{33}(-1/\bar{\lambda})} \sigma_3 = \sigma_3 \mathbf{J}_{44}(-\lambda) \sigma_3, \\ \mathbf{J}_-(\lambda) &\equiv \mathbf{J}_{14}(\lambda) = \overline{\mathbf{J}_{23}(1/\bar{\lambda})} = \\ &= \overline{\sigma_3 \mathbf{J}_{32}(-1/\bar{\lambda})} \sigma_3 = \sigma_3 \mathbf{J}_{41}(-\lambda) \sigma_3. \end{aligned} \quad (90)$$

Для того чтобы сформулировать задачу РГ для функций $\Psi^+(\lambda)$ и $\Psi^-(\lambda)$, аналитичных соответственно в D_{k+1}^+ и D_{k+1}^- , $k = 1-4, \text{ mod } 4$, воспользуемся оператором $\hat{U}(g_k)$, действуя им на обе части условий скачка (85), (86). Учитывая свойства отображения (88), (89), найдем условия скачка для функций Ψ^+, Ψ^- , аналитичных в соответствующих областях D_{k+1}^+, D_{k+1}^- на границе $D_{k+1}^+ \cap D_{k+1}^-$. Легко заметить, что вследствие свойств симметрии (43) – (48) условие скачка, возникающее для каждой пары областей D_k^+, D_k^- , $k = 2, 3, 4$, на границе между ними, приводится к виду (85) для каждого $\lambda \in D^+ \cap D^-$, $\text{Im } \lambda = 0$. Аналогично, для $\text{Re } \lambda = 0$ условие скачка приводится к виду (86). В итоге находим, что матричная функция Ψ удовлетворяет условию скачка, которое локально может быть приведено к общему виду

$$\begin{aligned} \Psi_+(\tau, \chi; \lambda) &= \Psi_-(\tau, \chi; \lambda)\mathbf{J}_+(\tau, \chi; \lambda), \\ \text{Im } \lambda &= 0, \end{aligned} \quad (91)$$

$$\Psi_+(\tau, \chi; \lambda) = \Psi_-(\tau, \chi; \lambda)\mathbf{J}_-(\tau, \chi; \lambda), \quad (92)$$

$$\operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где $\Psi = \Psi_+$ для $\lambda \in D^+$ и $\Psi = \Psi_-$ для $\lambda \in D^-$.

Система уравнений вида (91), (92), известная как проблема РГ [25], с канонической нормировкой (84) имеет единственное решение. Матрично-значная функция $\Psi_{\pm}(\chi, \tau; \lambda)$ — решение уравнения (91) — называется регулярной, если $\det \Psi_{\pm}(\chi, \tau; \lambda)$ не обращается в нуль для всех $\lambda \in D^{\pm}$.

Для нахождения автоморфных функций — решений проблемы РГ — следует учесть, что элементы группы \mathcal{G} преобразуют условия скачка (91), (92), соответствующие области D_k^{\pm} и границы между ними друг в друга. Соответствующие решения также должны преобразовываться друг в друга.

Пусть функции $\Psi^{\pm}(\lambda)$ определены и голоморфны в соответствующих фундаментальных областях, например, в D_1^{\pm} . Для $a(\lambda) \neq 0$, применяя проекцию на второй и первый столбцы в уравнениях (91), (92), представим решение в виде

$$\Psi_2^+(\chi, \tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + P_{\lambda} \widehat{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^-} \tilde{\rho}(\chi, \tau; \zeta) \times \exp(-2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_1^-(\chi, \tau; \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}, \quad (93)$$

$$\Psi_1^-(\chi, \tau; \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P_{\lambda} \widehat{G} \frac{1}{2\pi i} \times \int_{\Gamma_1^+} \rho(\chi, \tau; \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda}. \quad (94)$$

Здесь Ψ_k^{\pm} — k -й столбец матричной функции Ψ^{\pm} . В правых частях уравнений (94) и (93) введены оператор симметризации

$$\widehat{G} = \sum_{k=0}^4 \widehat{U}_{g_k} \quad (95)$$

и проектор $P_{\lambda} = P_{\lambda}^2$, действующий на произвольную функцию $f(\lambda)$, имеющую предел в точке λ_n :

$$P_{\lambda} f(\lambda) = f(\lambda) - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_n} f(\lambda). \quad (96)$$

Здесь λ_n — точка комплексной плоскости, в которой функция $\Psi^{\pm}(\lambda)$ нормирована, $\Psi^{\pm}(\lambda_n) = \Psi_0^{\pm}$. В рассматриваемом здесь случае $\lambda_n = \infty$.

Если $a(\chi, \lambda_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lambda_k \in D_1^+$, то в правых частях уравнений (94) и (93) появятся суммы по всем вычетам в полюсах λ_k и $\overline{\lambda_k} \in D_1^-$

3.5. Симметризация интегральных уравнений

Система интегральных уравнений в виде (93), (94) не дает решения проблемы РГ в общепринятом виде. Покажем, что в построенных интегральных уравнениях области интегрирования в интегралах, стоящих в правых частях этих уравнений, могут быть расширены до соответствующих областей D^- и D^+ . Выполним это, используя свойства симметрии фундаментальных решений, поскольку построенное решение должно быть автоморфным. Продемонстрируем процедуру построения симметризованных интегральных уравнений для всей области голоморфности соответствующих функций на примере уравнения (94).

Контур интегрирования $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3^+ \cup \Gamma_4^+$, пробегаящий границу области D^+ против часовой стрелки, состоит из контуров Γ_k^+ , имеющих то же направление интегрирования. Согласно отображениям (89), преобразования группы \mathcal{S} позволяют трансформировать интеграл по контуру Γ_1^+ в интеграл по контуру Γ_k^+ , $k = 2, 3, 4$. Покажем, что применение преобразований симметрии к интегралу Коши в правой части (94) позволяет построить автоморфное решение проблемы РГ. На первом этапе напишем симметризованный интеграл Коши, стоящий в правой части уравнения (94), в явном виде:

$$\begin{aligned} & \widehat{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \rho(\chi, \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1^+} \frac{\rho(\chi, \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} - \right. \\ & \quad - \int_{\Gamma_1^+} \left(\frac{\rho(\chi, \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \overline{\lambda}^{-1}} \right) - \\ & \quad - \int_{\Gamma_1^+} \left(\frac{\rho(\chi, \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \sigma_3 \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta + \overline{\lambda}^{-1}} \right) + \\ & \quad \left. + \int_{\Gamma_1^+} \frac{\rho(\chi, \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau) \sigma_3 \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta + \lambda} \right]. \quad (97) \end{aligned}$$

Заметим, что преобразования $u_{g_1}, u_{g_2}, u_{g_3} = u_{g_1} u_{g_2}$, входящие в оператор \widehat{U}_{g_k} , действуют только на спектральный параметр λ , входящий в ядро интеграла Коши.

Следующий шаг состоит в переходе от интегрирования по контуру Γ_1^+ к интегрированию по всем

контурам Γ_k^+ , составляющим контур Γ^+ , с использованием свойств симметрии фундаментальных решений уравнений (35), (36). Преобразования $\widehat{U}(g_k)$ группы \mathcal{G} включают элементы группы подстановок u_{g_k} и преобразования t_{g_k} (см. (43)–(45)), действующие следующим образом:

$$t_{g_1}[\mathbf{V}] = \overline{\mathbf{V}}, \quad t_{g_1}[\nu] = \overline{\nu}, \quad (98)$$

$$t_{g_2}[\mathbf{V}] = \sigma_3 \mathbf{V}, \quad t_{g_2}[\nu] = \nu, \quad (99)$$

$$t_{g_3}[\mathbf{V}] = \sigma_3 \overline{\mathbf{V}}, \quad t_{g_3}[\nu] = \overline{\nu}, \quad (100)$$

где \mathbf{V} — произвольный комплексный двухкомпонентный вектор, а ν — комплексный скаляр.

Рассмотрим интеграл Коши

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \frac{\mathbf{Q}(\zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda}, \quad (101)$$

где двухкомпонентная вектор-функция $\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta)$ подчиняется следующему свойству симметрии:

$$\mathbf{Q}(u_{g_k}(\zeta)) = t_{g_k}[\mathbf{Q}(\zeta)]. \quad (102)$$

Используя свойство (102), перепишем преобразованный интеграл Коши $\widehat{U}(g_k)C(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \widehat{U}(g_k)C(\lambda) &= t_{g_k}[C(u_{g_k}(\lambda))] = \\ &= \frac{1}{2\pi t_{g_k}[i]} \int_{\Gamma_1^+} \frac{t_{g_k}[\mathbf{Q}(\zeta)] dt_{g_k}[\zeta]}{t_{g_k}[\zeta] - t_{g_k}[u_{g_k}(\lambda)]} = \\ &= \frac{1}{2\pi t_{g_k}[i]} \int_{\Gamma_1^+} \frac{\mathbf{Q}(u_{g_k}(\zeta)) dt_{g_k}[\zeta]}{t_{g_k}[\zeta] - t_{g_k}[u_{g_1}(\lambda)]} = \\ &= t_{g_k} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^+} \frac{t_{g_k}[\mathbf{Q}(\xi)] du_{g_k}^{-1}(\xi)}{u_{g_k}^{-1}(\xi) - u_{g_k}(\lambda)} \right]. \quad (103) \end{aligned}$$

В последнем интеграле в уравнении (103) проведена замена переменной интегрирования $\xi = u_{g_k}(\zeta)$. Эта замена отвечает отображению областей $u_{g_1}\{D_1^+\} = \{D_k^+\}$ (88) и соответствующих контуров $u_{g_1}\{\Gamma_1^+\} = \{\Gamma_k^+\}$ (89). Преобразование интеграла Коши $[1 + \widehat{U}(g_k)]C(\lambda)$ отвечает расширению области определения решений (93), (94) для функций Ψ^\pm от D_1^\pm до $D_1^\pm \cup D_k^\pm$. Таким образом, оператор \widehat{G} , действуя на решение $\Psi^+(\lambda)$ ($\Psi^-(\lambda)$), определенное на D_1^+ (D_1^-), расширяет область определения этого решения на всю область аналитичности D^+ (D^-).

Введем функции

$$\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta) = \rho(\chi; \zeta) \Psi_2^+(\chi, \tau; \zeta) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau),$$

$\widetilde{\mathbf{Q}}(\chi, \tau; \zeta) = \widetilde{\rho}(\chi; \zeta) \Psi_1^-(\chi, \tau; \zeta) \exp(-2i\Lambda(\zeta)\tau)$, удовлетворяющие свойству (102). Тогда уравнения (93), (94) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Psi_2^+(\chi, \tau; \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{P_\lambda}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1^-} \frac{\widetilde{\mathbf{Q}}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} + \right. \\ &+ \int_{\Gamma_2^-} \frac{\widetilde{\mathbf{Q}}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta^{-1} - \lambda^{-1})} + \int_{\Gamma_3^-} \frac{\widetilde{\mathbf{Q}}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta^{-1} - \lambda^{-1})} + \\ &\left. + \int_{\Gamma_4^-} \frac{\widetilde{\mathbf{Q}}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} \right], \quad (104) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^-(\chi, \tau; \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{P_\lambda}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma_1^+} \frac{\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} + \right. \\ &+ \int_{\Gamma_2^+} \frac{\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta^{-1} - \lambda^{-1})} + \int_{\Gamma_3^+} \frac{\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta^2(\zeta^{-1} - \lambda^{-1})} + \\ &\left. + \int_{\Gamma_4^+} \frac{\mathbf{Q}(\chi, \tau; \zeta) d\zeta}{\zeta - \lambda} \right]. \quad (105) \end{aligned}$$

Интегрирование в (104) и (105) ведется по и против часовой стрелки, соответственно. В случае наличия полюсов в правых частях этих уравнений появляются соответствующие вычеты в нулях $a(\overline{\zeta}_k)$ и $a(\zeta_k)$. Отметим, что вычет, найденный, например, в полюсе $\zeta_k \in D_1^+$ во втором интеграле в правой части равенства (97), равен вычету, найденному в эквивалентной точке $\xi_k = 1/\overline{\zeta}_k \in D_2^+$ во втором интеграле в правой части уравнения (105). Аналогичное утверждение справедливо и для других соответствующих интегралов в этих уравнениях. Построенные таким образом функции $\Psi^\pm(\lambda)$ аналитичны в областях D^\pm . Интегральные сингулярные уравнения (104) и (105) решают задачу РГ (91), (92) для функций с канонической нормировкой (84). Можно показать, что для рассматриваемой модели интегральные уравнения (104), (105) в солитонном секторе после выполнения предельного перехода, учета свойств симметрии (43)–(45) и (49)–(51) приводятся к общепринятому виду, отвечающему одному виду ядра интеграла Коши для всей комплексной плоскости и серии эквивалентных полюсов. Предложенный здесь подход позволяет существенно упростить и формализовать процедуру вывода интегральных уравнений для автоморфных фундаментальных решений.

Используя свойства симметрии (43)–(48), нетрудно показать, что обе части симметризованных уравнений (104), (105) инвариантны относительно действия группы \mathcal{G} как для солитонной части спектра, так и для непрерывного спектра, т. е. функции Ψ^\pm автоморфны.

Используя, например, уравнения (35), (36), получаем соотношения

$$\Psi_{12}^+(\lambda) = -\overline{\Psi_{21}^-}(\bar{\lambda}), \quad \Psi_{22}^+(\lambda) = \overline{\Psi_{11}^-}(\bar{\lambda}). \quad (106)$$

3.6. Связь между «потенциалом» и решением задачи РГ

Перепишем фундаментальное решение в виде

$$\Phi(\tau, \chi, \lambda) = \exp(i\mu_+(\tau, \chi)\sigma_3)\Xi(\tau, \chi, \lambda) \times \exp(-i\Lambda(\lambda)\omega_0(\lambda)\sigma_3). \quad (107)$$

Подставив выражение (107) в систему (126), находим равенство

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Xi(\tau, \chi, \lambda)\Xi(\tau, \chi, \lambda)^{-1} - i\Lambda(\lambda)\omega_0(\lambda)\Xi(\tau, \chi, \lambda) \times \\ \times \sigma_3\Xi(\tau, \chi, \lambda)^{-1} + i\partial_\tau \mu_+ \sigma_3 = \\ = \omega_0[-i\Lambda V_x \sigma_3 + \sigma_- (\mathcal{E}\lambda + \mathcal{F}/\lambda) \exp(2i\mu_+) + \\ + \sigma_+ (\mathcal{F}\lambda + \mathcal{E}/\lambda) \exp(-2i\mu_+)], \quad (108) \end{aligned}$$

где $\sigma_\pm = \sigma_1 \pm i\sigma_2$.

Уравнение

$$w_0(\lambda)^{-1} = 0$$

имеет четыре корня:

$$\tilde{\lambda}_1 = \kappa, \quad \tilde{\lambda}_2 = \kappa^{-1}, \quad \tilde{\lambda}_3 = -\kappa^{-1}, \quad \tilde{\lambda}_4 = -\kappa, \quad (109)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}, \quad 1 > k > 0.$$

Корень $\tilde{\lambda}_j$ лежит на границе области D_j^+ :

$$\tilde{\lambda}_j \in D_j^+ \cap \{\text{Im } \lambda = 0\}.$$

Ограниченность фундаментальных решений в особых точках $\tilde{\lambda}_k$ можно доказать, следуя работе Захарова и Тахтаджяна [26].

Представим коэффициенты, стоящие в правой части уравнения (108), в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda)\omega_0(\lambda) &= -\frac{4k^2}{k'^2} \left[1 - \frac{p_0(\lambda)}{(\lambda - \kappa)q_0(\lambda)} \right], \\ \lambda^{\pm 1}\omega_0(\lambda) &= -\frac{4k^2}{k'^2} \frac{\lambda^{2\pm 1}}{(\lambda - \kappa)q_0(\lambda)}, \end{aligned} \quad (110)$$

где

$$\begin{aligned} p_0(\lambda) &= 2 - 2\lambda^2 \frac{1+k^2}{1-k^2}, \\ q_0(\lambda) &= (\lambda + \kappa) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right). \end{aligned} \quad (111)$$

Вычет в точке $\lambda = \kappa$ дает

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=\kappa} \Lambda(\lambda)\omega_0(\lambda) &= \frac{2k^2}{k'^2} \kappa, \\ \text{Res}_{\lambda=\kappa} \lambda^{\pm 1}\omega_0(\lambda) &= -\frac{k}{2} \kappa^{1\pm 1}. \end{aligned} \quad (112)$$

Таким образом, линейная система (35) имеет набор особых точек

$$\lambda = 0, \pm\infty, \tilde{\lambda}_m, \quad m = 1-4.$$

Связь между потенциалом и фундаментальным решением найдем, устремляя λ к особым точкам. Из уравнения (108) с учетом разложения (110) в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ (либо при $\lambda \rightarrow 0$) находим условие (78). Затем, используя значения (112), в пределе $\lambda \rightarrow \kappa + i0$, получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} V_x & i\frac{k'^2}{4k\kappa} (\kappa^2 \mathcal{E} + \mathcal{F}) \exp(2i\mu_+(\tau)) \\ i\frac{k'^2}{4k\kappa} (\mathcal{E} + \kappa^2 \mathcal{F}) \exp(-2i\mu_+(\tau)) & -V_x \end{array} \right) = \Xi(\kappa)\sigma_3\Xi(\kappa)^{-1} = \\ = \frac{1}{|\Theta_1(\kappa)|^2 + |\Theta_2(\kappa)|^2} \left(\begin{array}{cc} |\Theta_1(\kappa)|^2 - |\Theta_2(\kappa)|^2 & 2\Theta_1(\kappa)\overline{\Theta_2(\kappa)} \\ 2\overline{\Theta_1(\kappa)}\Theta_2(\kappa) & |\Theta_2(\kappa)|^2 - |\Theta_1(\kappa)|^2 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (113)$$

Элементы матрицы Ξ_{ij} связаны условиями симметрии:

$$\Xi_{11} = \Theta_1 = \overline{\Xi_{22}}, \quad \Xi_{21} = \Theta_2 = -\overline{\Xi_{12}}.$$

Если ограничиться рассмотрением только дискретного спектра задачи, то функции $\Theta_{1,2}(\chi, \tau; \kappa)$ принимают вид

$$\Theta_1(\chi, \tau; \kappa) = 1 + 2 \left\{ \sum_k \left[\frac{\lambda_{0k} c_k(\chi) \Psi_{12}^+(\tau, \chi; \lambda_{0k}) \exp(2i\Lambda(\lambda_{0k})\tau)}{\lambda_{0k}^2 - \kappa^2} - \frac{c_k(\chi)}{\lambda_{0k}} \frac{\Psi_{12}^+(\tau, \chi; \lambda_{0k}) \exp(2i\Lambda(\lambda_{0k})\tau)}{1 - \lambda_{0k}^2 \kappa^2} \right] \right\}, \quad (114)$$

$$\Theta_2(\chi, \tau; \kappa) = 2 \left\{ \sum_k \left[\frac{\kappa c_k(\chi) \Psi_{22}^+(\tau, \chi; \lambda_{0k}) \exp(2i\Lambda(\lambda_{0k})\tau)}{\lambda_{0k}^2 - \kappa^2} - \frac{\kappa c_k(\chi) \Psi_{22}^+(\tau, \chi; \lambda_{0k}) \exp(2i\Lambda(\lambda_{0k})\tau)}{1 - \lambda_{0k}^2 \kappa^2} \right] \right\}. \quad (115)$$

Здесь нули $\lambda_{0k} : \{a(\lambda_{0k}) = 0\}$ лежат в фундаментальной области, $\lambda_{0k} \in D_1^+$ и

$$c_k(\chi) = \frac{b(\chi; \lambda_{0k})}{\partial a(\chi; \lambda) / \partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_{0k}}.$$

Выражения для потенциала, получаемые в пределах $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}_k, k = 2, 3, 4$, эквивалентны (113) ввиду свойств симметрии (43)–(45).

4. СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ

Найдем решение, отвечающее одному полюсу ζ_1 , лежащему в фундаментальной области D_1^+ , не учитывая вклад непрерывного спектра. Вычет, взятый в полюсе $\zeta_1 \in D_1^+$ во втором интеграле в правой части (97), совпадает с вычетом, взятым в эквивалентной точке $\zeta_2 = u_{g_2}(\zeta_1)$, лежащей в соответствующей области D_2^+ , во втором интеграле в правой части уравнения (105). Аналогичное утверждение справедливо и для других эквивалентных точек. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением интегралов Коши по контуру Γ_1^+ , т. е. использовать представление симметризованного интеграла Коши в виде (97).

Обозначив

$$\chi_1(\zeta) = \Psi_{12}^+(\chi, \tau; \zeta), \quad \chi_2(\zeta) = \Psi_{22}^+(\chi, \tau; \zeta)$$

и вычислив вычеты в точке $\lambda_{0k} = \zeta_1$ в интеграле в правой части уравнения (94), находим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{\chi_2(\lambda)} \\ -\chi_1(\lambda) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{c_1(\chi) \exp(2i\Lambda(\zeta_1)\tau)}{\zeta_1 - \lambda} \begin{pmatrix} \chi_1(\zeta_1) \\ \chi_2(\zeta_1) \end{pmatrix} + \\ &+ \overline{c_1(\chi) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau)} \left(\frac{1}{\zeta_1 - \lambda^{-1}} - \frac{1}{\zeta_1} \right) \begin{pmatrix} \overline{\chi_1(\zeta_1)} \\ \overline{\chi_2(\zeta_1)} \end{pmatrix} + \\ &+ \sigma_3 \frac{c_1(\chi) \exp(2i\Lambda(\zeta_1)\tau)}{\zeta_1 + \lambda} \begin{pmatrix} \chi_1(\zeta_1) \\ \chi_2(\zeta_1) \end{pmatrix} + \\ &+ \sigma_3 \overline{c_1(\chi) \exp(2i\Lambda(\zeta)\tau)} \left(\frac{1}{\zeta_1 + \lambda^{-1}} - \frac{1}{\zeta_1} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \overline{\chi_1(\zeta_1)} \\ \overline{\chi_2(\zeta_1)} \end{pmatrix}, \quad (116) \end{aligned}$$

где

$$c_1(\chi) = \frac{b(\chi; \zeta_1)}{\partial a(\chi; \zeta) / \partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1}.$$

Для решения системы уравнений (116) достаточно положить $\lambda = \zeta_1$. Альтернативно, можно выбрать $\lambda = -\zeta_1$, или ζ_1^{-1} , или $-\zeta_1^{-1}$. В этих случаях после применения свойств симметрии (43)–(45) получаем эквивалентные системы уравнений.

Рассмотрим вырожденный случай, отвечающий нулю $a(\lambda)$, лежащему на границе области D_1^+ , т. е. $|\zeta_1| = 1$. Обозначим

$$\zeta_1 = \exp(i\beta), \quad \frac{c(\zeta_1, \chi) \exp(4i\Lambda(\zeta_1)\tau)}{\sin 2\beta} = \exp(\eta(\chi, \tau) + i\alpha + i\beta), \quad (117)$$

где

$$\begin{aligned} \eta(\chi, \tau) &= -4 \sin 2\beta (\tau - v^{-1}\chi - \tau_0), \\ v^{-1} &= \frac{a_x a_y [k^2 + k'^2 \sin^2 \beta]}{(a_y - a_x) k^2 + (a_y k'^2 - a_x) \sin^2 \beta}. \end{aligned}$$

Решение системы (116) имеет вид

$$\chi_1(\chi, \tau) = \frac{-2e^\eta \sin \alpha}{1 + 2e^{2\eta} [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)]}, \quad (118)$$

$$\chi_2(\chi, \tau) = \frac{1 - 4e^{2\eta - i\alpha} \sin \alpha \sin 2\beta}{1 + 2e^{2\eta} [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)]}. \quad (119)$$

Находим также

$$\begin{aligned} \Xi_1(\chi, \tau) &= \\ &= 1 - \frac{2ie^{2\eta + i\beta} \sin^2 \alpha \sin 2\beta}{\omega \{1 + 2e^{2\eta} [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)]\}}, \quad (120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_2(\chi, \tau) &= \\ &= \frac{4i\kappa e^\eta \sin \alpha \sin 2\beta}{\omega \{1 + 2e^{2\eta} [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)]\}}, \quad (121) \end{aligned}$$

где

$$\omega = e^{i\beta} - e^{-i\beta} \kappa^2.$$

Обозначим

$$A_1 = 4r [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)]^2 + 4 \sin^2 2\beta \sin^4 \alpha,$$

$$A_{\pm} = 4r [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)] - 4\kappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 2\beta \pm 16\kappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 2\beta,$$

$$r = 1 - 2\kappa^2 \cos 2\beta + \kappa^4,$$

$$D = 1 + 2e^{2\eta} [\cos 2\beta - \cos(2\beta - 2\alpha)].$$

Пусть далее для простоты $\alpha = \pi/2$, тогда корни уравнения

$$|\theta_1|^2 + |\theta_2|^2 = 0$$

имеют вид

$$R_{\pm} = \frac{2r \cos 2\beta - 3\kappa^2 \sin^2 2\beta \pm \sin 2\beta \sqrt{9\kappa^4 \sin^2 2\beta + 12\kappa^2 \cos 2\beta - r}}{2 [4r \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta]}. \quad (122)$$

Окончательно, получаем решения для функций V_z, \mathcal{E} :

$$V_x(\chi, \tau) = \frac{A_1 e^{4\eta} + A_- e^{2\eta} + r}{A_1 e^{4\eta} + A_+ e^{2\eta} + r}, \quad (123)$$

$$\mathcal{E}(\chi, \tau) = \frac{32e^{\eta} k \kappa^3 \sin 2\beta}{k'^2 (\kappa^4 - 1) (A_1 e^{4\eta} + A_+ e^{2\eta} + r)} \times \left\{ [1 + 4e^{2\eta} \cos 2\beta] \left[\kappa \omega e^{-i\Omega(\chi, \tau)} + \kappa^{-1} \bar{\omega} e^{i\Omega(\chi, \tau)} \right] + 4\kappa e^{2\eta} \sin 2\beta \sin(\beta - \Omega(\chi, \tau)) \right\}. \quad (124)$$

Здесь фаза $\Omega(\chi, \tau)$, нелинейно зависящая от переменных, имеет вид

$$\Omega(\chi, \tau) = \frac{32k^2 \kappa^2}{k'^2 \sqrt{9\kappa^4 \sin^2 2\beta + 12\kappa^2 \cos 2\beta - r}} \times \ln \left[\frac{R_+^{-1} - e^{-2\eta(\chi, \tau)}}{R_-^{-1} - e^{-2\eta(\chi, \tau)}} \right]. \quad (125)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приводится решение интегрируемой модели (34), описывающей динамику однонаправленных акустических импульсов без огибающей при анизотропном спин-решеточном взаимодействии. Модификация техники аппарата метода обратной задачи рассеяния применяется для решения модели, описывающей эволюцию акустических импульсов в среде с анизотропными коэффициентами спин-фононной связи. Существование точных решений показывает, что анизотропия такого рода не приводит к потере когерентности и не ведет к затуханию сверхкоротких импульсов без огибающей.

Отметим, что в квазимонохроматическом пределе и при анизотропии спин-фононной связи, отвечающей условиям $a_x \neq a_y, a_y \neq a_z, a_x \neq a_z$, представление Лакса, по крайней мере в виде 2×2 -матриц,

не существует. Это может означать, что в условиях сильной анизотропии спин-решеточного взаимодействия когерентные многосолитонные квазимонохроматические импульсы не существуют, в отличие от импульсов без огибающей. Частные случаи, например, для $a_x = a_y$, приводятся к относительно простым интегрируемым моделям как в квазимонохроматическом пределе, так и для импульсов без огибающей. Заметим, что рассмотренная нами интегрируемая система уравнений (34) формально включает в себя как предельные случаи все известные интегрируемые модели, описывающие динамику оптических импульсов в двухуровневой невырожденной среде (без учета неоднородного уширения) для квазимонохроматических импульсов и для импульсов поля без огибающей.

Система уравнений (34) может применяться для описания эволюции акустических импульсов пикосекундной длительности. Применение таких акустических импульсов представляет практический интерес, в частности, для изучения структур, имеющих размеры порядка нескольких нанометров. В фотонных кристаллах с примесными агрегатами красителей или полимерами возможно формирование акусто-оптических солитонов пикосекундной длительности [27]. При выполнении ряда условий точные солитонные решения без огибающей могут быть использованы для описания локализованных фотон-фононных состояний в таком фотонном кристалле с учетом анизотропии взаимодействия.

Важная особенность применения МОЗР связана со свойствами симметрии систем линейных уравнений. В работе показано, что для выполнения этих свойств потребовалась соответствующая модификация техники МОЗР. Предложенный здесь групповой подход позволяет наиболее эффективно решать задачи с более высокой симметрией соответствующих линейных систем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-02-81020-Bel2004) и программы поддержки научных школ (проект № НШ-7214.2006) Министерства науки и технологий РФ и Президиума РАН. Автор благодарен Е. В. Докторову за полезное обсуждение ряда вопросов, относящихся к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Представление Лакса со спектральным параметром на эллиптической кривой

Система уравнений (34) является условием совместности системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau'} = \frac{1}{\text{sn}^2} \begin{pmatrix} -i \text{cn dn } V_x & \sqrt{a_x a_z} \text{ dn } V_y - i \sqrt{a_x a_y} \text{ cn } V_z \\ -\sqrt{a_x a_z} \text{ dn } V_y - i \sqrt{a_x a_y} \text{ cn } V_z & i \text{cn dn } V_x \end{pmatrix} \Phi, \quad (126)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \chi'} = \frac{-a_x a_y}{a_y - a_x - a_x \text{sn}^2} \begin{pmatrix} -i \text{cn dn } R_x & \sqrt{a_x a_z} \text{ dn } R_y - i \sqrt{a_x a_y} \text{ cn } R_z \\ -\sqrt{a_x a_z} \text{ dn } R_y - i \sqrt{a_x a_y} \text{ cn } R_z & i \text{cn dn } R_x \end{pmatrix} \Phi, \quad (127)$$

где

$$\begin{aligned} \tau' &= M \tilde{\tau}, \quad \chi' = M \tilde{\chi}, \\ M &= \frac{a_y - a_x}{2a_x a_y}, \quad k^2 = \frac{a_y(a_z - a_x)}{a_z(a_y - a_x)}, \\ 0 &< a_x < a_y < a_z. \end{aligned}$$

Здесь k — модуль эллиптических функций Якоби:

$$\text{sn} = \text{sn}(\zeta, k), \quad \text{cn} = \text{cn}(\zeta, k), \quad \text{dn} = \text{dn}(\zeta, k),$$

ζ — спектральный параметр, лежащий в прямоугольнике

$$\mathcal{P} = \{ \zeta : |\text{Re } \zeta| \leq 2\mathcal{K}, |\text{Im } \zeta| \leq 2\mathcal{K}' \},$$

$\mathcal{K}(k)$ — эллиптический интеграл первого рода, $\mathcal{K}'(k) = \mathcal{K}(k')$, $k' = \sqrt{1 - k^2}$; $4\mathcal{K}(k)$ и $4i\mathcal{K}'(k)$ — соответственно действительный и мнимый периоды функций Якоби.

Введем функции

$$E = \sqrt{a_x a_z} V_y - i \frac{\sqrt{a_x a_y}}{k} V_z,$$

$$R = \sqrt{a_x a_z} R_y - i \frac{\sqrt{a_x a_y}}{k} R_z,$$

тогда система (126), (127) принимает вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau'} = \begin{pmatrix} -i w_x V_x & w_+ E + w_- \bar{E} \\ -w_+ \bar{E} - w_- E & i w_x V_x \end{pmatrix} \Phi, \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi'} &= \\ &= w_1 \begin{pmatrix} -i w_x R_x & w_+ R + w_- \bar{R} \\ -w_+ \bar{R} - w_- R & i w_x R_x \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (129)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\text{cn dn}}{\text{sn}^2}, \quad w_{\pm} = \frac{\text{dn} \pm k \text{cn}}{\text{sn}^2}, \\ w_1 &= \frac{-a_x a_y \text{sn}^2}{a_y - a_x - a_x \text{sn}^2}. \end{aligned}$$

Представим эллиптические функции в виде

$$\begin{aligned} \text{cn}(\zeta, k) &= \frac{k'}{2k} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right), \\ \text{dn}(\zeta, k) &= \frac{k'}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \\ \text{sn}(\zeta, k)^2 &= 1 - \frac{k'^2}{4k^2} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right)^2, \end{aligned} \quad (130)$$

введя новый спектральный параметр λ . Пусть

$$\mathcal{E} = 2kE/k', \quad \mathcal{R} = 2kS/k',$$

тогда пара Лакса (126), (127) принимает вид (35), (36).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мaimистов and А. М. Башаров, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1999).
2. А. И. Маймистов, КЭ **30**, 287 (2000).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
4. Н.-Y. Hao and Н. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
5. Н. W. de Wijn, P. A. van Walree, and A. F. M. Arts, Physica B **263-264**, 30 (1999).

6. L. G. Tilstra, A. F. M. Arts, and H. W. de Wijn, *Physica B* **316–317**, 311 (2002).
7. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2269 (1971).
8. С. В. Воронков, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **120**, 269 (2001).
9. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. E* **73**, 056614 (2006).
10. В. А. Голенищев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибулин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, Москва (1997).
11. N. S. Shiren, *Phys. Rev. B* **2**, 2471 (1970).
12. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, *Письма в ЖЭТФ* **20**, 644 (1974).
13. A. A. Zabolotskii, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 8077 (2003).
14. A. A. Zabolotskii, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **185**, 117 (2003).
15. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **67**, 066606 (2003).
16. J. C. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972).
17. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1337 (1973).
18. R. K. Dodd, J. C. Eilbeck and J. D. Gibbon, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London (1982).
19. H. Steudel and A. A. Zabolotskii, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 5047 (2004).
20. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 558 (2002).
21. H. Steudel, A. A. Zabolotskii, and R. Meinel, *Phys. Rev. E* **72**, 056608 (2005).
22. Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматлит, Москва (1974).
23. Дж. Такер, Р. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, Москва (1975).
24. L. Bonsall and R. L. Melcher, *Phys. Rev. B* **14**, 1128 (1976).
25. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, ГИФ-МЛ, Москва (1958).
26. В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, *ТМФ* **38**, 26 (1979).
27. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **129**, 435 (2006).